# 貝氏定理的應用

陳昱成
高雄市立中山高級中學

## 壹、前言

雖然高級中學數學科的 95 課綱(95 年度實施，98 年開始測驗)將條件機率放在選修(I)，意味著學測並沒有測驗到此一部分，當然在條件機率的重要議題「貝氏定理」(Bayes' theorem)一樣被割捨。但是在指考數學裡，無論數學甲與數學乙，有關貝氏定理的相關問題，都被列入命題的範圍。根據大學入學考試中心的說明「為協助大學校系選才，在考科測驗內容上，須考量校系在選才時所需之數學知識，並針對這些知識進行較具深度的評量，其中數學乙的試題計算量偏少，整合性試題在比例上也較少，數學甲較多整合數個概念的問題，計算量也較多。由本中心所發問卷結果顯示：選擇數學甲為考科的校系主要希望學生具備函數、方程式、機率、微積分、矩陣、幾何等數學知識；選擇數學乙為考科的校系則希望學生具備函數、方程式、機率、統計、排列組合等數學知識。(註一)」也就是說無論自然組與社會組，在未來的大學課程，具備貝氏定理的基本知識，有助於其發展，顯示大學的授課教師，認定貝氏定理的重要性。所以到了新課綱即 99 課綱，就將貝氏定理放到第二冊，做為學測的命題範圍，當然指考還是將此一範圍持續列為測驗的標的。實際上，在 95 暫綱更早之前的課綱，條件機率與貝氏定理的運用，早就是學測的命題內容，如 89 學年度的填充第 I 題(註二)，顯示出早就認定，此一定理的理解，被視為高中生學習高中數學後，所應該具備的基本能力。雖然教科書已提及不少貝氏定理的相關例題，但對剛從國中升上高一的學生而言，可能尚無法從中體會到貝氏定理何以重要到無論自然組與社會組都必須具備該項知識。關於這點，三角函數就是一個很好的對照，在指考的分類下，為社會組選材的數學乙就不考，但自然組就必須列為命題範圍，因為工程數學無法在沒有三角函數的協助下，順利運作，學生皆能接受此一命題方向。基於此，本文提供貝氏定理應用的一些實例，內容涵蓋自然組與社會組的領域，讓初次接觸此定理的學生有多於教科書的實例參考，進而體會貝氏定理應用的廣泛，做為學測、指考的命題範圍，當之無愧。

本文餘下部分，分成第貳節簡介貝氏定理，第參節為貝氏定理應用的說明，分別介紹貝氏定理在搜尋理論與賽局理論的作用，而此兩理論分別隸屬理工科與社會學科兩個不同的領域。第肆節則敘述容易

誤用的推論，兼論一個網路現象，而其背後可以用貝氏定理加以闡述，能做為教師教授此課程的觀念補充。最後，則為本文的結論。

## 貳、貝氏定理的基本架構

利用條件機率的概念，可以導出此一重要的定理。首先，先了解條件機率的定義。設 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，稱為事件 **B** 發生的情況下，事件 A 發生的機率，此為一**條件機率**(conditional probability)。舉例來說明與一般機率的差別，假設某高中三年一班共有 30 名學生，小明為其中一員，座號為 3 號，今天老師要抽籤請一位同學上台報告學習心得，若 A 表示小明會被抽中的事件，在沒有任何訊息下，小明會被抽中的機率為 $P(A)=\dfrac{1}{30}$。如果老師先透露抽中的號碼為奇數，則小明會被抽中的機率是否仍然會是 $\dfrac{1}{30}$?即使沒有學過機率，座號是偶數的學生，一般會很高興，因為台灣的學生都不太喜歡被老師叫到，偶數號的學生逃過一劫。但對小明奇數號的同學，這是壞的消息，因為奇數號的學生只有 15 位，小明是其中的一位，因此在聽到老師的訊息(抽到奇數號)，以事件 B 來表示，則小明會被抽到的機率就從 $\dfrac{1}{30}$ 變成 $\dfrac{1}{15}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$，其中 n(B)表示事件 B 所對應的樣本個數，本例為抽到奇數的事件，共有 15 個；而 $n(A\cap B)$ 為既是 3 號又是奇數號碼事件的樣本個數，就 3 號一個，所以記為 1，於是 $P(A|B)=\dfrac{1}{15}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$。而根據拉普拉斯(Laplace,1749~1827))古典機率的定義，將 $\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$ 分子分母同除樣本空間的樣本數，通常以 n(S)表示，可得 $P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 即為之前所給之定義，一般與 P(A)是有差異的。也就是說，事件 A 的條件機率，雖然也是衡量事件 A 發生的機率，但卻是在事件 B 發生的情況，其機率可視為 $(A\cap B)$ 在事件 B 所佔的比例，以圖 1 表示，可以看出 P(A|B) 與 P(A)之差別。

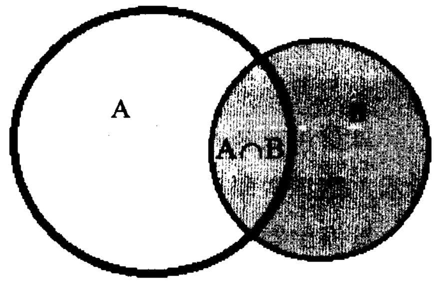



圖 1、 可看出條件機率為 $(A\cap B)$ 在 B 中所佔的比例，與 P(A)是有差異的。

接受 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 的概念後，接著可以引申出貝氏定理了。A與其補集合 $A'$ 為樣本空間S的一組分割(partition)，即兩者的聯集為S，交集為空集合，圖2可看出 $A\cup A'=S$，$A\cap A'=\phi$。另外由分割的概

念，可以看出集合 $B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$，如圖3所示。

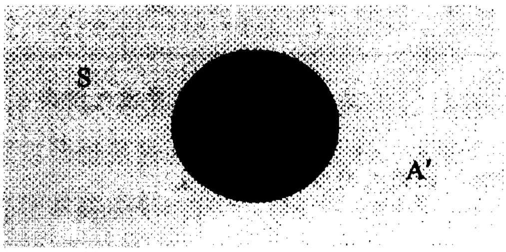



圖 2、 $S=A\cup A'$

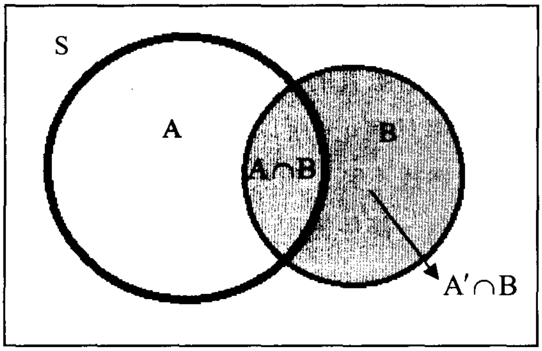



圖 3、 $B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$

於是，

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A'\cap B)}$$

$$=\frac{P(A)\cdot P(A\cap B)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')}$$

，事件 B 發生的情況下，事件 A 發生的條件機率即可表示如上，此即貝氏定理。

而更一般化的表示為：假設 $\{A_1,A_2,A_3,....,A_n\}$ 為樣本空間 S 的一組分割，B 為 S 的任一事件。若 $P(B)>0$，$P(A_i)>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$，則在事件 B 發生的情況下，事件 $A_k$ 發生的機率為

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k\cap B)}{P(B)}=$$

$$\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$$

$$=\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B|A_i)}\quad,\ 1\le k\le n\text{，}$$

圖 4 可以看出 B 被分割的情形。

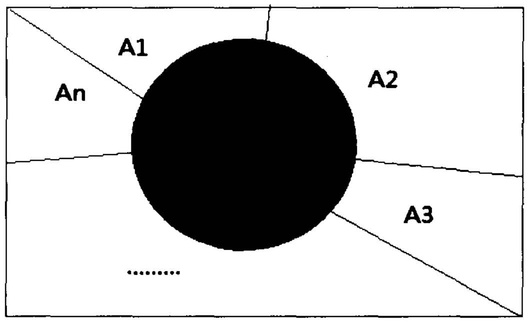


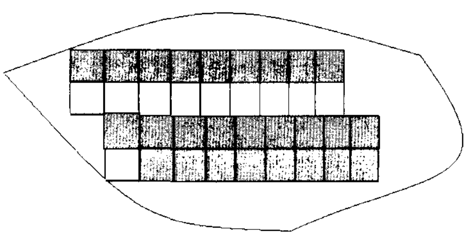

圖 4、 $B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\ldots\cup(A_n\cap B)$

## 參、貝氏定理的應用

### 一、找尋失落的飛彈--貝氏搜尋理論(Bayesian search theory)

1968 年美國海軍的核子動力潛艇天蠍號( USS Scorpion)在西班牙與葡萄牙西邊的大西洋海域失蹤，連艦上的 99 名官兵全無訊息。這對海軍當然是極大的震撼，於是進行大規模的搜索，希望能釐清失事原因，給社會一個交代。但不是有一句成語形容事情非常困難，稱做如「大海撈針」，天蠍號雖非一針所能比擬，但對茫茫滄海，仍如一粟，實在渺小，打撈談何容易。而且困難之處，還加上是「失蹤」，表示為何失事、何處失事，及失事當時航

行的一些資料如:速度快慢、方向，都未知。雖事後調查知道罪魁禍首是一枚分不清敵我的魚雷，毀了自己的船隻，但就算是知道在哪裡爆炸，也難以確認殘骸會被海水沖到何處「休息」。這中間牽涉到的專業知識，就包括了打撈、海流、潛艇甚至是魚雷爆破等專業，各個專業對潛艇會落於何處，有不同的認知與看法，當然海軍人員憑自己的經驗也有自己的堅持。剛開始，擁有資源的海軍，並不理會專家的意見，估計是在爆點的東側海底，但幾個月的搜尋都無功而返，最後不得不就教於專家。而統整這些專家的是「貝氏搜尋理論」專家約翰.克萊分(John Craven, 1924~)，他根據各類專家的意見，確認出潛艇最可能掉落在某半徑 20 英里的海域，而此海域被細分成許多的小方格，每個方格有兩個重要的機率值，分別為 p 與 q，其中 p 表示潛艇落於此一方格的機率，此稱為先驗機率(prior probability)，為未加入新資訊更新前的主觀機率，而若潛艇落於此方格會被找尋到的機率為 q，根據專家意見，此一 q 值為海水深度的函數，亦即深度越深，被尋獲的機率越小，圖 5 呈現將海域分成許多小方格，每小格有不同的 p，q 值。



機率參數 p,q

圖 5、在每個方格皆有根據專家意見整合出的不同 p, q 值。

如圖 5，假設在所有的方格裡，黃色的方格是擁有最大 p 值的方格，則先搜尋此方格，可以有圖 6 的樹形圖。

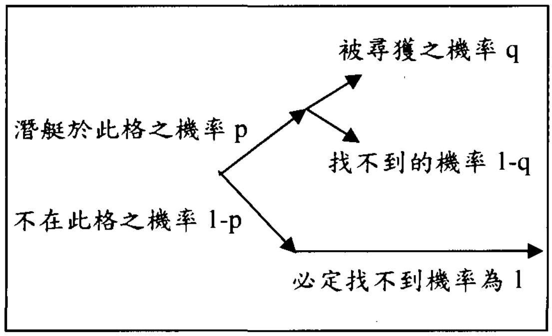



圖 6、於黃色方格搜尋的機率樹形圖

即使潛艇真的落在黃色方格，但能找到的機率只有q，所以當於黃色方格搜尋後，雖然找不到，但失落物仍存於此方格的機率為一條件機率，機率值為：

$$\begin{aligned}&P(\text{潛艇落於方格}\mid\text{此方格找不到潛艇})\\&=\frac{P(\text{潛艇落於方格}\cap\text{此方格找不到潛艇})}{P(\text{此方格找不到潛艇})}\\&=\frac{p(1-q)}{p(1-q)+(1-p)}=\frac{p(1-q)}{1-pq}=p\times\frac{1-q}{1-pq}<p\end{aligned}$$

，比原先認定的p還要小。

對其他的方格而言，在未搜尋前，若潛艇落於其他方格的先驗機率為1-p，則當黃色的方格搜尋未果的情況下，潛艇落於其他方格的機率應該會提升，至於提升為何?可以考慮，在黃色方格找不到的條件下，潛艇落在其他方格的機率應該會調整：

$$\begin{aligned}&P(\text{潛艇落於其他方格}\mid\text{此方格找不到潛艇})\\&=\frac{P(\text{潛艇落於其他方格}\cap\text{此方格找不到潛艇})}{P(\text{此方格找不到潛艇})}\\&=\frac{1-p}{p(1-q)+(1-p)}=\frac{1-p}{1-pq}>1-p\end{aligned}$$

，機率由原先的

$1-p$增為 $\frac{1-p}{1-pq}$，亦即變為原本的 $\frac{1-p}{1-pq}$ ／ $(1-p)=\frac{1}{1-pq}$ 倍。(註三)

所以若其他方格中的某一方格原先認定潛艇落於此格的先驗機率為r，則經過搜尋黃色方格，但卻搜尋未果的情況下，先驗機率為r的方格，調整後的機率為 $r\times\frac{1}{1-pq}$，比原先的r還要大。

也就是說，當黃色方格搜尋未獲後，其他方格的機率會變動，接著就尋找機率最高的方格，依此原則，直到尋獲為止。海軍聽從約翰.克萊分的建議，按照機率圖，潛艇應該落在爆炸點的西側，經過幾次的搜索，潛艇在爆炸點的西南方海底被找到。

這裡要強調，搜尋的順序不一定是依原先設定的先驗機率大小。黃色方格找不到潛艇的條件下，其他每一方格落至方格的機率都會增加 $\frac{1}{1-pq}$，但不一定就按照下一個先驗機率較大的方格搜索，因為原先黃色方格搜尋後找不到潛艇，潛艇仍有可能落於此方格，只是機率由p變成 $\frac{p(1-q)}{1-pq}$，如果其他方格的先驗機率小於此一機率，當然要再先搜黃色方格一次，若有方格先驗機率大於此機率，就先搜先驗機率較大的方格。若下一格仍未尋獲，則又有一新的更新機率，再全部方格的機率來比較，當然包括最先的黃色方格，如此一來搜尋的順序，不一定會依照原先的先驗機率來走，也顯示貝氏定理的特性，一有新的資訊，就會更新。

從上述的敘述，可以發現，貝式定理是根據先驗的機率再加上事後的資訊來更新認知。例如搜尋潛艇的故事裡，未搜尋前，專家根據專業知識，整理出一張機率圖，此即為先驗的機率。經過搜尋後，若搜尋未果，這是一種資訊，將之加入重新更新，得到新的機率，再搜尋就再調整，最後會愈接近真實的情況，顯現出貝氏定理的威力。

## 二、商學上的應用--賽局理論(Game theory)

俗稱商場如戰場，而孫子兵法有言「知己知彼，百戰不殆」，但你會這麼想，對方也會這麼想，因此當我們想了解對方的底細時，對方會盡量掩蓋一些事實，反之亦然。所以在財經、管理學界常必須研習一種專門討論兩者互相猜測對方虛實，而下決策的理論，稱為「賽局理論」(game theory)。

最基本的賽局是兩方參賽者，依據雙方行動順序可分成「靜態」(static)與「動態」(dynamic)兩種:靜態賽局表示參與者同時行動或先後行動但不知道前者採取何種行動；而動態賽局則為參與者有先後順序而且可以觀察到先行動者的行動。另外依據對對方資訊的了解可分成有完全認知的「完全資訊」(complete information)，否則即為「不完全資訊」(imcomplete information)。利用行動順序與資訊的掌握這兩點，賽局就可分成四種基本類型，如表 1 所示。

表 1、賽局的主要分類

| 資訊 \ 行動順序 | 靜態 | 動態 |
|---|---|---|
| 完全資訊 | 靜態完全資訊 | 動態完全資訊 |
| 不完全資訊 | 靜態不完全資訊 | 動態不完全資訊 |

表格來源：依據張維迎分類，作者整理。

賽局理論原是數學的一門，後被引入經濟學做為分析的工具，對研究爾虞我詐的競爭行為幫助非常的大，結果幾乎讓人忘了賽局理論發源於數學，並且產生獲諾貝爾「經濟學」獎的數學家，而最為人熟悉的是電影「美麗境界」(A Beautiful Mind)的納許(John Nash, 1928~ )。不過，即使知道賽局理論源自數學，對初次接觸者，可能無法想像賽局理論跟貝式定理的關連，底下試為分析。

從表 1 的資訊分類來看，不完全資訊表示對敵方的資訊並不完全了解，如果是動態不完全資訊的賽局，則可以觀察到對方的行動，當對方行動時，會透露出一些蛛絲馬跡，我們即可利用這些訊息，利用貝式定理來更新對敵方的認知，進而釐定出策略，而取得優勢。

例如，假設最單純的情況，僅有甲、乙兩家競爭的廠商，共同參與某項投標活動，規定以價格最低者得標。把價格壓低，得標機會大增，但獲利縮水；然而投標金額提高，雖然得標後利潤會增加，但可能根本無法接到案子。接下來，就有很多的故事可以說，如果兩家廠商聯合，共同圍標，這除了是經濟學上聯合壟斷的研究議題外，還牽涉到違法的法律問題。而如果是合法的光明正大競爭，以甲廠商的觀點來看，若能知道對方(乙)廠商的生產能力類型，就能增加一分勝算。何以言之?如果乙廠商在競標產品的生產線是有效率的，其生產成本會比較低，因此可以以較低的價格競標，對甲廠商而言，其競標價格就不得不壓低。另外，如果乙的生產效率不佳，就不太可能以太低的價格競標，甲可以以較高的價格來取得標案，增加得標後的利潤。但一般而言，生產線的相關資訊，是公司廠商的商業機密，外人是無法獲得的，更何況是敵對廠商。

現在假設，廠商就只有兩種類型，分別為高效率與低效率兩種，甲廠商根據經驗判斷乙為高效率廠商的機率為 $p$，則有 $1-p$ 的機率為低效率廠商，此即為先驗機率。而對類似的競標案，根據過去的經驗，高效率廠商會競標的機率為 $q$，低效率廠商為 $r$，其中$(q>r>0)$，其相關樹形圖以圖 7 表示。

在確知乙參加競標案的條件下，乙會是高效率廠商的機率，利用貝氏定理為

$$P(\text{乙為高效率廠商} \mid \text{乙參加競標}) = \frac{P(\text{乙參加競標} \cap \text{乙為高效率廠商})}{P(\text{乙參加競標})}$$

$=\dfrac{pq}{pq+(1-p)r}>\dfrac{pq}{pq+(1-p)q}=p$，經更新後，機率值大於原先的認知 p，而此

$P(\text{乙為高效率廠商}|\text{乙參加競標})=\dfrac{pq}{pq+(1-p)r}$

稱為後驗機率(posterior probability)，為利用資訊後調整的機率。

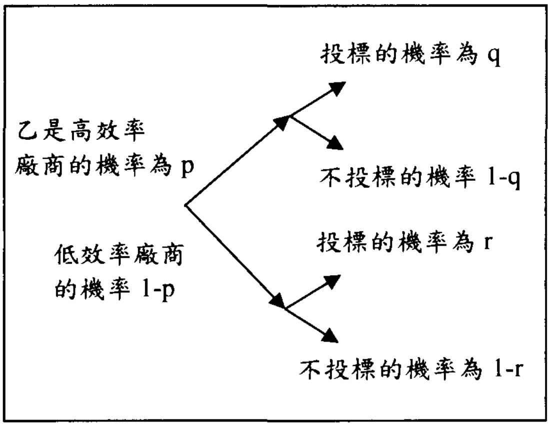



圖 7、乙廠商相關的機率樹形圖

得到後驗機率後，甲可以根據此值來擬定投標的金額，增加勝算。當然這是簡化的假設，實際的運作不會這麼單純，而這個例題在假設上，設定了(q>r>0)的條件，已經隱含了參與投標的行動，透露了效率廠商的資訊，此與直覺相符。如果高、低效率廠商參與投標案的機率均為q，則觀察到廠商投標的行動，並不會使其後驗機率 ($P(\text{乙為高效率廠商}|\text{乙參加競標})=\dfrac{pq}{pq+(1-p)q}=p$)變動，也就是要q，r值相異，投標行動才會是一個有效的資訊。

在賽局的決策過程中，除了利用貝氏定理更新認知外，還要考慮到本身的報酬函數(payoff function)，配合機率的運算，可以求得報酬的期望值(expected value)，有利策略的決斷，但這已非本文所探討的範圍，未來想要攻讀財經領域的學生，會有機會進一步探討此一相關內容。

由海底打撈的潛艇搜尋，到商業上的競爭討論，貝氏定裡都可以派上用場，而其最主要的概念，可以利用底下的一行字來表示：

**先驗機率+新獲得的資訊**

**=更新的後驗機率**

而此概念的運用，並不會限於是社會學科或自然學科，因此列入高中數學的共同必修內容，經由本文的介紹，應該能讓學生坦然接受了吧!

焦述銘(2011)就利用貝氏定理的概念，寫了一篇「理工男是怎樣判斷漂亮女孩是不是單身的？」的科普文章，描述理工科宅男如何利用獲得的資訊，來判斷想要追求的女孩是否為單身，內容有趣，奪得科普競賽三獎，想進一步知道全文者，可參閱參考資料 4。只是，就如作者所言，如果只將貝氏定理運用來追求女孩，還是有點大材小用。

## 肆、應用貝氏定理的注意事項

貝氏定理運用廣泛，但有幾點在使用上，必須注意，以免解讀錯誤，造成推論不正確。以98課綱龍騰版高中數學第二冊的課本範例為例：

*某工廠有甲、乙、丙三機器，*

*其產量分別占總產量的1/3, 1/2, 1/6。依過去經驗知甲機器產品中的6%，乙機器產品中的4%，丙機器產品的3%為不良品，今任選一產品。(1)求選出的產品為不良品的機率。(2)已知該產品為不良品，求此產品為甲機器所製造的機率。*

由題目可知，乙機器的產量最多，而甲機器的產品品質最差，不良率為6%。假設事件B表示任選一產品，其為不良品的事件，而$A_1$，$A_2$，$A_3$分別表產品來自甲、乙、丙三機器的事件，則根據分割的概念，事件B可以表示為 $(A_1 \cap B)\cup(A_2 \cap B)\cup(A_3 \cap B)$ ，因此 $P(B)=P(A_1 \cap B)+P(A_2 \cap B)+P(A_3 \cap B)=1/3\times6\%+1/2\times4\%+1/6\times3\%=4.5\%$，亦即任選一產品，其為不良品的機率為4.5%。

而第二小題，則顯然為貝氏定理的應用，已知該產品為不良品，其產品來自甲機器的機率為 $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}=$

$\dfrac{1/3\times6\%}{1/3\times6\%+1/2\times4\%+1/6\times3\%}=\dfrac{2\%}{4.5\%}=\dfrac{4}{9}$。

同理，可以求得該產品為不良品，其產品來自乙機器的機率為$P(A_2|B)=\dfrac{4}{9}$，而來自丙機器的機率為$P(A_3|B)=\dfrac{1}{9}$。也就是說，第二小題問題的答案為$\dfrac{4}{9}$，而且根據計算，知道如果產品為不良品，其來自甲、乙、丙三機器的機率分別為$\dfrac{4}{9}$、$\dfrac{4}{9}$、$\dfrac{1}{9}$。產品來自甲、乙的機率相等，這時要注意到不能依此機率推論說，甲、乙兩機器的生產品質相當，在原先的題目就已先言明，兩機器的不良率分別6%以及4%，顯然乙機器的生產品質是比甲要來的好，而會造成不良品來自甲乙兩者機率相當的現象，主要是乙機器的生產量比甲機器多，而不良品的數量為產品量乘以不良率，因此會有甲乙兩機器所製造出的不良品數目相同的事實，但千萬不能就此推論兩機器的生產品品質相當的論點。另外可以看到若是不良品，來自丙的機率僅有1/9，遠小於來自乙(其機率為4/9)，感覺丙的生產品質遠優於乙，但實際上為(3%對4%)，相去不甚遠，而會有此現象，還是因為丙產量占總數最少，產生的不良品數目最少所致，在使用貝氏定理時，不可犯此錯誤的推論。

還有貝氏定理常運用於醫學檢定上。以下為南一版高中數學第二冊的課本例題:

*醫學上常利用心電圖篩檢心臟疾病，根據統計，有90%的心肌梗塞病患可以由心電圖篩檢出來(即有10%的心肌梗塞病患未被查出)，但也有5%健康者的心電圖會被誤判為有心肌梗塞。如果已知某城市有0.2%的市民患有心肌梗塞的疾病，請問若某人的心電圖檢查結果被判定患有心肌梗塞，則他真正患有心肌梗塞的機率為多少?*

若A表示此城市患有心肌梗塞的人的事件，B表示心電圖檢查有心肌梗塞的人

事件，則此例題在問此一條件機率 $P(A|B)$，而根據貝氏定理可得其值約為:

$$
\begin{aligned}
&P(A|B)\\
&=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A'\cap B)}\\
&=\frac{0.002\times 0.9}{0.002\times 0.9+0.998\times 0.05}\\
&=\frac{0.0018}{0.0018+0.0499}\approx 0.0348
\end{aligned}
$$

這是令人訝異的數字，心電圖檢查結果被判定患有心肌梗塞，則他真正患有心肌梗塞的機率僅為0.0348，連一成都還不到。或許會有人疑惑，那這個檢查不就沒用，根本不需要執行，因為即使結果是判定有心肌梗塞，但實際得病的機率是非常的低。先別急著下結論，看看另一個數據，「若某人的心電圖檢查結果被判定***沒有***心肌梗塞，則他***真正沒有***心肌梗塞的機率為多少? 」照樣利用貝氏定理，此一機率為：

$$
\begin{aligned}
&P(A'|B')\\
&=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A'\cap B')}{P(A\cap B')+P(A'\cap B')}\\
&=\frac{0.998\times 0.95}{0.002\times 0.1+0.998\times 0.95}\\
&=\frac{0.9481}{0.0002+0.9481}\approx 0.9998
\end{aligned}
$$

如果被判定沒有心肌梗塞，恭喜了!因為真的沒病的機率接近1，亦即在這種檢驗下，得知結果為沒病，大可放心了。而一旦被宣告有病，也不用太擔心，真正患病的機率並不高，因為只有0.0348。因此在醫學檢驗上，當檢驗發現某種疾病，習慣會再請病患做複檢，以避免誤判，若顯示出沒得病，就不用擔心了。

連續看了兩個例子，對貝氏定理的運用以及推論容易造成的盲點，應該有一點認知。利用這樣的概念，可以解讀網路世界的一個現象。很多消費者喜歡在購物之前，上網瀏覽網友對該產品的評價。撇開一些廠商可能會聘請部落客為該產品美言，以增加銷售的情況，若以負面消息的多寡來做評鑑，當看到對某廠商某項產品負面的評價多於同類型的產品時，三思而後下斷言。存在這種可能:「該項產品的市占率極高，不良品的比率並不比競爭產品大，但實際上卻會被發現，不良品中該公司產品的比例最高」。當這種情況發生，直覺上會覺得該產品品質不佳，但感覺常和實際情況有差別。很多領導廠商，常會被很多消費者批評，由貝氏定理來解釋，「樹大招風」的確很有道理，也讓人可以瞭解雖然創業維艱，但「守成不易」，愈是大公司，愈需謹慎小心!

## 伍、結論

機率發軔於賭徒求教於數學家機率相關的問題，而後數學家利用魚雁往返討論才逐漸建立此一數學的分支，因此說機率論是因為實際應用而產生的學問並不為過。而貝氏定理源自對條件機率的概念，既然機率因實際應用而生，貝氏定理也應該可以解決很多的實際問題。現實的教學現場，無可避免會隨著教材的深度，數學開始走向抽象化，函數等分析課程逐漸加重，雖然為未來的研究奠定基礎，但卻也

令一些無法體會數學抽象之美的學生，大感吃不消。貝氏定理的介紹，可以讓抽象的內容，稍得平衡，無論任何版本的例題，都可使學生能與一般生活經驗融合一起，但由於教學時數的限制，再進一步的提供貝氏定理更深入與更實際的應用，幾乎是不可能的任務，本文就是在這種情境下，希望能提供給數學教師做為讓有興趣的學生，課外的補充教材。

最後一小節，強調一些直覺的錯誤推斷，而這些誤判可以經由對貝氏定理的通盤理解而避免。教師在教學上可以對此著墨，讓學生知道，經由數學的訓練，可以使一般人容易犯的錯誤，無所遁形，並發現所學能與生活貼近。

## 陸、註解

(一) http://www.ceec.edu.tw/95 課綱考試說明/03-95指考數學考試說明_定稿_new970926.pdf)

(二) 89年度填充第(I)題題目如下:

交通規則測驗時，答對有兩種可能，一種是會做而答對，一種是不會做但猜對。已知小華練習交通規則筆試測驗，會做的機率是0.8。現有一題5選1的交通規則選擇題，設小華會做就答對，不會做就亂猜。已知此題小華答對，試問在此條件之下，此題小華是因會做而答對(不是亂猜)的機率是多少？

(三) 實際上，此處的機率不必這麼複雜，若令

a= P(潛艇落於方格|此方格找不到潛艇) = $\dfrac{p(1-q)}{1-pq}$，則

P(潛艇落於其他方格|此方格找不到潛艇)

$=1-a=1-\dfrac{p(1-q)}{1-pq}=\dfrac{1-p}{1-pq}$ 顯然比本文還要簡潔，但本文旨在說明貝氏定理，因此保留原先的表達方式。作者感謝評審者的寶貴意見。

## 參考文獻

普通高級中學數學第二冊(2012)，許志農主編，龍騰出版社，新北市。

普通高級中學數學第二冊(2012)，林福來等編輯，南一出版社，台南市。

張維迎(2004)，博弈論與信息經濟學，上海人民出版社。

焦述銘(2011)，*理工男是怎樣判斷漂亮女孩是不是單身的？*第五屆人與自然科普寫作三獎作品，http://fun.nmns.edu.tw/news/index-1.php?m=9&m1=4&m2=27&id=89

http://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian search theory

http://en.wikipedia.org/wiki/John Craven.