

## 第二章 文獻探討

本章共分三節，第一節探討國內外數學課程綱要及標準，第二節針對目前國內常用之國民小學數學測驗做一簡單的介紹，而第三節則探討視障學生之數學能力以及影響視障學生數學能力之相關研究。其內容分別說明如下：

### 第一節 國內外國小數學課程綱要及標準之探討

#### 壹、美國數學科課程與評量標準

美國教育計畫之國家評量(National Assessment of Educational Program, NAEP)是針對其國家課程所設計的一系列評量標準，它所統籌的學科包含閱讀(reading)、數學(mathematics)、美國史(U.S.history)、世界歷史(world history)、藝術(arts)、經濟(economics)、外國語文(foreign language)、地理(geography)、科學(science)、公民(civic)與寫作(writing)等科目。而其中數學課程標準是由國家評量統整委員會(National Assessment Governing Board, NAGB)所提出，課程內容的標準包含了「數字敏銳度、概念與操

作(Number sense, properties, and operations)」、「測量(Measurement)」、「幾何與空間之敏銳度(Geometry and spatial sense)」、「資料分析、統計與機率(Data analysis, statistics, and probability)」、「代數與函數(Algebra and functions)」等五大範疇。而學校數學課程與評量標準(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)則是由美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)所擬定。

NAEP 計畫在 2005 年的國家數學評量中，評量四、八、十二等三個年級，而州評量的部份則評量四年級與八年級兩個年級。因此 NAEP 就特別針對這三個年級提出學生在該年段所應達到的成就水準(Achievement Level)，但對各年級 NAEP 則提出該年段的學生所必須達到的精熟程度要求。而 NCTM 則另外對學生的數學能力，分別以學前到二年級(Pre-k - 2)、三到五年級(Grades 3-5)、六到八年級(Grades 6-8)、九到十二年級(Grades 9-12)等四個年段，針對上述 NAEP 所提出的五大範疇，分別提出學生在該階段應該達到的能力標準(standards and expectations)，以下就 NAEP 所提出的數學科內容(Mathematical Content Strands)做簡單的介紹。

NAEP所規定的數學科內容包括五個範疇，內容分別為：

一、數字敏銳度、概念與操作

數字敏銳度、概念與操作(Number sense, properties, and operations)包括學生對數字的理解、運算、估計以及運用。例如：能了解數字和操作運算的關係，以及比率、比例與百分比之間的關係，並且能證實其結果。

## 二、測量

測量(Measurement)包括理解測量的過程與運用，並要求學生要對測量工具與測量單位做一番定義與了解，具有選擇適當單位和工具的能力，能使用測量的概念與測量的工具，並傳達與測量有關的想法。

## 三、幾何與空間之敏銳度

幾何與空間之敏銳度(Geometry and spatial sense)包括幾何形狀的基本認識，以及形狀的轉變和結合，能具備圖形推理與比例圖的認知概念。

## 四、資料分析、統計與機率

資料分析、統計與機率(Data analysis, statistics, and probability)的內容要訓練學生收集、組織、讀取、描述與解釋數據的能力，以及處理訊息方面的技能。學生可以使用統計和統計概念做分析與解釋，並用以解決問題與做決策。

## 五、代數與函數

代數與函數(Algebra and functions)的部份，NAEP希望學生能從基本的圖案延伸到基本的代數的概念，以及對複雜函數的分析。訓練學生使用代數與函數解決數學和真實世界的問題，並利用這種能力做為理解

與解方程式的工具。

綜合上述的五項課程標準，NAEP 所設計的課程是一循序漸進的過程，課程要求學生需達到的數學科能力(Mathematical Abilities)從較低階的概念理解(Conceptual understanding)，到概念運作的過程知識(Procedural knowledge)，最後要求學生達到問題解決的能力(Problem solving)。至於 NAEP 對各年級精熟程度的要求均包含基礎(Basic)階段、精熟(Proficient)階段、與高級(Advanced)階段等三個階段。以 NAEP 對四年級(4th grade)學生數學科精熟程度要求為例，如表 2-1 所示：

從上述可以得知 NAEP 對學生國小數學能力的要求，符合 Piaget 的認知發展理論中的前運作期之後期、具體運作期、形式運作期（張春興，1994）。因為具體運作期的學童只能在具體的事物上進行，例如我們給具體運作期的兒童三支長短不一的竹棒，要他依長短排列，他能做得很好，但如果以符號或語言的方式作同樣的問題，他便無法回答。而形式運作期的學童脫離具體的內容，可以以形式方式(form)操作。例如我們把兩根香蕉和三根香蕉放在一起，知道共用五根香蕉，如果我們僅以數學符號為加法的運作（即  $2+3=5$ ），則是形式操作。具體運作期的侷限就是兒童擺脫不了具體內容，而形式運作的進步在於運作的一切規則可以完全形式化，不必在藉助實體。這種能力通常

在國小五、六年級的學生出現，到國中畢業時，便趨於穩固。而後 Piaget 理論時期則希望學生能有思索問題的能力，且有足夠能力找到問題所在。而這些階段在 NAEP 的評量標準中，分界得並不是非常明顯。這與 Bruner 反對 Piaget 以兒童的生理年齡劃分兒童的認知發展階段的觀念（表演式再現表像期、映射式再現表像期、與象徵式再現表像期）是接近的。以 NAEP 對四年級(4th grade)學生數學科精熟程度要求為例（如表 2-1），此時學童已經脫離具體運思期或表演式再現表像期，而能有基本的理解、運算、與應用的能力。

表 2-1 NAEP對四年級學生數學科精熟程度要求一覽表

---

基礎階段  
(Basic)

四年級的學生在基礎階段應該在五個 NAEP 所規範的內容中表現出數學概念的理解與運作過程的能力，如估計與簡單的計算，並且具備一些解決簡單現實問題的能力。會使用了解電算機、尺規與幾何圖形等。

---

精熟階段  
(Proficient)

四年級的學生在精熟階段應該在五個 NAEP 所規範的內容中表現出結合概念與過程知識與解決問題的能力。學生應該能使用整個數目估計，計算，並且確定是否結果是合理的。能使用了解電算機、尺規和幾何圖形，並能用以發展解決問題的策略。

---

高級階段  
(Advanced)

四年級的學生在高級階段應該在五個 NAEP 所規範的內容中表現出結合概念與過程知識來解決複雜和非例行性的現實問題。使用電算機，尺規和幾何圖形展示控制的能力。預期合乎邏輯的結論並證明預期是正確的，透過解釋來告知解決辦法和它們被取得的方式。在解釋過程中超過明顯並且能清楚而簡明傳達他們的想法。

---

資料來源：<http://nces.ed.gov/nationsreportcard>

## 貳、教育部九年一貫課程數學領域課程綱要

台灣自九十學年度起逐年實施九年一貫課程，雖然其間風風雨雨不斷，但是畢竟是台灣國民教育的基本依據。而其中九年一貫數學學習領域的教學總體目標（教育部，2001a）為：

- 一、培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。
- 二、學習應用問題的解題方法。
- 三、奠定下一階段的數學基礎。
- 四、培養欣賞數學的態度及能力。

九年一貫數學領域將九年國民教育區分為四個階段：第一階段為一至三年級，第二階段為四、五年級，第三階段為六、七年級，第四階段為八、九年級。而國小一至六年級在九年一貫課程指標中橫跨三個階段，各階段之課程指標如附錄四的對照表所示。九年一貫課程數學領域數學課程內容又分為數與量、幾何、代數、統計與機率、連結等五大主題。前四個主題與美國 NAEP 的內容類似（例如 NAEP 課程標準中的數字敏銳度、概念與操作與測量數與量範疇、幾何與空間之敏銳度就是九年一貫課程中的幾何範疇、代數與函數就是九年一貫課程中的代數範疇、資料分析、統計與機率就是九年一貫課程中的統計與機率範疇）。此外，數學內部的連結可貫穿前述四個主題，來強調解題能力的培養；數學外部的連結則強調生活及

其他領域中數學問題的察覺、轉化、解題、溝通、評析諸能力的培養。具備這些能力，一方面增進學生的數學素養，能適切地應用數學，來提高生活品質，另一方面也能加強其數學的思維，有助於個人在生涯中求進一步的發展。不同於 NAEP 的是，九年一貫課程並沒有針對連結的能力指標加以分段，各階段四個主題的能力要與連結的能力相互配合培養，而連結的能力經過各階段後會愈來愈強。其中，國民小學階段的目標為：

- 一、在第一階段（一至三年級）能掌握數、量、形的概念。
- 二、在第二階段（四至五年級）能熟練非負整數的四則與混合計算，培養流暢的數字感。
- 三、在小學畢業前，能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單幾何形體的幾何性質、並理解其面積與體積公式；能報讀簡單統計圖形並理解其概念。

以四年級的九年一貫數學科課程對照指標中的「幾何」主題為例，要求國小四年級的學生必須要達到的能力有下列九點：

- 一、能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。
- 二、能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。



- 三、能認識平面圖形全等的意義。
- 四、能認識角度單位「度」，使用量角器實測角度或畫出指定的角。
- 五、能理解旋轉角的意義。
- 六、能理解平面上直角、垂直與平行的意義。
- 七、能由直角、垂直與平行的概念，認識簡單平面圖形。
- 八、能利用三角板畫出直角與兩平行線段，並用來描繪平面圖形。
- 九、能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。

綜合上述，台灣九年一貫課程數學領域課程指標與美國 NAEP 數學科之評量標準相較，美國 NAEP 因為教材較不受限於審訂版的窠臼，教材由各校自行決定，所以較為開放。而台灣的課程指標較拘泥於形式也較為刻板，採統一標準化而少變化，但是相對的也較有方向可依循（巫啓昌、蔡明昌，1998）。以四年級為例，台灣九年一貫課程數學領域課程指標就比美國 NAEP 數學之評量標準要來得清楚明白。

### **參、國民教育階段視覺障礙類課程綱要**

視障教育課程綱要（2000）是教育部在民國八十九年所編訂，其對視障學生學習數學課程之總目標為：  
一、使視覺障礙學生了解數、量、形的基本知識與原理，以期獲得基本技能，進而能有效地提高在生

活上的實踐能力。

二、訓練視覺障礙學生關於計算的技能，特別要熟練珠算及心算之運用，使其能以珠心算解決簡易日常生活有關數量的問題。

三、養成從數學的觀點，考慮日常事務的興趣與習慣，進而訓練視覺障礙學生的思考能力。

而其分段目標如下所列：

#### 一、第一學年

(一) 養成一百以內各數的數數、認數、計數的能力形成數的概念。

(二) 理解使用加法、減法的情境及加減法間的關係熟練基本計算技能。

(三) 從較具體物的長短、闊狹之活動中，獲得量概念。

(四) 從日常生活起居作息的經驗中，獲得有關日期、時刻的基本知識，以及使用日曆和時鐘的能力。

(五) 從具體事物的觀察、比較、辨別、繪製及操作等活動中，獲得有關圖形、空間的基本概念與知識。

#### 二、第二學年

(一) 認識一千以內各數，增進數的概念及記數法的理解。

(二) 加深理解使用加、減法的情境，並鞏固基本計算的基礎。

(三) 理解使用乘法的情境進而構成九九乘法。

(四) 理解使用長度單位的情境，獲得長度、容量、時間的概念及有關的實測能力。

(五) 認識平面及立體的基本圖形和構成要素，理解使用座標的情境。

(六) 從具體事物的分類、整理中，瞭解簡單統計圖表的讀法與作法。

### 三、第三學年

(一) 認識一萬以內各數以及基本的小數、分數。

(二) 理解使用乘法、除法的情境，乘除法之間的相互關係，進而發展整數加、減、乘、除的計算技能。

(三) 認識長度、重量、時間、容量的常用單位，獲得初步的實測能力。

(四) 擴充平面及立體的基本圖形的認識，瞭解並運用基本圖形的數學用語。

(五) 養成注意兩個數量間的對應關係並考察其隨伴變化情形的能力。

(六) 從整理資料或繪製圖表的活動中，養成明確的分類觀點，及閱讀各種統計圖表的能力。

### 四、第四學年

(一) 認識一萬以上的多位數的種類與形式；理解概數的意義與取法，以及整數、小數的十進結構。

(二) 熟練整數四則的計算技能，養成簡易小數、複名數、分數的基本計算能力。

(三) 增進長度、重量、時間、角度等量之認識及其

實測技能，養成面積、體積、容積的概念及簡易圖形的求積能力。

(四) 理解圖形與圖形間或圖形構成要素間的關係，擴充對平面及立體圖形的認識。

(五) 養成集合的概念，增進從圖、表中考察函數關係的能力，並加深對算式的瞭解。

(六) 發展繪製及讀報統計圖表的能力。

(七) 認識珠算的功用，養成珠算加法、減法及加減混合計算的基本技能。

#### 五、第五學年

(一) 充實整數、小數及分數的概念內涵，加深瞭解整數、小數及分數三者間的相互關係。

(二) 獲得概算的能力，增進小數與分數的計算技能。

(三) 養成速度的概念，增進概測面積及體積的求積能力，瞭解測量結果的處理方法。

(四) 由簡單條件的包函關係或對稱關係的觀點，探討基本圖形的性質，發展繪製與考查基本圖形性質的能力。

(五) 充實集合的概念，發展處理有關數量、圖形之間題的能力。

(六) 瞭解平均、次數總和、百分率等的意義，增進簡易統計知識與技能。

(七) 進珠算加法、減法的基本計算技能，瞭解小數的加、減法及其混合算法，並學得乘數是一位數的乘

法。

## 六、第六學年

(一) 養成統括整數、小數及分數的觀念，獲得負數的初步概念。

(二) 熟練分數與小數的技算技能，養成綜合應用的能力。

(三) 統括理解計量單位的組織及相互關係，增進確實有效的實測技能。

(四) 瞭解縮圖與擴大圖的看法、畫法及功用:獲得投影圖的初步概念，認識簡單柱體、錐體的構成與性質，增進圖形的操作及求積的能力。

(五) 擴充集合的概念內涵，增進探討或解決有關數、量、形及其關係之間題的能力。

(六) 增進統計圖表的設計與運用之能力，獲得概率的初步認識。

(七) 熟練珠算加、減及混合算法的技能，瞭解乘數是二位數的乘法。

與九年一貫數學領域課程標準相較可以發現，視障教育課綱要中，對視障學生能力的要求顯然比一般學生來得低，而各學年的要求指標數也較少，向度也項為狹隘。以第四學年（四年級）的課程綱要為例：九年一貫對學生幾何圖形的能力要求有九項，而視障教育課程綱要中卻只有不到兩項。而九年一貫的課程指標要求學生需要學習億、兆的概念，直式的運算方

法、以及四捨五入的概念，在視障教育課程綱要中確沒有提及，且對於長度、重量、時間、角度、面積與體積的概念，視障教育課程綱要也只要求學生有實測的能力與基本的認識即可。再以第六學年（六年級）的課程綱要為例：九年一貫對學生數與量的能力要求有小數除法直式計算、比與比值概念、比例尺、公因數與公倍數的計算與應用、兩步驟的四則混合運算，而視障教育課程綱要只要求學生要有小數與分數的概念及計算，以及二位數乘法的能力。

#### **肆、對研究者的啓示**

綜合上面對美國 NAEP 的數學科評量標準、教育部九年一貫數學領域課程能力指標以及視障教育課程綱要三者，對研究者的啓示是：

美國特殊教育改革從 1975 年訂定 94-142 公法為特殊學生提供保障外，之後的修法則在提昇身心障礙學生的學習成果並強調讓學生參與普通教育的成就測驗。而英國在 1988 發表全國統一課程，認為身心障礙學生也必須參與國家課程，如不能參與，教師必須提出書面報告(statement)（洪儷瑜，2001）。在英美國家同時重視國家課程與共同參與的同時，我國在民國八十六年特殊教育法公佈之後，又編訂了視障類、聽障類、肢障類與啓智類等各類別特殊學生的課程綱要，且依據法令又延伸出來的「特殊教育課程教材教法實

施辦法」，又鼓勵各縣市組成教材編輯小組，獎勵各學術研究單位及民間團體編印各類特殊教育教材。其實就如同盧台華（2001）與張素貞（2002）所認為的，只要針對九年一貫的能力指標稍做調整，對大多數特殊學生而言，再配合輔助與支持系統，應與普通教育學生相去不遠。且在特殊學生必須參與基本學科能力測驗的趨勢下，大部份的特殊學生應該學習的是普通教育課程而非特殊的課程（鄭靜瑩，2004）。所以視障學生要學習的是所有的課程內容，因此所有的課程標準也應該與普通班學生一致，只是在教材教法上有所不同而已。

## 第二節 國民小學數學測驗介紹

診斷測驗的目的在於分析學習者在某一特殊領域的學習問題及其優缺點，並根據學習者的需要與條件設計適當的教學計畫（吳裕益、王佳文，1997）。而數學測驗的設計，除了可以評量學生在數學課程教學目標項目的精熟程度以外，對於解題歷程也可以提供教師教學時對個別學生起始學習狀況的了解（吳裕益、黃桂君，1996）。基於上述的理由，本研究需要一份能評量國小學生數學能力的測驗，這其中也包括視障學生。下面就目前國內較常用的數學測驗做一簡單的敘述。

### 壹、國民小學數學成就測驗

「國民小學數學成就測驗」是由周台傑（2002）教授所編製，編製此測驗的目的在於鑑定特殊學生，包括身心障礙學生與資賦優異學生，測驗依六個年級分成六份測驗，每一年級測驗的編製過程、使用的題目分析與統計考驗方法均相同。測驗內容依教育部民國84年所編訂的國民小學數學課程標準，參考國小數學課本、習作與教師手冊等資料，並依數學課程的三大領域：數、量、形為主，包括兒童處理數學問題的四個過程：加和減、乘和除、四則混合、推理與問題解決，應用在生活的五種範疇：金錢、測量、時間、統、



圖表與情境推理的概念編製，將測驗內容分成概念類、計算類與應用類三種題項。經專家審查後建立預試題本，每一年級共四份。再分別抽取北、中、南三個區域的學生做預試，一年級的測驗請二年級學生作答、二年級的測驗請三年級學生作答，以此類推。預試後依難度與鑑別度予以刪題，最後將四份測驗編製成一份正式測驗之題本。

國民小學數學成就測驗的難度（P 值）介在 .25 ~ .83 之間，鑑別度（D 值）則介在 .33 ~ .89 之間，難度（.55）與鑑別度（.59）的平均都接近 .50，是一份題目難易度適中，且鑑別度良好的測驗。其二系列相關除了少數較簡單的題目外，其他都與測驗的總分達到顯著關係，二系列相關之平均為 .62，顯示測驗各題的鑑別度與信度良好。致於該測驗的效標關聯效度則以羅桑非語文智力測驗和系列學業性向測驗做為效標，該測驗均與上述兩種測驗達到 .01 的顯著相關。

## 貳、國民小學數學標準參照測驗

國民小學數學標準參照測驗是由洪碧霞、吳裕益（1996）所編製，測驗的目的在於評估台灣國小學生數學成就水準、並協助診斷學習困難與特殊學生篩選之參考。研究以三至六年之國小學生為研究對象，每一年級之試題依課程結構與教材難易，分成三個向度（數的運用、測量與圖形）與六個層次，依向度與層次建立各

個年級之雙向細目表，並搜集國內外之相關試題後，再行編制預試之測驗題目。經國小教師與心理測驗專家修訂後進行預試，每一年級在預試時均有三式測驗（甲、乙、丙），同一年級各式之間，或是跨年級之間均有共同試題。最後以古典測驗理論(Classical Test Theory, CTT)及試題反應理論(Item Respond Theory, IRT)進行試題分析及同時估計，以達成題目參數量尺化的目的。量尺化之後，再依課程結構與教材難易編制基礎版與進階版兩個版本以利診斷及篩選特殊兒童之應用。

國民小學數學標準參照測驗的難度(P值)介在 .393 ~ .741之間，點二系列相關介於 .455 ~ .762之間，二系列相關則介於 .326 ~ .547之間。而內部一致性 Cronbach  $\alpha$ 值則在 .621 ~ .938 之間。

### 參、國民小學低年級數學能力診斷測驗

國民小學低年級數學能力診斷測驗是由秦麗花、吳裕益（1996）所編製，測驗的目的在初步篩選數學學習障礙兒童、診斷數學學障兒童困難所在、作為資源班教學前後測工具，提供教師教學成效評量訊息、以及供三年級教師了解學生起點行為。依據認知心理學的歷程內涵，以教育部八十二年所頒布的新課程標準編製三十六題數學試題，採單選方式。測驗內容涵蓋「數與計算」、「量與實測」、「圖形與空間」、「統計圖表」、「數量關係」及「術語與符號」等觀念，並注

重各領域的內在與外在連結。依試題反應理論（IRT）三參數進行分析，得到題目的難度較低，鑑別力為 .69，平均猜測概率在 .08 以下。對數學學障兒童的區別方面，本測驗的正確區別力約為 72%~73%。

#### **肆、國民小學中低年級數學診斷測驗**

國民小學中低年級數學診斷測驗是由林月仙（1998）所編製，研究設計分為兩部份，第一部份在發展一套診斷中低年級數學學習困難的多元評量工具，做為補救教學的參考依據，全套測驗分紙筆測驗、數學實作測驗與數學態度測驗三項，先以古典測驗理論(CTT)求得題目之答對率、鑑別度、二系列相關、信度等，再以試題反應理論(IRT)估計每一題的難度、訊息函數、題目適合度等，最後再用驗證性因素分析的方式來考驗本測驗之因素結構。測驗大部份的題目偏易，且有不錯的鑑別度。研究的第二部份為測驗的相關研究，考驗本研究在不同版本與性別之間的差異、紙筆測驗、數學實作測驗與數學態度的相關、以及年齡、數學成績及閱讀理解能力與紙筆測驗、數學實作測驗與數學態度的關聯等。

#### **伍、對研究者的啓示**

綜觀國內目前常用之數學測驗中，其目的都是以測驗學生之數學成就以及診斷、篩選有數學學習困難

的學生為主，如數學低成就或是數學學習障礙的學生，因此題目的難度均不高。而林月仙（1998）與秦麗花吳裕益（1996）只針對國小低年級的學生施測，另外兩份測驗則是各個年級分開施測，以本研究的研究對象為六年級的學生而言，只完成六年級的題本並沒有辦法檢測到每一種數學題型，以國小數學成就測驗為例，六年級的題本就缺乏圖表題、時間日期、公因數與公倍數、錐體與柱體的體積計算、容積、重量、與速率等題目。且上述四份測驗所編製的依據多以民國八十二年或八十四年教育部所編訂國民小學數學課程標準，較不符合近年來教育部所公佈施行的九年一貫課程標準，更遑論能力指標的問題。因此，研究者為了要評估了解視障學生的數學能力，找出視障學生在數學方面的錯誤題型，研究者擬放棄上述的四項數學診斷測驗，而另行編製一套國民小學數學測驗，除了傳統的紙筆測驗外，還進一步做深入的觀察與訪談，以了解本研究的研究問題。

### 第三節 視障學生數學能力之相關研究

#### 壹、視障學生的數學能力

數學能力的重要性如同 Silbert、Carnine 和 Stein(1990)所提及的，數學的成就對學生未來學業及職業的發展有相當重要的影響。Ingalls(1978)亦認為數學概念的理解是達成獨立生活目標的重要因素。美國勞工局(U.S. Department of Labor, 1991)也指出：一位成功的工作能力需要工作者利用他們的學術背景來解決問題，而在數學方面，這些學術背景則包括數學計算、解釋圖表和圖形、操作代數公式等能力，因此數學能力的重要性由上可窺知一二。

然而視障學生的數學能力長期以來被刻板的認為是較差的、較不用學習的，而大部份的國內外的研究文獻也有相同的結果。例如：Cahill、Linehan、McCarthy、Bormans 和 Engelen(1996)的研究指出：視覺障礙學生和一般學生相較之下，只有少數的盲生和弱視生有不錯的數學成就。國內視障師訓班（1997）的報告也指出視障學生的數學科表現不如一般的學生，在視覺障礙學生升高中職甄試的數學成績就傳達了視覺障礙學生數學成績有待加強的訊息，且盲生的數學成績有略遜於弱視學生的跡象（視障教育與重建中心，2004）。因為盲生在缺乏視覺回饋的情況下，

學習抽象的數學更是倍感困擾（王亦榮，2004）。如此看來，視障學生的數學能力普遍低落似乎是個不爭的事實。然而在時代的更迭下，許多實際的例子中也不乏數理科優秀的視障者，當然這當中也包括全盲者（陳騰祥譯、張勝成監譯，2004；民視新聞，2005年12月19日）。

根據九年一貫課程國小階段數學學習領域之課程標準，其內容包括：「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」等四個部份，而美國 NAEP 中所規範的數學科評量標準則包括：「數字敏銳度、概念與操作」、「測量」、「幾何與空間之敏銳度」、「資料分析、統計與機率」、「代數與函數」等五個範疇，兩者的內容其實是相近的。

如同第一章所提及的，日本學者佐藤泰正認為視障小學生（尤其是全盲小學生）在計量方面與其他學生沒有差異，然而在其他「數概念」、「計算」、「比率」、「表」與「式」等五個領域與其他學生有顯著的差異（陳英三，1995）。而國內萬明美（2001）則認為數學學習中，運算、概念、符號、與幾何圖形是視障學生學習最困難的地方，其中全盲學生對於形象、數字與文字計算式則較難掌握整體的概念。尤其是先天盲的學生，在皮亞傑物體守恒概念、數量保留、容積保留的發展可能都會較為遲緩。Sims(1967)的研究就指出盲生和明眼學生在學習數學時的差異，發現盲生在數與

量的理解、計算的速度和繪製圖表等方面是比明眼學生差的，但在心算方面則沒有明顯的差別。Cahill 等人(1996)以愛爾蘭和比利時的弱視生與盲生為研究對象進行比較，發現盲生最有問題的數學題型是數學圖形、表格資料、三角幾何；而弱視生最感困難的是則是對數與三角幾何。另外，在圖形認知的部份，杞昭安（1999）的研究中指出：視覺障礙學生在圖形認知能力方面比同年齡的普通班學生約落後三至四個年齡。而研究者的教學經驗則認為，視障學生學習國小數學科可能會遭遇到困難的課程大致上可以簡單的整理為數學概念與計算（包括整數、分數、小數與四則運算與列式）及數學圖表繪製與讀取（包括實測、繪圖、平面、立體圖形與統計相關圖表等）兩大類。

從上述國內外學者研究中所提及的視障學生數學問題，若對照九年一貫課程數學領域課程標準中的四大範疇，學者們認為視障學生的數學問題為數與量（如數與量的理解、數或數字概念、計算或運算、文字計算式、與計算的速度）、幾何（如幾何圖形、數學圖形、三角幾何、與圖形認知）、代數（如符號、式、與對數）和統計與機率（如繪製圖表、表格資料、比率、與表）。綜合各家學者的意見，視障學生的數學表現在每一個範疇都是有問題的，然而問題孰重孰輕就不得而知了。且以實徵性研究深入探就其影響的因素，或是尋求解決改善之道者並不多，這也是本研究欲探求的目

的之一。

## 貳、視障學生數學能力之相關因素

由上述文獻中可以得到一些有關於視障學生學習國小數學課程時可能會有困難的課程或範疇，而造成這些困擾的因素為何？Chapman(1978)認為視覺上的限制、物體的關係、以及形狀的經驗影響視障學生數學的學習。除了視力與經驗，包括由口語獲得的經驗與觸覺獲得的經驗的問題之外，其他與視障學生數學能力有關的因素，其實就如同陳蓓蓉（2003）的研究指出：視障學生的數學科問題與多重因素及交互作用有關，無法歸納出單一因素之關係。因此歸納文獻所探討到的可能原因有「測驗時間的長短」、「教材與輔具的提供與完善」、「教師專業能力與態度的問題」、「教育安置場所」、與「其他」等五點，分別說明如下：

### 一、測驗時間的長短

在身心障礙學生的考試制度方面，根據美國的報告，許多身心障礙學生多被排斥在大規模的考試之外，但是部份的學生仍能以調整(accommodation 85%，包含試題的呈現、作答方式、輔助用具與延長時間)與改變(alternate 15%)評量的方式來參與測驗(Ysseldyke, Algozzine & Thurlow, 2000)。反觀我們國內的考試，除了與美國的 statewide assessment 性質不同（美國考試



在於只要跨越基準線即可，而台灣的區域性測驗則是有成績高低之分）之外，其方式也不盡相同。Linn 認為視障學生有些測驗需依其視障礙程度與狀況做「延長評量的時間」與「題目大範圍修改」的調整（鄒慧英譯，2003）。甚至連美國、加拿大與波多黎各的全國教師會考(National Teacher Examination)也給予視障者可以減少或刪除圖表的要求（萬明美等，1997）。

其中如前所述，視障學生需要學習的是普通教育課程，因此研究者並不贊同「需要大範圍修改」與刪圖表的建議，如此會連帶的影響到學生的心態與教師的教學。而在國內給予特殊學生在參加聯考或基本學力測驗時的策略有：降低錄取標準、延長時間、另闢考場（如腦性麻痺、學習障礙與視聽障學生等）、依招生學校條件不占核定名額、經由鑑輔會安置、以及另外辦理甄試等方式。研究者以為視障學生甄試是可以調整的方式取代的，除了調整試卷的呈現方式與作答方式以外，也可用延長時間與分段測驗的方式來替代，如果在我們的教育過程中提供給予充份的教材教具與相關的教學資源，那麼是否有降低錄取標準的必要？都尚待討論。

這其中在考試時間方面，考試的時間對視障學生而言是否足夠？考試時間不足是否會影響視障學生在數學測驗上的表現？烏山尤子認為視障學生對於數理科的整合與理解方面，「時間」可說是較大的問題。

例如數式的轉換與計算過程、觸讀圖形或片段視覺圖形的組合等，都要在腦海裡處理（陳騰祥譯、張勝成監譯，2004）。在美國，Packer(1989)以大學入學考試的 SAT(Scholastic Assessment Tests)與研究所入學考試 GRE(Graduate Record Examinations)為例，點字與有聲試題的考生可以延長一倍的時間，也有將考試分成兩天的進行的情形；在日本平成二年（1990）的視障學生入大學考試中，也允許使用點字的學生延長 1.5 倍的考試時間（萬明美，1996）；而在國內考試調整策略中的延長時間制度，大家統一延長二十分鐘（林慶仁，2005），其實是不符合特殊教育法中符合個別差異精神。國內萬明美（1996）曾以深入訪談的方式訪談以點字作答的視障者，受訪者認為延長時間需視題目內容而定，一般題目需延長 1.5 倍的時，若遇到計算題較複雜或圖形較多的題目，則需要延長 2 倍以上的時間才算合理。

以研究者參與九十三年度某縣市的國中教師甄試工作而言，有提出延長考試時間的特殊應考者，一律延長二十分鐘，考場中一位下肢肢體障礙者與一位弱視及一位全盲的應考者，下肢肢障應考者其實在一般時間內就已經完成考卷的作答與複查，而弱視應考者在延長二十分鐘的時間內也完成了作答與檢查的工作，但是全盲的應考者在二十分鐘的延長時間中，只能作到完成考卷，而沒有其他的時間給他做檢閱的工

作，因此視障學生考試時間是否應適性而為之，應與個別化教學計畫做結合，配合輔導教師的專業判斷予以調整才是最適切的。

## 二、教材與輔具的提供與完善

視障學生教材與輔具的問題已由來已久。

Marion(1974)針對教師教學視覺障礙學生數學的研究，發現盲生在學習數學的過程中，應用適當的教具可減低學習的困擾。且 Thomas 和 Evely(1997)同樣認為只要提供適當的輔具，視障者的能力就能發揮出來，並指出數學的學習輔助器材，有助於數學的學習。但是 Rapp 和 Rapp(1992)就曾指出盲生數學低成就有可能是提供數學教材和輔具方面有不足所造成的。Bennett(1999)認為雖然有沒有太多的實徵性研究指出視障學生非常需要了解圖表及圖形的知識，但是現在的社會很明顯的沒有提供給視障者適當的(adequate)、調整的(accommodation)管道去接觸到圖表與圖形。且根據國內外的調查，視障學生的教材，即使是立體的圖形，表現在紙上的仍然只有二個向度的平面圖（杞昭安，1996）。而魏新智（2000）在其碩士論文中所研發的視障凸點圖形顯示界面也坦承其界面解析度少且顆粒大，一般而言也只能呈現2D的圖形。這與陳英三譯（1995）認為不論是視障學生或明眼人，都很難利用觸覺認知的方式將立體透視圖形認知成三度空間的

圖形是不是有直接的關係，值得探討。

在王亦榮（2004）的研究中，學生認為數學教材中的圖形線條浮起不明顯、圖小又密集、幾何圖形難以摸讀與想像，無人即時指導不易理解。周桂鈴（2001）也指出視障學生就讀普通校的學習經驗與需求，因為數學、自然、與社會點字課本缺乏可觸摸的圖表，而造成視障學生概念學習的困難，從上述應可看出視障學生之教材與輔具的一些缺失。而前面所提及的立體圖形的部份，目前已有的研究顯示：大部分數學訊息皆以視覺的、二度空間的、非線性的形式呈現，對視覺障礙學生在學習上會有問題。一個視覺障礙學生少了視覺經驗的回饋，就無法依視覺屬性，進行邏輯分類，在空間概念上的學習，也是一大挑戰，缺少空間概念將會造成學習幾何的困難(Cahill, Linehan, McCarthy, Bormans & Engelen, 1996)。盲生的空間組織能力發展極慢，與他們缺乏與實物具體互動的經驗有關，甚至會影響到盲生空間組織的動作探索、觸覺發展與空暨呈現，並非是全盲的因素，而是缺乏互動之故(interaction)(O'Donnel & Livingston, 1991)。

王亦榮（2004）與陳蓓蓉（2003）的研究中，對國中學生學習數學的問題探就，指出數學點字太複雜、記號太多、數學點字記號使用規則不完善，也與數學學習成就有關。而同時 Cahill(1996)等人也發現視覺障礙學生學習數學途徑的困難，大於任何數學概念

或是認知的問題。所謂數學學習途徑指的是表格的製作、記錄與閱讀；而困難是指點字或大字體敘述問題的長度、閱讀每一問題時間、一般的操作計算、及數學課本版面的設計所造成困擾。例如：兩行的行距太近、整數和右上角的次方太接近而不易辨識。盲生對數學解題有數學點字號、立體圖形、圖表複雜、圖表分割引起的困難（陳蓓蓉，2003）。

因此我們可以了解到視障學生在圖形認知方面較落後於一般明眼學生的可能因素，除了視力之外，觸讀的界面與經驗可能是造成此一現象的最大原因。雖然說強化刺激，視障學生的圖形認知能力依然可以隨年之增加而獲得良好的發展。但如果早期的圖形認知發展處於較不利的處境，對其能力多少會有影響（杞昭安，1996）。

國內周掌宇（2000）認為視覺圖像經過口述解說，可明白數學圖表，強調以其他管道取代視覺經驗，因此盲生學數學，關鍵因素是語言。而國內近幾年的口述影像技術也因為視障者的需求而研發，且有日益精進的趨勢（王冠斐，1998）。另外經驗主義者強調由觸覺來認識視覺經驗。如此說來，不論是透過何種管道取代視覺做學習，並沒否定盲生不能學數學，因此視障學生是可以學習數學的，但是為何視障學生的數學成就會落後？就經驗主義的觀點，盲生在「視覺上」的限制，可能是其中原因之一。所以經驗主義者認為

數學的學習需要觸覺經驗的協助。如果盲生在學數學的過程中，能將視覺圖像轉成可以觸覺認知的模型，就可解決數學學習的困難。Barraga 和 Erin(1992)認為視障教育所需要支援的內容中，圖形的點譯就是其中一項。

因此，不論是口述或是觸讀，其實這與 Tindal 和 Fuchs(1999)所提到的：如果學校有意識而且積極主動在改革和改進活動過程中考慮到特殊學生的需要，那麼這些特殊學生表現成果就代表國家教育的績效。這樣的觀點其實與台灣特殊教育法中規定必須提供給特殊學生適切的教材教具的基本精神是一樣的。

### 三、教師專業能力與態度的問題

盲生學習數學有問題時，應該要適時的得到協助，疑難問題得到適當的處理，期望提升學習的動機。視障生是可以學數學的，只是教數學時需要一些策略和技巧(Werner, 1998)。而提供協助的最佳人選不外乎是學生的教師和家長，但是長久以來教師與家長否定盲生學數學的態度、加上數學教學輔具準備不足、無法適時的提供協助與疑惑解答。因此視障學生數學學習有困擾，教師也是因素之一（王亦榮，2004）。且更有研究指出視障學生的數學科教學媒介是很差的(low level)，其主要的因素有二：一是學生的教師不具備數學科所需的知識與技能，二則是教師沒有接受過

聶美茲數學(Nemeth code)的訓練(Kapperman, Heinze, Strickens, 1997)。如果因為教師的能力與態度問題，而導致視障學生數學成就的低落，那麼就必須回到最基本的師資培育來做探討了。

#### 四、教育安置場所

吳正譯(1984)引用 Vanderkokk 的智力測驗報告認為影響盲人智力測驗之因素有視力、教育安置、教育年齡、社經地位等變項。這與杞昭安(1999)針對國內視障學生所做的測驗得到的影響因素有視力、智力與安置環境三種，結果是一樣的。而 Simpkins 以四到七歲的兒童為研究對象，結果指出：影響圖形辨識的原因與學校經驗、視力有關，與性別無關(陳蓓蓉，2003)。從上述的研究可以得知，視障學生除了視力與智力的因素以外，學校經驗或安置的場所都扮演了重要的角色。

#### 五、其他

除了上述的影響因素外，數學能力又視其實際的能力與經驗而有所不同，如閱讀理解的問題、先備知識的問題、學習動機的問題、練習時間多少、點字符號的熟練度等。邵光華(2001)認為數學能力是以國文閱讀能力為基礎的內在綜合閱讀能力。張筱珊(2003)的研究發現國小學童在演繹邏輯推理的表現

與數學科和自然科的成績都達到顯著的相關。陳蓓蓉（2003）引述 Heller、Kainthola 與 Singh 的研究指出觸摸的表現會受注意力與記憶影響。

綜合上述，我們可以初步的得知影響視障學生數學能力的原因除了視力、經驗、測驗時間的長短、教材與輔具的提供、教師專業能力及態度、與教育安置場所之外，可能的影響因素還有學生的閱讀能力、演繹邏輯推理能力、注意力、記憶力、以及題目本身與版面呈現的問題。

### 參、視障學生數學科教學

數學科與理科（自然科）都是屬於偏重視覺性 (visual) 的學科，因而被認為對視障學生而言是最困難學習的科目。然而，就數學的特性而說，數學是論理的、抽象的思考，對有無視覺或是視覺有缺損的人而言，其實並不是視力本質的問題。視障學生學習數學問題在於小學、國中，乃至高中等階段的數學科教學，都是以視覺為中心而進行。因此，要對視覺障礙者實施算數、數學的指導，實有設計與明眼者所不同的指導方法之必要。

近年來因為希望特教課程與普通課程盡可能融合，而有所謂「全方位課程」之議，也就是於普通教育課程中作調整（盧台華，2003）。邱上真（2003）認為全方位課程之課程設計時應考慮三種系統：首先是「辨



識系統」，該系統提供學習者彈性多元的辨識管道，透過各種感覺接收系統呈現文字、圖表、照片、聲音、影像、動畫等，使學習者辨識能力充分發揮；其次是「策略系統」，也就是透過示範、支持性練習、回饋及允許多元反應以及替代方式，讓有困難者也能達成學習目標；最後是「情意系統」也就是課程設計應考慮吸引學習者的注意力、幫助學習者選擇、尊重學習者的偏好、讓學習者能控制自己的學習進程、材料與方式，並提供及時回饋以增強反應。

因此Fridriksson 和 Stewart 指出數學概念的教學步驟應由具體操作、半抽象與連結、到象徵或抽象層次的概念。因此建議身心障礙學生的數學科教學應多提供實際的操作與演練。也就是把握具體、具象、到抽象(concrete、representational、abstract, CRA)的原則，就是教導學習有困難的學生數學科最好的方法(盧台華，1995)。而教導視覺障礙學生數學科時也是一樣。鳥山由子(2004)就對視覺障礙學生進行算數、數學的指導時，提出下列三項應加注意的事項：語言的表達、心象的形成與技術(如計算能力、圖表的製作、圖的觸察等數學演練的必要技術)。以上三項，應配合內容的理解，就能促進視覺障礙學生的數學理解能力。此外，在技術或動作的指導時也要經常以語言予以回饋(feedback)。另外 Lowenfeld 以為視障學生教育需求的三個教學原理有：具體化(concreteness)、統整

化(unifying experience)與做中學(learning by doing)  
(陳蓓蓉, 2003)。國內王亦榮(2004)提出增進盲童  
空間組織能力的方法有：隨時增益數學能力，以爲日  
後學習基礎、應用替代役資源，協助數學學習、訓練  
盲生圖形探索能力等。因此，對視障學生的教學除了  
可應用各項學習媒介(如教材、教具與輔具等)之外，  
視覺以外的學習管道(如口語、觸覺與指導者)以及  
教學的技巧、方法也是影響視障學生學習表現的重要  
原因。

#### **肆、對研究者的啓示**

對本研究而言，在研究者希望能了解視障學生的  
數學能力、找出視障學生的錯誤題型，並從中尋求其  
影響的因素與解決問題的方法。因此在題本的設計必  
須含括各個主題，且針對計算、幾何圖形與統計圖表  
的部份，在設計測驗之雙向細目表時，應可加重其比  
例。重要的是試題的呈現方式或可以口述、或可以文  
字說明，或是以實物立體圖形呈現，使教材影響視障  
學生數學能力的因素降到最低。而在測驗時間方面則  
不設限視障學生的作答時間，希望能找出對視障學生  
合理的延長時間標準。再者對訪談題綱的設計上也可  
以將測驗無法看到的問題，如教材教具、教師、輔具  
的使用、以及教師的教學技巧、學生的學習策略等，  
納入做爲訪談題綱的內容。