國立臺灣師範大學數學系碩士班碩士論文

指導教授：　金 鈴　博士

資深高中數學教師教學知識與教學構思的個案研究

研 究 生：陳亭瑋

中 華 民 國 一 百 年 一 月

中 文 摘 要

本研究採用質性取向的個案研究法，透過課室教學觀察及訪談，探討一位資深高中數學教師的教學知識與教學思考。研究設計分為前導研究、第一階段研究與第二階段研究；研究的教學單元分別為「空間平面和空間直線方程式」、「重複組合」與「數學期望值」；研究資料的主要來源包括，教學影片檔、訪談錄音檔和個案教師自編的數學科講義。本研究所使用的數學教學觀察系統，引自 Learning Mathematics for Teaching (2006)所發展的 Mathematical Quality of Instruction(MQI)登錄系統。首先，個人修改系統的編碼，以符合個案數學教師實際的教學特質，其次，針對教學影片進行分析，最後，商請另一位獨立的登錄者協助信度的檢驗，以提昇系統的有效性。藉由三個不同的數學教學單元，以及為期一年的研究進程，對個案數學教師的教學知識與教學思考，以及 MKT (Mathematical Knowledge for Teaching, Ball 等人, 2008)的內涵有更深入的了解。

本研究的結果顯示，個案教師的數學教學大多呈現 PUFM (Profound Understanding of Fundamental Mathematics, Ma, 1996)的連通性、多重觀點、一致性和基本概念四項特徵。然而，由於 PUFM 著重數學學科知識，對於某些 PUFM 無法涵蓋的數學教學片段，個人則藉助 Ball (2008)的 MKT 架構來進一步分析。據此，個人提出一些比較凸顯 MKT 特徵的數學教學實例，這也表明，MKT 和 PUFM 似乎有部分的重疊，但是亦有不同。結果進一步顯示，個案教師的數學教學傾向，遠看似 PUFM，近看卻有部分 MKT 的元素。此外，個案數學教師也有一些其他的數學教學特色，例如螺旋式教學。

最後，根據研究的結果，個人進一步指出 PUFM 和 MKT 可能的關係，以作為未來接續探究高中數學教師 MKT 和 PUFM 內涵與關係之參考。希望本研究的結果，能夠有助於提昇高中數學教學觀察系統的品質與實用性，並用來檢測和發展高中數學教師的數學教學專業知識。

關鍵詞：質性研究、個案研究法、MQI、MKT、PUFM

Abstract

This study applies qualitative case study, which explores the professional knowledge and thinking of an experienced high school mathematics teacher. The study is structured into three research stages including the pilot, initial, and second stage. The teaching units include「plane and line in space」、「combination with repetition」and「mathematical expectation」. The study material comes from videotaped lessons, interviews, and class handouts provided by the participant teacher. The observation system is adapted from coding system of the Mathematical Quality of Instruction (MQI) developed by Learning Mathematics for Teaching (2006). First of all, I modified the system codes to adapt to the actual quality of the teacher's classroom teaching. Second, I analyzed the video tapes. Last, the coding results were mostly supported from another independent coder to establish the acceptable inter-coder reliability. Using three different observed teaching units within an academic year, I describe the participant teacher's knowledge and thinking of/about mathematics teaching in terms of both MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) (Ball et al., 2008) and PUFM (Profound Understanding of Fundamental Mathematics, Ma, 1996) theoretical frameworks.

The results reveal that, the teaching of the teacher mostly presented PUFM qualities of connectedness, multiple perspectives, unity, and the basics. However, considering of emphasis on subject matter knowledge of PUFM, I took the aid of MKT structure to further analyze some teaching clips which PUFM is unable to cover. According to the instruction above, I brought up some mathematical teaching cases which highlight MKT characteristics, which also indicates that MKT and PUFM seem to have some parts overlapped, but some not neither. The study result in addition presents the teaching tendency of the teacher was much alike PUFM as a whole, yet also reflecting some MKT elements inside. Furthermore, the teacher also showed sort of spiral features of mathematics teaching.

Finally, the present study described the possible relationship between PUFM and MKT, which may provide some insights into the future study of both the tension and relationship between high school mathematics teacher's PUFM and MKT. Hopefully, my study results may be used to increase the quality and usefulness of the MKT observational system at high school level, as well as to examine and develop professional knowledge of high school mathematics teachers.

Key Words: Qualitative research, Case study, MQI, MKT, PUFM

致　謝

這兩年半來，半工作半進修的生活是既辛苦又疲憊，卻也充實萬分，很慶幸我堅持到了最後，這一路上我要感謝許多人！

首先，非常感謝我的指導教授——金鈴老師。這兩年的期間，個人從您身上汲取到豐富的教師知識，也在學習的過程中不斷地做反思，特別是有幸參與您的計劃，使我獲得許多寶貴的經驗。更感謝您總是不厭其煩地為我批閱論文，並給予我許多寫作的方向，帶領我一步步地成長，使論文得以更加精鍊與完整。

感謝蔡文煥、林碧珍兩位教授細心地閱讀論文，提點個人思考與寫作不周之處，同時也為研究團隊提供寶貴的建議，感謝您們的鼓勵與肯定。

感謝翁老師協助教學影片的拍攝，讓我在專業知識與班級經營上皆獲益良多，您是我學習的好榜樣，祝福您退休生活順心愉悅。

感謝計劃小組成員中的名秀、益安學長、慧儒學姊、勇吉、培棠以及湘媛，我好開心有你們這些好夥伴，特別是名秀。妳總是和我一起討論、一起抱頭苦惱也彼此鼓勵，妳有顆樂觀的心，常常無形中給我力量與歡樂，能夠與妳共同完成論文的感覺真好，祝福妳今年能夠順利考上正式教師。謝謝益安學長經常鼓勵我，並且關心我的生活，謝謝慧儒學姊總在我需要幫助時一口答應，祝福兩位博士生涯一切順利與順心。

感謝內湖高工的數學科教師群，因為你們全力的支持，使我無須增加教學上額外的負擔，多出許多時間與心力準備研究所的課業，非常感謝大家。

感謝一直在我身旁鼓勵我的好朋友們，宜蓁、老王、佳怡、阿銘、靜靜、屁屁、麵包、淑華、宜靜、冠宇、仲麟、羿涵……，謝謝所有曾給我鼓勵與祝福的朋友們。特別感謝宜蓁和老王，謝謝妳們陪我走過許多人生的重要時刻，每當我沮喪時，妳們總是適時地推我一把，使我更有勇氣地繼續向前走，我好愛妳們。

最後，感謝我親愛的家人，總是體諒我的忙碌，每天帶來一通關心和鼓勵的電話，更經常可嚐到媽媽為我準備的愛心便當，您們總是為我準備得好好的，讓我可以專心於課業，也是您們的愛一直帶給我力量，僅以此論文獻給我最愛的父母，謝謝您們！也感謝 stanley 這陣子以來無怨無悔的陪伴和照顧，做我最好的依靠，逗我笑、為我拭淚也為我打氣，謝謝你！

目 錄

目次

附錄目次

圖目次

＊ 圖表編碼說明：第一碼為章節序號

表目次

第一章　緒論

本章共分為兩小節，第一節闡述本研究的背景和動機，第二節為研究問題和目的。

第一節　研究背景和動機

本節將說明教師的專業及其專業知識，其中包含了個人的研究動機和研究背景。

一、 教師的專業

Smith (1987)指出，專業知識的組織不只包含對標準的保證及具有知識和技能的獨占性，更具有支配和控制的獨占性。以醫師和律師為例，外科醫師需要具備開刀技能並了解解剖學，律師需要熟知法律條文以及訴訟程序，開刀或者打官司都非門外漢所能取代，代表醫師或律師已發展出專業的特性。那麼教師呢？以Etzioni (1969)的觀點來看，教師只有半專業(semi-profession)的地位，我們該如何建立教師的專業？教師具有自我的知能和組織，在知識層面或者技能上都該有別於非教學的人。Noddings (1992)曾說，現在數學教師所面臨的困境是教育家與數學家缺乏合作，所以，在師資培育(簡稱師培)上會削弱數學教師的專業地位。以學者觀點來看，若想要提升教師的專業地位，發展好的師培課程是其中一個管道。Ball (1988)在其博士論文中提到，許多教師對於教學所知道的建立於她們之前 10 ~12 年的學校經驗，她們現有的知識經常會成為引入師培課程的一個阻礙。所以，倘若要設計合適的師培課程並且發揮其功效，必須要先了解教師本身具有哪些知識，再針對這些知識去發展師培課程。那麼，教師的專業知識到底有哪些？

二、 教師的專業知識

雖然，有幸能夠從事我熱愛的教學工作，但是，在擔任教師的這三年中，也遭遇到不少挫敗，在在促使我想要進修以提升自我的數學教學實作知識。如同Ma (1996)所說，教師知識影響了教學過程，而教學過程影響學生的學習，因為，教師是教學中的靈魂人物，所以，我認為想要瞭解學生的學習，要先從瞭解教師開始，甚至於要從瞭解自身的學習開始。

一位優秀的數學教師背後必然有不同於他人之處，可能課程內容知識較為完整，使得在教學中學生能夠學習到一致的內容，即使經歷相同的師培訓練課程或者數學課程，不同的教師卻可能產生風格迴異的教學。這代表著，教學背後有眾多複雜的因素交錯影響著，這也正是研究的迷人之處。研究者有幸參與金老師的計劃，可以透過課室教學觀察及訪談，欣賞資深高中數學教師在教學場域中所展現的數學功力(mathematical power)和教學功力(pedagogical power) (Cooney, 1994)。美國的 National Longitudinal Study of Mathematical Abilities〔NLSMA〕(1972)計劃曾試圖研究教師大學修的數學課程數目與學生學習的關係，但是，沒有發現重要的關係，Eisenberg (1977)也得到相同的結果。由此推論，研讀越高深的數學並不盡然對學生學習是有助益的。教學最終的目的是為了使學生獲得真正的學習，美國的 National Council of Teachers of Mathematics〔NCTM〕(1991)在《數學教學專業標準》中強調，數學教學應注重教師幫助學生學會理解、會做和會用數學的方法。Shulman (1985)曾說，教師需要廣泛以及高度組織的知識主體，然而知識的主體是複雜的，以教師知識而言，什麼樣的知識是必備的？哪些是教師所看重的？或者，在她真正成為數學教師之後，師生間的互動以及教學經驗，對其教學知識以及教學思維會產生何種影響？在不同的教學單元中，教師所展現的知識面向為何有強弱或顯隱之分？

McDiarmid 與 Clevenger-Bright (2008)將教師能量(teacher capacity)分為知識(knowledge)、情意(disposition)和技能(craft skill)三個部份，他們認為在實際教學中三者必然融為一體，彼此相互影響，所以，知識對情意以及技能具有某種程度的影響力。對於有效能的教師該具有哪些知識，許多學者均提出看法，從 Shulman (1986)將「教學內容知識」(pedagogical content knowledge，簡稱 PCK)的概念引進教學以及師資培育中，強調教師知識中數學內容和教學的連結；到 Bass 和 Ball (1996)探討「什麼樣的數學知識是教好國小數學所需要的？」這種教學所需數學知識的問題；之後，NCTM (2000)強調教師要有「學生作為學習者」的知識，而 Hill, Rowan 與 Ball (2005)在一個標準成就測驗中發現，教師為了教學的數學內容知識與一、三年級學生的成就有正相關；接著，National Board for Professional Teaching Standards〔NBPTS〕(2006)則強調「學生的先備知識以及背景」知識的重要。一直到 2008 年 Hill, Ball 與 Schilling 提出了「教學用的數學知識」(mathematical knowledge for teaching，簡稱 MKT)的架構後，教學用的數學知識的探究開始有了一個基本的輪廓。架構圖分為左半橢圓的學科知識(subject matter knowledge，簡稱 SMK)和右半橢圓的 PCK，其中，SMK 包含了一般的內容知識、特別的內容知識和數學知識的水平，PCK 包含了內容和學生的知識、內容和教學的知識與課程的知識，共有六個領域(domain)。

Ball, Thames, Bass, Sleep, Lewis 與 Phelps (2009)表示，教師專業教育主要的挑戰是「如何讓新手教師為剛開始有技巧的實作做準備？」，而這有賴於建立「教學實作和師資培育的關係」的健全理論。教師需要在教學工作中知道並且能夠使用數學，而且，她們需要習得能夠促進學生學習數學的特殊教學實作。MKT 指的就是，完成教數學這個工作所需要的數學知識，所以，他們聚焦在教學中所包含的數學任務(mathematical tasks)，以及分析這些任務的數學需求(mathematical demands)。他們提到引導這個理論最基本的問題是：(1)哪些是教數學時需經常面對的工作，以及其所衍生問題？教師在教數學的時候都做些什麼？(2)哪些是管

理這些工作所需的數學知識、技巧以及敏感力(sensibility)？他們的研究並非以教師真正知道什麼或需要知道什麼為中心，而是那些被使用在教學工作中的數學知識，意即數學教學實作知識。然而理論仍有缺點，如果教學是文化的實作(Stigler＆Hiebert, 1999)，則他們所發展的理論若用在其他文化系統中，可能會限制了教學上的數學需求。教師徒有知識卻不知如何在教學中使用，就如同擁有工具卻不知如何使用而無法發揮它既有的功用，如此一來，便無法有效地傳遞給學生以達成教學目標。教學用的數學知識是流動的、具生命力的，傳承 Ball 等人(2009)原有的想法，倘若要以 MKT 的架構去觀察和分析教師知識，必須要真正踏入課堂中，對個案教師的數學教學實作知識做分析和描述。但是他們也提到，MKT 架構的內涵可能缺乏效度，造成在其他國家中無法完整地解釋教師的數學教學實作知識。這也說明了，MKT 並不必然會完全符合不同文化下教師的數學教學。

Ball (1988)在她的博士論文中曾提到，師培對教師而言是個薄弱的介入，故她想探究教師帶了什麼進入師培課程中，並提出了一個概念性架構。Ma (1996)的博士論文也參考 Ball 當初既有的想法，而 Ma 整合了她的研究資料與現存的教師學科知識概念性架構，特別是由 Ball 所發展的架構，提出教師對學校數學主題理解的架構圖。她認為，大陸教師比起美國教師具有知識上的深度，她想要去測試這樣的假設，並且，探究教師是在哪個時期獲得那些教學用的數學知識。後來她發現，大陸教師具有對基礎數學的深刻理解或對基礎數學的深奧理解(profound understanding of fundamental mathematics，簡稱 PUFM)，其中包含了深度(depth)、廣度(breadth)和透徹性(thorough)三種特質或特徵(property)。由於 Ma 的研究對象為華人教師，或許我們也能在台灣數學教師身上找到 PUFM 的某些特質，甚至，更進一步了解 PUFM 的內涵。

第二節　研究問題和研究目的

相對於國小，高中數學課程內容的複雜性與抽象度都高，在教學上更能顯現教師調度不同知識的能力，而且，穩定的知識結構使得研究者較易於分析，故我們試圖分析資深高中數學教師的數學教學實作知識。雖然，不同學者對教師知識的面貌提出許多看法，從 Shulman (1986)的 PCK 到 Ma (1996)的 PUFM，直到最近 Hill 等人(2008)的 MKT。Hill 等人對教師知識提出一個完整的架構，不僅包含學科知識，也有學生作為學習者的知識或者課程知識，而 Ma 的研究焦點只有教師的學科知識。經過研究者將 LMT (Learning Mathematics for Teaching) (2006)計劃中，研究教學品質所使用的 MQI (Mathematical Quality of Instruction)編碼系統，針對個案教師實際的數學教學做修正後，再分析教學影片，他是否能展現出 MKT 架構中六個領域的特徵？或者，在教學中哪個領域會特別突出或特別重要？如果 MKT 架構仍無法適切地描述個案教師的數學教學實作知識，那麼 Ma 在華人教師身上所看見的 PUFM 是否更合適？

Ball (1988)和 Ma (1996)研究背後的動機均源自看到美國教師知識的不足，而且，Ma 的研究延續 Ball 所使用的四個數學主題，顯然兩者的源頭是相近的。但是，某些地方有重疊，某些地方也有差異。希望本研究的部分教學實例能為此提供相關的資料。不同教師由於不同的學習背景、思考模式或專業訓練，而產生不同的數學教學實作知識。有的教師較凸顯 MKT 取向，有的教師較凸顯 PUFM 取向，甚至於有的教師兩者兼有之。

故本研究的研究目的為：

1. 探究資深高中數學教師的教學特色。
2. 探究資深高中數學教師的教學知識及其伴隨的教學思考。

個人將資深教師界定為具有十年以上教學經驗的教師。

根據上述的研究目的，本研究的問題包含：

1. 資深高中數學教師在不同主題的單元教學中所展現的教學特色為何？
2. 資深高中數學教師的教學知識及其伴隨的教學思考為何？

第二章　文獻探討

本章總共分為三節，分別探討數學教師的專業、數學教師的教學相關知識以及個人對相關文獻所做的小結。

第一節　數學教師的專業

本節將說明教師的專業與其特徵，以及教師專業的內涵。

一、 教師專業與其特徵

孔子曾道「一日為師，終身為父」，從古至今，社會對於教師地位的推崇是無庸置疑，這也代表教師這個職業有著與他人不同的責任與意義。Hansen (2001)視教學為一種道德(moral)活動，一般人對於教師賦予高度價值跟意義，如同人們常說教學是一種良心事業，教師所做的任何教學決定都是一個道德的選擇，她要有道德判斷和道德知識，以帶領學生獲得最佳的學習。Dewey (1997)也有類似看法，他認為真正的智力(intellectual)發展永遠包含了道德的發展，教師要在教室的脈絡中做獨立和批判地(critically)思考，意指要關心到自己以及他人的想法(ideas)與期待(hopes)，因此他特別強調教師反思的重要。Socrates 也說「在許多的情境下，對於知識和真實的追求應該被了解為是一種道德的尋找，為了試圖讓我們成為更好的人」(引自 Hansen, 2001, p. 832)。所以，多數學者認為教學應該被視為是一種道德活動，同時也是智力活動。

George Bernard Shaw 曾提出一段調侃的話語「He who can, does. He who cannot, teaches.」(能者做，不能者教)，Shulman (1986)對此提出了質疑並下了另一個

結論「Those who can, do. Those who understand, teach.」(能者做，理解者教)。由此顯現出，我們對於哪些人足以承擔教學工作以及教師的專業，至今仍沒有一個普遍的認同，但是，究竟何謂「專業」(profession)？教學是一種專業嗎？教師可否稱得上是專業人員？

Shulman (2005)表示師培並不存在，以律師或醫師的專業教育而言，在不同的國家已有較為標準的課程以及評量，但是，師培卻有多種方式。他提出認證教學法(signature pedagogies)的觀念，希望將師培特徵化(characterize)。它指的是一種教學模式，讓準備進入這個專業的人必須通過鑑定。他認為，認證教學法應該具有專業的獨特性、遍佈連續的課程，以及在教學與社會化中的必要成份這三種特徵。它是規律的而且不斷地重複，為了讓每個人知道應該要做什麼，而且，能夠讓學生的思考被看見，使其不只知道也能夠完成步驟，甚至不只被要求做出評論，還必須要建立在他人的評論上。近年師培的重點在使教師專業化(profession-alization)。根據 Noddings (1992)的觀點，教學的專業化指的是，教師為了讓他們更像是在建立專業而做某些改變，它是具有特定職業的知能和組織，特別是成為一個專業份子的過程。師培是促進教師成為專業份子的一個重要管道，然而，如何建立良好的教師評檢制度，以及設計合適的師培課程，以儲備教師的能量，進而使教學具有認證性，這才是當前重要的課題。這些觀念也是 Shulman 言論背後更深的意涵。

針對專業的特徵，Noddings (1992)提出了六點，包含了篩選與管理、專業知識、利他主義或服務、特權與地位的等級制度、協同關係以及自主權。首先，他認為教師的鑑定並不會成為專業化教師的一個枷鎖，反而是專業化的第一步驟。其次，數學教師並非去創造數學，而是要和學生一同建構數學，而專業化必須更重視智力發展，他指出，只有數學知識並不足以去描述教師的專業化知識，還需要具備 PCK 或者學生知識(student knowledge，簡稱 SK)等。再來，社會大眾普

遍重視教師的身教和言教，於是，許多教育家開始強調教學中道德的面向，因為，教師比起其他職業背負了更多道德的責任(Sochel, 1988)，而且，教學中道德的本質是最基本的(Sockett, 1987)。因此，教學應該是一種為社會服務的形態，所以，我們必須要定義教師專業中關於利他主義和服務的內涵。每個人擔任教職都會有不同的理由，但是教育應以學生為中心，以培育學生發展正確的身心和知識為最終的目標。若我們希望教師是一項「好的以及值得的」專業(Goodlad, 1984)，則應該給予教師更高的地位，然而最根本的是，教師必須同時努力提昇自我的專業素養。例如，其中一種方式即是發揮協同關係，教師可以透過校內的教學研究會與其他教師相互合作和討論，甚至，參與專業研習活動或改革團體，利用合作的方式增進教師專業(Holmes Group, 1986)。例如 Carpenter, Fennema, Peterson 與 Carey (1988)的研究發現，參與 Cognitively Guided Instruction (簡稱 CGI)的教師在參與一年後有了明顯的進步，她們知道更多學生解題的心智過程、花較多時間在解題活動非訓練活動等等。最後，Noddings 分三個方面來探討自主權：專業(profession)，包含了自我準備、位階的准許和個人行為的管理；專業社群(professional subgroup)，包含了數學科能掌控教學進度和內容；個人專業(individual professional)，包含了掌控教師與學生或家長間的關係。教師雖然被放置於學校的框架中，但是，教師應該具有更多的自主權和尊重，人們對教師的信任對其提升自我、增進教學成效形成莫大的助力。「十年樹木，百年樹人」，教育事業是艱辛與長久的，如同現在許多的暑期班或者社區大學，人們提倡活到老學到老的學習風氣，對身負教育與傳承重責大任的教師而言，更需要重視自己的專業發展。

二、 教師專業內涵

教師專業內涵指的是「身為一個教師必須具備的各種內在知能條件」(饒見維，1996，頁151)，知能條件包含了認知(如知識、能力)和情意(如態度、信念、

價值)面向，而這些內在知能在教師專業發展的歷程中持續不斷地轉變(黃凱旻，2002)。除了認知面向和情意面向之外，教師需學習與學校、家長、社會做良好的溝通，以利做出合適的教學決策，故教師的專業內涵中亦需考量社會面向(許秀聰，2005)。教學所在的環境和文化會影響教師的選擇，例如，學校政策的執行、家長的期待或者升學制度，倘若教師在社會面向的互動中能取得彼此認同，並且相互支持，無疑得到了最佳的後盾，在此之下，教師在做教學決策時，能將認知與情意做最好的組合。然而，認知與情意無法單向論述，因為，教師的教學信念和教學價值滲透於教學活動中，無論是對教學內容的選擇與編排，或者是呈現概念的方式，因此，在情意的影響下，認知面向的展現便有所不同。

McDiarmid與Clevenger-Bright (2008)所提的教師能量(teacher capacity)呼應了專業內涵的想法，他們將教師能量分為認知(knowledge)、情意(disposition)和技能(craft skill)三個主要部份。認知包含了學科知識、課程知識、教學內容知識，也包含了對學生需求與文化背景的了解；情意包含了信念、態度和價值；技能包含了計畫和組織教學、監控和評量學生學習，以及與同事、家長和社會共同合作。美國傳統英語詞典(American Heritage Dictionary)中將容量(capacity)譯為接受、持有以及吸收的能力，然而，部份學者認為把「容量」一詞放到人類身上，強調的是成長的潛力，意即，提昇實踐課程和教學改革所需具備的資源(Barnes, 2002；Cohen＆Ball, 1999)。所以，容量更貼切的說法應該是「成長的可能」(potential for growth)，而非「接受的能力」(ability to receive)。因此，培養教師具有教師能量指的是，希望她們具有持續發展認知、情意和技能成為一個連續統(continuum)的能力，這也說明了認知、情意和技能如同教學的三連環，牽一環動一環，無法切割。

學者們多將焦點放在認知層面上，例如Begle (1979)曾研究教師所學的課程總數與學生表現的關係，量化的研究結果發現，教師知識與教學成效並沒有顯著

性的相關。Shulman (1986)將教師的知識架構分為SMK、PCK、課程知識(curricular knowledge)三大項，其中他特別強調，教師對數學、學習者如何思考數學主題和教學教材在教數學中如何被發展的了解。Peterson (1988)則改編Shulman的架構，將它分為學生在特殊內容中如何思考、如何促進學生思考的成長，以及教師對自己認知過程的自我察覺。他認為教師要了解自己對數學的思考，否則學科知識無法在教學中發揮作用。Stevens與Wenner (1996)透過問卷針對67位職前教師，探究他們科學和數學的知識與信念，發現職前教師不論是科學或者數學的知識基礎總體薄弱，呼籲教師專業中應當強調知識組織。Rowland (2008)研究教師的數學學科知識，將17個編碼分為基礎(foundation)、轉換(transformation)、連結(connection)以及偶發(contingency)四大類，並稱之為知識四重奏(knowledge quartet)。基礎包含對數學的知識和理解、對數學教學和學習的理論知識，更包含了對數學知識本質以及學生學習的關心。轉換強調的是實作中的知識，也就是計劃如何去教，更重要的是教師對範例、解釋的選擇，以協助學生的概念發展。連結呼應了Ma (1996) PUFM的一個特徵，它重視知識中深度和廣度的連結。最後，偶發代表的是教室中不可預期的事件，教師必須能夠隨機應變，例如，做好準備以便回答學生的問題。

教師的知識也會影響到學生的學習，如同Brophy (1991)所說，教師知識若更清楚、更具有連結性和統整性，則能呈現彈性的教學，善用不同的方式表達，並鼓勵和回應學生的意見與問題。Steinberg, Haymore與Marks (1985)在研究教師知識及其對教學的影響中發現，具有概念性和連結性知識的教師，在教學上亦更有概念性。由此可見，教師知識在學生學習或者在建構教學中占有重要的地位。既然教師知識對教學這麼重要，那麼，教師的教學相關知識應該是什麼樣子呢？

第二節　數學教師的教學相關知識

本節將介紹不同學者對教學相關知識的觀點，並且提出研究者對教師知識的立場以及小結。

一、 何謂教學相關知識？

教師知識的領域中主要存在著三個大問題：教師需要什麼知識？教師具有什麼知識？教師怎麼樣發展他們的知識？(范良火，2003)。不管是哲學家或者認識論的學者們都說要對「知識」(knowledge)下一個精確的定義，如果不是不可能的話，也是相當困難的。一般知識最廣泛的定義為「可以被證明是真實的信念」(Quinton, 1967)，亦即，如果某人宣稱他知道 Q，則(1)他要相信 Q 是真實的，(2)他要能夠證明 Q 是真實的，(3) Q 確實是真實的。亦有一些學者將此定義放寬，主張知識是「有證據支持的信念」(Fenstermacher, 1994)。Znaniecki (1965)曾說「每個人無論承擔何種社會角色，都必須具備正常擔任該角色不可缺少的知識」。那麼，何謂教師的教學相關知識呢？Leinhardt 與 Smith (1985)認為，教師知識有兩大核心領域：課堂結構知識和學科知識；Gilbert, Hirst 與 Clary (1987)將知識分為四個層次，第一層次是關於學校作為一種機構的知識，第二層次是關於學生的知識，第三層次是教學知識，第四層次是決策的知識；Lappan 與 TheuleLubienski (1994)則使用維恩圖(venn diagram)強調，教師至少需要數學知識、學生知識和數學教學知識三種知識。儘管學者們對於教師所需的教學相關知識各有異同，但是，其中有兩種基本知識是共通的，即是學科知識和教學知識。接著，個人透過一些研究教師知識學者的觀點和實徵的研究，來更深入了解教學相關知識的內涵。

(一) Elbaz 與 Leinhardt 的觀點

Elbaz (1983)提到，教師的實作與知識因為會受脈絡驅使而呈現動態，與過去、現在、未來相關，這些知識主要透過在教室中和學生的互動，建構出一套規則(rules)和原則(principles)。他將教師知識的結構分為實作的規則、實作的原則和印象(images)三個部份，前兩者包含了教學知識(instructional knowledge)，而印象指的是將所有教師知識組織在一起，它是短暫而且清楚的，包含了情感和道德，並且考慮了現存以及新的知識，它會將所有的實作知識做排序，並且在做決定時被使用。規則和原則會透過印象而被選取使用於引導教學，倘若規則或原則與一個教師所持有的印象有所衝突，則不同的規則會被選取。一個教師的實作知識會指向一個特殊的實作脈絡，而且，這些方向會在多種面向被檢查，例如社會、個人、經驗、理論以及情境。透過檢查這些方向，我們可以了解教師知識所照顧到較廣的細節，而且，注意到教師知識中的變化與綜合。Elbaz 也提到，教師需要擁有廣泛的教學相關知識，包括學科知識、課程知識、教學知識以及自身知識，而且，專業及個人的經驗會形塑教師的這些知識。

Leinhardt, Putnam, Stein 與 Baxter (1991)認為，教學的技巧會被兩個基本且相關的知識系統所決定，即是課堂結構的知識(knowledge of lesson structure))與學科內容的知識(knowledge of subject-matter content)。課堂結構的知識分為以下三類：(1) agendas (議程)，一個包含全部的課程目標及活動的動態計畫，可隨課程的進行而修改；(2) scripts (劇本)，在課程開始前，最先在老師心中對特殊主題不嚴謹的目標和活動安排，它會隨著時間慢慢發展和精鍊，並使用於適合的時機，所以並不容易改變，它包含不同的活動，例如回顧、呈現、監督的練習這些在教學中所發生的；以及，(3) routines (步驟)，由師生共同完成的活動，允許低層次的活動被有效地完成，而且，並不會將有意義的心智資源從教學中更一般及固定的活動、教學目標中轉移。學科內容的知識則是指，教師在教某學校課程所需要擁

有及使用的知識，它不只包含數學知識，也包含課程活動知識、表徵的有效方法以及評量的步驟。學科內容的知識能夠支持教師去建立議程與劇本。根據 Leinhardt 等人的想法，學科內容的知識並非決定教學行為的主要因素，而是議程與劇本。

(二) Shulman 的觀點

Shulman (1987)將數學教師的知識基礎分為七種類別：(1)內容知識(content knowledge)，指學科知識；(2)一般性教學知識(general pedagogical knowledge)，指超越各具體學科之上，關於課堂管理和組織的廣泛原則和策略；(3)課程知識(curriculum knowledge)，指教師做為職業所具備對教材和教學計畫的掌握；(4) PCK，指將學科內容和教學原理融合的知識；(5)學習者及其特點的知識(knowledge of learners and their characteristics)，指關於學生背景的知識；(6)教育環境的知識(knowledge of educational context)，指班級管理、社區和文化等的知識；(7)關於教育的目標、目的和價值以及它們的哲學和歷史基礎的知識(knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds)。其中，Shulman 在 1985 年 AERA〔American Educational Research Association〕年會的主席致詞中呼籲，要重視教學獨有的知識，亦即 PCK。他表示，區分教學知識的關鍵在於內容和教學的交集，也就是教師的轉換(transform)能力，教師需將他們複雜的知識，用某種方式作轉換，為了讓學生能夠與教材互動並且學習。他認為，教師知識中最重要的就是教師對數學、學習者如何思考數學主題、如何發展教學教材去教數學的瞭解，教師所使用的知識需要隨著脈絡而連續轉換。

Shulman (1986)曾針對三個與內容相關的知識特別提出說明。關於教師的內容知識，除了要知道一般的事實及概念之外，還要知道為什麼，並且能夠證明數學敘述的合理性。除此之外，教師還需要知道為何一個主題是相對中心的或周圍

的理由。課程知識，泛指所有包含教授一個主題的所有課程，以及不同的教材間的關係。課程知識又分為橫向課程知識、縱向課程知識，橫向意指主題與其他不同學科的相關性，縱向意指在同一個學科中，對於前後連貫的了解。PCK 是 Shulman (1996)認為最具影響力的一個教師知識類別，它指的是表達概念最有用的表徵形式、最有力的類比、圖解、範例、解釋和證明。亦即，要讓他人理解所使用最有用的表徵及系統的說明。同時，它也包含對於什麼會讓學習特定主題更容易或困難的了解，以及學生在不同年紀和背景下帶入課程學習的概念和先備知識。PCK 是最有可能區分出學科專家和教師之間的差異，因此，如果能夠明確指出一般學科知識和用於教學的內容知識之間的差異，就等同說明了教學是一項專業的工作，具有專業的知識基礎。

Shulman (1996)的論點雖然引起了正反兩面的評價，但是，不少學者表示贊同並將此加以修正或擴展。Fennema 與 Franke (1992)認為 PCK 亦包含學生知識和表徵知識，其中他們特別強調學生知識。Even 與 Tirosh (1995)也強調學生知識，其中包含了 knowing that 以及 knowing why，前者指的是知道學生常見的概念和思考方式，後者指的是知道前者的這些來源。An, Kulm 與 Wu (2004)將 PCK 分為內容、教學(teaching)和課程，他們認為教學是最重要的，其中也包含了對學生思考的了解，並以「profound pedagogical content knowledge」表示對教學和課程在廣度和深度的知識。反之，McEwan 與 Bull (1991)認為，知識應是一體的而不可被區分的。Cochran, DeRuiter 與 King (1993)則認為 Shulman 過份強調知識的轉換，他們將 PCK 修正為 PCKg (pedagogical content knowing)，用 knowing 代表主動的過程，PCKg 是指教師統整教學、學科知識、學生特徵和學習的環境脈絡後的了解。

(三) Fennema 與 Franke 的觀點

Fennema 與 Franke (1992)認為，教師的知識應該是巨大(large)、統整的(integrated)功能系統(functioning system)，其中的每個部分無法被切割，由於，許多研究者在知識上強調的層面並不同，迫使必須分開考慮教師知識中的個別組成。他們以數學教育文獻為出發點，用不同觀點檢視它們，文獻中以內容知識、學習知識、數學表徵的知識以及教學知識特別受到關注，希望透過文獻提供關於教師知識、教室教學和學生學習有用的資訊。Brown, Collins 與 Duguid (1989)強調知識的獲得依賴於學習的情境，故所有的知識都是情境的，而且部分是活動、脈絡和文化發展的結果，同時，這三者也是知識修改、解釋和使用的依據。Fennema 與 Franke 也強調數學教師的情境知識(situated knowledge)，教師知識會因為情境的不同而呈現不同的功能，它會經由數學知識、教學步驟和學生的互動，呈現動態的樣貌，並且透過互動的過程會更加成熟，而了解這樣的知識對課程及教學改變的影響是深遠的。

教師知識是持續改變和發展的，因此，想要真正了解它或者對它施測，都顯得格外困難。但是，Fennema 與 Franke (1992)認為，教師知識不能夠與研究學科、如何為學習者表示學科知識、已知的學生思考和教師信念所分離，它與教師教室行為的影響以及學生學習有密切關聯。雖然，我們已有這樣初步的理解，但是，教師知識的每個組成都需要針對定義、變因和與其他組成的關係再做更深入的研究。他們認為，教師知識的組成包含了教學知識、數學知識、學習者對數學認知的知識以及信念四項。數學知識包含了所教單元的概念、程序和問題解決的過程，更包含程序背後的概念、概念間的相互關聯，以及概念和程序如何被使用到不同類型的問題解決當中。教學知識是指關於教學程序的知識，例如，計畫有效的教學策略、教室常規、行為管理技巧、教室組織的程序和動機技巧。關於學習者的認知，教師必須要知道學生如何思考和學習，特別是，這樣的知識如何發生在所教的單元中，以及知道學生如何獲取知識，理解學生所使用的步驟和預期失敗或成功的發生。

Fennema 與 Franke (1992)提出「在脈絡下發展的教師知識」的架構圖(請參見圖 2-1)，強調每個組成都要在脈絡下發生，脈絡能定義知識的組成並使信念發生作用，當四者發生互動可帶領教室行為，它展現了教師知識互動和動態的本質。另外，教師知識的部分組成會藉由教學產生演化，知識建立在教師的教學知識之上，透過在教室中與學科和學生的互動而發展。Shulman (1987)曾提出教學的「transform」(轉換)，說明教師需將他們複雜的知識，用某種方式做改變，為了使他們的學生能夠與教材互動並且學習，而這正是 Fennema 與 Franke 架構圖中數學知識與教學知識的交界處。改變的程度決定在教師的知識基礎，和它的複雜性以及關聯性。認知心理學中假設教師知識會影響思考，而思考會影響他們在教室中的行為，而教師所使用的知識會隨著脈絡而改變，這樣轉換的過程是連續的，以帶領出不同的教室行為。由架構圖中可見，信念會影響教師知識的運作，教師可能因為對數學或者對學生學習的目標持有不同的信念，而展現出不同的教學實作方式。故除了知識主體之外，信念是驅動教學背後的巨大推手。

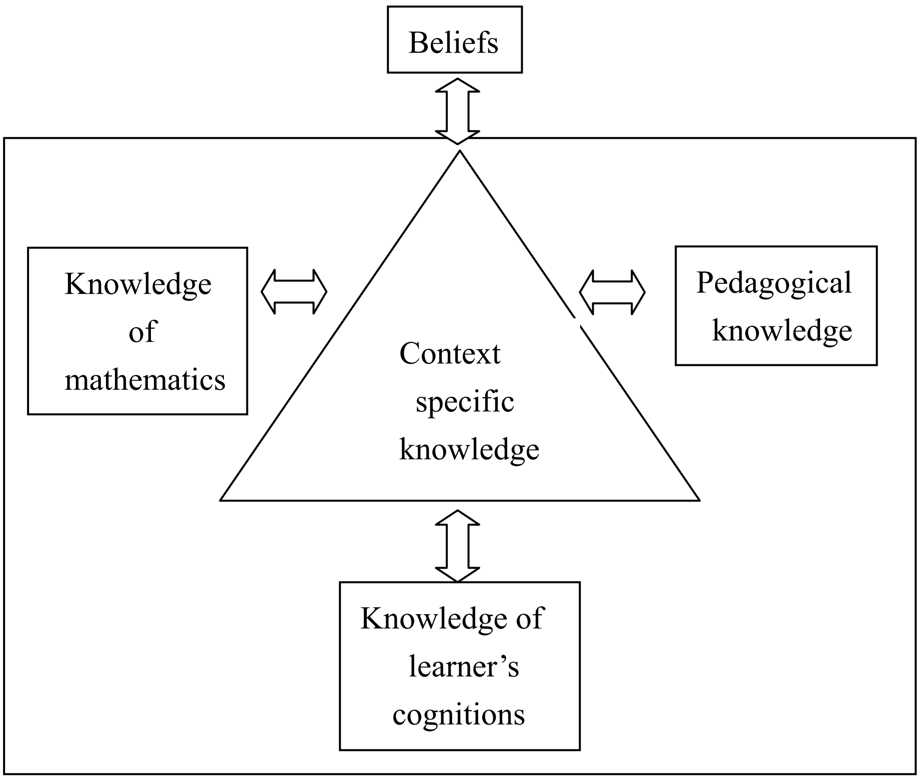

圖 2-1：在脈絡下發展的教師知識(引自 Fennema＆Franke, 1992, p. 162)

(四) Ma 的觀點

Ma (1996)在她的博士論文中透過四個主題，研究大陸與美國的小學教師對數學學科知識理解的差異，她發現大陸教師的數學知識普遍看來較為一致，並且，在回答問題的過程中展現了不同概念間的連結，反之，美國教師的數學知識則較片段並缺乏連結。她將教師對某一個主題的數學學科知識分為程序性理解(procedural understanding)、概念性理解(conceptual understanding)、邏輯關係(logical relation)及學科結構(structure of the subject)，請參見下圖 2-2。

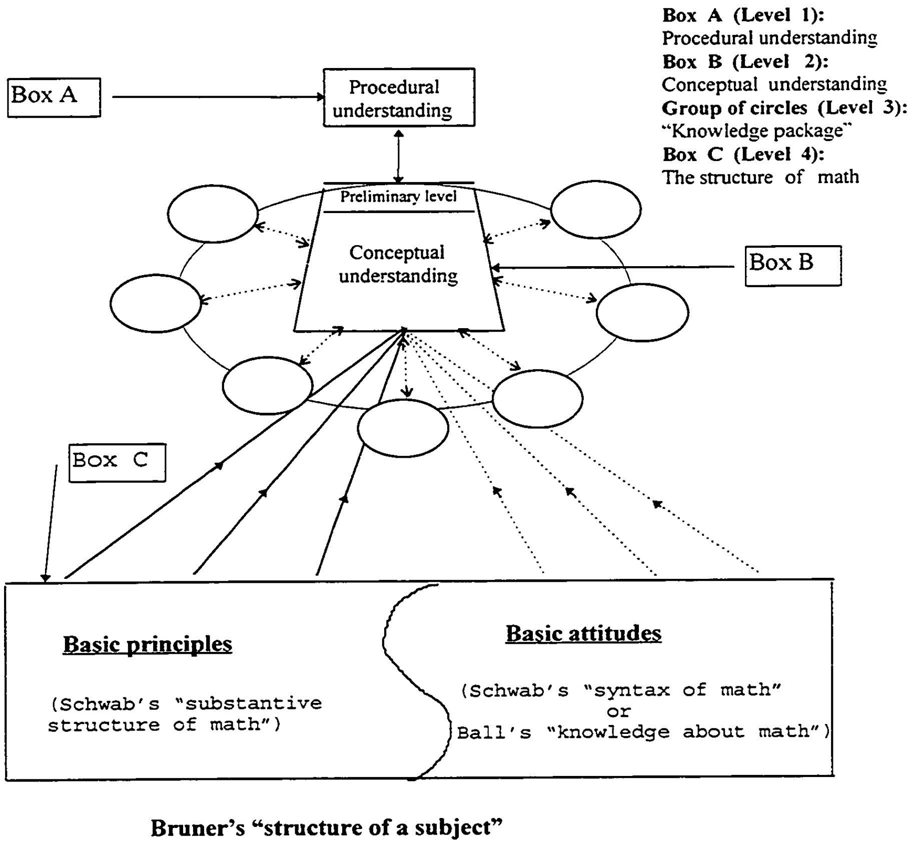

Fig. 1.2 The framework of teachers' understanding of a school mathematics topic

圖 2-2：教師對學校數學主題理解的架構圖(單一主題) (引自 Ma, 1996, p. 33)

第一層指的是，教師能夠依循正確的步驟得到正確的答案，這個部份在兩個國家教師之間的差異比較小，而且，即使是一個門外漢(layman)都可能會有，所

以它的特色是表面的、獨立的。第二層指的是，教師對於第一層的步驟能夠知道支撐在底下的概念為何並給予解釋。在這一層中，教師展現了步驟與概念間的連結，然而有的解釋可能是簡短的、初步的，所以，它是表面的卻也展現了一點理解的深度。第三層指的是，教師能夠察覺到其他數學知識片段(knowledge piece)與現在要教的主題所產生的邏輯關係、有哪些片段在背後支撐，片段並不一定是概念，也可能是程序。不同知識片段之間會產生如同線狀(line-like)或者環狀(circle-like)的序列(sequence)，這兩種不同的序列彼此間相互關聯，在序列中可看見一個概念如何在另一概念上伸展和演化。不同片段會具有不同的地位，教師必須加以權衡(weigh)，某些片段對學習主題是特別重要的，稱之為關鍵片段(key piece)，教師必須要能夠為關鍵片段提出她的理由。Ma (1996)提到，大陸教師相信，如果學生能在第一次介紹關鍵片段的概念時就已透徹地學習，則在往後的學習上就能夠事半功倍。

數學主題在邏輯關係中所產生的圖形是特別具有連結性的，Ma (1996)將它整個包起來稱之為知識包裹(knowledge package)。對於不同的主題，有些片段是共有的，因此，在第三層中不同的主題間開始產生連結，所形成的圖形更廣(broad)、更複雜(complexity) (請參見圖 2-3)。知識包裹是指，教師能在縱向過程中開啟和培育學生心智方面的學習(Ma, 1999, p. 114)，而教師會根據教學的脈絡重新組織知識包裹。知識包裹包含了概念發展的序列、關鍵片段和概念結(concept knot)三項特徵。其中，概念結強調的是主概念同時會綑綁(tie)其他概念，形成如同概念叢(cluster of concepts)的樣子，在教導主概念前教師需發展好學生的概念叢，同時，教導的過程也是一個修正或加深其他概念的好機會。圖 2-4 即是 Ma (1999)在專書中為減法所列的知識包裹，其中箭頭代表序列，由前一個支持後一個，中間為主序列，兩旁為子序列，深灰色的部分代表關鍵片段，而概念結在圖中並沒有被展現出來。

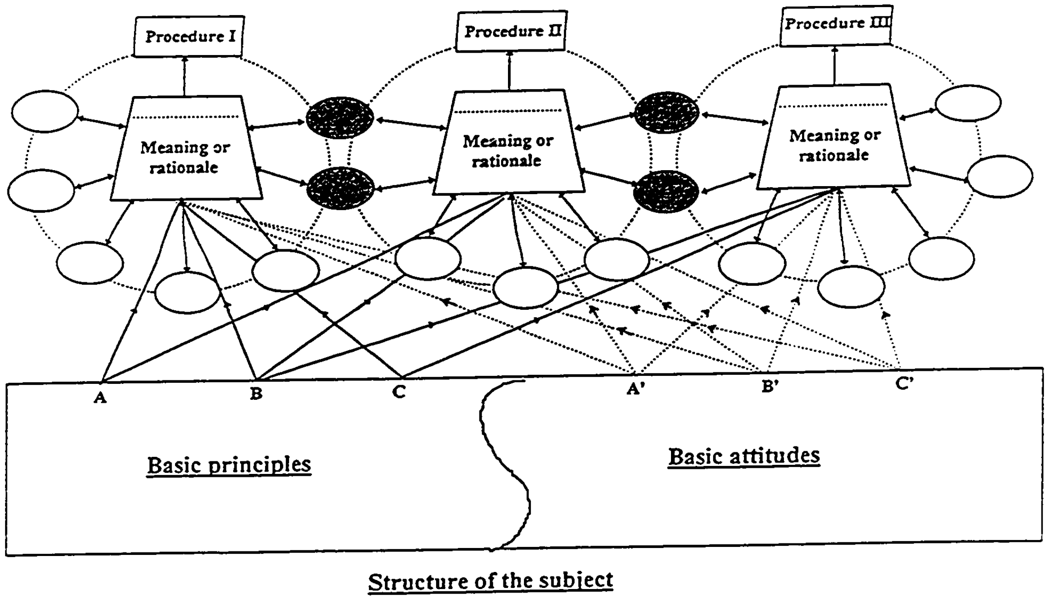

Figure 6.12: The framework of the terrain of teachers' subject matter knowledge of mathematics

圖 2-3：教師對學校數學主題理解的架構圖(多主題) (引自 Ma, 1996, p. 235)

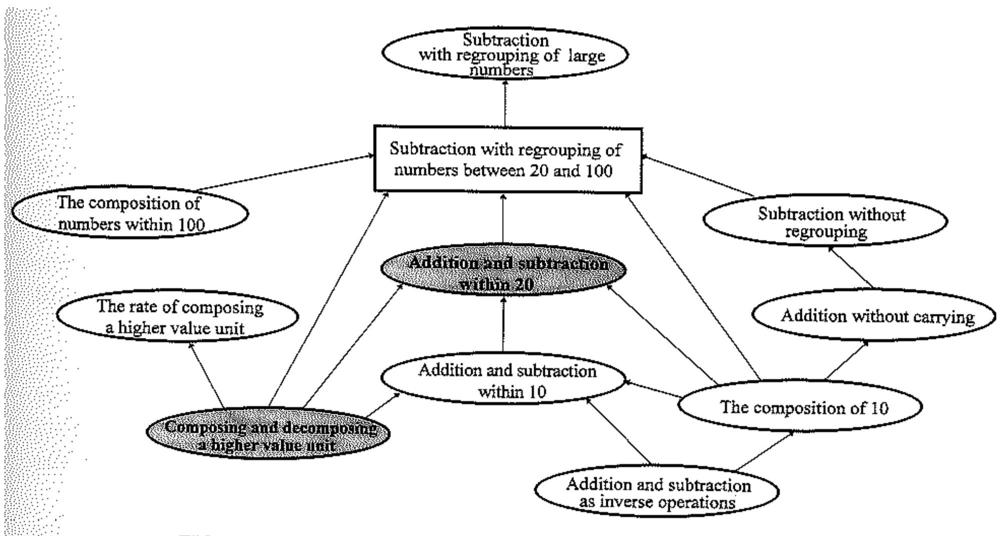

FIG. 1.2. A *knowledge package* for subtraction with regrouping.

圖 2-4：減法的知識包裹(引自 Ma, 1999, p. 19)

第四層指的是教師對學科結構的理解，其中包含了基本原則(basic principles)與基本態度(basic attitudes)。基本原則是指能夠支撐起許多不同主題的數學概念，例如交換律、分配律、結合律。基本原則並不會在每個主題中都出現，但是，基本態度具有滲透性(penetrating)，它會展現在不同主題之中，例如，能夠在不

同脈絡中保持數學概念的一致性。雖然，基本態度並不被包含在知識包裹中，卻是 Ma (1996)所特別強調的，她提到，能夠到達第四層的教師必然能夠到達前面三層，但是，反之不然。在她的研究中，許多教師都無法達到第四層。第四層的特徵是深(deep)，Ma (1996, p. 236)提到，這個圖形的限制是無法表達出每一層之間的動態關係，因為，事實上教師的學科知識如同一條河流的水流，沒有人能停止它或讓它在某個時刻保持靜止。下圖 2-5 為 Ma (1999)對原先博士論文中的圖形再做修正而得，白色橢圓代表程序性主題，淺灰色橢圓代表概念性主題，黑灰色橢圓代表數學的基本原則，虛線連結的是對數學的基本態度，而梯形中顏色的深淺代表概念性知識間不同的深度和廣度。

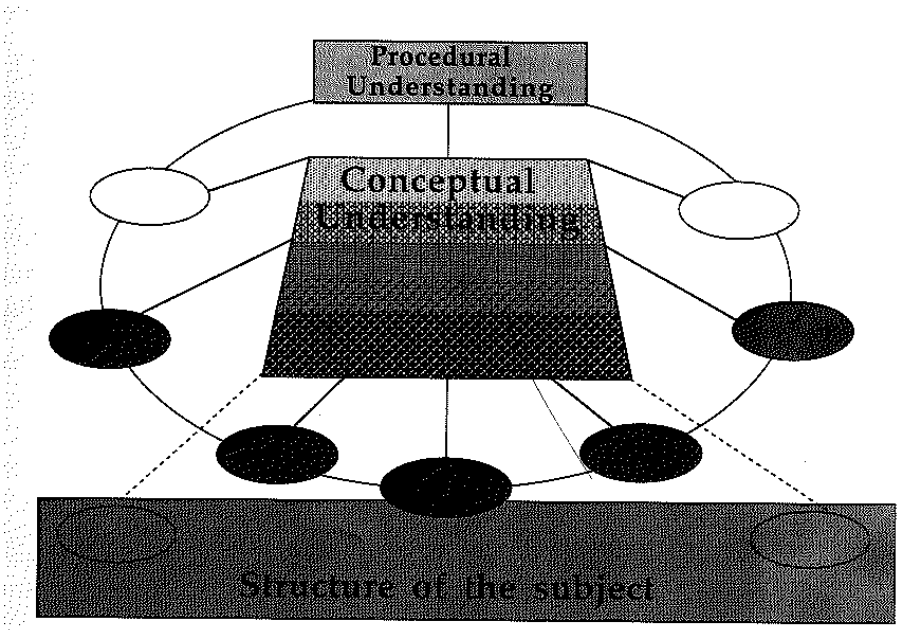

圖 2-5：對主題的概念性理解模式(引自 Ma, 1999, p. 25)

Ma (1996)在研究中發現，小學數學(elementary mathematics)被美國教師認為是基本的(basic)以及普遍被理解的(commonly understood)，反觀大陸教師，則視小學數學為基礎數學(fundamental mathematics)，她們普遍認為，應該要持續研究所教的數學內容，才能夠為學生建立良好的根基以利往後的數學學習。何謂基礎數學？Ma 認為所謂的基礎必須包含基本的(foundational)、初始的(primary)、入門的(elementary)。基本的是指，小學數學中包含了許多以後高深數學所需要的根

基，也就是算術和幾何，其中多數內容為算術；初始的是指，小學數學中包含了前面兩者的胚胎，例如算術中的代數，將未知數利用已知數求出；入門的是指，小學為數學學習的一開始，對於數學內容呈現的形式必須要簡單和容易，而這些看似簡單的概念會深植在學生的心智中，一直持續到往後的數學學習。換句話說，教小學數學最重要的是要建立一個良好的根基以幫助學生做更長遠的學習。

Ma (1996)提到，教師必須具有「對基礎數學的深刻理解」(PUFM)，這是指教師對知識的理解必須具有廣度(breadth)、深度(depth)和透徹性(thoroughness)。其中，廣度是將主題連結到相似概念的能力，深度是將主題連結到學科中更大(bigger)或者有力(powerful)的概念的能力，這個概念也能夠同時支持其他主題，透徹性則是將廣度與深度合併，貫穿領域中不同部分編織為一致的主體的能力。具有 PUFM 的教師在教學和學習上會展現四項特徵：(1)連通性(connectedness)，從簡單表面到複雜內在、橫跨不同數學領域的能力，使學生學習到的是一致的知識主體，而非破碎的片段；(2)多重觀點(multiple perspectives)，能夠欣賞概念不同的面向以及問題的多樣解法，教師能帶領學生對學科有更彈性的了解；(3)一致性(unity)，並不受限於某個年級該教的東西，而是對整個小學數學課程有基本的了解，教師能安排機會帶領學生回顧以前已習得的重要觀念，也能為往後的學習建立合適的基礎；以及(4)基本概念(the basics)，教師能察覺到簡(simple)而有力的基本概念，並帶領學生重新檢視以及加強基本概念。連通性是 PUFM 在數學教學中的一般特徵，後三者則可視為連通性的三個種類。Ma 強調，其實 PUFM 沒有清楚的邊界，因此，難以判斷教師是否具有 PUFM，她可能展現在所教年級的課程中，卻沒有展現在其他年級的課程中，事實上，PUFM 是教學實作的一個結果。

(五) 范良火的觀點

范良火(2003)認為，當我們在討論知識時，知識所涉及的三個部份是很重要的：(1)認知者(the knower)，知識的主體(知道的人)；(2)被知體(the known)，知識的客體(被認知的對象)；以及(3)知識過程(the knowing)，主體和客體的交互作用(怎樣認知)。所以，他將一個主體對於一個客體的知識定義為是認知者和被知體之間一種交互作用的智力結果(ibid，頁 13)。所謂智力結果是指，主體從交互作用中所獲得的智力上的或者說是認知上的成就，包含信念、記憶或是理解，而不是某種心理情緒、傾向或是意願。智力結果並非一定可以用言語表達，或者是認知者所沒有意識的，所以，它可以是隱性的也可以是顯性的。與其他學者不同的是，這樣的定義表示知識可以是正確的或錯誤的，因為它源自於一種交互作用，但是，他並不將「假的知識」(ibid，頁 37)排除在外。這是因為，教師知識無法完全斷定是正確的或是錯誤的，即便是錯誤的，探索錯誤知識的來源也有價值。所以，在這樣的定義之下，知識是一個過程的結果，而非過程的本身。

對於教師知識，不同學者分別給出多少有些不同的認知模型，但是，造成模型間極大差異的原因在於，大部分是理論性的和人為的(Gilbert, Hirst, ＆ Clary, 1987)，而非以實證為基礎的，因為，主要反映的是研究者個人的教學信念、經驗、專長以及研究興趣和領域(范良火，2003，頁 18)。儘管如此，有兩種基本知識是學者間共通的，亦即學科知識和教學知識。知識可以是各種形式或類型，包括關於事實的知識和關於事物的知識、知道什麼和知道怎樣、隱性知識和顯性知識，以及直接性知識和間接性知識。從定義來看，教師的教學專業知識包括教師所知道的，與他們課堂教學有關的教育學(pedagogy)方面的所有東西，教師成為認知者，與教學相關的東西變成了被知體，而交互作用就是教師自己創造或者學習的過程(ibid，頁 13)。他主張交互作用是想強調，有時候客體並不是固定不變的，而主體認識客體的過程是動態的，另外，並沒有絕對的知識，因為，知識的主體和客體都是先於知識本身而存在的(ibid，頁 35)。范良火將教師知識只關注於教師自身專門做為教師時所擁有的知識，他將教師的教學知識再細分為三類：

(1)教學的課程知識(pedagogical curricular knowledge，簡稱 PCrK)，關於包括技術在內的教學材料和資源的知識；(2)教學的內容知識(pedagogical content knowledge，簡稱 PCnK)，關於表達數學概念和過程的方式的知識；(3)教學的方法知識(pedagogical instructional knowledge，簡稱 PIK)，關於教學策略和課堂組織模式的知識。

呼應 Shulman (1985)對 PCK 的主張，范良火的 PCnK 是指他們對於表達數學概念和過程的方式的知識(2003，頁 116)。他將教學知識的來源分為作為學習者的經驗、教師的職前培訓、教師的在職經驗三個主要的部份。特別的是，在職經驗的子成分中包含了「自我反思」，反思意指，使專業工作從經驗中學習的一套過程。他認為，如果沒有從親身的教學經驗中自我反思，那麼，教師能從這樣的經驗中所學到的數量和質量都將是十分有限的。他的研究結果發現，教師自身的教學經驗和反思以及和同事的日常交流，這是教師關於教學的課程知識中最重要的兩種來源。教學經驗的實踐不僅能加強或鞏固教師原有正確的或可行的知識，而且，也可以為教師提供重要的機會獲取或創造更多新的知識。

(六) Ball 和 Bass 等人的觀點

Ball (1989)提出「knowledge of mathematics」與「knowledge about mathematics」的差異，前者是指對特殊主題、步驟、概念的理解以及它們之間的關係，後者則是對本質的理解以及關於數學的談論。她強調教師要重視學科知識的本質，亦即，了解它從哪裡來、它如何轉變以及如何被建立起來。若教師的學科知識只限於正確的事實、概念、理論和過程，這是不夠的，教師還需要知道所教學科的性質、結構和認識論，以及它在文化和社會中的存在意義(Ball, 1990a)。Ball (1988)在她的博士論文中提到，她會詢問職前教師認為數學是什麼？如何去教它？學生要如何學習才符合數學教學？何謂將數學以及數學教學做連結？這些問題並不是要

去強調職前教師缺乏什麼，而是希望能辨識到她們帶了些什麼進入專業準備中，而它可能會對學習去教數學有所貢獻或產生阻礙。透過了解教師的知識才能規劃出合適的師培課程，也才能藉由師培課程的刺激提昇教師的知識。

Ball 和 Bass (2000)認同 Shulman 所強調的 PCK，並且將研究工作建立在 PCK 之上，希望提供教師關於實作中所需的數學知識內容，以及本質和相關角色的補充。他們認為，PCK 是一種特殊形式的知識，將數學知識和學習者、學習以及教學綑綁(bundle)在一起，綑綁後的知識可以為教師在教數學上提供一個重要來源，它可預期學生可能遭遇的困難以及可能處理的不同方法，協助教師避免掉可能的挑戰。然而，他們強調，綑綁的知識不能夠永遠賦予教師在處理教學複雜性所需的彈性，因為，在真實教室中，內容和教學總會持續動態地互動，使得 PCK 無法完全預期到學生會如何思考、教學主題在教室中如何被發展，或者需要對一個熟悉的主題給予新的表徵等等。所以，教師在教學中遇到新的情境時，要能同時兼顧內容、學生、學習和教學，培養調動不同領域知識的能力，以應付多變的教學情境。Ball 與 Bass 視教學是具有一般性(regularities)卻又帶有部份不確定性(uncertainties)的課堂教學實作，PCK 能夠處理一般性卻無法處理不確定性。教學的不確定性可能來自於：(1)不可能真正知道學生知道什麼；(2)教學知識本身的不完整；(3)與教學脈絡密切相關的數學知識所具有的內在不確定性。所以，研究的焦點不只放在教師需要知道什麼，也包含了她們如何使用知識(Cohen＆Ball, 1999)，特別是，在情境中教師知道些什麼(Lampert＆Ball, 1999)。

對於 Ma (1999)所提出的知識包裹，Ball, Lubienski 與 Mewborn (2001)認為，它可以為 PCK 表達出特別具有生產力的形式和結構，例如，大陸教師在研究中清楚地展現出開啟與培育學生心智的縱向過程以及 PUFM 的特質。PUFM 是動態的，具有 PUFM 的教師能夠根據脈絡，展現出教學所需的彈性(flexibility)和適應性(adaptiveness)，處理預期和非預期的教學事件，這也是 Ball 與 Bass (2000)

想探究的「教學中有用的數學理解」(pedagogically useful mathematical understanding，簡稱 PUMU)。他們強調，在此之前教師必須做到以下三個步驟：(1)解壓縮(decompression)，指的是教師必須拆解她的數學知識，因為數學是「壓縮」過後的學科，而壓縮的形式會讓教師無法察覺學生如何思考，應當要還原至學生可理解的基本樣式；(2)重組(decompose)，指的是教師重組數學任務，考量它多種可能的教學軌道並進行規劃，讓學生能夠操作與投入在數學活動中；(3)鬆綁(unpack)學生知識，指的是教師能夠理解以及傾聽他人的觀點，了解學生的錯誤或者欣賞學生異於平常的見解，鬆綁學生高度壓縮後所展現的知識(Ball＆Bass, 2000, p. 98)。這三個步驟是知易行難，教學本身就是思考的實作，不論教師具有哪些知識，缺乏對教學的敏感力以及縝密的思考，知識的層次便無法提高，難以達到教學中既定的目標。許多教師視教數學為理所當然，導致她們忽略了使用淺顯易懂的方式呈現數學概念，或者，難以理解學生的問題所在，造成教師的「預設教學軌道」(hypothetical teaching trajectory) (許秀聰，2005)和學生的「預設學習軌道」(hypothetical learning trajectory)無法真正銜接上。學習的主角是學生而非教師，倘若教師陷於自我主觀意識，則無法使教學與學習相得益彰，教學便只是一場教師的獨角戲。

Ball, Thames 與 Phelps (2008)提到，MKT 構想源自於 MTLT (Mathematics Teaching and Learning to Teach)和 LMT (Learning Mathematics for Teaching)兩項計畫。前者透過教學實作分析教學中的數學需求(demands)，並且建立在這些分析上，發展出一套關於教學用的數學知識本質的測試性假設；後者則是，發展檢測教數學用的內容知識的工具，即是 MQI 系統。MKT 架構圖的左半橢圓為 SMK，右半橢圓為 PCK，它一共分為六大領域(請參見圖 2-6)。Ball 等人(2008)將各領域的意涵說明如下：

(1) 一般的內容知識(common content knowledge，簡稱 CCK)：數學知識和技巧可被使用在除了教學的其他領域。例如教師需要知道她們所教授的教材；能夠

辨識學生的錯誤答案或教科書給的不正確定義；能夠正確使用名詞和符號。「common」並非指大家都會有這種知識，而是指它會被廣泛使用於其他領域，亦即它並非教學所特有的。

(2) 特殊的內容知識(specialized content knowledge，簡稱 SCK)：數學知識和技巧是教學所特有的。例如：回應學生「為什麼」的問題；判斷學生非標準的方式是否可以一般化；將表徵連結到其他概念或其他表徵；評估或調整教科書的數學內容；選擇及發展有用的定義；問具生產性的問題；有效地使用數學表徵，教師需要知道鬆綁後的數學知識。

(3) 內容和學生的知識(knowledge of content and students，簡稱 KCS)：結合知道關於學生和知道關於數學的知識。例如：知道學生如何思考、會在哪邊困惑；當給例題時，能預期哪些學生會覺得有趣以及有動機；給任務時，能預期學生可能會如何做以及他們是否覺得容易或困難；能夠傾聽以及解釋學生使用他們語言所展現的思考；知道學生的先備知識和迷思概念，需要教師對特定數學知識和對學生的熟悉與他們數學思考的互動。

(4) 內容和教學的知識(knowledge of content and teaching，簡稱 KCT)：結合知道關於教學和知道關於數學的知識。例如：教師安排教學順序，選擇起始例；評量不同表徵被使用在教同一個概念的優缺點；能辨識哪些不同的方法及步驟足夠教學使用；做關於哪些是學生要達成或哪些可以忽略的教學決定；知道何時要停頓做更多釐清、何時要提問新問題促進學生更長遠的學習；知道不同的教材對之後的發展有何不同。每一個這樣的工作需要在特殊的數學了解和會影響學生學習的教學議題這樣的了解間產生互動。簡言之，KCT 是一種混合物，包含了特殊的數學概念或步驟，以及對教特殊內容的教學原則的熟悉。

(5) 內容知識的水平(horizon content knowledge，簡稱 HCK)：它好比是數學周邊影像(peripheral vision)的中心，一種被教學所需要對數學具有較大的視野；它被定義為將教學放置在較大的數學視野(landscape)的一種察覺，意指要做有經

驗且具有鑑賞能力的旅行家，而非普通的導遊；它是一種對高等知識的基本洞察力，能夠賦予教師對教學工作具有更廣、更特別的影像與引導(Ball＆Bass, 2009)。

(6) 內容和課程的知識(knowledge of content and curriculum，簡稱 KCC)：指教師做為職業所具備的教材和教學計畫的掌握(同 Shulman 的課程知識)。

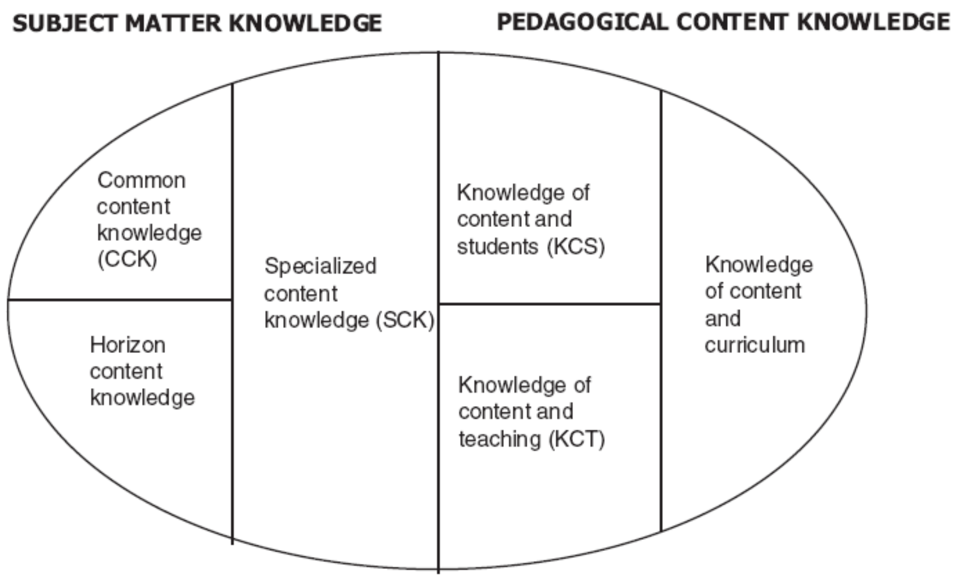

圖 2-6：MKT 架構圖(引自 Ball, Thames, ＆Phelps, 2008, p. 403)

Ball 等人(2008)將 Shulman (1986)的領域做了更精煉的圖表(請參見圖 2-6)，展現出與 Shulman 原先領域的對應性，並且暫時先將 Shulman 的課程知識放置於 PCK 中，然而，他們並不確定是否它確實為 PCK 的一部份，或者它蔓延於其它的領域中。不同的是，他們在 SMK 中暫時地放入了第三個領域，並稱之為「horizon content knowledge」，同樣地，他們無法確定是否它確實為 SMK 的一部份，或者它蔓延於其他領域中。關於 HCK，Ball 與 Bass (2009)這幾年致力於想要了解它更多的意涵。最近，建立於因子分析上的經驗結果顯示，教學用的內容知識是多面向的(Hill＆Ball, 2004)，所以，在這裡所提議的領域是否正確並非最重要的。Ball 等人強調，要從一個領域中分辨出另一個，或者明確說明彼此間的邊界，其實是很困難的，因為教師會在情境脈絡中整合所有知識。在研究工作中，他們強

調了三個特別的問題：(1)由於理論架構建立於實作，然而它也帶來了一些本質上的混亂，以及在教學和學習中的變數，例如教師可能會在相同的情境下卻使用不同的知識；(2)領域看似是固定的，雖然安排一些問題測試那些教學用的數學知識，並設計安排在某種它會被使用的脈絡之下，然而這樣的知識實際上如何被使用，或者教學思考中的哪些特徵形塑了它的使用仍然是未被檢查的，亦即，不同領域的知識如何在教學中發揮作用仍需要做些更有效地描述；(3)需要對這個教學用的數學知識(MKT)構念是否為文化所特有，或者依據教學風格有更清楚的了解。

最近，在密西根大學的演講中(2009, 5, 21 at University of Michigan)，Ball 與 Bass 等人談到他們致力於發展教師的 MKT，特別是其中的 SCK，並且展現出相關的數學任務。他們強調，教 MKT 的挑戰在於仍需要把焦點放在數學上，而非如何去教數學，然而 MKT 也不能只聚焦於 M (mathematical)，必須足夠並具有說服力地鬆綁數學，以協助教師看見什麼要學、要做，讓教師在教學中必須要做的數學思考、猜測、推理的連結能夠被看見。演講中也舉出美國教育研究協會年度會議(2008, 3, 24 at New York)中一般對於測量「教師知道什麼」的方法，並且發現以下的結果：(1)教師證的取得，一般與學生成就不相關；(2)學科特別的教師證的取得，在國高中學校中與學生成就有低度正相關；(3)修數學課程的數目以及數學學位的取得，在高中學校有正相關但並不一致，而且具有選擇性的效果。

(七) 實徵研究

Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep 與 Ball (2008)試圖研究 MKT 和 MQI 的關係，他們相信數學知識在教學中扮演重要的角色，尤其是教學中特殊的內容知識。首先，他們選取十位教師，必須完成九節課堂教學的錄影以及 MKT 的紙筆評量，並使用 MQI 對課堂教學做分析，最後再使用五位教師的研究

結果去描述 MKT 和 MQI 的關係。主要探討教師的 MKT 和 MQI 之間的關係強度為何？MKT 有哪些足夠承擔教學？而 MKT 所缺乏的會如何限制教學？哪些變因影響 MKT 在教學中的表現？在哪些教學任務中 MKT 是較顯而易見的？

每位教師都需要收集以下四種資料：(1)MKT 的紙筆評量：包含了 34 個評量的項目。這個評量是為了設計去獲得教師一般以及特殊的內容知識；(2)課堂教學的錄影：分別在 2003 年的春天(為期一周的數學專業發展前)、2003 年的秋天以及 2004 年的春天各有三節；(3)課後訪談的報告：針對該堂課的相關問題，例如課堂目標為何；(4)訪談：分為一般訪談和臨床(clinical)訪談，一般訪談的問題關於專業發展的經驗、對於數學教學的看法等等，臨床訪談則要求教師解決 MKT 中的 18 個評量項目，並回想自己以前如何進行相關的教學，這有助於了解 MKT 中的教學內容與學生的知識。他們使用質化與量化的研究方法，為了回答前面三個問題，他們使用 MQI 去評鑑教學，並將所得的分數與教師在 MKT 的紙筆測驗中所得的分數做比較。最後挑選出 5 位做更深入的分析，包含了一位具有高 MKT 和高 MQI、一位具有低 MKT 和低 MQI、一位 MQI 表現比 MKT 好、一位 MKT 表現比 MQI 好，以及 MKT 排名第五的教師。

他們認為教師知識與教學品質有關，而且教師知道什麼、教師如何知道它以及教師在教學中能夠做什麼，彼此之間有著強烈的關係，甚至教師知識會形塑教師對學習者該如何學習或者課程知識的相關信念。他們的研究結果顯示，教師具有較高的教師知識在教學中較能避免錯誤，呈現較嚴謹的教學，並且能夠給予許多豐富的數學例子、較能回應學生、展現較具技巧性的教學、提供學生公平的機會去學習。教師具有低教師知識的研究結果則較多變化，他們也會呈現一些高教師知識所展現的特徵，但是，當他們這麼做的時候，多是因為有教科書的協助或者因為專業發展的經驗。此外，數學內容的豐富性、將教室任務連結到數學、適當地回應學生問題與教師知識具有中度相關；對課程教材的使用、對於數學的信

念、教師專業發展的影響都有可能降低或提昇數學教學的品質，其中，教師對課程教材的選擇似乎能夠增強教師的 MKT，信念也會影響教師的 MQI 和 MKT 的關係，專業發展則較為無關。

最後，他們提供幾個不同的思考方向，例如鼓勵學校讓具有較高數學知識的教師只教授數學這個學科，將可用的專業學習資源集中在少部分的教師身上，有助於提昇數學教學的品質。在形塑專業的本質和專業教育上，他們認為必須要讓教師對所教的數學課程有連續以及終生的專業發展，並且將教師的學習建立在真正的教學活動中，以內容的需求以及學生的學習為中心，帶領教師的專業發展。

二、 研究者對教師知識的立場

Fennema 與 Franke (1992)認為信念為教師知識的組成之一，而 Ma (1996)將教師對數學主題的理解架構圖分為四層，最後一層強調數學結構中的基本原則和基本態度。因此，個人認為，基本態度不僅包含對數學本質的認識，也可能包含對數學教學的認識，甚至包含了教師個人的教學信念，而貫穿在整個數學教學實作中。所以，信念會影響教師在教學活動中對知識的展現。

知識包含各種類型，個人認為知識有外顯和內隱兩面，外顯指的是觀察者可直接由教學活動中觀察到，內隱則是無法直接觀察到。在教學活動中，教師知識會相互交替作用，所以，不被觀察者直接觀察到，並不表示教師不具備這樣的知識，有可能是被隱藏於腦中並且隱隱地影響其他知識。此外，某種教師知識並不必然恆為外顯或內隱，可能教師在面對某些教學單元時，它較為外顯，反之，則較為內隱。

Ball 等人(2008)的 MKT 或者 Ma (1996)的 PUFM 都提供很好的架構協助去分析教師知識，但是，個人認為並非教師具有 MKT 的內涵就沒有 PUFM，反之亦然。MKT 和 PUFM 在某些地方有所重疊，在某些地方也有所差異，教師可能會在某些教學單元較凸顯 MKT 的特徵，某些教學單元則較凸顯 PUFM 的特徵。甚至，有的教師比較偏向 MKT 取向，有的則偏向 PUFM 取向。MKT 與 PUFM 並非二分法，強調的應當是教師大部分的教學適合使用何種理論架構加以詮釋。

三、 小結

教師、學生、課程和環境(milieu)為教學的四項基本元素(Schwab, 1978)，其中教師與學生更是密不可分。如同 NCTM (1991)在教數學的專業標準(profession-al standards for teaching mathematics)中，定義數學教師的主要角色為：(1)創造教室環境以支持數學的教與學；(2)設定目標並選擇或安排數學任務，以幫助學生達成目標；(3)激勵並經營課堂談話，使師生更明瞭所學；(4)分析學生學習、數學任務和環境，以便為正在進行的教學做決策，其中每一項都以協助學生學習為最大目標。教師知識會影響教學實作，具有整體性和連通性的課程知識結構，賦予教師在教學中較大的彈性和運用性，知識應當是一體的，不可切割。然而，即便多位學者使用不同的眼光將它拆解開，最終在教學中展現的是知識的融合。

Shulman (1985)所提的 PCK 或者 Ball 等人(2008)的 SCK 都有助於讓教師成為一個專業人士，強調教師在數學教學中所展現的智慧和能力。然而，教師的數學能力並不等同教學能力，數學好並不代表教得好，重要的是，教師是否能夠將知識解壓縮，再將它重組，轉換(transform)為學生理解的模式，並且傾聽以及設法理解學生的想法。范良火(2002)認為，知識是一種主體和客體智力交互作用的結果。個人則認為，學生在建構知識時也是如此，必須要與數學互動，才能產生

知識，即便學生產生的是假的知識，也有學習的價值。此時教師的角色即是協助修正，陪同學生一起建構正確的知識，讓學生在學習中獲得成就感。此外，如同Ball (2001)所說，教師不會永遠使用她們所知道的，她們所知道的可能無法完全符合教學脈絡的需求，所以，在教學前即便教師在心中已預設好教學的劇本，但是，劇本並不見得完全符合教學的實況，這是由於「教學中的不確定性」的因素。因此，教師的教學實作知識應當是流動的，依循教學脈絡而被調度和整合，才能順應不同的教學情境作出合適的教學安排和選擇，故它必須具有脈絡性。Fennema 與 Franke (1992)也主張教師知識具有脈絡性，同時，他們兼顧到教師信念在教學中的影響，信念會與不同知識組成發生作用，帶領出教師不同的教室行為。然而，正因為教學的實作知識是一連串動態的轉換，並且背後有信念的驅使，使得真正要了解它成為一件困難的事。

Ball 等人(2008)在 MKT 的研究中提到，真正要區分不同領域的知識並不容易，也因此測試的工作充滿挑戰性。個人只能在數學教學實作中盡可能探究之間的關係，至於，這樣的關係在不同脈絡中是否仍舊固定與正確，則無法肯定地回答，僅能就當時教師所展現的數學教學實作給出合適的解釋，再搭配其他研究資料加以佐證。Ma (1996)發現大陸國小數學教師展現 PUFM 的深度、廣度和透徹性，國小數學是基礎數學，更是學生在學習數學的開端。那麼，台灣的高中數學教師更需要期勉自己以 PUFM 為目標，因為，高中階段的數學內容比較抽象，結構也比較廣泛，故充分掌握課程間的連通性越顯重要。唯有教師成為精通的掌舵人，才能帶領學生悠然地航行於數學知識之中。雖然，教師的數學教學實作知識是流動的，但是，資深數學教師所展現的知識結構相較於新手教師(novice)較為穩固，對於 Ball 等人的 MKT 或者 Ma 的 PUFM，或許在台灣資深高中數學教師身上，我們能找到一些相似的證據。

第三章　研究方法

本研究的目的是，探究資深高中數學教師的教學實作知識及其教學思考。為此，個人進入實際的教學場域中做課堂觀察，重視每個教學事件，試圖對關鍵性的教學事件給予豐富的描述，並且，在課後與個案教師進行訪談，探討關於「why」以及「how」的問題，想了解數學教學事件背後的意義，以及個案教師對教學的想法和對數學的觀感，因而使用質性研究法。在收集相關的資料之後，需要選用合適的編碼系統，並且，調整編碼系統以符合實際教學情境。本章共分為四節，第一節描述研究場域和研究參與者，第二節說明質性研究和個案研究的意義、研究設計、資料收集和資料分析，第三節說明本研究的設計，包含資料收集的階段、資料來源、資料整理和分析，以及編碼系統與其信度，第四節說明可能的研究限制。

第一節　研究的場域和參與者

本節說明研究的場域、研究的教學單元、研究的參與者和個案教師的背景，以及選取教學單元和個案教師的理由。

一、　研究的場域

研究場域為台北市某公立高中二年級第三類組的班級教室，此校學生的程度頂尖，PR 值近 99，學生多來自社經背景較高的家庭，學生家長多從事醫生、教授、律師、教師等等。由於這是一所名校，學校較重視升學率，進而影響教師的教學或者學生的學習風氣。個案教師多以講述式教學為主，以應試為取向，很少要求學生回答或者是上台解題，又因為都是女學生，生性較害羞，故鮮少發問，多是安靜聽講。本班恰為資深個案教師的高二導師班，因此，個人亦可看到教師

教室管理的部分。研究的教學單元分別為空間平面方程式(98 上學期)、空間直線方程式(98 上學期)、重複組合(98 下學期)以及數學期望值(98 下學期)，每週六堂課，一個單元約進行 1～2 週。個人試著從幾何、離散和機率三個不同的數學角度做觀察，希望對個案教師的教學與思考有較周延的描述。由於，98 學年度個案教師均教授高二數學，而選定這四個單元的原因主要有兩項：(1)經研究團隊與專家諮詢教師討論之結果；(2)個案教師認為這些是比較值得觀察的單元。個案教師使用的教學教材包含自編講義、課本、習作以及校內數學科自訂之補充教材，上課時的教學流程以自編講義為主，後三者則讓學生回家自行練習後，再擇期檢討。

二、 研究參與者

本研究的參與者包含了研究團隊以及個案教師，以下說明團隊的成員，以及個案教師的背景。

(一) 研究團隊

本研究為 1 年期之國科會數學教育專題研究計畫「資深高中數學教師 MKT 的初探研究」的一部分，共邀請 3 位有經驗或資深的(experienced)在職高中數學教師作為個案，以初步探究其教高中數學時展現的 MKT 內涵，並嘗試發展檢測高中數學教師 MKT 的工具(金鈐，2009)。參與的研究人員包括一名數學師資培育者(以下簡稱 TE)、一名高中退休之專家諮詢教師(以下簡稱 PT)、一名個案高中數學資深教師(以下簡稱李師)、兩位碩士研究生(以下簡稱 I_1、I_2)以及兩位博士研究生(以下簡稱 I_3、I_4)。TE 為本計畫的主持人，I_1(個人)進入李師實際的教學場域拍攝教學影帶，於每週的定期小組會議中播放、分析並討論，PT 提供自

身相關的高中數學教學經驗，以刺激研究團隊的思考，最後 I_2 協助 I_1 做信度的檢驗，以利 I_1 了解李師的高中數學教學實作知識。

(二) 個案背景

李師為研究計畫中的研究對象之一，畢業於師範大學數學系，實習後直接踏入教職，在第一所高中任教 3 年後，轉任至現在的學校至今，已於高中任教 30 年，教學經驗非常豐富。由於，之前在他校教導高三學生成效均佳，故轉任至現任學校後，經常教導高三班級，98 學年特別擔任導師工作。本研究選取資深高中數學教師作為個案研究對象的原因有二：(1)資深教師的知識結構已經相當的穩定、不易變動，適合研究者做分析；(2)目前研究高中數學教師 MKT 的文獻不多，這應該是個很好的嘗試。而且，高中教師的數學素養普遍比小學教師要高，高中數學的內容也比較抽象，研究者比較容易看到教師的數學功力和教學功力。

第二節　質性取向的個案研究法

本節說明質性研究法的意義及其特性，和個案研究的意義、研究設計、資料蒐集與資料分析，以及採用的原因。

一、 質性研究法

從小到大，考試的題型不外乎選擇題、多選題、填充題，只有對或錯的標準答案，進入大學之後，開始接觸申論題，學習提出自己的見解或者為他人的見解發表意見，批閱的人無可避免會持有個人主觀意識。所以，分數不再具有決定

性的意義，因為沒有所謂的標準答案。每個人的想法都應該值得被尊重和了解，而非對錯或者一個數字即可表述，而這正是質性研究(qualitative research)所重視的意義(meaning)。何謂質性研究？它意指，非由統計程序或其他量化方法(quantitative methods)來獲得研究發現的任何類型研究(Strauss＆Corbin, 1998／吳芝儀、廖梅花譯，2001)[1]。它最早起源於 19 世紀中葉歐洲的英國和法國，他們利用這樣的方式來了解人們的經驗和生活，包含人與人之間的談話、感受和互動等等，尤其重視脈絡、意義和過程，所以，有人稱質性研究的資料為軟的(soft)資料。進行質性研究，意指要忘卻對於研究的社會建構，並且要開放自己，來運用不同的字彙並建構不同的研究歷程，而質性研究者的目標則是，想更加理解人類的行為和經驗，以尋求掌握人們建構其意義的歷程，並描述這些意義是什麼(Bogdan＆Biklen, 1998／黃光雄主譯，2001)。接著，我們透過 Bogdan 與 Biklen(頁 12)為質性研究所界定的五種特性來更了解質性研究的精神：

(1)自然的：以實際場域作為直接資料的來源，關心的是背景脈絡(context)，研究者想知道的是資料在哪裡產生的？如何產生的？又是在什麼情況下產生的？故質性研究也常被稱為實地工作(field work)；

(2)描述性資料：蒐集而來的資料是以文字或圖像的形式呈現，而不是數字。研究者在蒐集描述性資料時，是以極盡挑剔(nitpicking)的方式來接近這個世界；

(3)歷程的關注：研究者關注研究歷程(process)，而不僅是成果或結果；

(4)歸納性的：將理論由下而上發展，將許多相異的片段相互連結成集體的證據。研究者以歸納的方式來分析資料，而不是尋求證據來證實或否正在研究之前所持的假設；

(5)意義：研究者關心不同的人如何建構他們生活的意義，亦即關心參與者觀點(participant perspectives)。

[1]本人紮根理論乃參考吳芝儀、廖梅花(2001)翻譯 Anselm Strauss＆Juliet Corbin (1998)《Basics of Qualitative Research：Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory》的中譯本，所以，文中的頁數意指中譯本的頁數，而且再次引用時將不再寫出譯者，僅列出原作者、原版出版年份與中譯本出版年份。之後，行文亦遵循此原則。

質性研究最著名的代表方法即是參與觀察(participant observation)和深度訪談(in-depth interviewing)，而這兩者也是本研究的主要方法。個人在李師實際的教學場域中收集資料，關注數學教學中的每個片段，透過觀察對他的教學與思考給予厚實的描述(thick description) (Gilbert Ryle, 引自 Bogdan＆Biklen, 1998/2001)；並參閱他的上課講義或者考卷等文件，再透過與李師深度訪談，瞭解他在數學教學中所展現的意義，或者是那些更高層次、更內隱的想法，訪談多是採用非結構式(unstructured) (Maccoby＆Maccoby, 1954, 引自 Bogdan＆Biklen, 1998/2001)，以開放的問話方式，引導李師能根據自己的架構來回答，而非遵循之前我們設計好的結構式問題；最後，透過多方的校正，來回的確認修改，提出歸納性的結論。Bogdan 與 Biklen (1998/2001)提到，質性研究者相信，接近人們的目標如果是在於嘗試去理解他們的觀點，即使不是完全的，也可以將扭曲資料提供者的經驗減至最少的程度。質性研究並非看圖或者看數字來說故事，最重要的是，保有與被研究者間的互動，透過閒聊或者訪談的方式，才能夠真正了解他的教學實作與思考，這樣的推論才更具有實質上的可信度。在研究過程中，個人經常需要秉持著如同漏斗般的分析方式，即便個案的教學故事不是最完美的，也該是最適切的。

二、 個案研究

個人接著說明個案研究的意義、個案研究的設計，以及研究資料的蒐集與分析。

(一) 個案研究的意義

Bogdan 與 Biklen (1998/2001)曾說：「如果你使用望遠鏡來研究微生物，或是用顯微鏡來觀察星星，你是無法成事的，因為你使用的取向並不適合這個研究

主題。」針對不同研究問題的本質和形式，研究者會選擇不同的研究策略，相較於實驗法或者調查研究法等其他研究策略，個案研究(case studies)常被用來回答「how」和「why」的問題，因為，個案研究是對一個場域、單一個體、文件資料儲存庫、或某一特定事件作鉅細靡遺的檢視(Bogdan＆Biklen, 1998/2001)。由於，研究者對於一組當時的事件沒有或只有極少的操弄，又是研究在當時真實生活背景中所發生的現象，故它屬於實徵探究(empirical inquiry)的一種特殊形式。探究意指，我們必須依賴多重證據的來源，不同的資料需能在三角檢定(traingulation)的方式下收斂，並且達成相同結論，而且必須得益於事先發展的理論命題，以引導資料的蒐集和分析。

以本研究而言，首先，個人持續在一個教學實際場域中對李師拍攝教學影帶，並對影帶做分析，注意他在每個細節上所做的安排，以及使用的語言和表徵，接著，針對影帶提出相關問題進行訪談，例如如何選擇教材或例題，或者為何提供三種不同的解法、為何選擇這樣的表徵來表達數學概念等等。個人透過分析數學教學事件或者訪談李師，試著探究數學教學事件的整體性、李師的教學特徵、教學實作知識及其背後的思考。

Yin (1989)提到，個案研究並不是一種收集資料的做法，也不僅只是一種設計特徵，而是一種周延而完整的研究策略(引自尚榮安譯，2001)。然而，許多研究者對個案研究存有缺少嚴密性、難以做推論及花的時間太久的三個傳統偏見。無論如何，許多研究者視個案研究為一種研究工具，同時也出現了許多好的個案研究代表，雖然，真正做好個案研究的技術仍沒有被定義出來，但是事實上，個案研究使得一個研究工作可以保留實際生活事件的整體性和有意義的特徵(Yin, 1994／尚榮安譯，2001)。

(二) 個案研究的設計

以最根本的意義來說，研究設計是一系列的邏輯，將完全只根據觀察或實驗而來的資料與初始的研究問題相互連結(Yin, 1994/2001)。對個案研究而言，研究設計包含了一個研究問題、它的命題(如果有的話)、它的分析單元、連結資料與命題的邏輯以及解釋研究發現的準則五個重要的元素，其中分析單元可能是個人也可能是團體，或者單一研究單元、多個研究單元。在研究前事先想好研究的問題，再透過擬定好的命題，由命題引導讓整個研究過程，將注意力集中在應該要檢視的事情上，選定好適合的個案(分析單元)，在研究中盡可能蒐集多方面的證據，連結資料與命題的邏輯，以利之後搭配不同的分析資料提出可信的解釋。

以本研究而言，並沒有事先命題的存在，而是根基於 Ball 等人(2008)所提出的教師 MKT 架構做教學觀察，針對個案資料提出假設性的推論。分析單元為單一個案和四個不同的數學單元，資料來源有教學影片檔(及其轉譯稿)、訪談錄音檔(及其轉譯稿)與教師自編講義，個人將不同的資料加以連結做三角校正。透過修正 LMT (2006) MQI 系統中的編碼，以符合李師實際的數學教學，再對教學影片檔作編碼和分析，經由編碼結果以了解其數學教學實作知識的特徵。

根據不同的設計情境，個案研究設計分為單一個案整體性、單一個案嵌入式、多重個案整體性和多重個案嵌入式四種基本類型。選擇單一個案研究的原因，可能是個案為一個成熟(well-formulated)理論的關鍵性個案。這些理論已經具體地說明了一組清楚的命題，以及這組命題適用的條件，亦即測試理論時，一個滿足理論上所有條件的個案，可用來確認、挑戰或者擴充這個理論。使用單一個案研究的第二個原因，可能它是一種極端或獨特的個案，這是臨床心理學中普遍的作法，由於，特殊的傷害或是失能可能是很少見的，所以，任何單一個案都值得記錄與分析。單一個案研究的第三個原因，可能它是揭露式個案(revelatory case)，

研究者有機會觀察和分析到一個之前科學研究無法探究的現象(Yin, 1994/2001)。

然而，單一個案設計需要謹慎小心地調查潛在的個案，以減少錯誤表達的可能性，並加強收集所需要的個案證據。如果個案包含一個以上的分析單元，也想注意到子分析單元時，則會採用嵌入式的設計，然而，如果只想檢查一個計畫或者組織整體的本質，就會採用整體性的設計(Yin, 1994/2001)。相較於單一個案，多重個案得到的證據通常都被認為是較強而有力的，也因此，整個研究常被認為是較為穩健的(robust) (Herriott＆Firestone, 1983, 引自 Yin, 1994/2001)。多重個案常被視為多重實驗，由於它採取複現(replication)的邏輯，這是為了想要達到：(1)預測類似的結果(稱為原樣複現，a literal replication)，意指在屬性相同的個案中重複出現個案的特性；或者，(2)可預測的理由，產生不同的結果(稱為理論複現，a theoretical replication)，意指在屬性不同的個案中做對照。然而，對於複現數目的選擇，取決於研究者對多重個案結果所想要達到的確定性而定，越高的確定性則需要越多的個案(Yin, 1994/2001)。

實徵的社會研究普遍採用的品質測試標準有構念效度(construct validity)、內在效度(internal validity)、外在效度(external validity)以及信度(reliability)四項。因為個案研究為實徵探究的一種，故 Yin (1994/2001)提到，每個個案研究的研究者必須盡可能增進研究設計在這四方面的品質，同時他也提出相關作法：(1)構念效度，是指對所研究的觀念，建立正確的操作性衡量方法，增加構念效度可以透過多重證據來源、建立一個證據鍊(chain of evidence)，或者請關鍵性的資料提供者檢視個案報告；(2)內在效度(只針對解釋性或因果性的個案研究法)，是指建立一個因果關係，以顯示某些條件可引導至其他條件或虛無(spurious)關係的區別，增加內在效度可以透過類型比對(pattern-matching)、建立解釋(explanation-building)以及時間序列(time-series)分析；(3)外在效度，是指建立一個研究的結果可被概化的範圍，增加外在效度可以透過在多重個案研究中使用複現邏輯；(4)信度，

說明資料收集過程等研究的操作因子，可以重複實施並得到相同的結果，增加信度可以透過使用個案研究的計畫書或者發展個案研究資料庫。

以 Yin (1994/2001)的觀點來看，本研究屬於單一嵌入式的個案設計，針對單一個案教師，探討李師的教學實作知識及其教學思考，以及是否在三階段研究中表現一致，故也關注到不同單元的分析。在前導研究(觀察第一、二單元)結束後，提出假設性的推論，再經過第一、二階段研究修正推論。個人使用教學影片檔、訪談錄音檔和文件資料，透過不同的證據來源以增加構念效度，並藉由提問式的訪談，讓李師為資料做解釋，並且比對三階段的研究結果，以增加內在效度。在完成每個研究階段後，個人與 I_2 相互做信度檢驗，避免產生可能的研究誤差和偏見，再根據信度的高低做討論與調整，以利下一個階段的信度檢驗。外在效度的部分，由於為單一個案研究，無法使用多重個案的複現邏輯，但是可預期的是，在相似背景的研究對象或者公立高中仍可能產生結果的局部複現。

(三) 個案研究的資料蒐集

個案研究者好比是一位偵探，絕不輕易放過任何蛛絲馬跡，保持高度的敏感度以及好奇心。個案研究的證據可能包含文件(documents)、檔案記錄(archival records)、訪談、直接觀察、參與觀察以及實體的人造物(physical artifacts)六種來源。以本研究來看，證據多半來自於訪談、直接觀察和實體人造物。訪談是非結構式、開放式的性質，不問是與否的問題，讓個案教師能充分表達想法，或者是針對想瞭解的問題做焦點式(focused)訪談。個人進入教室架設 DV 做直接觀察，不因研究者的介入而使被研究者扭曲原有的課堂情境，盡可能呈現最真實的一面。李師編撰的講義或者試卷，更是其教學知識的寶藏，抽絲剝繭開會發現其中蘊含的數學教學思維。為了使其中的思維能清楚被描述，須搭配訪談，因為「看似不起眼」的地方，個人卻常在訪談中經李師特地說明後才理解是「別有用意」。

個案研究中使用多重證據來源的需求遠超過實驗、調查等不同策略，Patton (1987, 引自 Yin, 1994/2001)介紹了資料、調查者、理論和方法論四種不同類型的三角檢定(traingulation)來提昇研究品質。三角檢定是借自三角學(trigonometry)，被航海與調查方面所使用，因為，在地圖上與另一物體的連線無法確定出精確位置，所以，需要第三物體的相對關係，三點形成一個三角形始可確認。本研究使用訪談、直接觀察和實體人造物即是在做資料的三角檢定，幫助提昇構念效度，尋求收斂的事實。

(四) 個案研究的資料分析

個案研究主要採用類型比對、建立解釋、時間序列分析以及程序邏輯模式(program logic model)這四種主要的分析技術(Yin, 1994/2001)，其中的類型比對和建立解釋為本研究的主要分析技術。在類型比對中，透過不同類型的比對，尋求原樣複現或者理論複現，以本研究而言，個人透過不同單元的類型，尋求單一個案的原樣複現，並且，希望在四個不同的教學單元中得到一致的結果。

在觀察課堂教學時，個人針對已觀察到的教學現象做解釋。解釋一個現象就是要訂出一組關於這個現象的因果連結(Yin, 1994/2001)，建立解釋的過程需要來回不斷折返，呈現出解釋的反覆本質，不斷地嘗試與修正。更重要的是，個人要在這樣的過程中緊緊扣住想要探討的主題，並且，尋找一串的證據鍊以支持推論。本研究的編碼結果是建立解釋的主要來源之一，透過編碼將數學教學活動做系統化的分析，有助於反映李師教學實作各類知識間的關係，更能將許多資料串連在一塊。

時間序列設計的基本邏輯是一群資料項目形成的趨勢，和以下三個趨勢比較的配合度：(1)研究一開始就提出且具有理論意義的趨勢；(2)事先提出一些對立

的趨勢；(3)任何假造的或對內在效度具威脅的趨勢(Yin, 1994/2001)。以本研究而言，將時間序列分為上下學期片段地觀察，Ball 等人(2008)的 MKT 為數學教師的教學相關知識提供一個分析架構，據此，個人可探究李師的教學實作知識是否具有 MKT 的內涵、是否與架構有所呼應。在三個研究階段中，每個階段可以尋找證據支持前一階段的假設性推論，或者，提出假造的因果關係，挑戰內在效度。所以，本研究多採用(1)、(3)混合的趨勢去看理論的發展。然而，程序邏輯模式在本研究中並沒有採用，它實際上是類型比對和時間序列分析兩種策略的結合，這種分析刻意的假定了自變項和應變項間的關係，是發生在一段時間中的一連串複雜事件，以教學實作知識而言，它具有脈絡性和流動性，本質是複雜的，如果個人刻意假定這樣的關係，將會過於僵化研究的進程。

第三節　研究的設計

本節將說明資料蒐集的階段、資料來源，以及資料的整理和分析，尤其是本研究課堂教學觀察的分析系統的調整和簡述，以及系統的信度檢驗。

一、 資料蒐集的階段

本研究共分為三個階段蒐集相關資料，從 98 年 10 月底至 11 月中觀察「空間平面方程式、空間直線方程式」為前導研究，99 年 4 月觀察「重複組合」為第一階段研究，6 月觀察「數學期望值」為第二階段研究。以下分別說明這三個研究階段的工作內容。

(一) 前導研究

因為外物的介入容易使平衡產生失衡，故希望減少觀察者效應，使教學和研究能做最真實的呈現，讓研究者、李師和學生習慣研究的情境，並且與李師達到共融的關係。選取「空間」做前導研究，是由於它比較抽象而且對學生而言比較陌生，透過實際的教室觀察，個人能對李師的教學模式和風格有初步的了解。前導研究包含兩個教學單元，共 18 節課，個人除了週三的課無法配合實際拍攝，委託小組成員 I_3 協助拍攝外，其他皆實際到場紀錄。主要資料來源為教學影片檔、訪談錄音檔和上課講義。訪談是增加推論可信度的方式，研究期間課前與課後的訪談並不固定，大多是針對當天的課程，或者個人特別好奇的部份先做簡單的訪談，待資料蒐集結束，經團隊討論和個人仔細斟酌過後，於期末進行約 1.5 小時的總結性訪談，問題內容包含課程內容編排、教學順序、概念表徵的選用等等。影片的拍攝有助於在訪談時協助李師回想當時的教學情境。前導研究是為了下一階段的研究做準備，主要的目的是建立合適的編碼系統。雖然，個人已有 LMT (2006)的 MQI 編碼系統可以參照，然而，礙於文化或者是個案教師的差異，必須再做修正以符合李師的教學實況，以利第一階段中能夠使之更精煉，並且做內部觀察者的信度檢驗。

在前導研究的過程中，剛開始的第一、二堂課李師與學生仍會有些許不自在，但是，後來已漸漸無視於個人和 DV 的存在，甚至於偶爾能與個人交談。在交談時，李師常開玩笑地說：「我上課很隨性很真實，好像都沒什麼好拍的」，正因此，讓個人能夠更真實地反映他的教學實況。訪談過程中，李師時常聊到過去的學習和教學經驗，這些經驗造就了他現在的教學和實作知識，甚至於是他對學生的關心與教學的信念。個人認為李師坦率並富有熱忱，他的想法不僅會在訪談中呈現，在課堂中也會無意地透露給學生。知識層面上，在個人困惑或者不注意的地方，經訪談後才發現背後具有李師的縱向課程知識在支撐，這也是訪談讓人倍感收穫之處。

(二) 第一階段

在前導研究中，個人對李師的教學模式、知識結構已有初步的了解，也已將編碼系統做適度修正以符合他的教學實況。本階段的研究單元為「重複組合」，不同的高中數學教師會有不同的引入方式，尤其它是排列組合的最後一部份，因此教師必然會有所統整，這正是單元吸引人之處。本階段的影片拍攝個人皆實際到場，共計 3 節課，於課程結束後 2 週進行約 1 小時的總結性訪談，訪談問題主要針對教學內容與順序的編排，特別會針對與前導研究相異之處進行詢問，以釐清差異的緣由，或者使用提問，對前導研究中所得的假設性推論做更進一步的確認。由於，本階段與前導研究的研究單元不同，故本階段的工作即是將編碼系統再做精鍊，期望在第二階段中系統會更為穩定和周延，能夠多關照到李師數學教學的不同層面。除了編碼系統外，在前導研究中所得的假設性推論，期望能在本階段中得到較為一致的結果，以增加本研究的可信度。倘若遇到不一致，則需思考是否修正個人的推論，或者是因為李師對不同教學單元持有不同的看法與教法。

(三) 第二階段

本階段最重要的工作在於，將三階段所蒐集的資料做整合，包含發展一個穩定、周延的編碼系統，並且，對假設性推論提供更多的證據，或者做進一步的修正。本階段的研究單元為「數學期望值」，一般而言，有些高中教師將數學期望值看成加權平均數，但是，這樣的說法並不完全適切。個人想要了解，李師會用什麼樣的觀點看待數學期望值。本階段的教學共計 2 節課，影片拍攝個人皆實際到場，於課程結束後 3 週進行約 1 小時的總結性訪談。訪談的內容與前兩階段並無太大差異，但是增加了整合三階段的問題。如此一來，除了提昇推論的可信度之外，亦可豐富研究資料。個人的推論除了來自於課堂教學觀察直接的感受之

外，大部分也來自於編碼分析的結果，故為了確保編碼結果的可信度，最後必須對系統做內部觀察者的信度檢驗，避免研究的結果涉及太多的個人主觀意見。

二、 資料的來源

本研究的資料來源為課堂教學觀察、教師訪談和文件資料，由於，不同的資料之間具有高度的互補性(Yin, 1984)，因此，需要透過資料的三角檢驗以尋求推論的收斂。以下將詳細說明不同資料來源蒐集的過程。

(一) 課堂教學觀察

McIntyre (1980)曾提到，使用系統化的方式去觀察教室活動，就是意味著要透過非參與者的觀察過程，為教室裡發生什麼提供客觀的證據。然而，即使試圖要對教室中發生的事件給予完整的說明，終將無可避免只是很部份的，而且，將被觀察者未知或不可知的興趣和偏見所曲解。Dunkin 與 Biddle (1974)也提到，應該要處理可能提供客觀特徵的教室事件，事件具有客觀意義指的是，它可以被一個沒有參與、對事件沒有貢獻的人所知道。故希望達到觀察的客觀性，可透過由複雜的教室生活中擷取與原先某特定問題相關的片段，以及，透過根據已定義好的規則對相關部份做選擇性的觀察和分類。透過系統化觀察，可以協助我們發掘某些數學教學的特徵。

本研究的課堂教學觀察系統引自 LMT (2006)所提出的 MQI 編碼系統(請參見附錄一(1))，再經過個人三階段研究的修正所形成(請參見附錄一(2))。它包含了以下三個主要面向：(1)教學形式和內容；(2)教學活動中數學領域的知識；(3)對學生使用的數學。這三個面向分別包含 11、17、5 個子項目，其中的(1)再細分

為教學形式、教學內容和教學的進行方式，分別有 2、3、6 個子項目，關於系統的詳細內容請參見第三小節的資料分析系統說明。三階段的課堂教學觀察皆是在教室後方架設 DV，捕捉師生間的教學互動和教學實況，之後，依上課時間和內容做分類，並將它們製成 DVD 以利往後分析。三階段的總節數共有 23 節，分別是前導研究 18 節、第一階段 3 節、第二階段 2 節，錄影時間長短不一，教學影片檔皆會轉譯為書面逐字稿(請參見附錄二)。倘若，李師做班級經營或者檢討非研究單元的習題，則捨棄這個部份不轉譯亦不做分析。個人進入李師的課堂是扮演觀察者的角色，並且詳細記錄他的上課內容，特別是，個人感到疑惑或驚訝之處，由於可能成為關鍵片段，故更須仔細記錄，以利之後訪談或者作為證據的來源。下表 3-1 為教學影片建檔表。

表 3-1：教學影片建檔表

錄影日期	錄影內容	錄影時間
2009.10.27	2-4 平面的方程式	47 分 30 秒
2009.10.29(2 節)	檢討 2-1、2-2 習題(不做教學分析) 複習平面方程式、操作題目	43 分 08 秒 48 分 02 秒
2009.10.30	操作題目、介紹截距式	43 分 37 秒
2009.11.03	複習截距式例題、介紹平面族	47 分 10 秒
2009.11.04	複習平面族例題、介紹平面夾角	44 分 39 秒
2009.11.05(2 節)	介紹正射影面積、點到平面的距離公式	30 分 55 秒 45 分 16 秒
2009.11.06	2-5 空間直線方程式	44 分 24 秒
2009.11.09	操作題目、介紹點和線的關係	45 分 08 秒
2009.11.10	操作題目、介紹點和面的關係	44 分 19 秒
2009.11.11	操作點與面的例題、介紹兩直線關係	47 分 42 秒
2009.11.12(2 節)	操作題目、介紹兩平行線距離、介紹兩歪斜線距離、介紹線與面的關係	46 分 39 秒 46 分 10 秒
2009.11.13	操作線與面的例題	46 分 07 秒
2009.11.18	檢討 2-4 課本、習題	46 分 47 秒
2009.11.19(2 節)	檢討 2-4 數學科補充講義、2-5 課本、 2-5 習題、介紹 2-6 二元一次方程組	45 分 35 秒 46 分 34 秒
2009.11.23	檢討 2-3、2-4、2-5、2-6 考卷	40 分 43 秒
2010.04.27	介紹重複組合 H	46 分 44 秒

2010.04.28	操作重複組合例題(含整合性題目)	44 分 45 秒
2010.04.29	操作重複組合例題(含整合性題目)	43 分 59 秒
2010.06.02	介紹數學期望值、操作例題	44 分 41 秒
2010.06.03	操作數學期望值例題	42 分 05 秒

(二) 教師訪談

Yin (1994/2001)提到，個案研究者必須要能提問好的問題、是好的聆聽者、有適應性並具有彈性、能掌握正在研究的議題、不應該因事前的想法而產生偏見，這些看似簡單，然而在實行上卻都是挑戰。個人進行訪談前均先詢問李師方便的時間，並徵詢他是否同意錄音，訪談的地點多半在該校一樓特教組的辦公室，除了李師與兩位研究者之外，並無他人在場，故可免於外界干擾並且擁有較大的自由。訪談的時間點分為課後訪談(當天上課後進行)與總結性訪談(於所有影片分析和討論後進行)，訪談問題的內容多是關於教學、學習和學生的想法。但是，並非每節都有課後訪談，只有當個人對某些教學內容有疑慮或好奇時才會進行，而且訪談時間長短不一，偶爾亦會與李師閒聊生活瑣事以拉近彼此距離。相對於課後訪談，總結性訪談的時間較長，在進行之前個人會先擬定好一組題目，再根據李師的回答做彈性的調整，故屬於非結構式訪談，對於模糊不明的回答都會進一步追問。由於，進行總結性訪談與資料收集結束間隔了一段較長的時間，擔心李師會忘了一些當時的教學內容，故需準備筆電以備不時之需，協助李師回想之前的教學內容。

訪談問題可以大致分為一般性問題、特殊內容問題、去脈絡性問題和整合性問題四類，分別舉例如下：

1.一般性問題：

(1)編排講義的來源為何？

(2)如何運用課本和習作？

2.特殊內容問題：【針對關鍵片段所擬定】

(1)這三種不同的解法，為什麼選擇做這樣的排序？是否有特殊的考量？

(2)為什麼要避談「外積」這個名詞？打算何時引進這個概念？

(3)為什麼截距式不使用平面方程式的一般式去推導？

3.去脈絡性問題：【並不受限於脈絡情境】

(1)自身的數學解題思維從何而來？學生的解題思維要如何培養？

(2)加深、加廣和加速若用於教學上，看重哪個部份？

4.整合性問題：【跨單元的整合，僅出現在數學期望值總結性訪談中】

(1)根據個人觀察，為什麼在三個階段中都使用起始例做開頭？

(2)前兩階段「以一貫之」的「一」相當明確，那麼數學期望值單元中提及的「一」是什麼？

通常訪談氣氛都很融洽，個人會對訪談內容做選擇性的轉譯，保留對研究有用的資料(請參見附錄二)，故不轉譯李師與個人的閒聊內容，並將訪談依日期和時間做分類歸檔，方便日後分析。下表 3-2 為訪談建檔表。

表 3-2：訪談建檔表

訪談日期	訪談時間
2009.10.29(空間課後訪談)	27 分 04 秒
2009.11.10(空間課後訪談)	33 分 23 秒
2010.01.14(空間總結性訪談)	1 小時 37 分 34 秒
2010.05.12(重複組合總結性訪談)	57 分 57 秒
2010.06.23(數學期望值總結性訪談)	57 分 33 秒

(三) 文件資料

文件資料包含李師的自編講義、課本、數學科補充教材和平時考考卷。自編講義是上課內容的核心，上課模式多為李師講解，而且，幾乎每個例題都有講

解。課本和數學科補充教材則是由學生課後自行閱讀與練習，李師通常會在章節結束 1~2 週之後再進行檢討。平時考考卷是由校內數學科教師輪流出題，有時並不當作測驗而是回家作業，故這個部分分析的價值並不大。文件資料中的自編講義是本研究分析資料的主要來源，由於是自編教材，故李師對於內容或例題的選擇和編排必然有他特殊的考量，除了可作為訪談問題的參考，也可以當作解釋分析結果的證據。

三、 資料的整理和分析

由於本研究為單一個案研究，分析必須盡量做到鉅細靡遺，而且，資料的來源必須更多元、更豐富。本研究收集到的資料共有教學影片檔 23 節、訪談錄音檔 5 次，以及李師三個研究階段的自編講義。以下將說明資料庫的建立、如何調整 MQI 系統中的編碼以形成本研究的教學觀察系統，以及課堂教學觀察資料的分析系統與其分析原則。

(一) 建立資料庫

如果，將研究資料喻為一片森林，那麼，資料庫無疑是一張地圖。一張好的、清楚的地圖，可以帶領你去發掘森林中各個不同的角落，重要的是，你能夠來去自如，不會迷失方向。將辛苦收集而來的資料和研究結果做有系統地分類和整理，有助於在每一次分析時能方便取用，甚至在研究結束後，將它印刷成冊，讓他人方便參閱。在上節中提到，本研究的資料來源為教學影片檔、訪談錄音檔和李師的自編講義，其中，教學影片檔和訪談錄音檔必須透過轉譯成文字的方式呈現。教學影片檔共有 23 節，為了方便索引，將教學影片轉譯依課程內容分為空間、重複組合和數學期望值三大類別，分別使用 A、B、C 來代表。訪談錄音

檔共有 5 次，訪談錄音轉譯用 D 來代表，自編講義用 E 來代表，原始的教學影片檔與訪談錄音檔則使用 F 和 G 來代表(請參見下表 3-3)。個人採用(X,Y)二元組的方式引用資料，其中 X 代表資料來源，Y 代表日期。若以編碼(C,20091110)為例，它表示 2009 年 11 月 10 日數學期望值單元的教學影片轉譯，(E,20091120)則表示 2009 年 11 月 20 日的上課講義內容，教學影片和訪談錄音的文字轉譯請參見附錄二。

表 3-3：資料項目的編碼代號

代碼	資料名稱	代碼	資料名稱
A	空間教學影片轉譯	E	李師的自編講義
B	重複組合教學影片轉譯	F	教學影片檔
C	數學期望值教學影片轉譯	G	訪談錄音檔
D	訪談錄音轉譯		

備註：教學影片檔與訪談錄音檔供原始資料備查之用

(二) 形成編碼

發展穩定和周延的觀察系統，有助於個人分析課堂教學，並且，為編碼結果提供可信的推論。本研究的課堂教學觀察系統引自 LMT (2006)的 MQI 系統，個人再依據李師的教學實況修正編碼，個人形成編碼共分為四大步驟，以下將分項說明。

第一步驟，個人先從蒐集到的課堂教學觀察資料中找出的重要事件、事物、行為，並將相似的事件、事物等歸類成一個類別。接著對 LMT (2006)的 MQI 編碼系統中的編碼進行刪減或增加，以符合李師的教學實況，並且對不同編碼提出操作型定義，並給予類別的特徵。

第二步驟，由於原先 MQI 中已將編碼做分類，個人只是在對不同類別進行增加或刪減，尤其重要的是，要在同類別中對不同編碼進行連結，或者表達不同的面向。以講解數學概念為例，可分為數學描述(不帶有解釋)、數學解釋和數學證明三類；或者，李師提及以前上過的數學概念，是提示教材地位，倘若更進一步將它連結到新概念，則是做概念連結。

第三步驟，資料統整使得觀察系統逐漸成形，接著必須對它做精鍊，對於缺乏的要補足、多餘的需刪除、涵蓋過大的則必須縮小等等。編碼初期的操作型定義，在經過不同階段的研究後，可能會發生不夠嚴謹或者過於限制的狀況，必須再重新精鍊它，以確保課堂教學觀察系統足以解釋不同的教學事件。此外，可從前一步驟中所獲得的類別關係，找出符合當初的研究問題、目的的類別關係。

第四步驟，編碼在三個不同的研究階段和研究單元中，可能會產生變化，個人針對變化的歷程給予說明，並在這樣的歷程中，發掘與研究問題相關的部分，有助於往後提出研究推論。同時，這也是精鍊觀察系統一個很好的機會，這表示，四個步驟並非必然線性地發生，而是來回反覆交錯著，這有助於提昇觀察系統的有效性。

(三) 課堂教學觀察資料的分析系統

在蒐集完三階段的課堂教學影片後，個人需要一個合適的分析工具，以利分析李師的數學教學實作知識。以下將說明課堂教學觀察系統的選用與調整、系統的簡述，以及系統信度的檢驗。

1. 系統的選用與調整

本研究直接選用 LMT (2006)所提出的 MQI 編碼系統，原先它是為美國國小數學教師所設計，但是，考慮到教育環境背景、國小高中數學的差異，以及教師教學的獨特性，故必須將它稍加修正才能真正適用於分析李師的數學教學。

首先，原先系統中的五大類別為「教學形式與內容」、「教學活動中數學領域的知識」、「對學生使用的數學」、「課程及教師帶領的數學特徵」、「數學的使用為了教學的平等」(請參見附錄一(1))。由於，第四類別關於教材的部分在實際課堂觀察中看不出來，而且，因為美國文化多元、種族歧視問題層出不窮，所以才特別強調平等的重要，然而，以台灣文化而言並沒有這樣的疑慮，故將原先第四、第五類別刪除。「教學形式與內容」原先即分為「片段形式(教學形式)」、「教學內容」和「課程形式(教學的進行方式)」三類，其中教學形式中，因為李師多為「全體活動」或「學生活動」，故刪去「小組活動」，而且因為研究單元已確定，教學內容只保留「幾何」、「離散」、「機率」。教學的進行方式中，由於李師會進行班級管理，或者談論其他非課程主體的數學，因為不在分析範圍之內，故增加「其他」的細項。最後，在前導研究中發現，李師會使用例題發展新概念，或者講解講義例題，故新增「教師示範例題」，以便與「介紹主要的工作或概念」作區隔。

關於教學活動中數學領域的知識，在教室觀察中發現，李師時常強調驗算的重要，而且，會同時呈現一題多樣的解法，或者同一個數學概念以不同的觀點來詮釋，故新增「數學驗算」和「多觀點」。原先已有的「工作中數學元素的發展」則改為「提示教材地位」，以擴大編碼涵蓋的範圍，因為，李師在課堂中除了會預告未來即將學習到的數學內容之外，也會帶領學生回想以前所學過的內容，這個細項可展現出他對整體高中數學課程縱向的了解。另外，由於前導研究的單元為空間，李師時常會拿平面的直線方程式做為先備知識或類比，故增加「比較」這個細項，以描述他對兩個不同的概念做類比或對照，不僅如此，「比較」也包

含了明確指出不同解法的異同處。高中教材抽象度較高、範圍較大，由於李師具有完備的課程知識，有可能會使用系統化的討論去教授新概念或者做總結，而且，他可能會連結既有的先備知識來引出新知識，故新增「分析」和「概念連結」。對學生使用的數學部分，因為，在前導研究中發現，李師與學生的課堂教學互動並不多，學生為被動學習的狀態，鮮少主動提出問題或者表達想法，故調整過後只保留「使用學生錯誤」、「使用學生成果」、「使用具體操作物說明數學概念」這三項較可能出現的情況，並且將「引出學生描述」和「引出學生解釋」合併為「引出學生回答」，同時新增「回答學生問題」以呈現學生提問的次數。

個人將 LMT (2006)原有的 MQI 編碼系統與個人調整過後的數學教學觀察系統整理如下表 3-4，由於「課程及教師帶領的數學特徵」、「數學的使用為了教學平等」已全部刪除，故僅列於附錄中而不列於表中。表中黑色加紅色為原先 MQI 的編碼，紅色是個人刪除的編碼，藍色為新增的編碼，最後，黑色加藍色才是本研究最終的數學教學觀察系統。調整過後的數學教學觀察系統分為 3 個主類別與 3 個次類別，以及 33 個細項，原有的 MQI 編碼系統請參見附錄一(1)。

表 3-4：MQI 與調整後的數學教學觀察系統之比較

主類別	次類別	細項
教學形式和內容	教學形式	1.全體活動　2.個人活動　3.小組活動
	教學內容	1.幾何　2.離散　3.機率 4.數的概念　5.運算　6.測量 7.資料　8.樣式、函數及代數 9.金錢、時間和行事曆 10.百分比、比率和比例
	教學的進行方式	1.概念回顧或檢討家庭作業 2.介紹主要的工作或概念 3.做總結　4.學生操作 5.教師示範例題　6.其他
教學活動中數學領	1.數學的符號 2.數學的詞彙或其定義	

域的知識	3.表示數學概念使用的語言 4.為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇 5.選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念 6.多重模型　7.對符號、具體的圖像及圖表做連結 8.數學描述　9.數學解釋　10.數學證明 11.計算錯誤或其他數學的忽視　12.數學驗算 13.多觀點　14.比較　15.分析 16.概念連結　17.提示教材地位 18.工作中數學元素的發展（將數學向前推移）
對學生使用的數學	1.使用學生錯誤　2.使用學生成果 3.使用具體操作物說明數學概念　4.引出學生回答 5.回答學生問題 6.教室工作連結到數學概念或步驟 7.引出學生描述 8.引出學生解釋 9.記錄課程中的數學工作 10.離開工作或問題

2. 系統的簡述

原先 LMT (2006)的 MQI 觀察系統以 5 分鐘為一個分析片段，但是，本研究為了確保資料分析的精確度，並且符合實際的教學狀況，個人依李師的教學內容來做片段切割。例如，解釋題意一個片段、學生操作一個片段(不論時間長短)、總結一個片段等等，有些例題或者證明並不適合切割，則會以整大段為一個片段，相較之下時間較長。本研究的焦點在探討李師的數學教學實作知識，所以，若是做一般班級經營(勾選其它)，則不做分析，並在教學活動中數學領域的知識使用陰影帶過(請參見附錄一(5))，但是，若李師談論其他非課程主體的數學(勾選其它)，可能仍具有部分分析價值，故不會使用陰影。接著，個人針對主類別、次類別及其細項採用文字敘述方式，說明歸納的準則並且舉例說明，各細項的歸納注意事項亦一併附在文字後方。

(1)教學形式和內容

①教學形式：說明學生上課的主要模式

(a)全體活動：教師領導全班共同討論或呈現數學教材

(b)個人活動：學生個別解題

②教學內容：說明教師教學的主要內容

(a)幾何：面積、周長、體積、形狀、角度、點、線、面、空間推理

(b)離散：組合、排列或計數問題

(c)機率：測量的方法、計算可能不同的結果或者包含組合、排列去計算機率的問題

③教學的進行方式：說明教師教學的主要模式

【此部分一次只能勾選一個編碼，以該片段的主體為主】

(a)概念回顧或檢討家庭作業：教師複習上次上課內容(或題目)或者前面已習得的內容，也包含檢討回家作業、或者之前的習題

例如：開始想啦，當初在平面的角平分線是怎麼算的？用上面的點到兩條直線等距離嘛，那是不是解出來用斜率去研判哪一條是銳角哪一條是鈍角。(A,20091112)

(b)介紹主要的工作或概念：教師引導或者講解主要的數學主題

例如：老師跟你們解釋一下什麼叫期望值，期望值的全名叫做試驗的，叫做數學期望值，那這邊我跟你講一個基本概念喔，教數學唸數學的都稱它叫期望值，然後唸物理的都叫數學的期望值，因為它不太相信這是真理啦。那有些人把它想的更誇張一點的是什麼，試驗的數學期望值，所以這種東西是一種很理想化，像那種柏拉圖的世界，那種非常理想化的東東啦。(C,20100602)

(c)教師示範例題：教師透過舉例講解新概念或者講解講義例題

例如：那我們稍微改個數據，比如說 $2x+3y+z=7$、$7x+5y-2z=8$，那像這種題目上你怎麼去做它？上面乘 2 就把 z 給消滅掉對不對？那加起來變成等於多少數據，$11x+11y=22$，$x+y=2$，那這個參數是不是一下就出來啦，可

以吧，所以有很多像這種題目上你就發現 x=t，y=2-t，z=1+t 這樣是不是就出來啦。(A,20091106)

(d)學生操作：學生個人或小群體做數學問題、數學思考或閱讀，非教師講解

例如：例題 1 喔讓你自己動手做看看，你就發現平常老師不太會做重複的題目，那當初老師寫講義發現這個地方是很容易算錯的，所以老師就在框框裡講一題，第一題就可以讓你們動手去做它。(A,20091109)

(e)做總結：課程已進行一個段落，教師為概念或解法提出結論或要點

例如：我們在最後一整節課講什麼結論，我要求平面的方程式你就拼老命想到一個什麼，這是它的法向量，(a,b,c)是不是找到它的法向量，再來想辦法找到上面的一個點，然後就瞭了，那這一點在哪邊有沒有什麼關係，無所謂，為什麼無所謂，因為向量可以跟著跑，可以吧。(A,20091029)

(f)其他：教師談論與進行中課程無關的話題，例如交代考試進度或者提醒作業、班級事務，也包含談論唸書方式等等

例如：老師跟你講過其實整個第二章的核心課程都在哪邊，都在這一段喔，2-5 這一段是相當難的一段喔，那後面很多蠻抽象的一些概念我想該講的老師也講，不該講的老師也都講進去了喔，可以吧，那老師的估算是大概下禮拜就可以把直線比較告一個段落。那 2-6 本身兩三節課就可以把它結束掉了，你們這個時候要趕快把 2-3、2-4 趕快把它給完稿喔。(A,20091106)

(2)教學活動中數學領域的知識

①數學的符號：教師第一次為概念給予符號表徵 (如 C、P、H)

【空間平面方程式的寫法 $ax+by+cz+d=0$ 不歸在此】

例如：這時候它改寫成什麼型態 C_k^{n+k-1} 看起來比較漂亮一點點，k 看起來比較舒服嘛，那這個東西好不好背？不好背，所以人類就創造了一個符號，創立了一個符號，這個符號的目的是要做什麼，讓大家比較容易記嘛，所以有

些符號你懂得它為什麼而來，他就想到說 H_k^n 。(B,20100427)

②數學的詞彙或其定義：提出或介紹新的數學詞彙或關於詞彙的定義(如介紹法線、直線的參數式、對稱比例式、兩面式等等或其定義)

例如：看講義第 23 頁就開始介紹什麼叫做它的法線，那在數學上講它的時候是這樣，這邊假設是一個平面 E，看的到吧，它就發現跟它垂直的直線，每一條跟它垂直的直線有無限多條，所以它說 E 是空間中的一個平面，你看講義 23 頁這邊，垂直 E 的這一條直線都稱做它的法線。(A,20091027)

③表示數學概念使用的語言：教師使用生活中常用的用語表達數學概念，包含使用隱喻、故事性的手法

例如：如果這邊有一個屋頂在這裡，所謂的正射影就是陽光從這裡照射下來，對不對。(A,20091105)

④為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇：教師對數學內容或數學問題中的數字、圖像或脈絡的選擇，或者使用真實生活中的情境，更包含了對例題編排的注意

【必須是教師在課堂中有展現選擇的意圖才算。上課中教師隨意舉例亦歸在此。】

例如：用重複組合這邊講一下概念，也有更難的題目上是這樣，比如說相同的七件禮物七件物品，分給三個人，對不對，可以剩下，也就是說它有沒有七件都一定要把它給分完？(B,20100427)

⑤選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念：教師選擇視覺的圖表、圖像或實體模型呈現數學概念或數學步驟 (請參見圖 3-1)

例如：我剛剛拿到一個這個模型，剛剛看到一個老師走過去……第一種想法是把老師手上這一點當成原點，對不對對不對？那你會想到這一點的座標是不是(1,0,1)，對不對？這一點是(1,1,0)，這一點是(0,1,1)，所以我們當初好不容易建立這樣一個正四面體。(A,20091027)

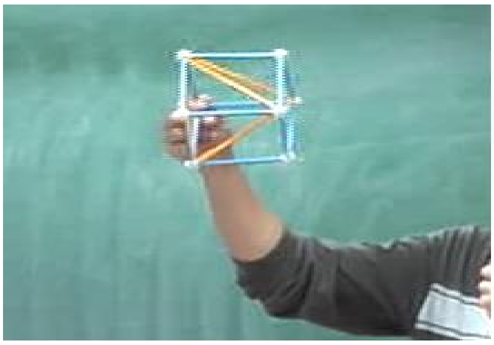

圖 3-1：選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念

⑥多重模型：教師使用多於一種的模型表達數學內容，指的是跨越圖形、圖片、表格、方程式、文字題目或數的步驟 (請參見圖 3-2)

【若是使用題目已給的模型則不能算一種模型】

例如： T：$\begin{cases} x \quad =2 \\ x+y=3 \end{cases}$，然後再做 $\begin{cases} x \quad =2 \\ \quad y=1 \end{cases}$，你這時候就發現到你看這條直線有沒有通過(2,1)？

S：有。

T：對啊第一條阿，第一條第二條阿，減出來 x+y=3，就變成這條直線啦，這是不是就 x+y=3，那麼這時候在用兩個把它怎麼樣減一減，減出來以後 x=2 是鉛直線，所以它其實到最後一個是鉛直線，一個是它水平線，就隨便你怎麼去做它。(橫跨方程式與圖形)

(A,20091103)

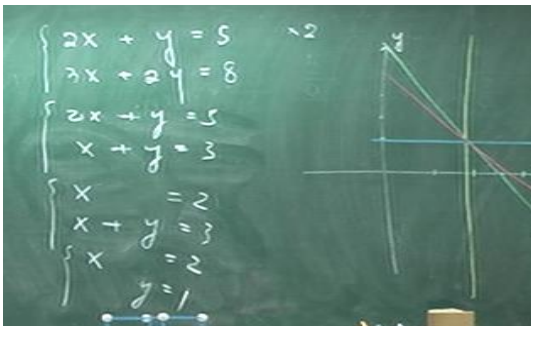

圖 3-2：多重模型

⑦對符號、具體的圖像及圖表做連結：教師對符號、具體圖像、圖表作有意義的數學連結，包含能比較表徵間的相似與相異

例如：所以你會發現 x：y：z＝$(b_1c_2-b_2c_1)$：$(a_2c_1-a_1c_2)$：$(a_1b_2-a_2b_1)$是

不是這樣的關係？ㄟ這個東西你背的起來嗎？背的起來才怪勒！……我們來慢慢的欣賞，這個就是哪一個中間這個，這個是不是就沒事，第二個在哪邊，我們來找一下來，這一個 y，剛好跟這個一樣($a_2c_1-a_1c_2$)有沒有，對不對，那再來第三個呢，再找一個來，這個 z 是在哪邊($a_1b_2-a_2b_1$)，這樣是不是就出來啦，對不對，所以有人就發現到說這個就是 x：y：z，用這種快速的方法馬上得到它的結果。(符號與圖像的連結) (A,20091027)

⑧數學描述：教師給予明確的數學步驟或計算過程(不需說明意義為何)

例如：老師在講這一段是想要轉達這兩個概念。這樣可以理解吧？第一個就是把 A' 給算出來 B' 給算出來 C' 給算出來，這個就是它的正射影面積。那第二個方式我們就先求三角形面積再乘以它兩面的什麼東西？是不是夾角，是不是就跑出來啦。可以吧？可以喔，那我想我先稍微介紹一下這裡的觀念。(A,20091105)

⑨數學解釋：教師對數學步驟或概念給予意義(說明為什麼但不需提供數學證明)

【如果數學解釋的主體是計算過程，則有解釋便不可再勾選描述，但是，如果數學解釋的主體是題目敘述，則兩者可能同時發生】

例如：如果一個向量跟平面上兩個向量互相垂直的話，我們那時候線性組合把它證明過嘛對不對，跟平面上任何向量都會垂直，其實理論上只要找到平面上兩個向量就夠啦，好，所以我們來試看看，你看這個東西 $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，也就是說 a-b=0，那你從這個題目上 $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，也就是說 a-c=0，那就得到 a=b=c，所以我們可以取到它的向量是(a,a,a)，但是沒有人想寫成這麼囉唆的東西，所以通常取它 $\overrightarrow{N}$=(1,1,1)這樣是不是就夠啦。(A,20091027)

⑩數學證明：教師對數學步驟或概念給予推理過程

【一般而言證明會包含解釋，故不再勾選數學解釋】

例如：當初這個面積公式是怎麼做的？我們用平行四邊形的公式，就是□

$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$，當初是不是都這樣寫的對不對？想起來了喔，平面這樣證，空間也這樣證，完全一樣的證法，來，這樣一個好偉大的證明就出來啦，我先做它的平方，$\square^2=(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$，你把它乘開來，我們來看偉大的地方在哪裡，$\square=a_1^2b_2^2+a_1^2c_2^2+a_2^2b_1^2+b_1^2c_2^2+a_2^2c_1^2+b_2^2c_1^2-2a_1a_2b_1b_2-2a_1a_2c_1c_2-2b_1b_2c_1c_2=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2$，我們來看這個數據跟我們做的哪個有瓜葛。我們當初講$a_1,b_1,c_1,a_1,b_{1,}c_1,a_2,b_2,c_2,a_2,b_2,c_2$，你看這一組數據就是哪一個？$b_1c_2-b_2c_1$，它就是哪一組是不是這一個，那再來這一組呢，$c_1a_2-c_2a_1$就哪一組是不是就這一組，然後再來第三組就是$a_1b_2-a_2b_1$，就是哪一組是不是這一組，很好用。(A,20091105)

⑪數學驗算：教師使用其他數學概念進行驗算

【根據原算式做驗算不歸在此】

例如：所以假設它求 Q 點出來以後，萬一擔心你算錯，你可以用什麼東西來驗證，是不是可以用 PQ 的長度有沒有等於點到平面的距離，但是它如果求 P 到平面的距離，你要不要先求 Q 點？沒有人這麼笨的啦，是不是用點到平面的距離公式就出來啦，所以點到平面的距離公式在這邊的時候它如果考正射影點，你是不是可以把它當成一個驗算的工具。(A,20091110)

⑫計算錯誤或其他數學的疏忽：教師產生口語或文字上的錯誤，或者教師忽略重要的數學引導或討論，亦包含對數學符號寫法的不完整

例如：那在求這種方向向量求法跟它一樣嘛，第一種是它告訴你比如說它垂直某個平面，那平面的方向向量【口誤】就可以當成它的什麼向量，平面的法向量就變成平面【口誤】的方向向量對不對。(A,20091110)

⑬多觀點：教師對一個概念給予不同的觀點，或者對一個題目給予兩種以上的解法

例如：有很多解法並不是唯一的，那像老師講義上會給你題目上，會給你一個引導式的概念嘛，你這三種方法至少學會一種，如果你覺得自己程度不是很好，學左邊的方法，這兩個把它忘掉。(A,20091110)

⑭比較：教師使用類比或對照的手法對兩種以上的概念或解法比較異同，或者用這樣的手法進行教學

例如：當初在講它的參數式是這一點的座標假設(x_0, y_0)，如果有一個方向向量，它如果今天它的方向向量是(a,b)，那當初我們怎麼想它？……好，我們現在就開始拉回來空間中，我們來想一下空間中你想該怎麼做？你假設它今天的座標是(x_0, y_0, z_0)，如果這一點的座標是(x,y,z)，有一個這個是方向向量喔……。(A,20091106)

⑮分析：教師進行系統化的討論

例如：當初講說決定平面常見到的方法有幾種，三點對不對，那這個你會了，那如果一直線跟線外的一個點那你要怎麼辦，一直線還有線外一點那怎麼辦，怎麼做？像老師是一個笨小孩，上面抓兩點也很可愛啦對不對，直線上抓兩點是不是就平面上三點啦，那你還是要這樣做阿對不對，我就拉一個這樣的向量拉一個這樣的向量，ㄟ這個是不是就出來啦，對不對，那很多人在講那個相交兩直線那怎麼辦？……兩平行線有同學說抓兩個向量怎麼比，當然比不出來阿，所以有時候你會抓一個向量，這邊抓一個點，就把它回到這個樣子嘛，對不對，那你在抓一個點是不是可以決定一個向量，然後兩個向量，ㄟ這個就出來啦，點向然後就出來啦，可以吧！(A,20091027)

⑯概念連結：教師提及或者複習以前學過的內容，而且現在就要用到它

【需當下用到的才算】

例如：所以當初上的很多那種不定方程，這時候是不是就派上用場了。(A,20091106)

⑰提示教材地位：教師提及以前學過的內容，或者未來即將上到的內容

【該節課就會上到的不歸在此】

例如：因為老師昨天就發神經跟你講後面的概念，不是講加減消去法的概念引進它整個的概念，所以它其實是在修訂它平面，修訂到它 x 等於多少 y 等於多少 z 等於多少的平面，那交點當然座標就出來了，那等到真的講到 2-6，老師再用更嚴謹的方式再來介紹它。(A,20091104)

(3)對學生使用的數學

①使用學生錯誤：教師並非只是指出學生錯誤，並且能加以修正再強化數學概念，包含教師用提問法修正學生的錯誤

例如：好，第三題有問題對不對，這個眼睛要瞪它一點喔，2x+4y=1+4z=2y 喔，會不會這個看錯？好來，這個是 2x-2y+4z=0，這個是 E 這個是 F 這個是 G，可以吧，結果它第一個寫那樣，G 跟 F 怎麼樣阿，兩個相交，阿這個答案錯了啦，這相交怎麼會有一個線段的，兩個平面相交一定是一條什麼線，直線，所以這答案錯了啦，兩個平面相交沒有一個線段的啦，一定是一條什麼線直線，可以吧！(學生選錯答案) (A,20091123)

②引出學生回答：問學生使用的步驟或者問學生答案

【若老師自問自答或者學生沒有回應則不歸在此】

例如：T：這一點假設 P 這一點假設 Q，這三者是不是在同一條直線上，那我怎麼找這一點怎麼找這一點？很難想喔，怎麼找？

S：可以用平行嗎？

T：你們想用向量成比例，那這邊設成一個參數，這邊設成一個參數，那這個向量跟這個向量是不是成比例？可以。還有什麼解法？

(A,20091113)

③使用學生成果：教師使用學生回答或算式解釋數學概念或進行解題

【若教師只是詢問答案未再做發展則不歸在此】

例如：T：ㄟ這看起來會不會好做？

S：左邊那個跟右邊那個。

T：這個一比是不是就出來啦，對不對，像這個題目上你把它乘幾倍？

是不是乘兩倍？那就變成 2k-2=8k-2，所以 k=0。你算對囉，好強喔！(A,20091113)

④使用具體操作物說明數學概念：教師對於學生聽不懂的部分使用具體操作物再重新說明

例如：李○○還好吧？想通沒？(解釋給學生聽)它意思是這樣嘛，它現在這兩個平面是不是要求它的交線？那你求出來是這個對不對，這個很容易做吧，這可以轉成這一個吧，老師教你這個驗算是什麼樣的工具，看這邊喔，這條直線它的方向向量是不是就是橘色的這條線上，那你會發現這個平面的法向量是不是就這樣，這條線上，就好像說我把這個移過來，兩個向量會互相垂直，對不對，所以這個題目上是驗算的一個能力。(A,20091106)

⑤回答學生問題：教師回答學生的提問

例如：S：那要怎麼從題目中看出它是排列還是組合？

T：對阿，所以這種東西有時候都會有點想法，你如果說比如說你去買它，買法有多少種，那你是不是有三種，第二個有三種，第三個有三種，對不對，那是不是 3^5 ？(B,20100428)

3. 系統信度的檢驗

雖然，個人已根據李師的教學實況調整數學教學觀察系統，但是，為了提高本系統的有效性，以及降低個人的過度主觀，所以，借助另一位獨立登錄者 I_2 協助做信度檢驗，增加系統的可信度。

(1) 登錄者的選取與訓練

為了避免對研究內容的不了解以及方便性，故登錄者的選取是研究小組中的 I_2 ，在做登錄工作之前，個人先對 I_2 詳細說明主類別、次類別和細項目的操作

型定義以及登錄時應注意的事項，如有疑慮時則稍加舉例，兩人再做溝通與協調，並先嘗試練習編碼 5 分鐘的片段。接著，選取上學期的一堂課供 I_2 進行正式登錄，針對相異之處兩人再次討論，個人於討論後對教學觀察系統做二度修正。下學期第一、第二階段研究結束後，由於單元內容的不同，可能會限制系統的有效性，所以，在個人分析過後先做三度修正，再對 I_2 重新說明，延續上學期的步驟做練習以及正式登錄，在兩人針對結果做討論後，個人做四度修正。此時，正式的教學觀察系統才真正確定。最終，個人選取上學期 1 堂課(A,20091106)及下學期 2 堂課(B,20100427)和(C,20100602)供 I_2 進行正式登錄，並逐項計算信度。選取這 3 堂課的理由有二：(1)它們皆為單元開始的第一堂課，在概念引入的部分具有可觀察性；(2)在個人的編碼結果中，它們反映出大部分的編碼，可藉此了解編碼的操作型定義是否得宜。

(2) 信度係數的採用

為了避免個人與另一位登錄者，在偶然的情況下，將不同的教學行為歸類到相同的編碼中，造成百分比一致性(percentage agreement)高、信度低的窘境，所以，本研究採用Cohen (1960)所提出的kappa統計量(簡稱K值)。K值表示評分者實際評定一致的次數百分比與評分者理論上評定的最大可能次數百分比的比率(林清山，1992)，這樣的定義能夠修正兩位登錄者偶然發生觀察一致的狀況。以下說明K值的計算公式。若兩位登錄者同時將一段觀察結果歸類至 C_i，則將該觀察發生的次數紀錄於 C_{ii} 中；若研究者認為該觀察應歸類至 C_i，而另一位登錄者卻歸類至 C_j，則將次數計算後填入 C_{ij} 中；之後將每列和每行的次數加總，填入 n_i 和 n'_i 中，而N是 n_i 或者 n'_i 加總後的數值(請參見表3-5)。

將觀察結果整理於統計表後，K值的計算公式為，

$$K=\frac{p_0-p_c}{1-p_c}=\frac{\dfrac{c_{11}+c_{22}+...+c_{ii}}{N}-\dfrac{n_1\times n'_1+n_2\times n'_2+...+n_i\times n'_i}{N\times N}}{1-\dfrac{n_1\times n'_1+n_2\times n'_2+...+n_i\times n'_i}{N\times N}}$$

。其中，p_0為觀測一致性(observed agreement)，即兩種測量結果的一致百分比；p_c為期望一致性(chance agreement)，即兩種測驗預期相同的機率。

表3-5：$i\times i$ 項的K值表

Coder2(另一位登錄者)

Coder1
(研究者)

類別或細項	C_1	C_2	C_3		C_i	合計
C_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}		C_{1i}	n_1
C_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}		C_{2i}	n_2
C_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}		C_{3i}	n_3
C_i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}		C_{ii}	n_i
合計	n'_1	n'_2	n'_3		n'_i	N

K值落在-1~1之間，但是通常落在0~1之間，0.0~0.20表極低的吻合度(slight)，0.21~0.40表一般的吻合度(fair)，0.41~0.60表中等的吻合度(moderate)，0.61~0.80表高度的吻合度(substantial)，而0.81~1表示幾乎完全吻合(almost perfect)。Frick與Semmel (1978)認為，以標記系統(sign system)而言，要滿足登錄者內部一致性的要求，K值應大於或等於0.8，若以教學影片代替實際課堂做觀測，則應高於0.75。

(3) 系統主類別、次類別和細項的信度係數

在登錄表中(請參見附錄一(3))，「教學的進行方式」與「教學活動中數學領

域的知識」、「對學生使用的數學」採用不同的K值表，這是因為「教學的進行方式」只能擇一勾選，然而，另外兩個類別中編碼可能同時出現，故可重複勾選。由於本研究的目的為探究資深高中數學教師的教學實作知識，而非評斷教學品質，故在分析片段中僅顧及編碼是否有出現(P/NP)，而不考慮它出現的合適性(A/I)。以下個人針對兩種不同的K值表作說明。

首先，以空間直線的第一堂課為例，下表 3-6 為它的「教學的進行方式」的 K 值表，數字代表的是片段數。

表 3-6：「教學的進行方式」的 K 值表(引自(A,20091106))

Coder2(I_2)

Coder1 (研究者)

	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他	合計
概念回顧或檢討家庭作業	1	0	0	1	0	0	2
介紹主要的工作或概念	0	2	0	0	0	0	2
教師示範例題	0	0	5	0	0	0	5
做總結	0	0	0	3	0	0	3
學生操作	0	0	0	0	0	0	0
其他	0	0	0	0	0	1	1
合計	1	2	5	4	0	1	13

其中 $p_0 = \dfrac{1+2+5+3+0+1}{13} = \dfrac{12}{13}$，$p_c = \dfrac{1\times 2+2\times 2+5\times 5+4\times 3+0\times 0+1\times 1}{13\times 13} = \dfrac{44}{169}$

，$K = \dfrac{\dfrac{12}{13}-\dfrac{44}{169}}{1-\dfrac{44}{169}} = \dfrac{112}{125} = 0.896$，屬於幾乎完全吻合。三個研究階段中被選取做為

信度檢驗的三節課，皆仿造上述的方式計算 K 值，個人將「教學形式」、「教學內容」和「教學的進行方式」所得的 K 值整理如下表 3-7。由表中可見，登錄表中的「教學形式」與「教學內容」因為十分明確，故 K 值都是 1，其他多達高度吻合到幾乎完全吻合。

表 3-7：「教學形式和內容」的 K 值結果

	前導研究	第一階段	第二階段
教學形式	1	1	1
教學內容	1	1	1
教學的進行方式	0.896	0.8	0.888

「教學活動中數學領域的知識」和「對學生使用的數學」的K值表，個人參考生物統計中心崔懷芝分析師的〈量表信度的測量：kappa統計量之簡介〉。它針對兩位醫師對39位病患診斷是否有側邊移位進行信度計算，情境符合本研究兩位登錄者對一節課的n個片段，以該編碼是否有出現來做登錄，並且計算出各類別中不同細項的K值。以數學解釋為例，下表3-8為統計結果。

表 3-8：以「數學解釋」為例的 K 值表(引自(B,20100427))

Coder2(I_2)

		有	沒有	合計
Coder1 (研究者)	有	10	0	10
	沒有	1	4	5
	合計	11	4	15

其中，$p_0 = \dfrac{10+4}{15} = \dfrac{14}{15}$，$p_c = \dfrac{11\cdot 10 + 4\cdot 5}{15\times 15} = \dfrac{130}{225}$，$K = \dfrac{\dfrac{14}{15} - \dfrac{130}{225}}{1-\dfrac{130}{225}} = \dfrac{\dfrac{80}{225}}{\dfrac{95}{225}} = 0.8421$，

屬於幾乎完全吻合。每個編碼在三節課中都仿造上述的方式計算 K 值，詳細統計結果請參見下表 3-9、3-10。表中「—」代表兩位登錄者都認為此編碼沒有出現，所以，個人不計算其 K 值。以統計結果來看，K 值大致介於高度吻合與幾乎完全吻合之間， K 值低於 0.75 的數值則使用粗斜體表示。

表 3-9：「教學活動中數學領域的知識」的 K 值結果

	前導研究	第一階段	第二階段
數學的符號	—	1	—
數學的詞彙或其定義	1	1	1
表示數學概念使用的語言	1	—	—
為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	1	0.864	1
選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	0.847	1	—
多重模型	1	1	—
對符號、具體的圖像及圖表做連結	1	1	—
數學描述	0.847	1	0.8672
數學解釋	0.847	0.8421	***0.7222***
數學證明	1	—	—
數學驗算	1	—	—
計算錯誤或其他數學的忽視	1	1	0.7619
多觀點	0.8311	1	0.8571
比較	0.8311	0.8421	0.7619
分析	***0.6285***	0.8421	—
概念連結	0.7547	1	1
提示教材地位	—	—	1

表 3-10：「對學生使用的數學」的 K 值結果

	前導研究	第一階段	第二階段
使用學生錯誤	—	—	—
引出學生回答	—	1	1
使用學生成果	—	—	—
使用具體操作物說明數學概念	1	—	1
回答學生問題	—	—	—

以下個人針對 K 值低於 0.75 的情形分別說明如下：

(a)「分析」的定義為教師作系統化的討論。在空間直線時，李師針對不同的直線參數式，利用參數範圍討論線段與射線，個人認為他呈現三段完整的討論，然而，I_2 認為內容的範圍太小不足以勾選此編碼。

(b)在第二階段中，「數學解釋」的差異較大，K 值為 0.7222。I_2 認為李師在解題時提及「期望值就是算術平均數」就是「數學解釋」，然而，個人卻認為他只是在提醒與強化這個結論，協助學生使用它來解題，倘若李師有對它再重新說明，才可視為解釋，因此個人勾選「數學描述」。

「分析」或者「數學解釋」都屬於高推論性的編碼，個人只能盡可能將編碼的操作型定義，以及登錄時應注意的事項詳細做說明，然而，另一位登錄者的解讀不同、感受不同都有可能降低 K 值，這是個人所難以預期的，但是，這樣低 K 值的情形並不多見。為了改善低 K 值，所以，針對(b)所造成的情況，教學觀察系統可擴大「數學描述」的操作型定義，將「使用數學定義進行解題」列入其中。

第四節　研究可能的限制

本節中將依據研究場域、研究者、被研究者、研究方法以及研究結果的可類推性，分別說明可能產生的研究限制，以及對此，個人如何因應以降低其影響。

一、 關於研究場域

LMT (2006)所發展的教學觀察系統，將只有教師講解沒有學生互動，或者只有學生互動沒有教師講解的刪去，但是，以台灣數學教育環境的現況而言，講述式的教學仍占大多數，師生互動普遍較為缺乏，也不易察覺到教師對學生相關的知識(KCS)，這是文化的研究限制。然而，Ball (2009)近期也表示，在講述式的教學中仍有機會看到改革取向的教學，無疑是想反映其他文化的數學教學實況。每個國家的文化不同，教師的教學實作知識面貌也有所不同，Yin (1989)提到個案研究是一種周延而完整的研究策略，然而，其研究流程和分析工具並沒有一套統一的標準，所以，個人必須要為李師找到最合適的資料分析工具。即便 MQI 系統並不完全符合李師，然而，個人可以修訂編碼，以符合李師的教學實況，盡力克服文化差異，降低文化限制的影響，甚至，能夠經由修訂的過程凸顯出台灣資深高中數學教師可能的教學特色。

再來，雖然李師不只教授一個高二班級，礙於時間與距離的限制，個人無法同時追蹤三個不同班級的教學，所以，只能看到李師對本班所展現的數學教學實作知識，而無法檢視他在其他班級中是否有一致的表現。個人只能夠透過訪談，詢問李師在不同班級中的教學情形，藉以了解他的教學實作知識是否有所不同。例如，在數學期望值的訪談中，李師提到在社會組的班級裡，帶觀念的速度必須放慢，甚至起始例的選取都要更為簡單，但是，三個班級所使用的講義都相同，這與他「學生聽得進去的解法(教法)比較重要(D,20100114)」的想法不謀而合。

二、 關於研究者與被研究者

本小節將說明研究者與被研究者可能產生的研究限制，以及對此，個人如何盡力克服以降低其影響。

(一) 關於研究者

研究中最難克服的就是研究者的「主觀」，個人也是在職數學教師，對於數學教學持有主觀的想法，在研究過程中，雖然力求客觀分析，但是，難免仍然帶有主觀的色彩，而自己卻毫無自覺。個人對收集來的課堂教學觀察資料做系統化的分析，透過量化的結果來呈現編碼的發生次數，並使用它來做為研究推論的證據。雖然，個人的主觀可能會在分析過程中形成濾網，選擇性地選取教學片段做說明，然而，由於本團隊的研究計劃共分為三組，個別研究不同的個案教師，除了平時定期的組內討論之外，個人與 I_2、I_3 亦時常另外安排時間討論，I_2 和 I_3 會提供不同的觀點與意見做為參考，透過調查者三角檢定，應可降低個人對研究鏡頭與資料解讀的主觀性。此外，在影片拍攝完畢後，團隊小組每週會固定進行討論，除了 TE 之外，另有 PT 會提供個人的數學教學經驗和想法，也可能因此失去了一些客觀性，改變了個人的思考路線，故個人將 PT 的意見視為可探究的研究方向，先將 PT 的意見與研究資料做驗證和篩選，在個人思考過後，於訪談時詢問李師相關的問題加以確認推論的正確性。由於，這是個人第一次參與研究計劃，對於資料分析的洞察力和所需具備的能力仍然不足，故在研究的過程中，仍需不斷地閱讀相關文獻以及方法學的書籍，重複觀看教學影片或者聽取開會錄音檔，使自己專注於資料的分析中。

(二) 關於被研究者

在研究開始之前，TE 已向李師說明本研究的目的和研究方式，但是，由於 TE 為計畫的主持人，而且與李師為昔日大學的同窗好友，故他可能會顧及情誼而在訪談中沒有表明真實的想法。再者，個人進入教室進行實際拍攝教學，對李師而言可能會將研究視為教學觀摩，而在教學前先模擬教學或者在教學中有所顧忌、刻意安排，則可能會失去質性研究中對「自然場域」的期待，這即是「觀察者效應」。不僅如此，對學生來說由於教室空間不大，DV 的架設大多直接在學生旁邊而非後方，可能對學生學習有所干擾，對其他同學而言，因為會有入鏡的機會，故可能為了力求表現而有別於以往上課風氣。觀察者效應也可能出現在訪談後，個人所提出的訪談問題，李師平時可能並不會特別注意，所以，在教學內容或者方法上，可能因為受到詢問的刺激而促使他做思考或者改變。

由於，李師事前已告知學生本研究的目的，而且，個人在研究過程中扮演一個觀察者的角色，並不介入實際的教學活動，偶爾，個人在下課時也會主動與李師或學生交談，保持良好的互動，希望減少他們的不自在感，進而降低觀察者效應的影響。再來，個人在三個不同的時間點蒐集資料，將研究時間拉長為一年，並且研究三個不同性質的單元，應可降低刻意營造教學情境的可能性。個人平常亦會在教學後詢問學生「老師上課與平常是否相同？」、「DV 的拍攝會不會讓你覺得不自在？」，或者在訪談中詢問李師「這和你平常的教學情況相同嗎？」、「你以前也都這樣做嗎？」，藉以了解觀察者效應所造成的影響，在之後的教學影片拍攝或者訪談中更加謹慎。

三、 關於研究方法

個案研究法因為只有使用少數個案，因此在資料的需求上，比其他研究法來的更大，Yin (1994/2001)曾提到，使用多重證據來源的個案研究，比起那些只倚賴單一資訊來源的，在整體的品質方面得到了更高的評價。本研究為單一個案，使用三角檢定法除了能夠增加構念效度之外，也能降低個人的研究偏見。為此，個人使用資料的三角檢定，資料來源包含了教學影片檔、訪談錄音檔以及李師的自編講義。個人先從影片分析中得到假設性推論，經由訪談或者檢視自編講義做確認與修正，藉由資料的交叉比對與互補性，增加研究推論的完整性與可信度，最後再由 I_2 協助信度的檢驗。

教室觀察的部分，在進行課堂影片拍攝之前，個人需要先進入教室架設器材以及試拍，避免因為對器材的不熟悉而產生遺漏。此外，由於教學影片的資料量龐大，個人可能因為長時間的分析，而造成對細節的疏忽或者誤判，或者教學觀察系統無法完整地描述李師的教學實況，而降低系統的有效性。為了因應以上的限制，故個人在前導研究結束後，先請 I_2 嘗試使用個人修正後的教學觀察系統，參照個人所附的編碼操作型定義，以及該節課的教學影片逐字稿，對李師的課堂教學練習編碼，並在編碼完後進行討論，個人可能需要修改分析結果，或者增加編碼、修正編碼的操作型定義等等。同樣的程序，在第一、二階段研究結束後會重複操作，希望能夠降低以上的限制。

四、 關於研究結果的可類推性

可類推性(generalizability)指的是，一個特定研究的發現是否可以應用到特定的研究對象之外，以及超出這個研究場域之外(Bogdan＆Biklen, 1998/2001)。個案研究一直以來存在的傳統偏見就是它缺乏科學的根基、不具可類推性，但是，質性研究特性之一的「意義」，它代表的是不同的個案面對相同的教學內容

會有不同的表現和想法，即使是相同的個案，面對不同的教學內容也可能是如此。既然看重的是意義，著重之處應放在如何將資料抽絲剝繭，並且，謹慎小心地描述研究結果。由於，本研究選取的個案為立意取樣(purposeful sampling)，故可能在有類似背景的個案，或者是相似程度的學校中可以看見結果的局部複現，但是難以達到完全類推。即便如此，個人仍然力求提高研究資料的信度和效度。

第四章　研究結果

本章共分為五節，第一節描述李師數學教學的觀點，第二、三、四節分別描述前導研究及兩階段研究的結果，第五節則為跨階段的綜合分析。

第一節　李師數學教學的觀點

從課堂教學觀察中，個人發現李師呈現出對數學教學的三項主要觀點：單純、以一貫之、實用取向。這些觀點一直持續地滲透在他的課堂教學中，為其教學實作背後的核心思想。

首先他希望教學是「單純」的，他重視學生的感受並不希望學習數學而造成學生的壓力，也因此影響了他對教學的安排，

> 那有些老師是先教這個在教那個，那老師因為從平面上的直線拉過來，所以先講這個再講這個，單純[1]啦。(A,20091106)[2]
>
> 我覺得解題要單純化，有時候我會想說可不可以用很自然很簡單的方式講給學生聽就懂了，甚至有些例子我都嘻嘻哈哈這樣去講，那那些抽象的概念她們就懂了,有些東西不一定一定要把它強求到什麼程度,可以體會就好了。(D,20100114)

其次是「以一貫之」，在教學中李師不喜歡特殊題型、特殊解法，傾向於帶領學生使用基本的數學概念解題，不會為了一種題型而學習一種解法，

> 其實你會發現數學就這一招而已嘛，一招為行天下嘛，有很多不管它怎麼變的話都不離這一招，其實整個題目上就這樣而已。(A,20091027)
>
> 我們一直強調說，在解平面的方程式永遠都是一招，什麼招，上面想辦法找到三點。(A,20091104)

---

[1] 底線表個人詮釋李師數學教學的實作與思維的重點依據

[2] 文中以標楷體的 12 點字表示取自原案

最後，李師認為這些學生未來不一定會唸數學系，所以老師並不需要把所有懂的東西都教給學生，這樣學生會無法負荷。而是要教她們聽得進去的解法，讓她們能夠去應付考試，這才是最重要的，故他的教學具有「實用取向」，

> 所以這種題目上說穿了以後，你會發現到這種題目上其實沒有任何的價值……做過的人，10 秒鐘兩個答案就出來了。沒做過根本打死都想不到阿。所以這種題目在評鑑上來講，應當不是一個「正常」的題目。(A,20091103)
> 這種是因為為了應付考試而教的。(A,20091104)
> 重複排列重複組合，你這邊如果把它想懂至少考月考可以考個還不錯的成績出來。(B,20100427)
> 有時候我覺得教書還是要著重它的實用性啦，那如果真的要你很嚴謹的計算題，那你寫法當然就更嚴謹了，那她們學生也都懂這個道理，有些東西我們都會先教，後面幾堂課就慢慢說它的道理，那有些那種很艱澀的部份留到最後在做完整的說明。該講的都會講到，但是有時候只是實際上的問題，因為有時候你太「ㄍ一ㄥ」數學上的東西，好像覺得我們跟她講的非常嚴謹非常嚴密喔，但學生不見得可以接受的了。(D,20100114)

研究中個人也發現，李師雖然主張教學要單純化，固然不願意教授需要太多高度解題技巧的題目，但是，為了迎合考試的需求、配合數學科補充教材，仍須將這樣的題目納入講義中。同時，由於學校以升學為導向，學生對於題目難度的需求和學習的意願相較之下是更高的。例如以截距式而言，他認為這是個獨立的單元，難以和其他單元連結，並沒有太大的用處，故在教學中直接講的比較深入一點，讓學生能夠看到題目就馬上知道答案，不需要多花時間在這種題型上。就如他在課堂所提：

> 以後練習到有這種的境界，看到這種題目上就不用去解它，因為它是個獨立的，前不著天後不著地，只是它很難，很多老師覺得這是可以把學生訓練的很快的一種題目。(A,20091030)

同樣地，在空間直線的講義中，某題求解空間兩直線的角平分線，由於需要用到菱形的技巧，個人在訪談中不免好奇詢問李師為何選取這一題，他說是因為數學科補充教材有而不得不教，

> 有時候我們看到一些題目都會覺得很痛心，本來這種東西是為了儲備

她未來大學可能會用到的概念，所以我們很認真去教她，但是最後變成是在耍技巧，技巧性的題目都出來了，那學生就變成學它以後一輩子也都沒有用。(D,20100114)

你要稍微把那個觀念整理一下，所以在上這種情況下，你們跟那個解天書(數學科補充教材)是完全不一樣的感覺啦，解天書有很多那種題目上是你們想破頭都想不到，老師也是昧著良心這樣教啊……所以有時候在教的時候沒辦法把某些不要講的不教。(A,20091029)

在前導研究中，個人就已深刻地感受到李師的整個教學脈絡深受學生的升學需求影響，在他心中已有一把量尺，知道哪些題目非教不可，即使是要違背自己的核心思想，要用什麼樣的教學方式能夠讓學生理解，她們可以沒有負擔又足以應付考試。李師希望學生帶著快樂的心情學習數學，有信心才會有動力唸好書。以個人觀點來看，他這樣的想法影響整個教學的選擇和安排，他已為學生鋪好一條自己認為可行的路徑，學生只須遵循方向前進就不會有迷惘和挫折。這三個核心的數學教學觀點並非獨立存在，而是相互交織以呈現出李師的教學特色，就如他曾表示：

好吧，你稍微把它想一想，你就發現不要學到很多奇奇怪怪的很多解法，不要學太多那種太奇怪的解法，其實整個數學就是單純化，想辦法去破解它其實就沒事了，可以吧。所以包括有時候我們學很多那種很獨特的解法，通常數學沒有這麼複雜啦。(A,20091029)

此外，個人也發現到，有些東西李師並不會完全點破，例如同一個題目，他可能會提出三種解法，但是，解法間各自的優缺點或者適用性為何，則是留待學生自己去發掘。因為，他認為她們是聰明的、可感受到的，所以，他固然為學生設想周到，卻還是適度地保留一些空間給學生自己去思考，

我就是要讓學生自己去感覺，因為這邊的孩子很聰明，所以一兩題她們就知道哪些方法比較好，因為其實很多東西沒有絕對的。(D,20100114)

第二節　前導階段研究

在前小節中個人已分析李師對於數學教學的觀點，而當把這樣的觀點放入實作中去觀察就會更清楚。本節將描述前導階段所得到的研究結果，以及分析李師數學教學實作知識的結構，並且探討與 MKT 相關的教學事件。

一、 李師數學教學實作知識結構的分析

前導階段的研究單元為「空間平面方程式」與「空間直線方程式」，共計有 18 節課，227 個片段，個人將各類別中編碼出現的總次數整理如下表 4-1、4-2 與 4-3，各節課詳細的發生次數請參見附錄一(8)。以下將說明李師在本階段中的教學模式和教學概念與實作。

表 4-1：前導研究的「教學的進行方式」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 概念回顧或檢討家庭作業	52	4. 做總結	12
2. 介紹主要的工作或概念	24	5. 學生操作	10
3. 教師示範例題	***83***	6. 其他	46

表 4-2：前導研究的「教學活動中數學領域的知識」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 數學的符號	0	10. 數學證明	10
2. 數學的詞彙或其定義	11	11. 數學驗算	12
3. 表示數學概念使用的語言	18	12. 計算錯誤或其他數學的忽視	37
4. 為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	88	13. 多觀點	58
5. 選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	***107***	14. 比較	61
6. 多重模型	48	15. 分析	19
7. 對符號、具體的圖像及圖表做連結	18	16. 概念連結	22
8. 數學描述	***111***	17. 提示教材地位	42

9. 數學解釋	88		

表 4-3：前導研究的「對學生使用的數學」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 使用學生錯誤	3	4. 使用具體操作物說明數學數學概念	1
2. 引出學生回答	***11***		
3. 使用學生成果	9	5. 回答學生問題	3

(一) 教學模式

Gilbert, Boulter 與 Elmer (2000)認為，模型可以是一個物件、事件、想法或現象的表徵，他們在模型的本體論中談到「教學模型」(model of pedagogy)，它指的是教師在課堂中使用的模型，並且考量學科的本質、學科教學的本質和學科學習的本質。李師的教學模式多半是採取先做班級經營，再概念回顧，接著才進入該堂課的主題課程，當介紹完主要的數學概念後，再由他講解或學生操作(演練)講義例題。

比較特別的是，在剛開始教授 2-4 空間平面方程式、2-5 空間直線方程式以及兩歪斜距離的內容時，他會在介紹完主要概念之後，先對概念或解法做總結，接著，舉例並解題，之後再做一次總結。真正開始操作講義例題則是在下一節課。以 2-4 (A,20091027)和 2-5 (A,20091106)為例，做總結次數分別有 4 次和 3 次(請參見附錄一(8))。在空間兩直線關係的部份，他也有做總結，不過並非在概念之後，而是在解題的過程當中。個人推測，前兩個單元他特別強調總結的原因是考量到章節的開始，因為，章節的主要概念都會在第一節課教完，故李師想要不斷地告訴學生要點為何，也呼應他「以一貫之」的教學觀點。在課堂中，他時常會給學生一分鐘的沉澱思考，再進行下一個階段的教學，在訪談中他也提到你數學要沈澱完了以後再出去才是你自己的東西。所以有時候是在拉她們的速度，但也要懂得這些概念(D,20091110)。所以，他會刻意將教學的速度放慢，並沒有在該

堂課立刻切入講義的例題。個人推測，他會特別強調兩歪斜線距離的結論是因為這是典型的考題，而且分數比重多，所以，他在介紹概念時也花了許多時間，並且使用三種模型做講解。例如他曾經表示，ㄟ這種考試必考嘛，百分百一定考的嘛，你回去看我們學校歷年的考題，哪一年沒有考歪斜線？那表示老師外星人，這有點難度，但是是一定要考的觀念，這樣聽懂不懂(A,20091112)。這也呼應了他「實用取向」的教學觀點。

其他課堂中，大部分以李師解題為主，學生操作的部份佔少數，多是李師認為學生容易算錯或者是較簡單的題型(例如，只需帶公式計算或前面已提過類似算法)。學生操作片段的平均時間為 166 秒，在學生操作過後，李師多不再進行講解而是直接要求學生的答案。師生互動的方式多是教師主動而學生被動，學生很少主動表達意見與困惑。

綜觀而言，雖然本階段研究的研究單元為 2-4 和 2-5，然而，在前導研究中發現，李師同時也邊檢討 2-1、2-2 及 2-3 的習題，這正是所謂的「螺旋式教學」。李師強調，學生在學習後需要時間沉澱吸收，故很多東西等上完之後再回過頭來看它，反而會覺得更為清楚，所以，大約有 1～2 週的緩衝時間，待學生回家自行閱讀完課本，並完成習題和數學科補充教材後，再帶領學生檢討題目順便也做為複習。例如他曾多次表示：

> 2-5 這一段是相當難的一段喔，那後面很多蠻抽象的一些概念我想該講的老師也講，不該講的老師也都講進去了喔，可以吧，那老師的估算是大概下禮拜就可以把直線比較告一個段落。那 2-6 本身兩三節課就可以把它結束掉了，你們這個時候要趕快把 2-3、2-4 趕快把它給完稿喔。(A,20091106)
>
> 有時候老師上完 2-5 再拉回來講 2-4，很多題目上會變得非常非常簡單，不會說好像叫的那麼辛苦啦。所以老師有時候用這種螺旋式，反正上過以後再上第二次。(A,20091118)

李師的教學偏向講述式教學，帶領者主要是教師而非學生，雖然不同的師生

會共同發展出不同的教學模型，但是，個人認為李師有可能因為數學內容的不同，而自行微調教學模型，卻不會因為學生的不同而產生極大差異。李師教學年資相當的長、教學經驗豐富，故基本上他的教學模型已固定，並不會因單元屬性的不同而有太大的改變，而且，長期下來學生已習慣他所經營的學習氣氛，上課安靜聽講，按部就班地跟著教師的步伐走。

(二) 教學概念與實作

在本階段研究的過程中，個人發現李師教學的許多面向適合用 Ma (1996)所提出的 PUFM(對基礎數學的深刻理解)和知識包裹(knowledge package)來剖析。所謂的深刻意指具有廣度、深度和透徹性，Ma 也提到，具有 PUFM 的教師在教學上具有連通性、多重觀點、一致性和基本概念(the basics)四項特質(或特徵)。李師對於教學單元用打包的手法，將想要教的概念串好放在一個包裹內，再全部交給學生，即是「知識包裹」(包括概念結、關鍵片段、序列)，觀察李師的知識包裹，可發現他的主要教學軸線。本小節中個人依據編碼分為不同段落，再由編碼結果對應回原始的教學情形，使用敘述的方式說明李師的教學與 PUFM 相互呼應之處，最後提出李師在發展研究單元的數學概念時所展現的知識包裹。

1. 「概念連結」、「比較」與「提示教材地位」

以空間平面方程式為例，首先，在一開始的引入，李師先複習平面直線方程式，並且推測空間平面方程式應該形如 ax+by+cz=d，得到一個可能的方程式，部分教學片段轉譯如下：

> 通常我們在講平面的時候會回想到原來平面上的直線，我想應該是這樣推嘛，一維二維三維這樣推出來的嘛，好，所以我們稍微來想一下喔，如果平面上，我們現在講的是平面上的直線，當初它的方程式長的什麼樣子，是不是 ax+by=c 這個樣子，那早期一點，你們在國中時

代，譬如說通過(1,1)(2,2)那你怎麼帶？是不是把(1,1)帶進去，(2,2)帶進去對不對，然後得到 a：b：c 的關係以後，再把它那個位數給去掉，譬如說它是 x-y=0，那就變成 a=a，b=－a，c=0，然後把它給推出來對不對？那你再想三點應該有幾個變數？有人在考慮它應該是形如ax+by+cz=d，因為當我本身把那三個點帶進去的時候，理論上應該可以把它解出來嘛。(A,20091027)

透過二維的直線類推三維的平面，接著，他再帶領學生回想平面直線方程式的一般式，即是使用法向量來定義它，所以，李師使用相同的手法，利用兩向量垂直內積等於 0 的概念將平面方程式求出，恰巧求得與上面一樣的結果，這也証明了空間平面方程式的樣子如同一開始的猜測。同樣的類比手法也出現在空間直線方程式、點到平面的距離公式類比於點到直線的距離公式、兩平面夾角類比於平面兩直線夾角：

平面上的直線方程式它寫出來是什麼樣子？來想一下這邊喔，是什麼樣子？L：ax+by+c=0 這個型態，那你有沒有曾經想過說空間中直線的方程式？平常的慣例喔都是 x, y 變成 x, y, z，但是，所以有時候我們會很常想的可能是 ax+by+cz+d=0，問題它是一個平面，那一定不是一條直線，所以其實有些同學反應非常快，在上半堂課有三個同學問我說直線的方程式長的是什麼樣子，那你想它是長的什麼樣子？所以有時候有很多數學喔，它慢慢去思考，我們在講直線的方程式講過兩種方法，一個是這種標準式就是一般式嘛，還講過一個叫什麼參數式對不對？(A,20091103)

跟那個點到直線的距離公式是不是完全都一模一樣？它只是多了一個什麼座標，z 座標，其他都一樣嘛，可以吧。(A,20091105)

我們回想一下喔，當初這條直線如 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$、$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$，是不是像這樣，這個時候，我們當初怎麼求兩直線的夾角？……來啦我們空間怎麼探討它，老師把這個直線想成是個平面嘛，我把它畫厚一點變成一個平面嘛……其實你有沒有發現那個感覺是一樣的嘛。(A,20091104)

李師能夠將新概念的教學建立於學生已習得的概念上，透過類比或對照的手法，安排機會帶領學生做複習，也藉此引入新概念與已習得的概念做「概念連結」。以編碼的結果來看，在概念發展過程中「比較」(使用類比或對照手法進行教學)出現的很頻繁，特別是 2-4 (A,20091027)和 2-5 (A,20091106)的第一堂課，分

別佔了總片段數的 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{5}{13}$ (請參見附錄一(8))。由於空間平面與空間直線方程式，大多李師會與平面直線方程式做對照或者類比，學生學習起來比較熟悉，同時，他也掌握了課程知識的連貫性。特別的是在 2-5 這堂課中，除了與平面直線比較之外，他在最後還與前面所學的空間平面做比較。因為，空間直線方程式有參數式、對稱比例式和兩面式三種寫法，李師時常會將其並呈，並強調答案並非唯一，所以「多觀點」也出現的多，佔了總片段數的 $\frac{8}{13}$ (請參見附錄一(8))。除此之外，他有時複習已習得的概念並非為了發展新概念，而是藉機讓學生做回想，或者他會先預告未來在哪些單元裡會上到的教材內容，而事先做好鋪陳，以增加教學的流暢與連貫性，雖然當下並不是在做概念連結，然而，卻可看出李師對於教材相關地位的了解以及對課程縱向連貫性的掌握。以下為四段相關的教學片段轉譯：

> 當初老師在上平面的時候，就是不定方程式的時候，有沒有講到它比較深入一點點的概念，其實老師的目的是說在這邊我可能就要派上用場。(A,20091104)
>
> 那如果寫它的對稱比例式，它的對稱比例式寫出來就變什麼形式 $\frac{x-0}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{-4}$，ㄟ這種寫法不是唯一的，如果老師當初寫出來 x=1−t、y=1+2t、z=0+4t，這兩種寫法是不是一模一樣？(A,20091106)
>
> 老師是有點偷偷的在為後面歪斜線埋一些解法。(A,20091110)
>
> ㄟ這個什麼時候會講到，下冊第一章啦，本來課程是在這一冊的第四章，那因為現在課程量比較多，它把它拿到後面過去。(A,20091118)

類比的教學方式呼應了 Ma (1996)在 PUFM 中所強調的「廣度」，Ma 提到具有 PUFM 教師的一般特質是「連通性」，而廣度是其中一種連結的表現。李師帶領學生回顧以前所習得的知識，利用機會做複習，或者是安排機會為未來的學習做鋪陳，則是展現 PUFM 中「一致性」的特質，也類似於編碼系統中的「提示教材地位」。若以編碼的結果來看，它大多出現在概念回顧或者是教師示範例題中，也會在與學生閒聊時出現，平均而言一節課它會出現在 2.3 個片段(請參見表 4-2)。除此之外，具有「一致性」的教師並不侷限於既定的教學內容，他們也

能夠合適地調整教材，使整個教學保持流暢性和銜接性。若教師具有這樣的能力，也說明他對整個教材具有「透徹性」的理解。例如在平面族的課程中，李師認為平面族若沒有 2-6 二元一次方程組的概念做基礎，學生會比較不能夠理解，故他先跳講 2-6 再回到平面族，從學生熟悉的加減消去法去表達平面族的概念。平面族並不屬於課本內容，因為數學科補充教材有，所以才編寫，他提到，整個教學中平面族並不是高中課程的核心，故他的教學並不會牽涉到太多平面族的概念。同樣的情形也出現在空間三角形面積，由於它恰巧為兩向量所構成之平面法向量長度的 $\frac{1}{2}$，李師選擇先將 2-6 的這個概念拉到前面，配合例題的說明一起講解，這樣的教學脈絡選擇若沒有對課程足夠的了解，無法真正將課程銜接得宜。以下就是與此相關的兩段教學片段轉譯：

> 27 頁我們就拉開從後面角度來跟你講，就要從 42 頁這邊開始來講，因為這邊才會很輕鬆的介紹說平面族的概念它從哪邊來的，它的來源就是哪邊，加減消去法。(A,20091030)
> 要不要講它的證明給你看阿，要也是可以同時先拉開也無所謂啦，早晚都是要講，來，老師拉開來講喔。(A,20091105)

2. 「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」

對於「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」，個人認為李師是以教學流暢為考量，再者，也會衡量學生當時的學習狀況，對教學內容或者教材做適當的調整。例如法向量(2,4,6)為了方便操作選擇(1,2,3)；因為學生某類型容易算錯，在例題的編排中會多放一題；原本只有要求空間三角形的重心內心，因為學生當時精神還不錯，所以連同外心垂心一起講。這也說明了李師重視學生當下的學習狀態，而且他的教學是具有彈性的。例如以下一段訪談摘錄：

> 像我每一個班上課的順序都不一樣，我都看她們的感覺反應是怎麼樣啦，其實有時候你眼角瞄一下，有些已經開始在傻眼了，就知道這個地方不能夠講下去啊，那回去的時候我就會稍微做一下筆記啊，我就稍微記一下這一班哪邊沒有教到，找個時間到時候再卡回來啊。
> (D,20100114)

在教學內容的選擇上，關於法向量的求法，李師和課本一樣避談外積，反而稱呼它為比例式(或比例關係)，並且，使用圖像記憶法提供學生記憶，協助學生將法向量與圖像作不同表徵之間的連結。在訪談中，李師對於避談外積這個部份也表達了他的想法，他提到你如果避談外積，就可以把正負隨便去做伸縮的動作，那你外積把它固定以後，其實它就是一個變固定的東西啦……其實它整個空間變化的幅度會更大(D,20100114)。在教學的那個當下，他選擇避談外積這個名詞，但是，其實課程中他仍有慢慢放入一些概念(例如右手系、左手系)，在後面課程上完以後，他才正式提出外積，也讓學生明白何謂真正的外積。在這樣的教學選擇中，個人看見了李師對於學科的彈性，同時也拓展了學科的深度，將比例式連結到另一個更強而有力的概念。在訪談中，李師對於教學選擇的想法時常有意無意地透露出來，他談到，有些數學內容並非不提或者不交代清楚，只是他明白往後何時提出會更為恰當。但是個人認為，這足以展現李師對於數學課程的縱向了解，以及他的教學信念。以下為三段相關的訪談稿轉譯：

> 我本身數學的架構應該是非常完整的，該講的都會講，只是什麼時候去講它而已。(D,20091110)
>
> 有些東西你可以在後面教她她會懂，而且她很快樂，所以我是覺得為什麼不留後面在教她。(D,20100114)
>
> 我是覺得在教書喔，不能夠一下全部都塞給她，其實本身就是有點高一給一些高二給一些，慢慢慢慢這樣在給，給到高三的時候統整起來她就會更乾淨俐落。(D,20100114)

然而，截距式的部份，李師證明的方式與課本並不相同。課本假設平面的一般式去證明，但是，他則是延續前面求平面方程式的作法，在平面上找兩個向量再找出法向量求得截距式。在之後的訪談中，個人詢問他對此的想法，他表示：

> 因為我是覺得說前面一直都用外積比例式的概念去講平面方程式，因為照理說三個變數你這樣做也是對的啦，我在想說就延續上一節課的東西就直接這樣卡進來，其實我要跟你強調，我在教書這一段我其實都不太想教，所以我只是有點應付了事，就有點這樣把它帶過去，遇到問題學生可以克服就好了。(D,20100114)

李師在訪談中除了傳達出「以一貫之」的教學觀點，也可看出他不太重視截距式的教學，而且講義中截距式的例題也只有一題。

3. 「數學描述」、「數學解釋」與「選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念」

李師的教學十分強調「基本概念」的學習，他會在教學進行中或者課堂的最後做歸納，只要學生能夠抓住這些基本原則，對於任何的題型採用相同的手法，以一貫之即可順利完成。例如，在空間平面方程式的教學中，李師歸結到「找點、找法向量」兩個基本要素；對法向量的找法，提出「找法線、找到兩個向量利用比例關係」兩種方式；在探討空間兩直線的關係時，舉出「用方向向量、用交點個數」兩種解題思維來做判斷。三段相關的教學片段轉譯如下：

> 由方程式我們就可以感受到我需要一個法向量嘛，我還需要平面上的一個點嘛，結果這樣是不是就可以把它完成出來了，很多那種平面方程式你就不要把它想太多嘛，想辦法找到它的法向量，想辦法找到它的一個點，其實就瞭了嘛，所以它整個精神就在這裡而已，這樣可以掌握的到吧？以後再難的題目，其實它本身最終的目的就想辦法拗一個法向量拗一個點這樣就好了，可以吧？(A,20091027)
>
> 法向量其實就是法線的方向向量，可以感覺到吧，可以吧，所以如果它明白的告訴你法線，你就隨便抓兩點是不是就瞭了，你往上往下其實是無所謂，所以，另外再來第二個想法是什麼……第二個，平面上一個 a 向量一個 b 向量，你看這個地方假設能夠在平面上找到一個 a 向量，平面上找到一個 b 向量，其實哪個排頭哪個排後面都無所謂嘛……我們剛講過用比例關係可以寫出 $a_{1,}b_1,c_1,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_2,b_2,c_2$，那是不是截頭去尾……那這種東西只是一種「圖像的記憶法」，所以老師跟你強調說有的東西不太可能記的起來，那就把它變成圖像看怎麼去操作，我想在整個教書的角度來講，你還是要懂一個比較方便記憶的方式。(A,20091029)
>
> 所以這個地方有兩種解題思維模式，一個是先從向量去研判它把兩種不可能給去掉，然後再利用到交點是不是可以把它給克服掉。(A,20091111)

在李師的教學中，個人時常看到他重視數學基本概念的呈現，以編碼結果來看，即是在課程中「做總結」。若以 2-4 (A,20091027)和 2-5 (A,20091106)第一堂課做概念發展為例，他分別做了 4 次和 3 次總結(請參見附錄一(8))，強調求解平面方

程式或者直線方程式就是想辦法取得「點和向量」。Ma (1996)曾經提到，具有PUFM 的教師的教學特質之一是「基本概念」或者是「深度」，亦指教師可以察覺到學科中簡單而有力的基本原則，卻足以撐起整個大架構的基本概念，並且能夠不斷地重複回顧和增強它。然而，總結有時只是出現在另一種課程形式中(例如教師示範例題或者概念回顧)，並不必然被單獨拉出來作為一個教學片段，或者成為該片段的主要形式，但是，以個人在李師實際教學場域中的感受，他的教學會不斷圍繞住那些基本原則，而且重複的頻率很高。

如此簡而有力的結論，讓李師在帶領學生分析題目時有很大的幫助，例如「那你想一下，AB 這條線其實就是它的什麼線，是不是它的法線？法向量有啦，還需要一個點。(A,20091029)」這樣引導式的問句時常出現在課堂中。在前導研究中，個人發現李師解釋題意十分清楚，由編碼結果可看出，李師在進行解題之前，會使用類似上述這樣的問句，讓學生了解題意並且思考解題的下一步，使得他在示範例題時，時常會出現對題目做「數學解釋」。但是，在解題過程中卻沒有解釋計算過程，所以，編碼會同時出現「數學描述」。以講解例題而言，數學解釋可分為解釋題目，或者是解釋計算過程，若是後者，李師有解釋計算過程，便不會再勾選數學描述。以編碼結果來看，平均一堂課數學描述約出現 6.2 個片段，數學解釋約出現 4.9 個片段(請參見表 4-2)，若同時出現「數學解釋」與「數學描述」，則多是代表上述情形。特別的是，李師在檢討課本或習題時，多使用數學描述，因為，他會同時將概念或步驟做口頭上的整理。由於恰巧研究單元為空間，故李師會大量使用視覺的圖像或者具體操作物，以表達數學概念或者協助解題(請參見圖 4-1)。此外，在平面方程式的引入、正射影面積和兩歪斜線距離都可看見。兩段相關的教學片段轉譯如下：

> 其實你可以把它想像說這邊如果是這樣的一個平面，那底下如果是它的平面，來想像一下它的正射影是什麼樣子？應該就是哪一塊？連接的這一小塊，你就可以想像成這樣，一個課本這樣你如果是這樣的正射影，那就是底下原來的這個東西，當它慢慢慢慢調上來以後，影子

就會越來越小。可以抓到感覺吧？也就是影子越來越小。(A,20091105)
哇，那像這個你要怎麼找它的最短距離？怎麼找它的最短距離？ㄟ這頗有深度的喔，慢慢聽喔，這跟你想像的難度差很多喔，你看一下這個東西很像變哪一段，是不是這一段，ㄟ這個東西其實你不太容易想，你可以拿一個尺啊跟你的桌腳啊，你想應該是怎麼樣？你看老師招數出來了喔，這個是不是就底下這個平面，ㄟ你發現到，這個線上每一點到這個平面的距離有沒有都一樣？(A,20091112)

圖 4-1：選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念

4.　「表示數學概念使用的語言」

李師有時為了解釋數學概念，會使用生活化的語言讓學生感覺更貼近，在學習上也較能抓到概念或者解題的意義，例如正射影或者參數式。類似的生活化融入也出現在他對操作物的選取，例如他在空間平面方程式的第一節課，他藉由四面體來做為起始例。從編碼結果來看，「表示數學概念使用的語言」共出現了 18 次(請參見表 4-2)，以下為三段相關的教學片段轉譯：

現在是求平面這個向量對不對，是不是求桌上這個向量，那它整個精神在哪邊，你看這個題目上有沒有辦法找到它的法線？那如果沒有法線通常會隱藏一個什麼概念？兩個向量，你看這個向量「掉」下去是不是變平面上的一個向量，這時候這個向量再「掉」下去是不是變平面上兩個向量。(A,20091030)
一個問題在這邊，平面 E 在平面 F 的夾角銳角假設是 θ，E 上有一個三角形要求它正射影面積，為什麼它只要乘以 $\cos\theta$ 就好？你稍微想一個概念喔，來~老師跟你講一個基本上的概念喔，它還在喔！ㄟ你慢慢想一個概念喔，如果這邊有一個屋頂在這裡，所謂的正射影就是「陽光從這裡照射下來」。(A,20091105)
我們當初在平面上老師跟你強調，參數式它主要的目的是把一個直線一個曲線上變成一點一點是不是在「跑」它，有點變成說整條線變成

一點一點在做它，有點點化的感覺嘛。(A,20091106)

5. 「分析」

系統化的「分析」式討論也是李師經常使用的教學手法，他善於歸納和比較，將前後的概念做連結。例如，在平面方程式第一節課的最後，他回顧在 2-1 時曾提到決定平面的常見方法有不共線三點、一直線與線外一點、兩相交直線及兩平行線，他在黑板上畫了三個圖形(不共線三點在該堂課已提過) (請參見圖 4-2)，說明每一種情況都可以使用找兩個向量求出比例關係，求得法向量與平面方程式。另外，在談論空間中兩直線關係時也曾出現，以下為兩段相關的教學片段轉譯：

當初講說決定平面常見到的方法有幾種，三點對不對，那這個你會了，那如果一直線跟線外的一個點那你要怎麼辦，一直線還有線外一點那怎麼辦，怎麼做？像老師是一個笨小孩，上面抓兩點也很可愛啦對不對，直線上抓兩點是不是就平面上三點啦，那你還是要這樣做阿對不對，我就拉一個這樣的向量拉一個這樣的向量，ㄟ這個是不是就出來啦，對不對，那很多人在講那個相交兩直線那怎麼辦？好，這邊把它講完我們就結束掉了，所以稍微耐一下性子講一下齁，這一條跟這一條直線要求它，你當然也可以跟老師一樣會找三點，隨便找，你何必要找哪一點一樣活的很好對不對，那如果快速一點你就可以找到一個向量再找一個向量，是不是就可以兩個向量啦，外積是不是就「ㄕㄨㄚ、」結束啦，那這裡我在隨便抓一個點，是不是其實它整個精神就是找它的法向量，那法向量其實就是永遠那一招嘛，對不對，比一比然後答案就出來啦……那老師比如說碰到這種的題目上，你就抓不共線三點，我是不是一樣做得很好對不對，是不是這樣，有同學說抓兩個向量怎麼比，當然比不出來啊，所以有時候你會抓一個向量，這邊抓一個點，就把它回到這個樣子嘛，對不對，那你在抓一個點是不是可以決定一個向量，然後兩個向量，ㄟ這個就出來啦。(A,20091027)

你要判別兩直線的關係你要怎麼去判別它？大概你從整個思路來講有兩個方式，如果兩個向量是互相平行，兩個方向向量互相平行那有幾種可能？重合跟平行。方向向量如果平行，它的狀況有幾種？重合，一種是不是兩個真的平行，那如果它沒有平行有幾種狀況？相交一個點跟歪斜。所以向量有沒有辦法把它四個斷成是哪一個？其實沒有辦法，好再來探討第二個問題，你如果從交點的個數來探討，交一個點確定，相交兩個點以上就無限多組解，一定是不是就重合，但是如果

不相交你有沒有辦法克服它？因為它可能是平行可能是歪斜，所以這個地方有兩種解題思維模式，一個是先從向量去研判它把兩種不可能給去掉，然後再利用到交點是不是可以把它給克服掉。(A,20091111)

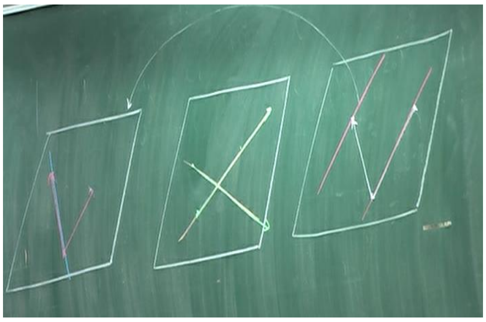

圖 4-2：決定平面的常見方法

以編碼的意義來看，「分析」需要 Ma (1996)在 PUFM 中所提的「透徹性」。因為，透徹性連結了廣度與深度，而這些卻是分析工作不可或缺的，分析如同剝洋蔥，一層一層地褪去，在思考上卻一層一層地堆疊，能夠為學生的學習提供一個完整的架構。以編碼結果來看，李師「分析」出現的比例並不高(請參見表 4-2)，這要看教授的內容而定，如果教授的單元涵蓋的概念較少，則教師較難使用這樣的方式，因為，一般而言分析涵蓋的範圍較大，倘若勉強使用它，很可能會將枝微末節拉進來，卻不一定是教學的重點。儘管如此，在前面已提到，李師對於題目的解釋是相當清楚的，其中也蘊含一點系統化討論的味道，特別是在求空間平面方程式的部份。

6. 「多觀點」

Ma (1996)提到，具有 PUFM 的教師在教學中會提供不同的觀點，對於例題能夠給予不同的解法，並對它們提出解釋或者比較。李師在解題中對於解法會有不同程度的說明，有些較為繁瑣冗長的方法會採用數學描述帶過，僅口述步驟，較實際的作法則會加以解釋並清楚寫下。例如在空間三角形求垂心時，他表示：

那我們來想一下要求它的垂心怎麼辦？怎麼辦怎麼想它？這也是真的蠻難的，有些同學是這條直線有啦，我可以過這一點做垂直它的直線

，再從這邊做垂直它的直線，但點對直線做垂直的直線好不好做？非常難做啊……理論上我可以做得出來啦，但有沒有什麼比較快速的解法？(A,20091112)

但是，李師並不必然採用快速解法，例如平面族的三個例題，他每一題都提供兩種作法。這是由於他認為，平面族的概念雖然解的比較快，卻是有技巧的，故他不想觸碰太多，反而還是用基本概念解題，算式較多也較不易計算，但是卻可以貫穿前後概念。這也再次反應出李師「以一貫之」的教學觀點。因此在平面族這個部份，「多觀點」的勾選是最多的，例如他上課時曾說：

有時候化成兩面式是一個蠻技巧性，但是可以稍微解的比較快一點點，可以吧，老師是覺得說整個在教學上裡頭來講喔，老師不太想去觸碰好像只有一個特殊解法，然後可以把它處理的很快，那像剛剛的方法含一條直線，你就可以找到兩個點把它帶進去嘛，是不是兩個點，然後另外那個夾角是不是三個變數，一樣可以把它解出來，只是這種題目上解出來很辛苦就對了。(A,20091119)

一般而言，李師會個別解釋多種方法，偶爾也會分析解法之間的異同，而且他並不會特別強調一定要用何種解法，因為他認為，各種解題方法的好壞並沒有絕對的標準，他希望學生選擇自己最喜歡的一個方法，然後熟練此方法即可，如同他所說，要留點時間和空間讓學生自己去沈澱與思考，就會知道什麼是最好的。不過，其實李師對解法有自己的喜好，有時會在課堂上明說，但是，大部分的時候並不會。以下為三段相關的教學片段轉譯：

有很多很高度技巧性的題目，但是其實它沒有辦法串連到所有的概念，也就是說它如果考 P 點，這個方法就掛掉了，有沒有發現那感覺，這個方法只能夠求它的一個距離。(A,20091111)

我不要再講下去了，再講下去方法越來越多了，可以喔，你挑一個就好，不見得說哪一個是最好，反正挑一個你喜歡的就對了。(A,20091112)

你如果程度真的夠的話，是各種解法都會，你就可以操作很熟練嘛……我跟你講還是這個方法最好啦。(A,20091110)

此外，在 2-5 的月亮劇團例題(E,20091113)中出現了一個有趣的現象，學生想到的方法與李師預先設想的方法不同，而且比較容易操作，他最後還是使用學

生的方法解題，同時也提供原方法給學生做參考。個人好奇詢問之下才明白，因為李師以為會有學生用原方法做，所以才會提。這也說明了，他的數學教學背後有 KCS 在隱隱作用，然而，面對不同班級學生不同的想法，教師很難用同一種方式來面對。

7.「多重模型」與「對符號、具體的圖像及圖表做連結」

由於教學單元是空間，故李師多會「選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念」或者進行解題，這也包含了使用圖像，所以，在編碼結果中它出現的非常頻繁，而且李師可能不只使用一種模型。例如，李師在講解正射影面積時使用了以下三種方式表達概念：(1)拿一個正方體說明正射影就像是陽光照射下來(表示數學概念使用的語言)；(2)在黑板上畫圖，發現正射影面積一維的長度不變而另一維會變成 $\cos\theta$，所以面積比都會是 1：$\cos\theta$；(3)在講桌上拿兩本書移動，發現正射影面積會越來越小。三種方式橫跨了圖像與具體操作物兩種模型，也符合 Ma (1996)在 PUFM 中所提對數學概念的「多重觀點」。類似的情形也出現在講解兩歪斜線距離時，李師先使用正四面體、兩支筆和一本書做說明，接著在黑板上畫圖並做解釋，最後，拿出大棍子與桶子再解釋一次。「多重模型」不只發生在概念發展時，在李師進行一般解題中也時常可以觀察到，如下圖 4-3 及其教學片段轉譯：

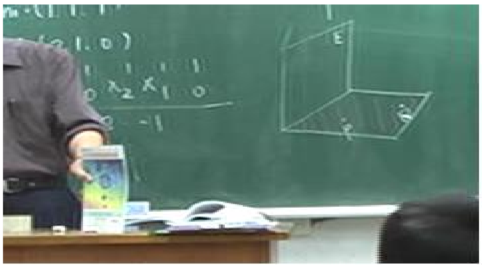

圖 4-3：多重模型

想一下，它這種東西就是有點類似像這樣的情況，這個平面 E，這個 P 這個 Q，要求這個平面的方程式……這邊就變成它有個點在這邊嘛，

那另外這邊是這個平面嘛，要求這個平面那怎麼辦？(橫跨具體操作物與圖像)(A,20091030)

李師比較常以圖像、具體操作物和方程式三類不同的模型進行教學，這和前面提到他能清楚地解釋題意有很大的關連，除了原本的概念或題目敘述之外，他都會借用其他工具做輔助，讓它們能夠更清楚地被表達，也讓學生更容易理解。然而比較可惜的是，李師在提出多種模型之後，並不見得會對不同模型做連結，或者再拉回來做對照。所以，在編碼結果中「對符號、具體的圖像及圖表做連結」出現得不多，其中，在空間平面中出現的次數比在空間直線中多，分別是 12 次和 5 次(請參見附錄一(8))。個人推測這是因為，李師認為直線的題目比平面來的容易，像遇到直線與平面混合在一起的題型，因為在空間平面時，直線的參數式就已經被使用過許多次，所以，到了空間直線中，很多題型對學生而言並不陌生。雖然，他還是會使用具體操作物，但是，反而連結做的沒有平面多，而且從編碼結果中可發現，李師在空間直線的課堂中較常使用「數學描述」(請參見附錄一(8))。

8. 「數學驗算」

李師在解題的過程中經常強調「數學驗算」的重要，在訪談中他提到驗算有「學生不會算錯、希望學生將速度放慢」兩項功能。他認為因為學生的程度很好，以致於大部分學生一拿到試題時，就如同趕菜市場一樣的快速求解，但是越是急迫之時，心反而需要越冷靜，如果算錯再拉回去，只會浪費更多的時間，故必須要培養學生在一個穩定的狀態中算數學。研究過程中，個人發現李師解題大多是詳細地解給學生看，鮮少直接公佈答案或者跳躍步驟，並且在計算過程中會重複檢查，確保每個步驟或者答案的正確性。但是，他強調必須使用別的概念來驗算，而非再針對原算式做驗算，因為，前面怎麼錯後面還是會怎麼錯，所以，在本編碼系統中對於「數學驗算」的定義與李師相符。例如，在某例題中求點 P 到空

間平面的正射影點 Q，並且求點到平面的距離(E,20091110)，李師在第 2 小題中除了直接計算 $\overline{PQ}$，還借用點到平面的距離公式來驗算答案，而這樣的驗算也具有複習的功能。以下為兩段相關的教學片段轉譯：

> 那你有時候假設對你這個解題沒有多大的把握，其實你可以做驗算工作嘛，你看這個向量跟這個向量內積有沒有等於零？有沒有？這個向量跟這個向量內積有沒有等於零？那等於零就不會錯阿。
> (A,20091030)
> 點到平面的距離公式在這邊的時候，它如果考正射影點，你是不是可以把它當成一個驗算的工具。(A,20091110)

而且，執行驗算的工具有時不只有一種，例如你可以考慮一下就是說你看這個向量跟這個向量有沒有內積都等於零？有沒有通過 P 點有沒有通過 Q 點？都有，那這樣是不是就刷，是不是就結束了(A,20091030)。綜合本階段的觀察，在 2-4 講義中例題共有 14 題，李師講解了 10 題，驗算 2 題；在 2-5 講義中例題共有 25 題，他講解了 23 題，驗算 7 題。若以比例來看並不算高，然而，由於個人對於驗算的定義是必須使用其他概念來驗算，故有些題型並無伸展之處，但是，仍可見李師的教學特色。個人認為，李師強調驗算是因為他希望學生不要失分，也呼應了他的教學多以應試、「實用」為取向，學生若養成這樣的習慣，自然就可以發揮既有的水準拿到較好的分數，李師在實際教學中也確實以身作則。

9. 「計算錯誤或其他數學的忽視」

即便李師謹慎驗算，在教學過程中仍可能產生「計算錯誤或其他數學的忽視」。李師的數學錯誤大多是計算錯誤或者抄錯題目，但是，這樣的情形他都會立即修正回來，平均一節課會出現 2 次數學錯誤(請參見表 4-2)。比較有趣的現象是，李師可能因為對於講義題目太過熟悉，因此，偶爾會發生抄錯算式而答案算對的情形(請參見圖 4-4)。

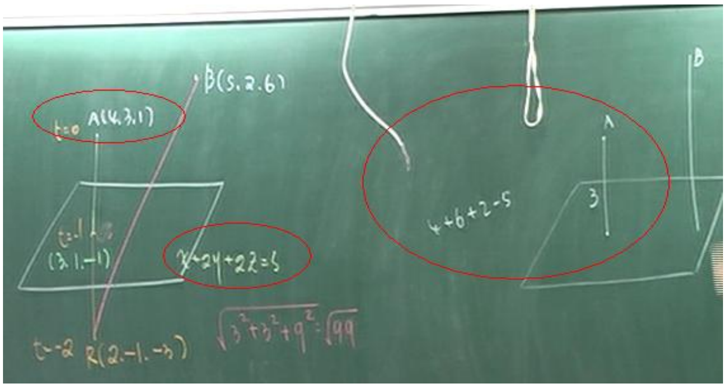

圖 4-4：李師抄錯算式而答案算對

本階段研究中，在概念的部分，李師的數學疏忽有四個地方。第一個疏忽是，李師在截距式中求解最小體積時使用了三個值的算幾不等式(A,20091030)，然而，他並沒有先證明讓學生瞭解它的由來。在訪談中他提到，因為截距式不是他教書的一個重點，而像這種由四個去推三個的算幾，到了高三再提會更為完整(D, 20100114)。第二個疏忽是，在證明平面族時他只有証明一個方向，也就是說李師只有証明 $hE_1 + kE_2 = 0$ 為一個過 E_1 、 E_2 交線的平面，但是，他並沒有證明若一平面過 E_1 、 E_2 交線，則可寫成形如 $hE_1 + kE_2 = 0$ 。但是，講義中的例題卻需要用到反方向。相關的講義例題與教學片段轉譯如下：

> 例 1：設 $E_1 : 2x + y - z + 5 = 0$ 、 $E_2 : 2x + 3y - z - 1 = 0$ ，若 E_1 與 E_2 的交線 L，試求 (1)通過 P(1, 1, 1)且含直線 L 的平面。(E,20091103)
> $(a_1h+a_2k)x+(b_1h+b_2k)y+(c_1h+c_2k)z+(d_1h+d_2k)=0$ ，所以你看它也是一個平面。可以接受吧？那這個時候它通過哪一點 (x_0,y_0,z_0) ，一條直線上是不是很多很多個點，你可以想像兩平面相交直線，管他哪一點，它同樣是 z_0……那這時候你就發現 $h(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1) + k(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2) = 0$ ， $h \cdot 0 + k \cdot 0$ 有沒有真的等於 0？所以整個證明是不是就結束了？也就是通過兩個平面交線的這個平面一定可以寫成什麼型態 h×第一個+k×第二個＝0。(A,20091103)

在期末訪談中，個人曾詢問李師這個問題，他說一條直線可以化成兩面式是打算在 2-5 的時候再拉回來講，不過，在實際教學課堂中他並沒有再拉回來平面族的部份做補強。個人推測，應該是李師認為學生可以自己體會並連貫起來，而且，平面族本就不是他看重的地方，可能因此忽略了證明的嚴謹性。但是，由於平面族李師會提供另一種基本解法，所以，這樣的疏忽對學生而言並不會造成太大的影響。第三個疏忽是，李師在講解平面上求一點至 A、B 兩點距離和的最小值時，

他忽略了判斷 A、B 兩點的同異側。若以講義原題目來看(E,20091111)，原題目已經有給圖形可知在同側。關於判斷點在同異側的部份，李師在訪談中提到，這個需留到講完線性規劃後再帶到會比較好，所以，在前面教學中都沒有提到這個部分，可是因為數學科補充教材有，他不得不先把它放進來。最後，第四個疏忽則是，他在解題前沒有先檢查兩直線是否歪斜，而直接畫出兩歪斜線求解。

從上述四個教學上的疏忽中不難看出，李師對內容的重視度會影響他在處理教學細節上的嚴謹性。雖然，平面族和截距式都不是他要教授的重點，然而以證明過程而言，截距式比平面族更為完整。此外，由於講義是李師親自編寫，故時常會因為過於熟悉而發生小錯誤。雖然李師提到，許多概念到了高三再講會更恰當，因此才會產生某些教學疏忽，藉此也可看出，他的教學著重在當下的實用性。

10. 「回答學生問題」、「使用具體操作物說明數學概念」與「引出學生回答」

以編碼結果來看「對學生使用的數學」非常少，互動方式多是李師點學生回答，或者是李師針對學生結果再做發展。在前導研究中，「回答學生問題」出現了 3 次，其中 2 次是檢討習題時學生對習題的發問；「使用具體操作物說明數學概念」只出現 1 次，是由於學生不明白題意，李師使用書本作為平面再次對她解釋；出現較多的則是「引出學生回答」，共出現了 11 次，李師使用拋問引出學生回答，學生雖然有給予回應，然而態度還是較為被動，並不會主動發問(請參見表 4-3)。

針對上述對李師的教學概念與實作的討論，個人嘗試描繪出李師對空間平面方程式和空間直線方程式的知識包裹(請參見圖 4-5)。橢圓代表數學概念(或程序)，其中虛橢圓指的是，在訪談中李師提到未來會連結的數學概念；淺灰色橢圓表示關鍵片段(key piece)；長方框則是李師教授的數學單元。箭頭方向代表由前一

個數學概念支持後一個數學概念，亦可看出數學概念發展的序列。虛線箭頭則是想要強調，李師使用比較(類比或對照)的數學教學手法。

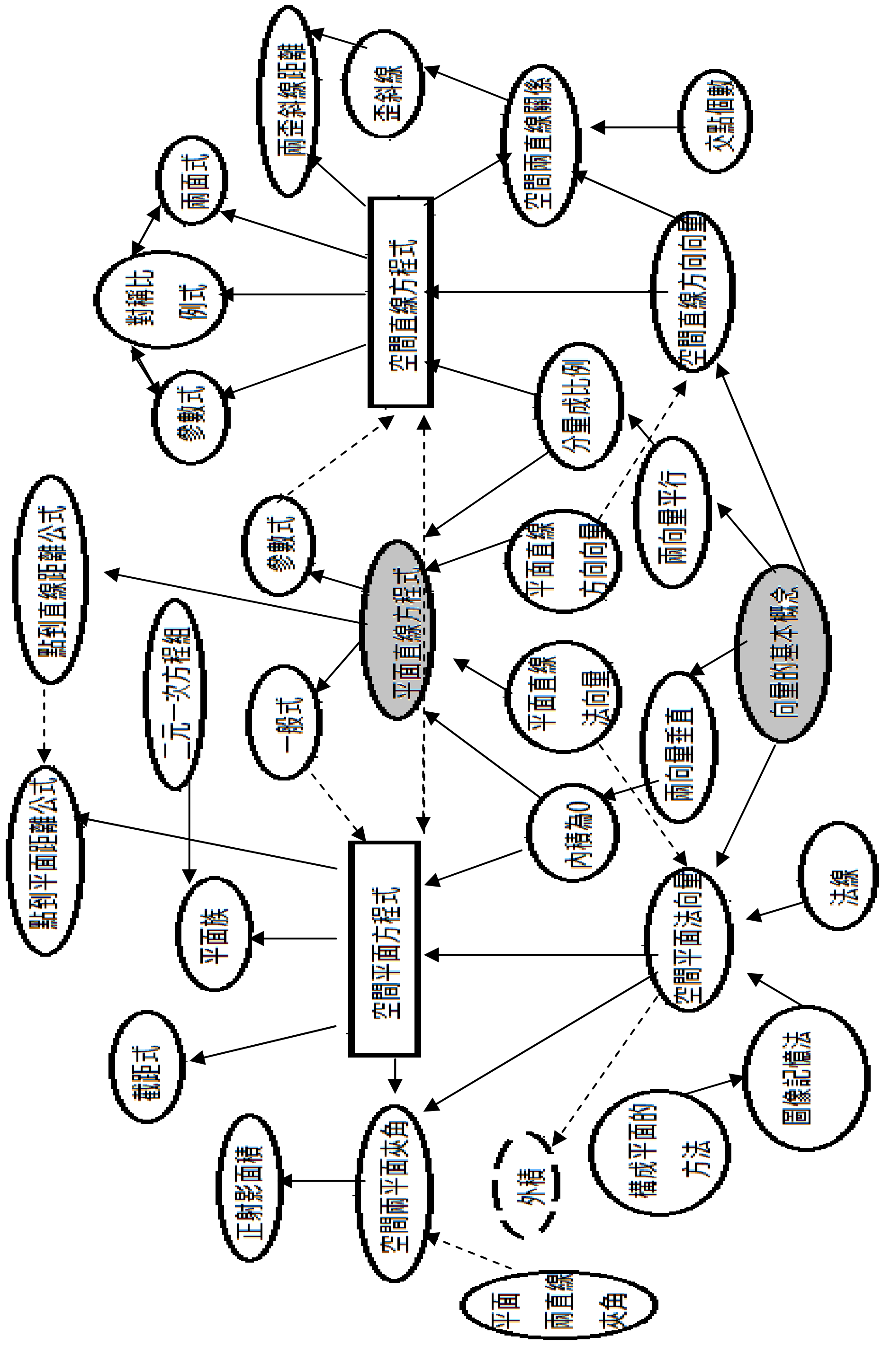

圖 4-5：李師空間平面方程式和空間直線方程式的知識包裹

以李師前導研究的知識包裹來看(請參見圖 4-5)，「平面直線方程式」是兩個單元都有的關鍵片段之一。李師以此片段做教學的脈絡，區分這兩單元的不同之

處，之後，再各自發展出概念的主軸，都是由「點、向」切入，平面方程式需要的是點和法向量，而直線方程式需要的是點和方向向量；以及，平面方程式需要兩向量垂直內積為零，而直線方程式需要兩向量平行分量成比例。以 Ma (1996) 的教師學科知識的架構圖來看，兩者間的程序性理解是不同的，在概念性理解上也不同，但是，在邏輯關係中卻有共通的部分，即是「平面直線方程式」和「向量的基本概念」。圖中最底層則是學科結構，包含基本原則與基本態度。首先，基本原則中運算原則都會在兩單元中出現，再者，基本態度中，李師不僅知道如何算也知道為什麼、對於方程式的求法給予證明、在解題之前能夠先對題目做數學解釋、能夠在不同的脈絡中掌握住概念的一致性，所以，他對學科的基本態度廣泛地存在兩個教學單元之中。

Ma (1996)在她的博士論文中提到，PUFM 並沒有清楚的邊界，要界定一位教師有或者沒有 PUFM 是相當困難的。在她的觀察中，約$\frac{1}{10}$的大陸教師被認定具有 PUFM，他們大部分已經有多年的教學經驗，而且已經教過所有年級，甚至是一次又一次地重複(ibid, p. 241)。另外，$\frac{1}{10}$被認定不具有 PUFM，其他則介於兩者之間。Ma 說到這些介於灰色地帶的教師，當他們教低年級時，對低年級的教材可能呈現 PUFM，但是，對於高年級的教材則不然，反之，也有類似的結果。李師具有 30 年的任教經驗，自從踏入該校任教後，大多擔任高三班級的數學教師，高三除了要教授新教材，同時也需要幫學生複習高一、高二的內容，在教學上的挑戰更大。對於 Ma 所提的灰色地帶，雖然，李師現在教的是高二班級，即使他並非高一到高三重複輪替，但是，在這麼多年的磨練之下，他對教材或者試題的熟悉度應該都十分足夠，而且，他的數學教學實作知識結構是相當穩定的。從這小節的討論以及上圖 4-5 中，可看出李師的數學教學主要符合 PUFM 的深度、廣度和透徹性三項特徵。

二、 階段小結

Ma (1996)認為 PUFM 是一種學科知識的型態，然而，數學教學實作知識並非只有學科知識，也包含了教學知識或者學生知識。例如，教師可能因為熟悉所教的學生，而調整其教學內容。LMT (2006)的 MQI 觀察系統則是對教師做了較詳細且廣泛的觀察，這也是本研究教學影片分析系統的來源，只是，個人需再依據李師的數學教學實況修改系統之後，才能著手進行分析。Ball 等人(2008)的 MKT 架構源自於 MTLT 和 LMT 兩項計劃，而且，包含了學科知識以及教學內容知識，所以，在研究的過程中必然可預見 MKT 和 PUFM 的相異之處。

不同於 Ma (1996)的研究方法，個人是從課堂教學觀察與訪談的研究結果發現，李師在教學中所展現的學科知識符合 Ma (1996)所提出 PUFM 的許多特質。PUFM 的教學包含了連通性、多重觀點、一致性和基本概念四項特質，個人試圖將課堂教學觀察分析系統中的編碼做分類，連通性包含「比較」、「概念連結」、「數學解釋」，多重觀點包含「多觀點」，一致性包含「提示教材地位」、「概念連結」，基本概念包含「做總結」。事實上，並非一個編碼就歸類在一種特質。相同的編碼會因為不同的教學事件而歸類在不同的特質中。例如，李師對一個題目給出不同的解法是屬於多重觀點，然而，如果他更進一步解釋或比較不同的解法，就是展現連通性；或者，李師安排機會複習學生已學過的概念是屬於一致性，使用已學過的概念來建立新概念則是連通性。如同 Ma 所說，這四種特質交互相關(inter-related)，而且，連通性是一般 PUFM 教師所具備的教學特質。

然而，有些編碼無法完全歸類到這四項特質。由於 MQI 原先是 LMT (2006)使用來看教學中的數學品質，只是個人為了更符合李師的實際教學而略加調整，所以，部分編碼為原先的編碼。這也代表著，部分編碼可以對應至 Ball 等人(2008)

所提的 MKT 架構，然而，卻不必然可對應至 PUFM 中。接著，個人提出四個較凸顯 MKT 的例子進一步說明這種情形。

例 1：KCT

李師選擇操作物、起始例來引入數學概念(對應編碼「選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念」)，或者安排教學順序(對應編碼「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」)、知道何時要停頓並且釐清，這些是屬於 Ball 等人(2008)提出的 KCT，偏向對教學所做的決定。例如以下三段相關的教學片段轉譯：

> 我們來上平面方程式這個部分，我剛剛拿到一個這個模型，剛剛看到一個老師走過去，我稍微幫你複習回顧一下前面講過的部分，你稍微想一下，當初我們在正四面體座標化的時候，怎麼把它給座標化？……這個座標變多少，(0,0,0)設它當 A 點，這個 B 的設法是多少(0,1,1)，C 的座標是(1,0,1)，D 的座標變成(1,1,0)，對不對？好啦，我們現在開始想一件事情，譬如說我想求這個平面的方程式。(A,20091027)
>
> 那有些老師是先教這個再教那個，那老師因為從平面上的直線拉過來，所以先講這個再講這個，單純啦。(A,20091106)
>
> 好啦，給你一分鐘想一想，看有沒有多大的問題。沒有我們就開始要來講一下直線，其實直線的解法蠻單純的啦，但是因為它在直線上一定要碰到平面的概念，所以其實在講直線其實在講兩邊怎麼綜合，那你假設平面那個部分講不清，空間一定會出問題，可以吧，所以平面的東西回去趕快把它給做一做，不然兩個糾纏在一起就哇～，就天下大亂。(A,20091106)

例 2：KCS

李師知道學生容易在哪裡產生困惑或錯誤，或者，能夠預期學生的思考模式，並針對這些去做數學任務上的安排(對應編碼「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」)，這些是屬於 Ball 等人(2008)提出的 KCS。例如以下兩段相關的教學片段轉譯：

> 你就發現平常老師不太會做重複的題目，那當初老師寫講義發現這個地方是很容易算錯的，所以老師就在框框裡講一題，第一題準備讓你們動手來做它。(A,20091109)
>
> ㄟ你們喔，老師在這邊多提幾次你們會把平面跟直線搞混掉，所以給個平面給個直線，讓你把它給拉開，所以老師當初寫這個題目上的目的是這樣。(A,20091110)

例 3：SCK

李師能夠評估或調整教科書的內容，有效地使用數學表徵，或者提問具有生產力的問題，這些是屬於 Ball 等人(2008)提出的 SCK。關於調整教科書的部分，李師在課堂中不會表明，卻往往在訪談中才進一步說明，個人仔細對照自編講義與課本，發現他的編排十分用心。這也說明了 SCK 具有顯和隱兩個面向，例如以下三段相關的教學片段與訪談稿轉譯：

> Q：兩平面夾角這個部份，當初在講兩直線夾角是用斜率去定義？
> A：不是，是用法向量，第一章是用法向量來講，這個公式是我只是從第一章直接多拉一個，故意把平面變成直線化。因為向量沒有死角，但斜率是有死角的，所以在講平面向量的時候講到兩個，一個是用方向向量來講，講完最後直線以後在後面 1-4 再用法向量來講一次。所以她們就知道說為什麼當初不能夠講方向向量，因為平面沒辦法講方向向量，所以這時候她們就懂為什麼要引進法向量的概念，所以這裡頭只是拉一下而已。(D,20100114)
> 你會發現 x：y：z＝$(b_1c_2-b_2c_1):(a_2c_1-a_1c_2):(a_1b_2-a_2b_1)$ 是不是這樣的關係？ㄟ這個東西你背的起來嗎？……我們來慢慢的欣賞，這個就是哪一個中間這個，這個是不是就沒事，第二個在哪邊，我們來找一下來，這一個 y，剛好跟這個一樣 $(a_2c_1-a_1c_2)$ 有沒有，對不對，那再來第三個呢，再找一個來，這個 z 是在哪邊 $(a_1b_2-a_2b_1)$，這樣是不是就出來啦，對不對，所以有人就發現到說這個就是 x：y：z，用這種快速的方法馬上得到它的結果。(A,20091027)
> T：那有同學講說在做一個平面有沒有用？相交是不是一條直線。它兩個相交一條直線還不夠阿，你如果在做它還是一樣三個平面是不是相交一條直線，所以還要再加哪一個？
> S：ABC。
> T：對啦還要再加平面 ABC 啦。(A,20091112)

例 4：KCC

李師對課程具有縱向的了解，能夠為未來即將教授的單元事先做鋪陳，或者將正在進行的教學單元與前面已習得的概念做連結，這些都屬於 Ball 等人(2008)所說的 KCC。例如以下兩段相關的訪談轉譯：

> 那你上次有跟我講過那是重心的概念，那種題目上其實我們都擺在高三最完整，因為其實高三的第一章節就是專門在講不等式的部份，有講條件有講絕對有講線性規劃的部份，包括它所有很嚴謹的證法，後

面才會跟她們講的更完整一點點，那她們還是可以接受這種題目啦。(D,20100114)

其實我本身的想法是平面族不要動的太多，平面族其實不是高中課程的一個核心啦，所以你有沒有發現我的核心是在教她們說如果它告訴你兩個平面的交線，你就可以把它直線給拉出來，所以我當初在上第一章的時候就花了一節多的時間，跟她們講那個不定方程式的解法，包括尤拉解法什麼東西都教進去了，所以她們到這邊的時候會覺得很自然啦，所以第一章其實就有個伏筆在那邊了啦。(D,20100114)

以上四個教學實例中似乎指出，MKT 架構中的六大領域彼此會相互影響，就如 Ball 等人(2008)所說，要從一個領域分辨出另一個領域，或者明確地說明它們的邊界是很困難的。李師會在脈絡中整合所有的知識，如例 2，由於對學生錯誤的了解，影響他對講義的編排，這是 KCS 影響了 KCT；在例 3 中，由於長期教學經驗的累積，他發現到，數學概念的某種表徵會讓學生學習得較自然，因而選用它來進行教學，這是 KCS 影響了 SCK；在例 4 中，由於他具有完整的課程知識，因此，能夠將教學內容或例題做最合適的編排，以保有教學的流暢性和連貫性，這是 KCC 影響了 KCT。以上這幾個例子似乎顯示，在教師真實的數學教學活動中，MKT 的六大領域是可以相互流動(或流通)的，然而，大部分的數學教學實作知識以及它們之間的影響往往是內隱的，所以，個人經常必須透過訪談，才能察覺或理解李師教學實作知識中較細微且內隱的部分。

第三節　第一階段研究

本節將描述第一階段所得到的研究結果，以下分析李師數學教學實作知識的結構，以及探討與 MKT 相關的教學事件。

一、 李師數學教學實作知識結構的分析

第一階段的研究單元為「重複組合」，共計有 3 節課，46 個片段，個人將各類別中編碼出現的總次數整理如下表 4-4、4-5 與 4-6，各節詳細的發生次數請參見附錄一(9)。以下說明李師在本階段中的教學模式和教學概念與實作。

表 4-4：第一階段研究的「教學的進行方式」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 概念回顧或檢討家庭作業	3	4. 做總結	3
2. 介紹主要的工作或概念	1	5. 學生操作	6
3. 教師示範例題	***26***	6. 其他	7

表 4-5：第一階段研究的「教學活動中數學領域的知識」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 數學的符號	1	10. 數學證明	0
2. 數學的詞彙或其定義	1	11. 數學驗算	1
3. 表示數學概念使用的語言	0	12. 計算錯誤或其他數學的忽視	5
4. 為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	15	13. 多觀點	13
5. 選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	8	14. 比較	9
6. 多重模型	6	15. 分析	8
7. 對符號、具體的圖像及圖表做連結	2	16. 概念連結	3
8. 數學描述	15	17. 提示教材地位	3
9. 數學解釋	***26***		

表 4-6：第一階段研究的「對學生使用的數學」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 使用學生錯誤	0	4. 使用具體操作物說明數學數學概念	1
2. 引出學生回答	***9***		
3. 使用學生成果	0	5. 回答學生問題	4

(一) 教學模式

李師這個單元的教學模式如同前導研究所述，首先，在課堂一開始先做班級經營，接著複習概念，正式進入教學的主題，在講解完主要概念之後，接著示範(演示)例題。由於李師是透過舉例講解數學概念，故以教學的進行方式而言，它屬於「教師示範例題」。同於前導研究，他在第一堂課並沒有立刻切入講義的例題，而是留待第二、三節課。不同的是，在本階段中「學生操作」的比例增加，前導研究中僅占了總片段數的 $\frac{10}{227}$，本階段中則占了 $\frac{6}{46}$(請參見表 4-4)，特別是排列組合的整合性題目，李師會先讓學生操作與思考過後再講解。在之後的訪談中，他提到：

> 因為你說像這種題目上她們怎麼可能一下就想出來，一定想不出來嘛，那她們其實做完以後會先跟隔壁做一個對照，然後不對就像麻雀嘰嘰喳喳探討一下，那其實有時候這種時間就是她們腦力在激盪，那完了以後她們就慢慢慢慢比較清楚，所以其實這些題目上都很類似，激盪完一個題目後她覺得她有概念，那第二題如果她全對可能就很有自信，那如果錯她還可以再做修訂。(D,20100512)

李師希望學生懂得思考，因為，這個單元對學生來說較容易出現貌似有理的解法，而且題型多變，只要題目換個樣子，學生的腦筋就打結，如他所說：排列組合都這樣，老師講的好像都懂，回到家都不懂，對不對，所以老師跟你講後面一定要做比較開闊的題目(B,20100429)。基於這樣的想法，致使學生操作有明顯的增加，同時，學生的課堂發問也變多，增加了師生間的互動。學生操作片段的平均時間為 158.8 秒，例題大多還是李師自行講解。他的教學仍是採用「螺旋式教學」，並不會在上完後立刻考試或者檢討習題，就如他在上課所說：排列組合今天教完明天考是考不出來的，尤其那種整個比較統合性的題目上你根本就不會(B,20100429)，所以，他在課程結束後一週才回頭檢討習題。

在前導研究中常出現的「做總結」，在本階段中並不凸顯(請參見表 4-4)，但

是李師其實仍會在解題過程中，不斷強調重複組合的基本原則是「一定是寫成它的這種形態($x_1+x_2+...+x_n=k$)才可以做重複組合喔，不是什麼題目都可以用重複組合來做」，只是時間上較短暫，並不被視為一個主要的教學方式，同樣地，他在講解整合性題目時也是如此。因為，這個單元的例題多半融合其他排列、組合、重複排列的概念，雖然他會對概念間做比較與整理，可是時間過於短暫而不被視為「做總結」，這是本研究中常遇到卻難以避免的情形。李師在重複組合第一堂課的後半部，將排列組合中不同類型的題目列成一個表格，以便整理、比較與分析。前導研究中，他也在空間平面第一堂課的最後，依構成平面的四種方式分別求得法向量。所以，課後統整似乎是李師常用的教學方法。

(二) 教學概念與實作

仿照前導研究中闡述李師教學概念與實作的方式，個人依據編碼分為不同段落，再由編碼結果對應回原始的教學情形，使用敘述的方式說明李師的教學與PUFM 相互呼應之處。最後，提出李師在發展重複組合概念時所展現的知識包裹。

對於排列組合單元，李師在課堂中曾提到，要學好它，需要小學的計算能力、國中的國文程度以及高中的心智年齡，這種說法其實是為了安定學生的心，其中最重要的應該是心智年齡。訪談中他談到，因為計算只有加減乘除而已，故只要有小學的計算能力就可以做了，而排列組合時常會在語意上看不懂，故為了怕有瑕疵，題目的敘述都會比較長，而且必須說到學生可以看的懂。心智年齡是希望讓學生了解，排列組合的有些解法不是她們可以立刻想或解出來的，經常需要站在前人的肩膀上，欣賞前人所建立的東西，讓學習排列組合可以做的更快(D,2010 0512)。在本階段中，李師不單單只是教授重複組合，更重要的是他要讓學生將它與其他概念有所區隔。

1. 「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」與「提示教材地位」

重複組合為排列組合的其中一個概念，所以，李師在教學中會整合前面所學的排列、重複排列和組合，做橫向的連結，而且他將重複組合的概念建立在組合上，這是縱向的連結。李師在重複組合第一堂課的開始，先透過舉例複習排列、重複排列和組合這三個概念，再由五件相同物分給三個人的分配方法數，引入重複組合，並且在講解完主要概念之後，先操作例 3 和例 4 為四個概念做完整複習，最後，利用表格統整排列組合中包含正規與非正規的題型(請參見圖 4-6)。在之後的訪談中，李師談到其實他並沒有刻意安排要做表格，只是上課時腦海裡頭大概有個想法，去想說怎麼把它給表徵出來，便很即興地將它製造出來。他認為排列組合有個條理在，教到這個部份要教到讓她們辨別哪些用排列、組合、重複排列和重複組合，如果弄混就是一團亂了。所以，製造表格是為了幫助學生沉澱自己的數學思維。李師的回答有點讓我出乎意料，但是也由於李師提到他上課會跟著感覺走，所以，更能展現他對課程知識的熟悉，以及對比較相似或相異概念的統整能力。這似乎就是 Ma (1996)在 PUFM 中所說的「一致性」或「透徹性」。透徹性是一種將教學內容的深度和廣度融為一體的能力，倘若李師不具備這樣的能力，無法臨時製造出這個大表格。

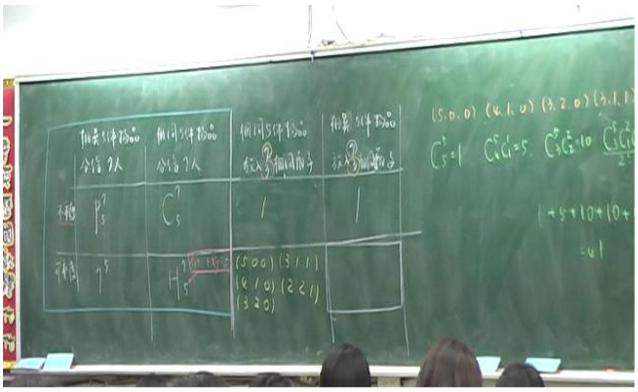

圖 4-6：李師在重複組合中使用的大表格

Ma (1996)也提到，具有 PUFM 的教師會避免學生在學習上過於破碎，並且，能夠安排合適的機會為已習得的概念作複習。李師在訪談中提到你不能夠說給她

新的東西，不讓她跟其他做個區隔，那她學了以後孤伶伶也不知道要幹嘛(D,20100512)。所以，李師腦中對排列組合已有一個完整的架構，而這個架構必須透過教學活動，慢慢地在學生腦海中建立起來。個人定義「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」必須是教師在課堂中有明確指出其意圖，也包含了教師即興式的選取例題以發展概念。李師在脈絡上即便沒有刻意的選擇，卻產生了意外的驚喜，而且他透過起始例引出 H，亦屬於此編碼。對於講義例題的安排，李師提到多是放些往年常考的題目，也是整合性的題目：

> 這邊老師大概收集一些學校裡頭往年考試的題目上把它丟一丟在後面，那你如果這個題目都會做那感覺應該夠清楚了吧，這都是學校裡頭的一些考題啦。(B,20100428)

個人做更細部的分析後發現，若跨不同節課來看，李師在第一節課所使用的表格和所舉的例題，其實皆有對應到講義例題，所以，他在第二、三節課中只是再回顧第一節課的概念，帶領學生重新練習一次，另外再操作一些較難的題型，由此可見，他的教學具有隱藏性的脈絡。此外，本階段中出現的三次「提示教材地位」都是出現在李師協助學生回想前一節課的內容的情況之下(請參見表 4-5)。

2. 「多觀點」

前導研究中，李師的「以一貫之」和「實用取向」數學教學觀點，在本階段中也十分明顯。例如，他強調唯有寫成「$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$」這種形式的題目才是重複組合的樣式，讓學生可以透過這樣的檢驗方式，避免重複組合誤用的情形，請見以下三段相關的教學片段與訪談稿轉譯：

> 如果可以重複呢，這個地方一定可以寫成多少型態，這邊喔七個人，就可以寫成多少型態 $x_1 + ... + x_7 = 5$，要寫成這種型態的題目上才可以怎麼樣呢，用這個東西來做。(B,20100427)
>
> 那第二個杯子相同，飲料都可相同，表示怎麼樣呢，這五種飲料 A+B+C+D+E=3 個杯子，H_3^5 是不是就出來啦。(B,20100428)

所以，我們在教她的時候強調說，你只要是 x+y+z 這種型態才可以用重複組合來做。其實這種觀念學生就很容易抓到它。(D,20100512)

這也是 Ma (1996)提到 PUFM 中的「基本概念」。李師把重複組合視為「$x_1+x_2+...+x_n=k$」表徵的形式，在教學中帶領學生緊緊抓住這個基本原則。最後表格的統整，個人將它視為是「實用取向」的展現，讓學生在遇到問題時，可以對照表格做學習與思考。在總結性訪談中，他說會做這樣的分類是由於學生的解題錯誤率很高。這也說明了他的數學教學會受到 KCS 的影響。李師在表格的部份花了約 17 分鐘(請參見附錄一(6))，做了許多數學解釋和分析，並且，將表格區分成正規與非正規兩個區塊，他表示有規律的才能算是排列組合，沒有規律的則不算。以下為三段相關的教學片段與訪談稿轉譯：

你這邊如果真的聽懂，大概就沒有多大的問題了啦，所以這些你如果真的高中在探討的排列組合就只有這些東西，那比較正規的應當是只有哪些而已，只有這個區塊而已，這一段才是真正排列組合想要探討的部分，也就是說它已經變成有規律性的部分，那這個部分其實已經怎麼樣呢，不在排列組合能夠操作的範圍。(B,20100427)。

你這邊如果把它想懂至少考月考可以考個還不錯的成績出來。(B,20100427)

所以我上課常跟她們強調一個概念，有規律的其實才叫排列組合，沒有規律的那根本不叫排列組合。(D,20100512)

另一個呈現基本概念的例子在李師對重複組合「H」這個符號的引入。由於李師將重複組合的概念建立在組合上，展現了概念的連結，而他在求解「$x_1+x_2+...+x_n=k$」非負整數解的個數時，採用的是 $C_{n-1}^{(n-1)+k}$ 這種直接寫法，上面代表的是 k 個 1 和(n-1)個加號，而下面代表的是選(n-1)個加號。李師所強調的寫法讓學生容易理解以及記憶，反而 H_k^n 被他視為只是為了方便起見，而針對上述的問題所創立的公式寫法。相關的兩段教學片段轉譯如下：

如果這樣我就可以把它變成什麼樣的題目就好了，變成什麼樣的題目就好啦，x+y+z 就變成 7 個裡頭加幾個，是不是取 2 個？為什麼它是 7？它 7 哪邊來的？五個 1 在兩個加號，這樣是不是變 7 個，那個 2 代表什麼符號？加號嘛。(B,20100427)

人類就創造了一個符號，創立了一個符號，這個符號的目的是要做什

麼，讓大家比較容易記嘛，所以有些符號你懂得它為什麼而來，他就想到說 H_k^n，所以我現在令重複組合的時候，不講這個符號也可以啊。(B,20100427)

因此，李師講解重複組合的例題時都會寫出三個式子，例如 x+y+z=7 的非負整數解的個數為 $H_7^3 = C_7^9 = C_2^9$，其中包含了公式寫法 H_7^3、H 和 C 的換算 $H_7^3 = C_7^9$ 以及直接寫法 C_2^9。在訪談中個人詢問李師為何由 C 引出 H，以及強調直接寫法和公式寫法中的何者，他的相關回答如下：

有時候在計算上到後面反而這個是比較方便的。所以講原理要從 C 開始來講，那其實如果在應用上，H 學生領受的程度會比較高一點點。(D,20100512)

你要去解釋為什麼 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$，那個道理一定要從組合才能夠講。不然你直接寫這個 H_k^n 規定它是多少，學生會問你為什麼給它下這個規定，所以其實在講原理一定從 C 來做嘛。(D,20100512)

沒有，講解過程用 C 來講解學生很容易接受，但是在應用題目的時候還是 H 會比較方便。(D,20100512)

李師希望學生即使是寫 H，也可以了解這個符號背後所代表的數學意義，所以，兩者中他並沒有特別看重哪一個。個人認為這是個有趣的現象，若以實用而言，李師只需讓學生反覆練習寫出 H 再求出答案，如上例中的前兩式，但是李師卻同時強調意義，如上例中的第三式。由此可見，雖然他的教學為「實用取向」，但是也重視學生「基本概念」的建立，希望她們在學習過程中了解 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的意義，而第三式的直接寫法相當於是在佐證這個等式。如同上述的訪談內容，李師將直接寫法 C 視為原理，而公式寫法 H 是為了方便，所以，在編碼過程中個人認為公式寫法 H 和直接寫法 C 是兩種不同的觀點，故在本階段中常出現「多觀點」(請參見表 4-5)。這也說明李師符合 Ma (1996)所提 PUFM 的特性，能夠帶領學生使用「多重觀點」學習數學概念。然而，課本是由不盡相異物的直線排列切入重複組合，但是，李師卻選擇由 C 切入，他在之後的訪談中表示：

用 C 會比較乾淨俐落，要講 H 轉成 C，還是用方程式來講切入學生是

> 最容易的，這個切法應當是最容易，學生聽了覺得理所當然，會比較單純化一點點啦。每一種東西的講法都很多啦，教起來好像也都沒什麼狀況，不要切得太快。(D,20100512)

其實講法有很多種，但是，在講的時候若遇到學生有困惑的感覺，教師必須要去修正自己的講法，教久了就知道哪一條路比較方便。記得在前導研究中，李師時常提到教學要單純化，個人在本階段中有了更深刻的體悟，他所謂的單純化即是「用學生的角度去思考概念」。教師所知道的遠遠超過學生，但是，並非像個巨人一樣站在學生頭上使她畏懼，而是運用多年的教學經驗，在教學中透過淺顯易懂的方式，讓學生理解與學習。他也再次強調必須要讓學生對學習數學有信心、有興趣，如此一來教師才能教得快樂。

3. 「概念連結」

在「概念連結」的部份，李師將前面所學的樹狀圖以及排容原理帶入重複組合的課堂，在考前複習時，他也再針對兩者的使用時機做說明。雖然，講義中真正使用排容原理的例題只有一題，而且即使不使用排容原理，也能夠使用列舉法求出。然而，適時安排機會為學生做複習是 PUFM 教師的特性，實際上，李師大多還是將焦點放在協助學生釐清排列和組合的相關概念。以下為兩段相關的教學片段與訪談稿轉譯：

> 老師跟你講其實整個排列組合就學這些東西，那你如果說變化很複雜，但是又不多的部分可以引進什麼概念？樹狀圖的概念，那有些比較尖端的題目上可以引進什麼概念？是不是排容原理的概念？(B,20100427)
>
> 我在講樹狀圖有時候讓她去了解排列真正的起源是從樹狀圖出來……，去解釋乘法跟加法原理其實是同一個東西出來，有時候用這種題目上讓她們了解加法原理，乘法原理就是比較快速的加法，你要乘法就一定的特性是狀況一樣用乘的，狀況不一樣當然是用加的，就用一種淡淡的東西說明它整個的一個概念。所以有時候為什麼在排列前一定要講樹狀圖，但不會去把它講很難的樹狀圖，那完了以後跟她們強調說樹狀圖不能隨便用，那樹狀圖通常的設限頂多是三棵嘛，我就笑

說樹如果太大一定會倒掉。所以在考前，今天跟她們講說，考試什麼時候用分組分堆，什麼時候用樹狀圖，那是最難的部分嘛，次數有限用樹狀圖，次數比較多用分組分堆。(D,20100512)

4. 「數學描述」與「數學解釋」

編碼結果顯示，本階段的「數學解釋」占總片段數的 $\frac{26}{46}$,「數學描述」則占了 $\frac{15}{46}$ (請參見表 4-5)，而且個人發現到，李師對「數學解釋」有明顯的增加，其中，他對於組合的題目解釋較多，反觀排列的題目只是一般「數學描述」。個人推測，這是由於教學單元是重複組合的關係，如同前導研究所觀察，李師在操作例題之前會先對題目做解釋，一般而言，他會先由相同、相異切入，帶學生判斷是組合或是排列的問題,再來思考可否重複,解釋清楚後才開始進行解題。例如：果汁可以無限量供應，表示它是不是可以重複，那會有重複又有相同，那一定是什麼概念，有一個相同是不是就組合(B,20100428)。有趣的是，在解釋題目時出現了「情境式包裝」這種特殊方式，例如以下兩段相關的教學片段轉譯：

其實這個題目上你可以把它想成是什麼樣子,你可以把它想成它是什麼樣子，有三個人分七顆相同的禮物對不對，是不是這樣的意思，可以體會吧，那這種題目上，我們我記得昨天在上課常跟你強調說我們在做排列的時候可不可以有 0？(B,20100428)

比如說維新很會喝酒啊，她一叫叫兩杯啊，王婷叫兩杯啊，蓁薇叫兩杯啊，買醉啊對不對，然後蔡燕玲買兩杯啊，王倩買兩杯啊，一共買十杯啊，那店員她拿出來的方式有幾種啊，對不對？(B,20100428)

由於研究單元與前導研究不同，重複組合較為生活化，使得李師可有所發揮，而這種包裝手法會被歸類在「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」。由編碼結果來看，延續前導研究的想法，在解題的部份若同時出現數學描述和數學解釋，多是解題時李師先對題目做數學解釋，之後直接做運算。數學解釋則是以解釋題意居多，此外，針對學生提問所做的數學解釋反而是在前導研究中所未見的(請參見表 4-6)。在本階段中，個人感受到學生的學習熱忱比前導研究高，或許是因

為排列組合的題目較難理解，學生對邏輯的掌控還不夠，也不善於周延思考，故發問的次數增加，同時也增加了師生間的教學互動。以下為三段課堂中學生發問的內容轉譯：

S：那要怎麼從題目中看出它是排列還是組合？(B,20100428)
S：記名投票跟不記名投票差在哪？(B,20100428)
S：為什麼第四小題不是 3^5？(B,20100428)

5. 「分析」與「比較」

在解釋題意方面，因為「分析」需要的是一個完整的架構，所以，若是局部的分析，個人會將它歸類在「比較」，強調的是李師會透過比較，帶領學生釐清概念，並且判斷這個題目屬於何種類型，展現出橫向的連結，意即 Ma (1996)在 PUFM 中所說的「廣度」。本階段的「比較」共有 9 次(請參見表 4-5)，而且大多出現在這種情況之下，以下為三段相關的教學片段轉譯：

ㄟ這相異相異就有點什麼樣的感覺，是不是排列的感覺，有順序性的是排列，沒有順序性的是組合，就抓過來組合那種感覺可以抓的到吧。(B,20100427)

第一小題可以重複取甲+乙+丙多少，這五件相同還相異，相異那可不可以這樣寫，所以這解法這邊是不是要相同才可以，對不對，你看到相異相異一定是什麼問題？(B,20100428)

那記名投票跟不記名投票差在哪邊？記名投票這十五張票是不是都完全一樣【口誤】，這十五張票是不是完全都一樣，記名投票不一樣，不記名投票是不是都一樣，對不對，比如說第一張票寫個王婷，跟第二張票寫個貞佑，那當然是完全不一樣啊。(B,20100428)

「分析」較多出現在李師呈現表格處(請參見附錄一(6))，他將它分為不可重複與可重複兩大類，接著，再細分為相異五件物品分給 7 人(相異給相異)、相同五件物品分給 7 人(相同給相異)、相同五件物品放入 7、3 相同箱子(相同給相同)和相異五件物品放入 7、3 相同箱子(相異給相同)。Ma (1996)在 PUFM 中所說的「連通性」，強調要讓學生學習到一致的主體，整體來說，李師透過表格做概念回顧、做總結和比較，給學生一個排列組合的完整架構，便是展現了這樣的連通性，同時他並不侷限於現在的教學單元，適時地為學生複習已習得的概念，也是「一致

性」的表現。

6. 「數學驗算」

「數學驗算」在前導研究中是李師的教學特色之一，然而排列組合在某些題型上，難以使用兩種以上的解法相互做驗算，即使有，可能也會因為計算過程較為繁瑣而被李師捨棄(例如列舉法)。唯一出現的一次是李師使用排容原理和列舉法兩種方法解題，除了是多觀點之外，也是在為答案做驗算。

7. 「多重模型」、「對符號、具體的圖像及圖表做連結」與「選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念」

「多重模型」在本階段中出現的並不多，只有 6 次(請參見表 4-5)，由於原本題目給定的模型(大多為文字敘述)並不能算一種，故它多出現在李師將情境先利用圖形做解釋，再轉為方程式時。倘若他將圖形與符號或方程式做連結，則也會被歸類在「對符號、具體的圖像及圖表做連結」，本階段中共出現了 2 次，特別是在第一節課中李師引導學生討論 5 個相同物分給 3 個人的問題中，如下圖 4-7 與教學片段轉譯：

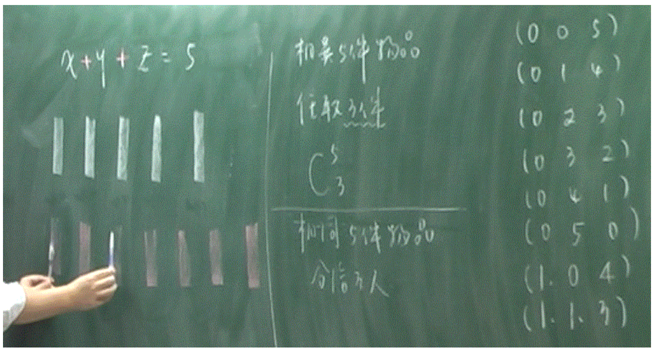

圖 4-7：對符號、具體的圖像及圖表做連結

這時候有人想到說我如果再加兩個加號進來給它，就變成，顏色好像都一樣，換一個，變成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7，多了兩個什麼符號，是不是

> 加號，然後你看喔，如果我取這兩個，那就多少，是不是兩個加號的位置佔掉它，就(0,0,5)，(0,1,4)，2,3，3,2，4,1，是不是 0,5 了，如果第一個站這邊，這個位置呢是不是(1,0,4)，(1,1,3)(1,2,2)(1,3,1)(1,4,0)，2，中間是 0,1,2,3，3 的時候中間 0,1,2，4 的時候就(4,0,1)(4,1,0)，這是不是就(5,0,0)。(B,20100427)

此外，由於單元特性的關係，「選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念」大多只是李師為了促進學生思考所畫的圖像，並沒有出現真正使用具體操作物，如下圖 4-8 所示，右側的 是李師為了表達有 6 類且足夠多的狀況。

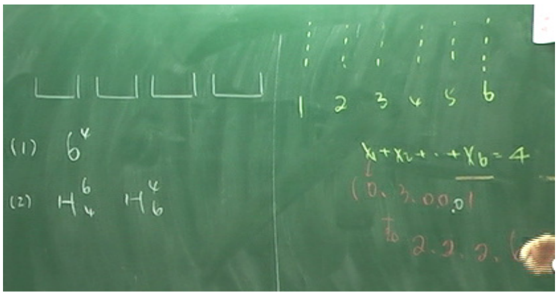

圖 4-8：選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念

8. 「引出學生回答」

李師強調在學習重複組合時，學生的錯誤率高、容易將概念弄混，因此，在解釋題意上，相較之下比前導研究更為仔細，而且，在解釋的過程中，他會使用提問帶領學生思考，例如，「可不可以重複？」或者「相異是排列還是組合？」等等。從編碼結果中亦可看到在對學生使用的數學上，「引出學生回答」共出現了 9 次(請參見表 4-6)，出現的比例比前導研究還高了許多。根據個人在本階段研究中的觀察，李師將 PUFM 中的「連通性」與「一致性」融合得更完整，因為在引入完 H 的概念之後，後面兩節課就將焦點放在解說整合性的題目，時常將排列和組合擰在一塊，透過對不同概念的比較(橫向的連結)，提供學生一個排列組合的完整架構，也藉此為學生複習前面已習得的概念(一致性)。在前導研究中固然也有這樣的教學片段，然而，給個人的感受不如本階段來的強烈，排列組

合的題型雖然多變，李師卻依舊能夠教導學生抓住數學概念中的要點，培養其清晰的數學思路，同時，也展現了他對高中數學課程的統整能力。

針對上述對李師的數學概念與實作的討論，個人嘗試描繪出李師在發展重複組合概念時所展現的知識包裹(請參見圖 4-9)。橢圓代表數學概念(或程序)；淺灰色橢圓表示關鍵片段；長方框則是李師教授的數學單元。箭頭方向代表由前一個數學概念支持後一個數學概念，虛線箭頭則是想要強調，李師使用比較(類比或對照)的數學教學手法，比較排列組合中的數學概念。

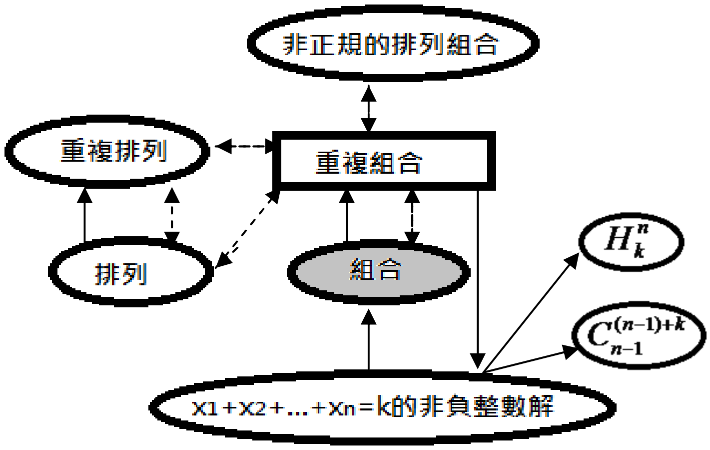

圖 4-9：李師重複組合的知識包裹

二、 階段小結

延續前導研究的想法，李師的教學雖然符合許多 PUFM 的特徵，然而，某些部分的數學教學或教學思考似乎並不符合 PUFM 的特質。因此，個人透過 Ball 等人(2008)所提的 MKT 架構，再次檢視這部分的資料，希望能夠看得更深入、更透徹。接著，個人以四個教學實例進一步說明，實線或虛線箭頭分別表示由教學實作(顯)或訪談中(隱)所得的關係，如例 1 是在教學實作中觀察到 KCS 影響了 KCT，而例 2 則是在訪談中觀察到 KCC 影響了 KCT。

例 1：　KCS $\longrightarrow$ KCT

李師對例題或教學脈絡的選擇受到 KCS 的影響，他將學生常見的錯誤放入例題或上課的內容中。例如，重複組合第一節課後半部自製的表格，即是考慮學生錯誤率會偏高，他為了幫學生釐清概念所整理的，其中特別像相同物分給相同物的題目，必須使用列舉法，特別需要技巧和耐心。以下為四段相關的教學片段轉譯：

> 我們上課很少去教這種比較特殊觀念性的題目啦，但是因為這個地方真的是錯得太離譜了，所以我想還是要跟你講解一下。(B,20100427)
>
> 如果碰到右邊的題目上就開始胡思亂想，相同相同數學上沒有解法我們都可以接受，就只有慢慢討論，但碰到最右邊那個通常都掛掉，這邊就寫個什麼 C_3^5 啦，然後就標準錯誤答案。(B,20100427)
>
> 唉這個東西到現在目前有沒有什麼解法？有沒有什麼解法？沒有啦，所以有些老師心眼壞一點點就會考你這些啦，然後每個人就開始往那洞裡頭跳，什麼 C 啦重複排列重複組合啦，排列啦組合啦通通都不對啦。(B,20100427)
>
> 之前考試考那一二三四，後面兩格喔寫對的很少。(B,20100428)

由另一個角度來看，李師決定在講義中放入或刪去何種題型亦屬於 KCT，故這是一個 KCS 影響 KCT 的例子。

例 2：　KCC -----> KCT

李師曾提到，起始例必須要簡單和傳統，讓學生可以很自然的接受，在遇到第二次複習或者是高三時，因為目的不同，所選取的例題也會不同。這是他的 KCT 起了作用。以下為兩段相關的訪談稿轉譯：

> 有時候舉的例子都比較傳統嘛，因為我是覺得說第一次上課喔，那種例子寧願傳統一點點。(D,20100512)
>
> 我並不是說第一次就什麼東西都教給學生，而是我覺得你高二的學生觀念就是要很清楚。我在教有時候我們會想說我高一要怎麼教高二怎麼教高三怎麼教，比如說我現在就把你教到觀念很清楚，那到高三比如說偏向學測，它應用問題，我可能就會舉像剛剛這種例子，那這種例子就慢慢去引導她，其實她整個架構就會完成。(D,20100512)

這也說明了，穩固的 KCC 能夠引動李師的 KCT。因為，李師對課程相當的熟悉，所以，他能夠在教學單元開始前，先預想好教學內容或者講義例題在現階段和往後教學中的配置。然而，李師的 KCT 和 KCC 往往被隱藏於教學思維之中，個人必須要透過訪談，才能進一步理解其內涵以及兩者之間的關係。這也說明了教

學實作知識似乎有顯和隱兩個面向。

例 3：　KCS $\dashrightarrow$ SCK

李師發展有用的數學定義以及有效的使用數學表徵,或者能夠回答學生為什麼的問題。這些是 Ball 等人(2008)SCK 的特徵之一。對於重複組合，李師選擇不同於課本的觀點，從 C 引入 H，而非從不盡相異物的直線排列來帶出 H。他將重複組合視為「$x_1+x_2+...+x_n=k$」的表徵，並且強調，其非負整數解的個數為 $C_{n-1}^{k+(n-1)}$，上面指的是 k 個 1 和(n-1)個加號，下面則是(n-1)個加號。在訪談中他表示：你要去解釋為什麼 $H_k^n=C_k^{n+k-1}$，那個道理一定要從組合才能夠講(D,20100512)。選擇由 C 做切入除了因為它能夠表達出 H 真正的原理之外，也與 KCS 相關，如他所說：用 C 會比較乾淨俐落，要講 H 轉成 C，還是用方程式來講切入學生是最容易的，這個切法應當是最容易，學生聽了覺得理所當然，會比較單純化一點點啦(D,20100512)，同時這也呼應了，他希望自己的數學教學是單純的。以下的師生對話也呈現出李師的 SCK：

> S：為什麼第四小題不是 3^5？
> T：來，第四小題來，ㄟ這種東西喔反正也是很容易錯，你現在五種飲料，這五種不同的飲料，那它有甲乙丙三個杯子，你想要怎麼樣？公平的法則是不是要甲去挑一種飲料對不對，是不是有五種挑法，第二個再來是不是也是五種，再來挑法是不是也是五種，是不是這樣？那你如果說用酒來挑杯子，那就很難了喔，你懂不懂我意思，那是不是要慢慢慢慢去排它，可能它動了幾個慢慢慢慢這樣想，那就變成類似分組分堆慢慢排的問題，克服它應該相當難。(B,20100428)

例 4：　KCT $\dashleftarrow$ KCS $\dashrightarrow$ SCK

李師在第一節課的最後補充了一個課外題：相同 7 件物品分給 3 人，可以剩下的方法數有幾種？(B,20100427)，李師列出 x+y+z=0 (H_0^3)、x+y+z=1(H_1^3) ……x+y+z=7(H_7^3)，然後，將它們相加 $H_0^3+H_1^3+\cdots+H_7^3$，當時他說會加到天昏地暗，故他新增一個變數 k，將原例題改為求 x+y+z+k=7 的非負整數解。有趣的是，在 5 月 11 日的考前總複習中出現了類似的算式，而李師卻使用二項式定理求解。

個人在訪談中詢問李師，為何當時不拉到後面連結二項式定理，他回答**因為拉太快其實學生沒辦法承受**(D,20100512)。由此可見，李師在教學當下知道兩者間可連結，卻選擇先保留，留待更適合的時機再提出，這是他對教學脈絡的選擇，同時，由此例亦可看出 SCK、KCS 和 KCT 之間隱隱地相互作用。

不同的教師會因為教學經驗而產生不同的 SCK，以李師而言，他的 SCK 呈現的大多是與 KCS 交互作用之後的樣貌。他在選取數學概念的表徵或者解法時，常常以學生為考量，甚至為學生長遠的學習做規劃。在訪談的過程中，個人也可以感受到，李師的回答都繞著學生打轉。這似乎表明，KCS 流通於他的 SCK、KCT 與 KCC 之中，只是，在教學實作或者訪談中所觀察到的樣貌大多是交互作用之後的一些表徵，所以，若非透過訪談，外人很難理解或察覺到這些交互作用之後表徵的實質意義。

第四節　第二階段研究

本節將描述第二階段所得到的研究結果，以下將分析李師數學教學實作知識的結構，以及探討與 MKT 相關的教學事件。

一、 李師數學教學實作知識結構的分析

第二階段的研究單元為「數學期望值」(以下簡稱期望值)，共計有 2 節課，共 26 個教學片段，個人將各類別中編碼出現的總次數整理如下表 4-7、4-8 與 4-9，各節詳細的發生次數請參見附錄一(10)。以下說明李師在本階段中的教學模式和教學概念與實作。

表 4-7：第二階段研究的「教學的進行方式」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 概念回顧或檢討家庭作業	0	4. 做總結	0
2. 介紹主要的工作或概念	3	5. 學生操作	2
3. 教師示範例題	***16***	6. 其他	5

表 4-8：第二階段研究的「教學活動中數學領域的知識」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 數學的符號	0	10. 數學證明	0
2. 數學的詞彙或其定義	1	11. 數學驗算	0
3. 表示數學概念使用的語言	0	12. 計算錯誤或其他數學的忽視	7
4. 為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	7	13. 多觀點	7
5. 選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	1	14. 比較	6
6. 多重模型	0	15. 分析	1
7. 對符號、具體的圖像及圖表做連結	0	16. 概念連結	1
8. 數學描述	11	17. 提示教材地位	2
9. 數學解釋	***13***		

表 4-9：第二階段研究的「對學生使用的數學」編碼次數統計表

	次數		次數
1. 使用學生錯誤	0	4. 使用具體操作物說明數學數學概念	0
2. 引出學生回答	***3***		
3. 使用學生成果	0	5. 回答學生問題	1

(一) 教學模式

李師的教學模式與前兩階段研究無太大差異，首先是班級經營，接著進入主題課程，介紹完主要的數學概念後，最後則是反覆演示例題。比較特別的是，個人在編碼過程中，發現李師將期望值概念的教學發展分為三個層次。第一層，他先讓學生明白「期望值是理想化的觀念」，好比柏拉圖的世界；第二層，他透

過丟銅板與擲骰子的例子，將概念帶到「期望值就是一種算術平均值」；第三層，他使用相同的例子，將期望值由「算術平均值」轉為由「$m_i p_i$」的觀點來看它，也就是$E = m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3$。在完成這三個層次的概念教學之後，才開始演示講義中的例題，對此，訪談中李師也提到對，沒有錯，我在教書的時候當初的步調本來就是這樣來講它(D,20100623)。這種層次感在前兩階段研究中並沒有看見，個人推測是因為，李師使用「算術平均值」和「$m_i p_i$」兩種觀點來看期望值，他認為前者固然在解題上比較快，但是，並不足以應付所有題目，遇到較高難度的題目時，反而需要後者才能克服，所以，他強調兩者都需要學習。這不同於他在重複組合單元的教學，李師對於重複組合也提出兩種觀點，然而，他並沒有特別強調哪一種觀點，所以，在教學中他會同時寫出兩種寫法，即使學生只學習一種也可以，因為並不會影響解題。由此可見，不同的單元會因為李師著重之處不同，而影響到他對概念發展的教學安排。以下為兩段相關的教學片段與訪談稿轉譯：

> 你從硬梆梆的機率來做它，但是老師希望說喔，以解題的角度來講，用算術平均數會比較快，但是如果以未來的角度來講，那個原理一定要懂。(C,20100602)
>
> 數學本身就有點像是螺旋式的，我們先講簡單再講難的部份嘛。第一節課講平均值的概念，哪些題目可以用平均值這種東西來操作，那其實也給她們概念上是說，假設沒有那種平均值的概念，那還是要回到數學本身定義的東西來操作它，因為數學本來就是一個抽象化的東西嘛。(D,20100623)

在引入空間平面方程式時，李師拿出一個四面體，模擬一個情境欲求得平面方程式；在重複組合中，他模擬五件相同物品分給三個人的情境，帶領學生討論分配的方法數，再透過 C 進而帶出 H 的概念。李師在前兩階段研究中都善於透過舉例做引入，在本研究階段中也是如此，由於是使用起始例(丟銅板、擲骰子)引入數學概念，故會被歸類在「教師示範例題」。在訪談中他表示，在開始下定義之前，他會先由學生生活週遭找實例，讓學生慢慢接受這個概念後，再由實例講到數學化的內容。而且，對於實例的選擇可能每個班都不同，視當下學生學習

的狀況而定，如果故意使用一個東西，學生反而覺得無趣。這是李師在引入教學單元時常使用的教學手法，如他在訪談中所說：

> 我在教書的時候我本身一直有這樣一個概念，引進例子，一個前言讓她稍微懂它到底是什麼樣的意義，然後做一些題目上讓她感受，最後為它下一個定義，那比較粗淺的題目你當然是可以這樣做，到某種程度之後妳為什麼需要數學的道理就在這個地方。其實我教書不管是在哪個單元，都用這樣一個架構去講它啊。(D,20100623)

操作例題的部份，仍是以教師講解為主，期望值第一節課中大部分的例題都可以使用平均值的概念求解，故李師在引題速度上較快，雖然，他並沒有留一段時間讓學生演練，但是，有時仍會詢問學生的答案，再接著講解。在第二節課中學生操作時間較長，最後的兩題李師讓學生自行練習。而這兩題中恰巧有一題使用平均值，另一題則需使用 $m_i p_i$ 。個人推測，李師想藉此作為一個收尾，讓學生釐清兩者間的差異，即使它們的源頭相同，但是使用時機有些許不同。本階段中「學生操作」時間平均為 213 秒，和前兩階段相比，多出約 60 秒的時間。

前導研究中常出現的「做總結」在本階段中並沒有出現，但是，李師在期望值的第一節課中時常強調「期望值就是算術平均值」的概念，不論是在概念發展或者是解題過程時，例如「所以你在做題目上的時候，你內在的世界就想說它是平均值的概念(C,20100602)」，雖然片段的主要形式並非「做總結」，但是李師會不斷重複加強它。

(二) 教學概念與實作

仿照前兩階段研究中闡述李師教學概念與實作的方式，個人依據編碼分為不同段落，再由編碼結果對應回原始的教學情形，使用敘述的方式說明李師的教學與 PUFM 相互呼應之處，最後，提出李師在發展數學期望值概念時所展現的知識包裹。

1.「比較」與「多觀點」

如同前兩階段研究中的觀察，在本階段中李師一開始也是透過舉例引導期望值的概念，特別的是，他將概念發展分為三層(已在教學模式一節中說明)。李師同時重視「算術平均值」和「$m_i p_i$」的數學觀點，故在第一節課的 7 個例題中，他有 4 題同時給了兩種解法，只是有的解法是用口述的方式呈現，所以本節課中「多觀點」佔了總片段數的$\frac{2}{5}$(請參見附錄一(10))。到了第二節課，「多觀點」僅佔了總片段數的$\frac{1}{11}$(請參見附錄一(10))，這與李師對例題的安排有關。因為第二節課的 8 個例題中，只有最後一題能夠使用平均值求解，其他都必須使用$m_i p_i$。他在訪談中曾說：其實我是有拉開，我第一節課就比較講平均值的一些概念，那因為數學到某一種程度以後，你本身平均值的概念很難去講它(D,20100623)。

「多觀點」在本階段中其實還有另一個教學目的。在期望值的講義中寫到「每次試驗成功的機率為 p，(1) n 次試驗中，成功次數的期望值為 np」以及「(2)操作一次的期望值為 k，則操作 n 次的期望值為 nk」(E,20100602)，並且在敘述底下附上(1)的証明。由於李師先跳過重複試驗，故他對證明只有簡單的口述，當下並沒有証明，暫且要學生相信它們是正確的，並且用直觀去理解它們。講義的例題中大多使用到(2)的結果，個人曾詢問過李師學生是否會難以接受，他表示因為前面很多那種概念喔，其實她們都很容易接受這種東西啦，因為其實有些東西你跟她帶過以後，然後，我是覺得她們好像也都沒什麼問題耶(D,20100623)。所以，在解題中他會技巧性地使用「多觀點」，除了可以相互驗證答案，也希望透過例題的說明，加以驗證上述結論的合理性。相關的三段教學片段轉譯如下：

> 我們今天在上這有點跳著這樣過去啦，那因為這一段的部分，因為它屬於它前一頁前一兩頁這邊的東西，可以吧？那我想我們就稍微先相信它是對的啦，因為你仔細看它也都是都沒有錯，對不對？

(C,20100602)

丟六次是 21 點，對不對，平均一次是幾點？是不是 3.5？老師當然直觀的想它，我丟兩次它的點數應該是多少？(C,20100602)

你如果不信我們來做看看，這做出來以後是 66，這做出來是多少，27，這做出來以後是 6，這個答案還是 $\frac{1}{2}$ 了，有沒有？所以表示剛剛那個證明模式理論上沒有問題啦！(C,20100602)

個人在訪談中詢問李師，事後是否有回頭證明此定理，以及學生現階段若沒有重複試驗的基礎，是否會無法自行閱讀。李師說到，真正比較嚴謹的証明應該等到選修(上)時才會教授，所以，他故意將證明寫的很詳細，這個部分他會留待選修時再帶學生慢慢磨、慢慢證。另外，關於重複試驗，他也提到：

不會啦，其實我在上前面的時候喔，那個 C^n 取多少那個概念，其實都灌輸過給她們了。所以在前面其實我本身已經知道後面要講什麼東西，那我就把一些比較容易講的概念就把它給講到。(D,20100623)

李師較重視當下學生的學習，他認為教學能夠流暢、學生可以理解最重要，他在訪談中提到有時候我是覺得說你流程如果很流暢，學生她們都很理所當然，其實這樣就夠了，你如果什麼東西都要講到非常嚴謹的話，上課會停頓在那邊，流暢度就不會很夠(D,20100623)。這樣的想法在前兩階段中也曾出現，它代表李師的一種數學教學觀點，不論是在哪個單元中，所展現的都是一致的。

Ma (1996)提到具有 PUFM 的教師，能夠帶領學生使用不同的觀點學習數學概念。編碼中的「比較」時常與「多觀點」一起出現，例如李師在解題時，會讓學生比較此例題適合以何者觀點來操作，或者兩者都可以，加強學生對期望值的概念。以下為三段相關的教學片段轉譯：

$\frac{5}{7}\cdot 1+\frac{5}{21}\cdot 2+\frac{1}{21}\cdot 3=\frac{15+10+3}{21}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$，這個就答案跑出來啦，對不對？所以像這種如果它不是一個很均勻的一個狀態，因為它如果抓到紅球後面就沒機會了，這個題目上可能要慢慢想一下喔，因為突然間很快就直接平均算出來，碰的一聲兩倍三倍就算出來，然後突然間好像是你要利用到比較嚴謹的數學定義才能解出來的題目上，有時候突然間覺得好像不太能夠接受，要稍微想一下喔，這很多數學的東西喔，

還是要懂得它該怎麼處理是對的。(C,20100602)
1 人的機率 50%，2 人的機率 25%，3 人的機率 20%，4 個人的機率是多少，5%，對不對？你看它是不是照這樣寫嘛？$\frac{1}{2}\cdot 1$，$\frac{1}{4}\cdot 2$，$\frac{1}{5}\cdot 3$，$\frac{1}{20}$乘以多少？4，當然你可以把它想成 100 次嘛，有 50 次錯 1 個人，25 次 2 個人，對不對？那 20 次是 3 個人，5 次剛好幾個人？4 個人，一樣是不是可以求它的平均值出來，可以喔？(C,20100602)
第九題來，兩球顏色相同，你看這題目上是不是要用機率才能夠把它克服出來，對不對，懂它意思吧？所以不要太迷戀那個算術平均數的概念。(C,20100603)

在例題 10「甲和乙兩人比賽桌球(實力相當且無和局)，約定比賽為先勝 3 回者可得賭金 64 元，現甲勝兩回，但因無法再比賽，應如何分配賭金？(E,20100603)」中，李師提出了使用樹狀圖和排列兩種解法(多觀點)。在訪談中他提到，在寫這個例題時，想到了高三即將要上的貝氏定理，貝氏定理有時會畫這種圖形，而它本身有樹狀圖和分割兩個發展的體系，所以，他希望先為學生建立這樣的概念，未來可以加以結合。這似乎表明，李師對於課程的內容與編排十分了解，他在前面的教學中就會想到後面的學習需要什麼概念，並且在適當的時機做連結，展現出對課程縱向的理解。例如「重複試驗」與「條件機率」的概念，在重複試驗尚未開始前，李師已在前頭鋪陳好概念，讓學生熟悉操作，只差未將名詞提出而已。同樣地，條件機率雖然是高三上的課程，但是，李師在例題 7 的解法中已用到，訪談中他說到，在此之前已經培養學生具有這樣的能力，雖然也可以用樣本空間來講解，但是，這樣操作會比較乾淨俐落。李師對課程知識的掌握，使得他的數學教學很有彈性，能將教學內容做縱向與橫向的編排，最重要的是，這樣的編排架構已事先存在於他的教學思維之中。所以，李師呈現了 Ma (1996)在 PUFM 中所看見的「一致性」和「連通性」。

2. 「數學描述」與「數學解釋」

在本階段中，「數學描述」和「數學解釋」同時出現的情況減少，依教學情況來看，大致可分為兩種情形：(1)李師對解題過程做詳細的數學解釋而非只是數學描述；(2)李師未對題目做解釋，對解題過程只有數學描述(多是期望值的題型)。對題目所做的數學解釋與前兩階段相比，反而減少許多。即使是同時出現，並不必然是指相同的主體，可能他用描述講解某部分的概念，卻用解釋講解另一部分，但是，由於時間的關係，它們會同時出現在同一個片段中。例如以下相關的教學片段轉譯：

> 丟骰子一次的平均的期望值是幾點？丟六次是 21 點，對不對，平均一次是幾點？是不是 3.5？老師當然直觀的想它，我丟兩次它的點數應該是多少？對不對？這樣懂意思嗎？比如說你考學測，考一科的期望值是十五？那你考兩科就多少？三十啊 考三科，四十五啊，那考四科就六十，考五科就多少？七十五，然後這樣就夠了啊，對不對？所以這種有點平均的概念，這樣是不是可以完成它。好，這樣可以接受吧？什麼叫期望值這樣懂了沒？它是一種純粹烏托邦很理想化的那種數學，那這期望值為什麼它有存在的一個必要？有很多人喔，就覺得這種東西應該是不會剛好是這樣，但是經過很多實驗以後，比如說有人做實驗，就丟銅板丟了多少次？十萬次，你就發現其實怎麼樣？正負大概是五萬次左右差不多，那誤差不會太大，所以如果它這種很大的數，也就是在大數法的情形底下，這種期望值是可以被肯定的。
> (C,20100602)

由於，從編碼結果中無法呈現出這樣的教學事件，藉助個人分析觀察結果發現，在本階段中的 15 個例題中，李師只有 3 題對題目同時做「數學描述」和「數學解釋」，與前兩階段相較之下減少許多，其中，李師會做解釋的題型多是必須使用 $m_i p_i$ 的觀點。同時個人也發現，第一節課中「數學描述」的比例較多，佔了總片段數的 $\frac{7}{15}$，在第二節課中反而「數學解釋」的比例多，佔了總片段數的 $\frac{7}{11}$(請參見附錄一(10))。個人推測，這與例題的安排有關。李師第一節課所安排的例題大多只需使用平均值即可求解，因為學生容易接受和理解，故他多半使用「數學描述」；然而，第二節課的例題大多需要使用 $m_i p_i$，其中不乏歷屆考題，提高了「數學解釋」使用的機會。

3. 「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」與「分析」

由於期望值的內容比較容易與生活結合，所以，李師在講解完主要的概念或例題之後，也會選擇使用與學生相關的生活實境來增進討論以及加強概念。所以，在編碼結果中，常見李師「為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇」(請參見表 4-8)。以下為三段相關的教學片段轉譯：

> 像比如說，以後你假設去當醫生，會有所謂開刀的什麼失誤率，嗯，比如說有些人要去做什麼腦神經外科的醫師啦，對不對？那她會有講說失敗率是多少，可能跟你講說 2%，那它可能是怎麼樣？台灣近幾年來在開，比如說開了一萬個，那剛好又有二十【誤】個掛掉，對不對？那這樣就是，如果兩個掛掉那就是萬分之二嘛，那如果是二十個出問題，喔比如說開了以後會有失敗的案例嘛，對不對？那百分之二那表示一萬個會有幾個？兩百個，你就想說你不會那麼倒楣對不對？但是你會聽到還是有這種案例在嘛，那這種東西就是變成所謂它的期望值。(C,20100602)
>
> 那這時候你發現她可以得到多少分？6 分，它是倒扣 2 分，所以加起來期望值會等於多少？0。要猜不猜隨便你，是不是都一樣？那你如果能夠肯定一個答案是錯的，那你要不要猜？你要猜了，那以期望值來講，它變成命中就是 $\frac{1}{3}$，然後錯誤剛好是 $\frac{2}{3}$，那當然猜就會比較有利嘛。(C,20100603)
>
> T：那老師問你，如果說你們這一屆真的改成不倒扣，那你要不要猜？
> S：當然要猜啊。
> T：它的期望值就變成多少？$\frac{3}{2}$ 嘛，它每個答案裡頭答對就是 1 分，你亂猜，機會就會是幾分？4 分嘛，你懂不懂意思？(C,20100603)

講義中出現了指定科目考試和學科能力測驗計分方式的例題，李師表示，排入這兩題的目的並非為了解題，而是希望透過期望值的概念來說明未來考試的計分，讓她們明白，期望值若是正的，則猜題有利，期望值若是零，則猜與不猜都很公平。李師在學科能力測驗中的多重選擇題(共 5 個選項)計分方式的題目中，將答案個數分為 1、2、3、4、5 個分別做討論，訪談中他曾提到：

> 這種東西如果讓它變的比較容易喔，就可以加個前提，就說今天假設答案是 ABC，那它本身的期望值是多少？那這樣題目上就變的很簡單

，所以當初在寫這個講義我就不太想去改變它。(D,20100623)

設定好答案 ABC 固然變簡單，但是，可能有學生會再詢問若答案是別的該如何計分，所以，李師認為直接討論較為合適。此題李師使用了「分析」的方式做系統化的討論，這是本階段中唯一出現「分析」的片段。

李師一開始是使用平均值來引導期望值的概念，再由他選擇的起始例帶出 $m_i p_i$ 的觀點。在第一節課中，李師不斷強調「期望值就是算術平均值」，例如課堂中他多次表示：

> 期望值就是一種算術平均值。(C,20100602)
> 所以你在做題目上的時候，你內在的世界就想說它是平均值的概念。(C,20100602)
> 期望值你如果真的不會算，你就用到什麼，國小的算術平均數去算它，答案其實就是對的。你從那個算術平均數的角度去看它喔，不要把它呢，搞得很緊張，然後腦子充血，大腦都想不出來。(C,20100602)

在前兩階段中，個人發現李師能夠抓住教學內容中簡單且基本的原則，並且重複加強它們，在本階段中也是如此，這也呼應了 Ma (1996)所提 PUFM 特質之一的「基本概念」。雖然，李師在第一節課中並沒有刻意強調 $m_i p_i$ 的觀點，但是，卻已經悄悄在為第二節課做鋪陳，例如他表示：

> 你從硬梆梆的機率來做它，但是老師希望說喔，以解題的角度來講，用算術平均數會比較快，但是如果以未來的角度來講，那個原理一定要懂。(C,20100602)
> 老師才講說兩者有些題目上是，你用平均值的概念馬上就可以算出來，但是到某種程度以後，還是要有點它定義這種東西來做比較完整。(C,20100602)

李師到了期望值的第二節課便不再緊抓住平均值，反而透過例題，讓學生產生思考衝突，而感覺到平均值並不足以應付所有的題目，也就是說，$m_i p_i$ 的觀點才是真正的數學原理所在。在例題的安排上，他刻意將平均值放在前半部(第一節課)，$m_i p_i$ 放在後半部(第二節課)，讓不同節課所強調的教學重點有所不同。他在課堂上曾說：因為很多比如那種說第一到第六題只會算術平均數，其他就不要了，那考試考得怎麼樣啊，或者這一些題型不適合她操作，層次比較高一點點，

她就掛在那邊了(C,20100603)。所以，李師之前所呈現的「以一貫之」教學觀點，以本階段的教學實況來看，並不是「一」，反而是「二」，因為這兩個觀點都是李師所強調的，這也呼應了 Ma (1996)的 PUFM 特性之一的「多重觀點」。在訪談中他提到：

> 其實我上課到最後幫她們做總整理的時候也跟她們提醒說，你如果這個題目上一眼看過去，有那種感覺是平均值的概念……其實我第一個是要告訴你說，哪些東西應當是不會影響到它的一個狀況，那什麼時候可以利用到平均值的概念去操作很多像機率的問題，那另外第二種領域就是說，如果碰到題目上你發現，因為它本身變化很多嘛，哪些可以用平均值，哪些還是要回到它真正原始的定義。（D,20100623）

4. 「選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念」

前導研究的單元為空間平面和空間直線，第一階段研究單元為重複組合，因為單元特性的關係，空間容易使用具體操作物或圖像表達數學概念，重複組合也能夠利用圖像來促進學生的數學思考，相較之下期望值可發揮的空間不大。依編碼結果來看，只有在李師針對第 10 題所做的樹狀圖中呈現 1 次而已(請參見表 4-8)，如下圖 4-10 所示。

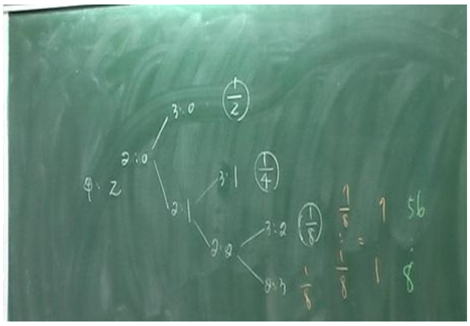

圖 4-10：選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念

5. 「概念連結」與「提示教材地位」

「概念連結」和「提示教材地位」只有發生在李師為學生複習 $\sum$ 的運算時，李師曾說過期望值只需要簡單的機率概念就夠了，並不需要太多的數學能力，可

能因此在連結的部份較少。雖然，編碼結果所呈現的「概念連結」只有一次(請參見表 4-8)，但是，其實它常被隱藏於教學中。從李師的訪談內容中可看見他對前後概念的串連，只是這些都存在於他的教學思維之中，在實際的教學中並不必然被顯現出來。這好比 Ma (1996)所提出的知識包裹，在教師的知識包裹中，具有單元片段間的序列，序列並不必然是線狀，也許是環狀，而且不同片段間有相互支撐的作用。在李師對期望值的知識包裹中，最重要的關鍵片段即是「機率」和「平均值」，$m_i p_i$ 的概念需要機率的基礎，也須經由對平均值的轉換，才能夠自然地出現。其他與 $m_i p_i$ 相關的序列會與 p_i 的求法有關，例如，需要排列組合、樹狀圖、重複試驗或者條件機率的概念等等。

針對上述對李師的數學概念與實作的討論，個人嘗試描繪出李師在發展期望值概念時所展現的知識包裹(請參見圖 4-11)。橢圓代表數學概念(或程序)，其中虛橢圓指的是，在訪談中李師提到未來會連結的數學概念；淺灰色橢圓表示關鍵片段；長方框則是李師教授的數學單元。箭頭方向代表由前一個數學概念支持後一個數學概念，虛線箭頭則是想要強調，李師使用比較(類比或對照)的數學教學手法，比較「平均值」和「$m_i p_i$」兩個數學觀點。

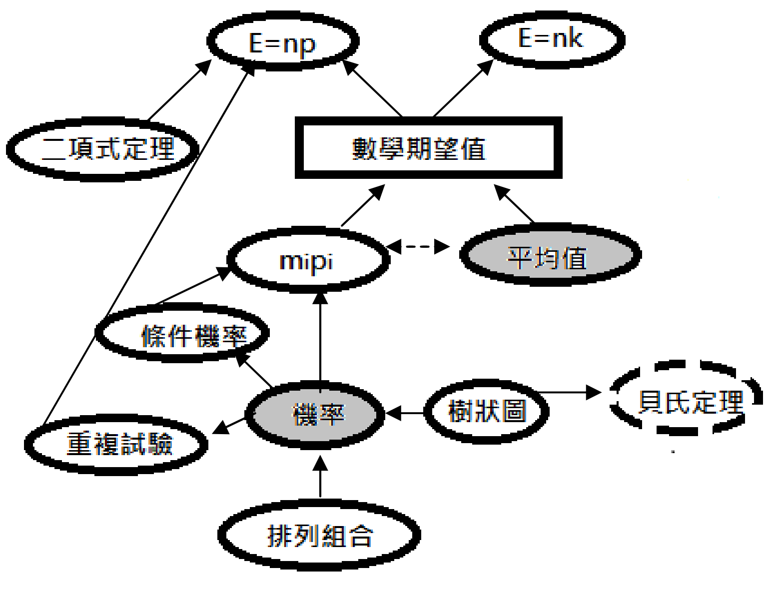

圖 4-11：李師數學期望值的知識包裹

二、 階段小結

本階段延續前兩階段研究，使用 LMT (2006)的 MQI 系統進行編碼，編碼的結果固然反映出李師具有多項 Ma (1996)在 PUFM 所提的特徵，但是，仍然不足以完整地描述李師數學教學實作知識的結構。所以，以下個人透過五個教學或者訪談的片段進一步說明。

例 1：KCS

李師在教學中展現出對學生的了解，包含對於學習的理解或者在觀念或解題上常犯的錯誤。這是 Ball 等人(2008)所說的 KCS，兩段相關的教學片段轉譯如下：

> 最主要是這一組很特別，就少了一個怪怪的答案，所以很多都會覺得做一組，然後就直接把它乘 5 就不太對啦。(C,20100603)
> ㄟ其實學測如果考這個題目喔，社會組會考的比你們好，社會組她們閱讀能力稍為強一點點，然後你們是看了第三行忘了第一行，看到第四行就忘掉前兩行，然後重新看它要花很多時間，所以有時候看到那種敘述很冗長喔，不要太擔心它太多，只要靜下來慢慢做啦。(C,20100603)

例 2：KCT

在訪談中，李師特別談到他喜歡使用許多例子，先讓學生有所感覺，再下數學化的定義。起始例的選取並不固定，可能是具體操作物或者是學生的生活實境。關於起始例的選取為 Ball 等人(2008)所說的 KCT，兩段相關的教學與訪談稿轉譯如下：

> 那我稍微舉一個例子跟你講一下喔。我假設丟一個銅板，正負兩面的銅板，在數學想法裡頭，我丟兩次應該是怎麼樣？為什麼叫數學期望值？這樣丟兩次以後，應當是一個正一個怎麼樣……我們再來玩一個情況下，丟骰子，丟骰子你會發現到什麼狀況？理論上強調數學期望值，試驗的期望值，也就是說當我丟六次，理論上會呈現像這樣，一二三四五六，各幾次？是不是各一次？(C,20100602)
> 其實我在不同班講的例子也都不一樣，你如果故意用一個東西，她們學生會覺得比較沒有樂趣嘛。所以我有時候就直接從在現場上的一個狀況，就找個例子來做它的一個說明。(D,20100623)

例 3：　KCS ⟶ KCT

李師受到 KCS 的影響，因此調整了教學內容或者教材上的編排。這是 Ball 等人(2008)所說的 KCT，以下兩段教學與訪談稿轉譯呈現了 KCS 和 KCT 的交互作用：

> 老師用第六題稍微講一個概念就是說喔，有很多東西它期望值會融合到其他高一高二的課程進去，這是很合理，那用這一題，有時候我很怕你們說喔，啊反正我只會懂得平均值的概念，我其他都不理它，那如果萬一碰到第七題，還是會有問題喔。(C,20100602)
> 所以到這邊其實都是用平均值概念的題目，後面開始就全部都不是了嘛，也就告訴她們說，到某一種程度以後，數學還是有它的必要性啦，也就是說很多東西都已經抽象化了嘛。那更深的東西可以用它來做延續嘛，所以我在講定義前我一定會講很多例子，然後最後才得到數學上有這樣定義的方式，那當你發現這些沒辦法操作的時候，你是不是一定要按照定義這樣來做它。(D,20100623)

例 4：SCK

同樣的數學概念，不同教師因為對數學教學的觀點或者對數學本質的重視不同，而影響到他在教學中所展現的 SCK。例如，李師在訪談中提到他對表徵的選取，或者是對解法的選取，相關的教學片段與訪談稿轉譯如下：

> ㄟ你從這兩個有沒有看出什麼樣的感覺？甲得到的期望值應當是乙的幾倍？是不是他的兩倍，所以有些像這種題目上你如果能夠抓到它的感覺喔，整個是不是就跑出來啦，你不一定真的要去算它嘛，因為它剛好是 1:2:4:8，對不對，是不是這樣子做，可以抓到那種感覺嗎？(C,20100603)
> 其實我第一個先上我先用排列的概念來講它嘛，比如說桌球比賽嘛，先勝三回，那反正至少要比賽五場，所以我就把整個排一排，五場，那它如果約定三場，那就是他目前兩場他勝了，所以也就是說這兩個一定是圈圈了嘛……其實你有沒有發現到如果真的很高難度的題目喔，用這個(樹狀圖)做不見得可以做的出來，用這種(排列)東西解題反而更精緻一點點。(D,20100623)
> 像這東西我就用 p、q 來做，那很多書上都是用 p 跟 1-p 嘛，其實我覺得用 p、q 比較能夠呈現二項式定理的感覺，所以有時候我們在用這些東西也是有小尷尬的時候啦，應當我是覺得用 p、q 來講會比較完整一點點。(D,20100623)

例 5：　KCC ----->KCT

李師具有豐富的教學經驗，平日也時常注意課綱和教材內容的變化，因此，對於

課程知識十分了解。建立在穩固的 KCC 基礎上，在講解概念方面，他能夠將某些較簡單的概念拉到前面先提，或者，為後面的課程作鋪陳，也影響了他對例題的編排。這是 KCC 和 KCT 的交互作用。相關的三段訪談稿轉譯如下：

> 其實前面在講排列的時候已經跟她們講過這種概念了，那現在這個時候其實她們都會用，所以在後面講條件機率講乘法律，它主要目的不是要你解這個題目，而是要它引進後面獨立事件那種數學抽象化的專有名詞，然後比如說導貝氏定理，兩個三個怎麼去導它，其實它整個架構在文字上比在真正實質上的計算，應該來的更重要。(D,20100623)
>
> 你如果這個題目上一眼看過去，有那種感覺是平均值的概念，比如說我可以膨脹它的次數縮小它的次數，這種概念我發現其實最後在講貝氏定理就非常好用，貝氏定理都是 1 嘛，然後 p(A)以後就是再乘 $P(B|A)$，那有時候我就跟學生講說，這個地方假設不是 1，比如說你一個$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$，那我假設定義它 6，那這概念學生馬上就會這樣翻過來，那 6 以後它$\frac{1}{2}$就變 3，它$\frac{1}{3}$就變 2，其實這種比例關係，機率本來就是這樣一個概念，那這種東西建立其實是用期望值把它建立起來的，因為它其實就是一個平均值的概念。(D,20100623)
>
> 在前面其實我本身已經知道後面要講什麼東西，那我就把一些比較容易講的概念就把它給講到。(D,20100623)

在前導研究中，個人已發現到李師具備完整的課程知識，在訪談中他時常會提到，哪些是為了往後的概念在做準備，而且，KCC 在教學中往往會被隱藏起來，需要透過訪談才能夠顯現。在本階段研究中，個人對此感受更深，因為，李師已先預想到高三的課程內容與安排，所以，他不只是熟悉教授年級的課程，對三個年級的課程內容與配置亦是充分掌握。這符合 Ma (1996)所提 PUFM「一致性」的特徵。

第五節　跨階段綜合分析

本節將綜觀分析三個研究階段的資料，分項提出跨階段的分析，以回應研究問題，包含了李師的數學教學特色、從 PUFM 的觀點詮釋李師數學教學的實作和思維，以及李師的數學教學信念。下表 4-10 為三個階段研究大致的編碼分析結果，表中的「ˇ」表示此編碼出現的頻率較高。

	前導研究	第一階段研究	第二階段研究
教師示範例題	ˇ	ˇ	ˇ
做總結（深度）	找點找法向量 找點找方向向量	「$x_1+x_2+...+x_n=k$」的非負整數解	算術平均值 $m_i p_i$
學生操作		片段比例較高	片段時間較長
為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇		大表格	有特殊安排
選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	ˇ		
多重模型	ˇ		
對符號、具體的圖像及圖表做連結	ˇ		
數學描述 數學解釋	可能同時出現 空間直線數學描述多	情境式的包裝 對學生所做的數學解釋 組合數學解釋較多	情境式的包裝 $m_i p_i$數學解釋較多
數學驗算	ˇ		
多觀點（廣度）	空間直線多	H和C為不同的觀點	給予兩種算法
比較（廣度）	使用類比的教學手法	比較排列組合的概念	比較兩種數學觀點
分析（透徹性）	ˇ	大表格	
概念連結（透徹性）	ˇ		訪談中有表現
提示教材地位（透徹性）	ˇ		訪談中有表現
引出學生回答	ˇ	ˇ	ˇ

表 4-10：三個階段研究的編碼分析結果

一、 李師的數學教學特色

上節中已初步談到信念影響李師知識與思維的呈現，接著，透過分析教學事件，進一步說明他所展現的數學教學特色。在教室觀察中所看見的數學教學特色是外顯的，但是，有更多意義隱藏在他的教學思維之中。搭配對李師的訪談，可以更清楚掌握他的數學教學實作知識結構的顯隱面向。

(一) 實用取向

李師在教學中強調「以一貫之」，掌握基本概念去應付多變的考題，故他不喜歡使用特殊解法的題目，例如平面族。最重要的是，他希望學生透過這樣的學習方式，能在考試中獲得佳績，這就是實用的考量。他在教學或訪談中曾說：

> 其實它最終的目的就是一個法向量一個點，這些題目就是不同的模式從簡單排到難。(A,20091029)
> 什麼時候排列什麼時候組合，重複排列重複組合，你這邊如果把它想懂至少考月考可以考個還不錯的成績出來，雖然老師最後再補充這些東西有點功利，但是好像也是非這樣教你。(B,20100427)
> 有時候我覺得教書還是要著重它的實用性啦。(D,20100114)
> 這是我想要傳達給學生的一個信念，你數學不要太複雜化，其實就是一招為行天下。這可能是因為我看很多武俠小說，對人生的一種感覺，想一想為什麼要把整個簡單的東西搞的很複雜，教的很複雜可能是老師本身有問題，是因為他還不能夠用一種很簡單的方式去看它。(D,20100114)

李師秉持教學要「單純」，在訪談中他曾說，學生第一次的學習要盡量單純化，第二次的學習當然會有所不同，某些抽象的數學概念只要她們可以體會就好，不需要特別強求到什麼程度，因此，他認為數學教學應當要重視實用性。「實用取向」固然為李師的特色，但是，他並不必然會強調快速的解法。個人觀察發現，在實用的背後，李師更要求學生要有意義地理解數學概念。個人透過三個階

段的例子分別說明如下：

1. 平面族：雖然利用平面族做計算速度快，但是，對學生來說相當於要多記一種解法。如他所說：老師是覺得說整個在教學上裡頭來講喔，老師不太想去觸碰好像只有一個特殊解法然後可以把它處理的很快，那像剛剛的方法含一條直線，你就可以找到兩個點把它帶進去嘛，是不是兩個點，然後另外那個夾角是不是三個變數，一樣可以把它解出來。(A,20091119)
2. 重複組合：若以實用取向來看，李師只需教學生如何寫出 H，以及如何把H 轉化為 C 計算出答案即可。然而，他選擇先用 C 來說明原理，最後才提出 H，而非一開始直接丟出 H 的定義。在訪談中他提到：你要去解釋為什麼 H_k^n = C_k^{n+k-1}，那個道理一定要從組合才能夠講。不然你直接寫這個 H_k^n 規定它是多少，學生會問你為什麼它給下這個規定，所以其實在講原理一定從 C 來做嘛。(D,20100512)
3. 期望值：期望值具有「平均值」和「$m_i p_i$」兩種數學觀點，平均值雖然解題速度較快，然而，遇到較難的題型反而要用 $m_i p_i$ 才能克服，所以，李師兩者皆強調。如他在課堂上所說：以解題的角度來講，用算術平均數會比較快，但是如果以未來的角度來講，那個原理一定要懂。(C,20100602)

李師長期教授高三班級成效均佳，所以，他「實用取向」的教學特色可能和教學經驗與學校以升學為導向有關。然而，李師並沒有忽略數學概念本質的學習，必須先讓學生真正了解之後，再熟悉與運用它。如同前面章節所提，李師改變既有的教學順序時常源自於學生茫然的眼神，所以，「實用取向」其實是建立在學生能夠獲得真正的學習的根基之上。

(二) 螺旋式教學

李師的教學模式大多先做班級經營(其他)，再來複習已習得的概念，接著，介紹主要數學概念(倘若使用例子來介紹概念，則會被歸類在「教師示範例題」中)，最後，則是操作講義例題(可能是自行演示或者學生演練)。在前導和第一階段研究中，李師第一節課主要是講解新概念，再搭配幾個例子來增強它，到了第二節課之後，才真正開始演示講義中的例題。在前導研究時，李師曾說他的數學教學為「螺旋式教學」，這與個人的課堂教學觀察結果相當一致。雖然，前導研究的單元為 2-4、2-5，但是，他也同時邊檢討 2-1~2-3 的習題，甚至，在 2-5 的課程進行中回頭檢討 2-4。他曾提到：

> 有時候老師上完 2-5 再拉回來講 2-4，很多題目上會變得非常非常簡單，不會說好像凹的那麼辛苦啦。所以老師有時候用這種螺旋式，反正上過以後再上第二次，有時候你心情如果夠沉澱的話，解法應當會更快，慢慢體會那種感覺啦。(A,20091118)

李師強調讓學生課後沉澱的重要性，因為，只有沉澱過後的東西才是她們真正所學習到的數學。所以，在每個教學單元結束後，他都不會立刻檢討習題，而是過 1~2 週之後，等學生自行閱讀課本並且完成習題和數學科補充教材的內容之後，再擇期檢討。因此，新單元和舊單元時常會疊在一起教學，這就是「螺旋式教學」。此外，李師不只有教學形式上的螺旋，也有教學內容上的螺旋。他認為：數學本身就有點像是螺旋式的，我們先講簡單再講難的部份嘛(D,20100623)，有些內容可以先教其形式，後面幾堂課再慢慢說它的道理，更艱澀的部份則留到最後再做延伸。如他在重複組合的訪談中曾說：

> 我是覺得說第一次上課喔，那種例子寧願傳統一點點，那種所謂傳統的題目就是大家很容易接受的題目，就很自然馬上可以把它給排出來，你就很自然這樣講。那比如說第二次上課，像剛講那些千變萬化的題目上，就在第二次複習或到高三的時候再栽進來，所以我並不是說第一次就什麼東西都教給學生，而是我覺得你高二的學生觀念就是要很清楚。我在教有時候我們會想說我高一要怎麼教高二怎麼教高三怎麼教，比如說我現在就把你教到觀念很清楚，那到高三比如說偏向學測，它應用問題，我可能就會舉像剛剛這種例子，那這種例子就慢慢去引導她，其實她整個架構就會完成。(D,20100512)

在每個單元的總結性訪談中，李師都表達出這樣的想法，螺旋式的教學代表他具有連貫的課程知識，並且，知道教學單元在高中數學課程中的地位，能夠做循序漸進的引導。若將他對教學單元的架構隱喻為「一座金字塔」，第一次教學時就像在打基底，爾後的每一次複習，都像將塔一層層向上構築，希望將學生推至最頂端。意即，培養出她們好的數學能力以應付學測或指考。然而，在實際的課堂教學觀察中，個人只能見到部分的架構。李師選擇螺旋式教學，除了與數學教學信念有關，也與他長期的數學教學經驗有關。他認為教數學要單純些，一次應著重在一個重要的主題上，不能讓教學變成多頭馬車，將所有想教的全都教給學生，而是要一點一滴慢慢地給，一直給到高三才是真正的完成工作。李師的螺旋式教學也符合 Ma (1996) PUFM「一致性」的特徵。

(三) 重視驗算

李師強調驗算與「實用取向」的教學觀點有關，他在前導研究中就非常凸顯驗算的重要，他提到，驗算的功能是學生不會算錯和希望學生把速度放慢，而且，驗算並非再次檢查原算式，而是透過不同的概念來檢驗。據此，個人在編碼系統中對驗算的定義與李師相符。前導研究中，39 題的例題李師講解了 33 題，驗算了 9 題，反觀第一階段研究的 15 題例題，只有驗算了 1 題，而且，第二階段研究中並沒有出現驗算。造成如此的差異，個人猜測是單元的關係。空間涵蓋的內容多，可使用的概念自然就多，例如求解平面方程式，可以由點帶入或者看法向量是否與平面上的向量垂直來驗算，相較於重複組合和期望值，單元較小、包含的數學內容少，驗算的功能比較難以發揮。

(四) 善用起始例

在前導研究中，李師使用四面體的實體操作物引入數學概念，欲求過某三

點的平面方程式，他類比於平面的直線方程式，假設空間平面方程式為 $ax+by+cz+d=0$ ，再將三點帶入求解，最後證實猜想無誤。在第一階段研究中，他使用「將 5 件相同物品分給 3 個人」的情境，先透過列舉法將所有的解都列出，最後再引出 H 的定義。在第二階段研究中，他使用「丟銅板和擲骰子」引起學生的學習興趣，先讓她們對期望值有點感覺，再引出平均值的數學觀點，最後才提出 $m_i p_i$ 數學化的定義。李師喜歡將起始例做為教學單元的開場，而且，起始例必須是傳統的、簡單的、與生活貼近的，甚至在不同班級中，他所選用的起始例也會不同。或者說，他使用的起始例不只有一種(或一個)。在訪談中他提到：

> 一開始講些實例，她生活週邊上所看到的，然後她慢慢就可以接受這個概念，然後同樣大部分都是從實例講到數學化的一些東西，然後才給它下一個定義。那你就發現有些比較難的題目上，你那簡單的方法根本沒辦法應付嘛，你就非得用數學的方式去處理它抽象化的概念，那有時候也讓她們了解為什麼要有數學，它整個目的在哪裡，慢慢訓練以後，她們抽象化的概念就會比較具體一點點。(D,20100623)

李師認為，如果一開始就對學生下數學定義，她們會無法承受，故需要先使用較多的例子提昇她們對數學概念的感覺，最後才能順利地下數學定義。他曾說，學生可以接受的講法和解法最重要，由此可見，他在做任何數學教學決定前，都會以學生的數學學習成效為首要的考量。

(五) 清楚解釋題意

李師在前導研究中，由於是空間單元，故他會在解題前先使用具體操作物或者圖像來解釋題意，讓學生對解題有方向後才開始演示。特別的是，在第一和第二階段研究時，李師喜歡使用情境式的包裝來解釋題意，其中，又以重複組合的部分較多。以下為三段相關的教學片段轉譯：

> ㄟ你稍微想一下喔，這題目上超難的喔，理論上你應該沒有看過啦，這邊是一條這樣的直線，這兩條是怎麼樣的關係，歪斜，可以吧，畫

這樣可能立體感還不夠，老師再加工一下，畫個彩色的讓你去感覺一下，人生要彩色的啦，這一條線 L_1，這一條線是 L_2，一個點上，然後一個 B 在直線移動，C 在上面動，那成一條線的時候怎麼辦？(A,20091113)

比如說畢業旅行的時候有五個小朋友阿對不對，然後有三種啤酒阿，喔陳維新就開始精神就來啦對不對，那每個人各買一杯飲料的時候一杯啤酒的時候，那他拿出來的方法多少種？他拿出來啦對不對，那個啤酒可能是很多。想一下，然後比如說維新很會喝酒啊，她一叫叫兩杯啊，王婷叫兩杯啊，蓁薇叫兩杯啊，買醉啊對不對，然後蔡燕玲買兩杯啊，王情買兩杯啊，一共買十杯啊，那店員他拿出來的方式有幾種啊，對不對。(B,20100428)

ㄟ這種題目上挺有意思的喔，比如說維新跟馬丁兩個比賽桌球啊，那實力相當而且沒有和局，表示它比例大概就是多少，正負一樣嘛。(C,20100603)

依編碼結果來看，前導研究中若「數學描述」和「數學解釋」同時出現，代表的是李師先對題目做解釋，之後，只是將步驟寫下而未多做解釋。這樣的情形在後面兩階段中是比較少見的。個人認為，這是單元屬性所造成的差異，空間對學生而言，不易想像，所以，李師在解釋題意上需花費較多的時間，另外兩個單元則是因為比較容易與生活結合，反而出現了另一種解釋的方式。做完細部分析後，個人發現重複組合中，李師對組合做的解釋多於排列，期望值中，對 $m_i p_i$ 做的解釋多於平均值。這可能與他當時的教學重點有關。

二、 透過 PUFM 詮釋李師數學教學的實作和思維

綜觀本研究的結果，從前四節的討論中發現，李師的教學符合 Ma (1996) 所提 PUFM 的許多特質，包括了連通性、多重觀點、一致性和基本概念。PUFM 強調的是教師對基礎數學有深刻的理解，深刻意指具有深度、廣度以及透徹性。深度，指他能連結數學主題至較大而且有威力的基本概念；廣度，指他能將相似的概念做連結，或者對概念使用不同的觀點；透徹性，指他能將廣度與深度膠合，

並且發展成為一個一致的主體。根據三個階段的各類資料，以下進一步描述李師的這三項 PUFM 的基本特質。

(一) 深度

Ma (1996)提到，具有 PUFM 的教師能抓住數學教學內容中簡單卻有威力的基本概念，它能夠撐起整個數學教學的架構。綜觀整個研究過程，李師呈現數學基本概念的頻率很高，特別是，在各個教學單元開始的第一堂課，以教學觀察系統來看，它對應至「做總結」這個編碼。以前導研究中 2-4 和 2-5 的第一節課為例，個別出現了 4 次和 3 次，相較之下，在第一和第二階段研究中並不頻繁，如同前面所討論，倘若呈現的時間較短，並不必然被視為主要的教學進行方式，但是，實際上李師仍時時增強基本概念，增加學生的印象。以下透過三階段中的數學教學內容進一步說明，如下：

1. 前導研究：李師在空間平面方程式和直線方程式的教學中，強調學生要試圖找到「點、法向量」和「點、方向向量」，這也反映在截距式的證明中，他捨棄假設一般式來證明，依循找「點、法向量」的原則；在判斷空間兩直線關係時，他同時強調「方向向量、交點個數」兩種思維，要學生先使用方向向量做初步篩選，再利用交點個數得到結論。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

   乀你要判別兩直線的關係你要怎麼去判別它？大概你從整個思路來講有兩個方式，如果兩個向量是互相平行，兩個方向向量互相平行那有幾種可能？重合跟平行。方向向量如果平行，它的狀況有幾種？重合，一種是不是真的平行，那如果它沒有平行有幾種狀況？相交一個點跟歪斜。所以向量有沒有辦法把它四個斷成是哪一個？其實沒有辦法。好，再來探討第二個問題，你如果從交點的個數來探討，交一個點確定，相交兩個點以上就無限多解，一定是不是就重合，但是如果不相交，你有沒有辦法克服它？因為它能是平行可能是歪斜，所以這個地方有兩種解題思維模式，一個是先從向量去研判它把兩種不可能給去掉，然後再利用到交點是不是可以把它給克服。(A,20091111)

   因為我是覺得說前面一直都用外積比例式的概念去講平面方程式，因

為照理說三個變數你這樣做也是對的啦，我在想說就延續上一節課的東西就直接這樣卡進來。(D,20100114)

2. 第一階段研究：李師強調一定要能夠寫成「$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$」這種樣式的才是重複組合，所以，學生遇到題目時可以先嘗試寫出這個表徵，以便判斷題目是否為重複組合。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

五件相異的禮物分給三個人，每人可以重複取得，禮物一禮物二三四，分給甲乙丙三個人，就好像三個桶子在這邊，這個時候怎麼辦?每個人可以重複取得，第一個應當是還好，第一小題可以重複取甲+乙+丙多少，這五件相同還相異，相異那可不可以這樣寫，所以這解法這邊是不是要相同才可以，對不對，你看到相異相異一定是什麼問題?

(B,20100428)

你看每張考卷都會考阿，相同的 6 顆球放入 3 個相異的箱子裡，那每個都知道三個箱子 x+y+z=6，她們都知道很明顯是 H_6^3，那如果有些老師毒一點，相異的 6 顆球放到 3 個相同的箱子，那你就發現不是三個箱子等於 6，這種東西很明顯就沒有辦法，沒有辦法就只有一招用分組分堆，沒有什麼啊，那並不是排列組合可以克服的問題，所以有時候讓她們了解相同相同不能寫成這個樣子，所以它每個東西都有它的一個模式。（D,20100512）

3. 第二階段研究：期望值共有兩種數學觀點，李師在教學中希望學生先判斷可否使用平均值解題，如果不行再使用 $m_i p_i$ 求解。畢竟，雖然用平均值解題速度較快，但是遇到較難的題型，還是必須依據抽象的數學原理來求解。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

你這種東西，它是不是一個用平均值概念可以想像出來的東西，它不是喔，所以老師才講說兩者有些題目上是，你用平均值的概念馬上就可以算出來，但是到某種程度以後，還是要有點它定義這種東西來做比較完整，懂不懂?所以有時候數學為什麼它很多理論背景還是要懂，道理就在這種東西啦。(C,20100602)

其實我第一個是要告訴你說哪些東西應當是不會影響到它的一個狀況，那什麼時候可以利用到平均值的概念去操作很多像機率的問題，那另外第二種領域就是說，如果碰到題目上你發現，因為它本身變化很多嘛，哪些可以用平均值，哪些還是要回到它真正原始的定義。

(D,20100623)

由上述三階段擷取的例子中，可觀察到李師的數學教學思維與數學教學實作是一致的，而且，課前他對數學教學單元的教學思維，影響之後他在實作中所展現的知識，包含了他對例題的編排、證明方法的選擇、如何引導學生解題的思考方向。他尤其強調，學生要掌握到數學內容中的基本概念，並且，藉此區分不同概念(排列組合)或者相同概念不同觀點(期望值)之間的關係。此外，李師的數學教學思維主要與他「單純」的教學信念有關，他希望將數學概念透過簡單的方式來呈現，因此，這樣的信念也影響到他對「基本概念」的掌握，善用「以一貫之」的教學方法，也藉此提醒學生，多變的題型皆不離基本概念，必須要能夠確實掌握與運用。這也說明了，這些數學教學的核心信念與李師課堂數學教學實作知識的呈現是密不可分的。李師持續地增強數學教學單元中的「基本概念」，展現了 Ma (1996)在 PUFM 中「深度」的特徵，所以，在課堂數學教學實作中，李師與「深度」相關的數學教學思維是外顯的、可觀察到的，即是「以一貫之」教學信念的反映。個人進一步推測，以「深度」而言，李師的信念似乎比其他數學學科知識或者對學科的態度來得更深。

(二) 廣度

「比較」是李師較常使用來展現「廣度」的方式，他不只聚焦於教授的教學主題，同時，也能夠將相似或相異的數學概念引入做比較，或者，使用這樣的方式引進新概念。以下透過三階段中的數學教學內容進一步說明，如下：

1. 前導研究：本階段的研究單元為空間平面與空間直線方程式，李師使用許多比較來進行教學。例如，空間平面方程式與平面直線方程式、空間直線方程式與平面直線方程式、空間直線方程式與空間平面方程式、點到平面的距離與點到直線的距離、兩平面的夾角與兩直線的夾角、空間角平分面與平面角平分線、兩平行線距離與兩平行面距離、空間平面方程式的法向量與向量外積。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

老師把這個直線想成是個平面嘛，我把它畫厚一點變成一個平面嘛，你就可以把它想成類似這樣，ㄟ你看，這個是不是這個，這個是不是就這一個，對不對，一樣嘛可以吧，那它的法向量可能往上可能往下，它的法向量可能往上可能往下，其實你有沒有發現那個感覺是一樣的嘛，那種感覺有沒有抓到，稍微想一下，所以如果你要求它的夾角，還是只有透過什麼來做，是不是法向量，沒辦法像直線一樣我找個方向向量。(A,20091104)

我在最後面的時候就有跟她們講一下了啦，這種東西為什麼不去講它，因為在講平面向量的部分有時候你做出來會有正負，你如果避談外積，就可以把正負隨便去做伸縮的動作，那你外積把它固定以後，其實它就是一個蠻固定的東西啦，比如說萬一這個向量是(2,2,4)，那其實你在做的時候為了讓它精美數據，馬上把它縮成(1,1,2)，那做出來之後萬一有(-1,-2,-3)馬上可以把它改成(1,2,3)，其實它整個空間變化的幅度會更大。(D,20100114)

2. 第一階段研究：重複組合為排列組合中的一個單元，因此，它無可避免地會被拿來與排列、重複排列和組合做比較。李師曾說，教學時不能夠給學生一個數學概念，卻沒教她跟其他的數學概念做區隔，所以，他在第一節課的最後，將四個概念有關的題型統整成一個大表格，協助學生整理與分析不同的情境，其中也包含了部分非正規的題型。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

好，那我想老師就把一些整個我們在念排列組合，大概會碰到一些問題老師幫你做一下分析，然後慢慢來把它想一下，可以喔。其實你要慢慢去懂得說排列、組合、重複排列、重複組合它的差別性在哪裡，那哪些可以用這四個解出來，哪些不可以解出來，這樣懂意思吧，來慢慢聽喔，這邊已經算是在收尾的動作了，這邊講完以後其實排列組合已經都結束了。(B,20100427)

所以後面在講這些題目上，哪些是排列哪些是組合，哪些P哪些C，哪些重複排列哪些重複組合，要她們整個把它分的很清楚，其實後面所有的動作都在做這個動作。你不能夠說給她新的東西，不讓她跟其他做個區隔，那她學了以後孤伶伶也不知道要幹嘛，然後考試又喜歡兩個湊在一起。(D,20100512)

李師提到，學生學習排列組合時容易將概念混淆，所以，在講義的編排上，他在後面放入整合題讓學生做統整，以釐清四者的差異。整合題多是校內常考的題目，共有 6 題，每題又分為 2~4 小題，涵蓋了許多不同類型的題目，包含了正規與非正規，或者是最多一件、最少一件的題型，每題之間有些許

的差異，在教法上，他多會先讓學生演練過後再做講解。

3. 第二階段研究：期望值包含了「平均值」和「$m_i p_i$」兩個數學觀點，本階段共有兩節課，第一節課中李師強調平均值，第二節課他則強調$m_i p_i$與兩者間的比較，他希望學生能夠了解兩者的差異，在面對多變的題型時，判斷何種觀點較為合適。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

你這種東西，它是不是一個用平均值概念可以想像出來的東西，它不是喔，所以老師才講說兩者有些題目上是，你用平均值的概念馬上就可以算出來，但是到某種程度以後，還是要有點它定義這種東西來做比較完整。(C,20100602)

第一節課講平均值的概念，哪些題目可以用平均值這種東西來操作，那其實也給她們概念上是說，假設沒有那種平均值的概念，那還是要回到數學本身定義的東西來操作它，因為數學本來就是一個抽象化的東西嘛。(D,20100623)

在講義的編排上，由於前 6 題都可以使用平均值來克服，因此，李師特意安排了第 7 題，因為它不是一個均勻的狀態，故必須使用$m_i p_i$來求解，藉此讓學生了解期望值並非只學算術平均值即可。

李師引領學生使用不同的數學觀點學習數學概念，或者，展示例題的不同解法，這也是「廣度」的一種展現。以下透過三階段中的數學教學內容進一步說明，如下：

1. 前導研究：在求解空間直線方程式時，李師會提供學生參數式、對稱比例式和兩面式三種表示法。他時常會使用其他概念來做驗算，這除了是他的教學特色之外，也是「廣度」的另一種樣貌。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

那你這個題目上就發現令 x 等於多少，隨便你令喔，你假設令它 1，1 可不可以，可以啊，我隨便找到一組(1, 1)是不是也是很幸福的一件事情，那你有時候為了單純令 x=t、y=3-t，那你的 z 呢？帶進去這裡頭就好了嘛，z=4-5t，那這很明顯就是它的參數式，ㄟ，3-2t 啦，z=4-4t，做完這個題目老師教你一個驗證的方法喔，來我先寫對稱比例式，那這個地方你要寫對稱比例式你要怎麼做？其實你就發現，它的對稱比例式要怎麼寫它，$\frac{x-0}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{-4}$是不是就出來了。(A,20091106)

這個平面就變成 x-y+z 帶哪一點(1,1,1)得到等於 1，不放心你就再用(2,3,2)帶一帶嘛，那答案是不是都一樣，一樣就保證答案都沒有錯了。那你跟這個(1,2,1)內積是不是等於 0，大概怎麼算都會對嘛。(A,20091109)

因為我那天要上課以前看到學生都用這種方法在做，但是外積的方法還要再找到一個點，我在講第一個方法第二個方法，最後都會再講還是這個方法好，我還是要她們用不定方程解，所以其實我在教書還是我的一個理念啦，我就是要用不定方程式解它，然後一種一種方法最後還是這個好，她們學生感受的到那種感覺。你講一些解法讓學生比較一下，我是覺得解法單純就好，你看我最後訓練完學生的思維喔，兩平面都是化參數把直線寫出來，都沒有其他的解法，這是我想要傳達給學生的一個信念，你數學不要太複雜化，其實就是一招為行天下。(D,20100114)

2. 第一階段研究：例如，求解$x+y+z+u+v=2$的非負整數解時，李師會呈現$H_2^5=C_2^6=C_4^6$三個式子，H 是公式寫法，最後的 C 是可由題目看出的直接寫法。透過這兩種寫法，他能夠說明 H 和 C 之間的轉換關係。因為兩者的數學概念性理解不同，所以，個人視為「多重觀點」。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

那你從這個題目上知道答案多少H_4^3，那或者你用直觀兩個加號四個 1，做出來就變成等於C_4^6，那就等於C_2^6，答案是不是就完全一樣。可以吧，大概可以理解一下喔。(B,20100428)

講解過程用 C 來講解學生很容易接受，但是在應用題目的時候還是 H 會比較方便，比如說我舉個例子來講，昨天在幫她們複習的時候，比如說一個三位數，它的數字總和如果是 8，那這種東西寫出來就是 x+y+z=8，那你去掉 1 以後變成 x+y+z=6【誤】，馬上就是H_6^3，所以有那個 x+y+z 的東西好像感覺上你這樣可以直接寫成H_6^3，也可以寫成C_2^8都可以對不對，但如果比如說她們在分東西，比如說五樣相同東西分給四個人，那她們其實很容易就馬上寫出來 x+y+z+u=5，她們就馬上 H 多少取多少，有時候在計算上到後面反而這個是比較方便的。所以，講原理要從 C 開始來講，那其實如果在應用上，H 學生領受的程度會比較高一點點。(D,20100512)

3. 第二階段研究：期望值有「平均值」和「$m_i p_i$」兩個數學觀點，在面對某些

題型時兩種觀點皆可使用，此時李師會提供兩種寫法，同時也可作為驗算一種方式，或者在期望值中求解機率的部分，李師會給予不同的解法。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

1 人的機率 50%，2 人的機率 25%，3 人的機率 20%，4 個人的機率是多少，5%，對不對？你看它是不是照這樣寫嘛？$\frac{1}{2}\cdot 1$，$\frac{1}{4}\cdot 2$，$\frac{1}{5}\cdot 3$，$\frac{1}{20}$乘以多少？4，當然你可以把它想成 100 次嘛，有 50 次錯 1 個人，25 次 2 個人，對不對？那 20 次是 3 個人，5 次剛好幾個人？4 個人，一樣是不是可以求它的平均值出來，可以喔？(C,20100602)

第十題這個題目我在上的時候，我其實講過兩種方法，一個是從排列的角度去講它，那有時候我是覺得說，大部分比如說會用這種類似樹狀圖的概念去講它。(D,20100623)

有時李師並不一定會將多種解法寫在黑板上，可能會採用口述的方式帶過。一般而言，他大多不會比較多種解法，也不會說何種最好，只有在期望值的部分特別強調 $m_i p_i$ 的重要。因為他認為，要留給學生空間做思考與沉澱，畢竟解法的好壞並非絕對，當她們算多、想多了、感覺增加了，就會更清楚何者是最適合自己的。

個人使用「比較」和「多觀點」來論述李師數學教學中的「廣度」，因為，將相似的概念做連結、給予數學概念不同的觀點，或者提供例題多種解法，都是屬於 PUFM 中「廣度」的特徵。關於「比較」，類比的教學手法在課堂中容易被觀察到，在訪談中鮮少提及，反而是對照的手法，在訪談中較常出現。在李師的數學教學思維中，他強調學生要懂得分辨數學概念或者解法間的差異，所以，在數學教學實作中，對於不同的數學概念，他會找合適的時機為學生做統整，甚至，明確指出它們的差異。然而，當他對題目提出多種解法時，他的數學教學思維並沒有反映在數學教學實作中，因為，他認為學生能夠思考與理解，甚至發現最好的解法。縱使如此，並非數學教學思維與數學教學實作不一致，正是因為思維的作用，李師才會最後只呈現出某部份的解法，希望學生能夠將它們釐清。多種解法除了可供驗算之外，也能做複習或者為未來的課程做鋪陳，例如，上述例子中

的排列和樹狀圖，樹狀圖即是在為貝氏定理做鋪陳。李師的數學教學思維中，對鋪陳的脈絡相當清楚，但是，在數學教學實作中他多半不會表明，或者只有提及數學概念在何時會學到而已。以致於在訪談時，這個部分是最讓個人驚呼連連的。這也表示，在李師的數學教學思維中，「廣度」也包含了部分的「透徹性」，而且它是內隱的。

(三) 透徹性

李師對高中數學課程的內容有相當的了解，因此，他能夠彈性調整數學教材，並且，安排適當的時機複習已習得的概念，或者鋪陳未來的課程內容，讓學生學習到一個完整的數學內容架構。調整並不必然是李師刻意的安排，個人曾在訪談中詢問過他何謂教學的適當時機，他提到，這必須取決於學生的反應再做決定，倘若在講解時眼角瞄到學生已經開始茫然，就知道不能夠再繼續講下去，回去時先做個記號，之後再找時間拉回來說明。所以，每個班的數學教學順序會有些許不同。這正是 Ball 與 Bass (2000)所說的數學教學的「不確定性」，而李師總能從容地克服這樣的不確定性。即使，每個班所呈現出來的教學可能不同，但是，李師心中對數學教學內容的架構是相當清楚的。以下透過三階段中的數學教學內容進一步說明，如下：

1. 前導研究：李師在上平面族之前，先跳到 2-6 講解二元一次方程組，他提到：

> 這個平面族因為在學校補充教材和在很多考試中都會碰到它，那你總要把它觀念講懂，為什麼平面族長這樣，那沒有 2-6 你怎麼講清楚，所以我當初在寫的時候本來想說先不要理它，教學生怎麼去做它，然後那一天看學生的感覺，有好幾個都有點疑惑的感覺為什麼這樣做，那我想一想她們心中一定想為什麼是這樣，所以就拉到 2-6 去講那個概念，所以它本身那個幾何意義出來以後她們就懂了。(D,20100114)

除此之外，李師在上空間平面方程式時，就已不經意地植入空間直線方程式的概念，或者事先教導學生尤拉法，以便空間直線方程式時能夠使用。所以，當學生真正學習到時，可以銜接得很好。例如以下的教學片段和訪談轉譯：

老師現在其實在偷埋一點點以後直線要教的概念。(A,20091105)

我當初在上第一章的時候就花了一節多的時間，跟她們講那個不定方程式的解法，包括尤拉解法什麼東西都教進去了，所以她們到這邊的時候會覺得很自然啦，所以第一章其實就有個伏筆在那邊了啦。(D,20100114)

在 2-5 空間直線的例題中，李師額外補充了點與平面的關係，並且安排許多線與面相關的題目，希望學生對空間平面與空間直線能有透徹性的理解。

2. 第一階段研究：李師在重複組合第一節課最後所造的大表格，除了展現數學教學實作知識的「廣度」，也說明了他對排列組合課程內容的「透徹性」理解。
3. 第二階段研究：李師在上期望值之前，已經將例題中可能會用到的條件機率(屬於高三的數學課程)和重複試驗的數學概念傳達給學生，所以，在講解證明或者例題時，學生並不覺得陌生，反而能夠自然地理解它。除此之外，他提到，他在寫某例題時想到了高三即將上到的貝氏定理，他希望透過例題先建立學生樹狀圖的概念，以利之後做連結，例如以下的訪談轉譯：

其實我寫到這邊我是有點在想到哪邊勒，在想到貝氏定理，貝氏定理有時候我們都會畫這些圖的概念，那它本身有兩個發展的體系，一個是利用到樹狀圖的概念，一個是利用到分割的概念，它其實兩種都有這樣來講它，所以我本身在上這邊的時候是想建立這樣的概念，就等於說我有想到我後面馬上要上到這一段。(D,20100623)

數學期望值具有「平均值」和「$m_i p_i$」兩種數學觀點，承如前面小節中所觀察，李師的數學教學實作中同時具有「廣度」和「深度」，而且將兩者膠合。這是 PUFM 中「透徹性」的特徵。從上述例子可發現，李師在前兩研究階段中，與「透徹性」相關的數學教學思維反映在數學教學實作中，所以是外顯且一致的。然而，數學期望值中的數學教學思維卻是內隱的。這似乎表明，倘若該數學教學單元真正連結到其他數學單元的時間間隔較長，那麼，在數學教學實作中並不會被顯現出來。故個人推測，李師展現「透徹性」的特徵與「實用取向」的數學教學觀點有關，只是，在數學教學實作中觀察到的實用是立即性的，在數學教學思

維中觀察到的卻是預備性的。「透徹性」結合數學教學內容的「深度」與「廣度」，使教師能對教學做彈性的調整，帶領學生用更寬廣的視野學習數學概念，並且，抓住其最底層的基本概念。Shulman (1985)曾說，作為一個教師需要廣泛以及高度組織的知識主體，個人認為，這即是具有「透徹性」的數學教學實作與教學思維。

從上述對 PUFM 特徵的討論中不難發現，李師數學教學的實作與思維中的「深度」、「廣度」和「透徹性」都有相互重疊之處，誠如 Ma (1996, p. 238)所說，事實上這三項特徵是相互交織的。而且，李師在三個研究階段中所展現的數學教學特色幾乎是一致的。在前三節的討論中，個人經由數學教學觀察的結果，對應回原始的數學教學片段，描述李師數學教學實作的內涵，以及它可能凸顯 PUFM 的某些特徵，還有一些 PUFM 無法涵蓋的部分；接著，個人藉助 Ball 等人(2008)的 MKT 架構來進一步詮釋這些無法涵蓋的部分。這也說明了前述兩種理論架構之間，有相同亦有相異之處。例如李師的 SCK 或者 KCC，與 PUFM 的四項數學教學特徵相近，而偏向對教學所做的決定(例如起始例的選取)，或者，了解學生的錯誤概念以及緣由，就與 PUFM 較為無關，反而適合使用 KCT 和 KCS 來分析。所以，李師數學教學的實作與思維，同時展現了 MKT 某些領域的特徵，以及 PUFM 的特徵。然而，在前導研究的課堂數學教學觀察中，個人認為李師的數學教學比較凸顯 PUFM 的特徵。這樣的感受在接下來的兩研究階段中也越來越深。因此，PUFM 是個人使用來解釋李師數學教學的實作與思維比較合適的學理架構。

三、　李師的數學教學信念

綜觀三階段的研究結果，個人認為李師核心的數學教學信念為「單純」。他

希望透過這樣的數學教學，讓學生快樂的學習數學，因而產生信心，有了信心便有內在的動力繼續學習數學，也才能達到學習的成效。而「以一貫之」和「實用取向」的教學觀點即是由「單純」衍伸而出的週邊信念。這些數學教學的相關信念，對於李師在教學脈絡的安排以及教學內容的選擇都有直接的影響。以例題的編排為例，李師在編排上採由易至難，單元分類大多與課本一致，難題的部分多半是由於數學科補充教材有，或者是希望為學生儲備學測或指考的能力，他才會納入。基本上，內容還是配合基本概念的教學需求，並不會有太艱澀或不易計算的題型。如 Fennema 與 Franke (1992)所提的「在脈絡下發展的教師知識」(請參見圖 4-12)，圖中展現了數學教師知識互動和動態的本質。他們指出，數學教師知識包含了教學知識、數學知識、學習者對數學認知的知識和信念四個成份，而且，每個成份是要在脈絡裡發生，脈絡能定義知識的成份並使信念發生作用。當四者互動，則可帶領師生的教室教學行為。

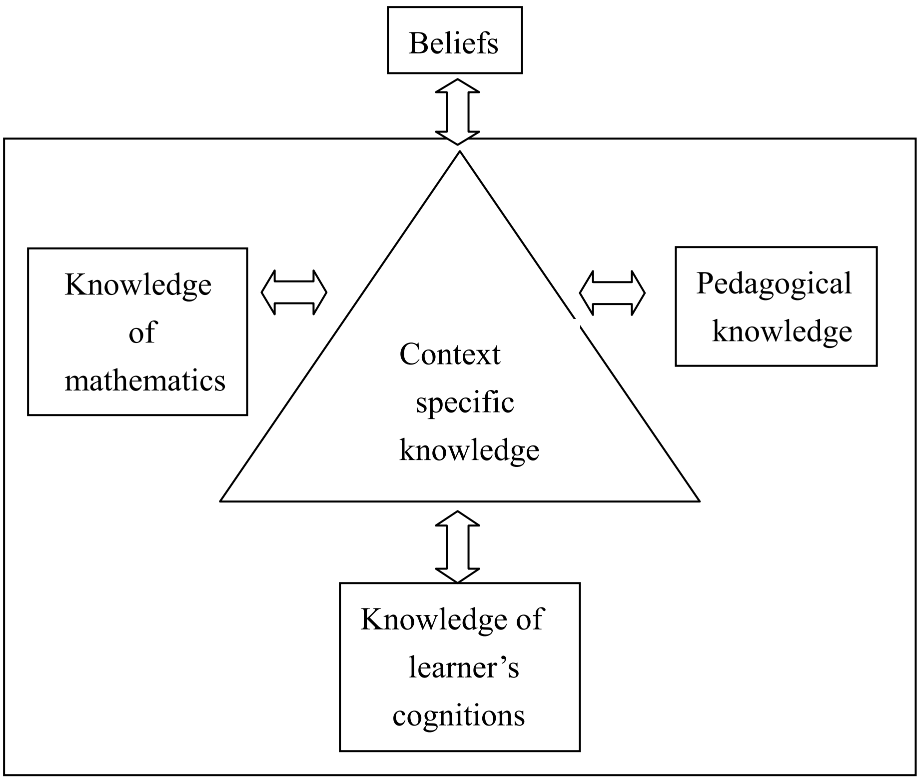

圖 4-12：在脈絡下發展的教師知識(引自 Fennema＆Franke, 1992, p. 162)

在數學知識上，因為，李師喜愛武俠小說中一刀斃命的絕招，所以，他一直嘗試著引領學生抓到學習內容的要領，並且持續地增強它。他相信只要學生熟練這些要領，即可應付多變的數學考試題型。因此，李師希望能將很難的數學內容用一種淡淡的方式解釋它，只要學生可以體會就好，不需將她們預設為將會進入數學系的學生。因為，即使他將數學內容呈現的非常嚴謹，學生也不見得能夠接受。在講解數學概念時，李師也會考量學生學習的連貫性而做彈性的調整，例如在證明截距式時，他選擇延續前面的解法(找點和法向量)，而不依照課本假設一般式之後證明。然而，因為過於在乎學生感受，使得李師過於重視實用性，卻忽略了數學本質上的嚴謹性。例如在平面族的証明中，兩平面 $L_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ 、$L_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$，李師只有証明形如 $hL_1 + kL_2 = 0$ 是一個過 L_1 和 L_2 交線的平面，但是，沒有証明過 L_1 和 L_2 交線的平面都可寫成形如 $hL_1 + kL_2 = 0$ (A,20091103)。李師並沒有完成充分且必要的雙向並推證明，可是，例題中卻需要用到必要條件。類似的情形，也出現在李師講解例題時，例如在空間平面時，求解平面與座標軸所圍的最小體積的例題裡，李師使用到三個量的算幾不等式，卻忽略了學生並沒有學過它。誠如第二節中所討論，這可能與李師不重視平面族和截距式的數學教學有關。因為「單純」的信念，使得他在課堂中所呈現的數學知識對學生而言是淺顯易懂的，甚至，他認為有些內容學生能夠直觀地理解就好，但是，以數學知識的嚴謹本質來看可能還是不夠完備。

在教學知識上，李師以教學的流暢性為主，他希望學生在學習過程的每一個連接處都能夠銜接得很順利，所以，他懂得彈性調整教學內容的順序，縱然，這樣一來可能與課本的安排不同。他認為，只要有合適的機會，都可以將後面的內容潛藏於前面做教學上的鋪陳，或者是，將前面所學的內容在後面做適時的回顧。這有點像是螺旋式的數學教學，而並不侷限於當下的數學課本教學內容。例如，他在上 2-4 與 2-5 的同時也邊檢討 2-1~2-3 的習題；在 2-4 講解平面族時，他認為倘若沒有後面 2-6 二元一次方程組的基礎，則平面族的概念難以建立，故他選

擇先跳講 2-6；或者他在講解期望值之前，先為學生建立好條件機率和重複試驗的相關概念。

在學習者的認知上，當李師知道學生在學習某個數學概念時，可能會遇到某類的困難後，他就會增強這部分的教學內容與教學引導。例如在重複組合單元時，因為考慮到，學生容易將它與排列、重複排列、組合搞混，故他在課堂上「即興地」製造一個大表格以釐清這四種概念；針對學生易犯錯的題型，他會在講義編排上特意多安排一題；或者，在期望值單元的教學時，為了避免學生只學平均值而忽視定義的重要，他在例題上也作了特殊的安排。

信念會影響教師的數學教學實作，當教學單元改變，數學知識或者數學教學知識會有不同，然而，教師所持有的信念會被承襲下來，不會輕易變動，或許表面上的形式不同，但是，其本質卻是相同的。以解法的選擇為例，在平面族的例題中，李師捨棄快速的解法，而是回歸到基本的點向式(求點和法向量)求解，但是，在截距式的例題中，他反而要求學生記得最後的結論，這樣一來，以後遇到類似題型不需要再計算即可看出答案。可見得，快慢並非李師選擇解法的標準，而是他「實用」的信念在發揮作用。他認為，平面族的題目仍可延續找「點、向」的原則，學生不需額外多記一種形式，反觀截距式，因為，他認為這種題目沒有太大的數學意義，所以，只要把學生教到可拿到分數即可。

如圖 4-12 所示，以李師在講解重複組合為例，他希望維持教學的「單純」，所以，在數學知識上，他緊抓住「$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$」的非負整數解這個表徵，同時也希望透過表徵，能夠避免學生將重複組合誤用。此外，在教學知識上，李師採用不同於課本的方式，選擇由 C 的觀點帶出 H，因為，他認為用 C 會比較乾淨俐落，要講 H 轉成 C，還是用方程式來講切入學生是最容易的，這個切法應當是最容易，學生聽了覺得理所當然，會比較單純化一點點啦(D,20100512)。

也因為知道學生時常將重複組合與排列、重複排列和組合弄混，因此，他製造出表格為學生做統整，並且，在講義中編排許多整合性的題目，亦可再次加強重複組合的使用時機。由此可見，因為信念的擴散，以及對學習者認知的了解，影響李師所展現的數學知識和教學知識。所以，教師知識的每個成份之間均環環相扣、密不可分。

第五章　　討論和建議

本研究的研究對象為一位資深高中數學教師，透過進入李師實際的教學課堂中，探究其數學教學實作知識和教學思考。共有三個研究的教學單元，包括幾何(空間平面與直線)、離散(重複組合)與機率(數學期望值)三個領域。個人修改 LMT (2006)的 MQI 系統做為觀察李師數學教學的登錄系統，由觀察結果發現，李師的數學教學實作知識具有 PUFM (Ma, 1996)的部分特徵。Ball 等人(2008)教師知識的 MKT 架構源自於 MTLT 和 LMT 兩個計劃的研究結果，這似乎表示，Ball 等人的 MKT 和 Ma 的 PUFM 有共通之處，也有不同之處。在第四章的階段小結中，個人已經描述了一些李師數學教學的實例，本章中將加以延伸，並且對本研究的結果做更進一步的討論。

第一節　李師的 **MKT** 特徵

本節並非要明確提出李師的 MKT 架構，而是，想透過數學教學實例說明李師所展現的 MKT 特徵，包含了 SCK 和 KCT 的另一種面貌，以及討論 MKT 架構中不同領域(domain)之間的顯隱性、滲透性與流通性。

一、 **SCK** 和 **KCT** 的另一種面貌

Ball 與 Bass (2000)認為，數學教學是一種兼具一般性(regularities)和部分不確定性(uncertainties)的實作。Elbaz (1983)和 Leinhardt (1986)都提到，教師的教學實作知識會因為脈絡而呈現動態的調整。在李師心中固然對數學概念已有一套教學的模式，如果沒有突發狀況，他仍舊會依照心中的數學教學印象(image)來呈現教學。在研究過程中，個人發現李師能夠彈性地應對數學教學的不確定性，並且

做出適當的臨場回應。對李師而言，數學教學的不確定性不是源自於學生意外的回答或者提問，而是她們當下的學習反應。在李師的課堂中，他懂得對學生察顏觀色，留意學生的眼神和表情，如他曾在訪談中所說，只要眼角瞄一下感覺不對勁就不能夠再繼續說下去。李師處理不確定性的一般方式為，變更預定的數學教學順序或者立即調整教學的內容，然而，能夠在當下立即做這樣的調整，也代表著他具備很豐富(rich)的 KCC。同時，在教學調整的過程中，李師原先持有的數學教學印象可能因此而轉變，尤其是，當他認為這樣的調整是有效的時候，印象便隨著脈絡而漸漸換了另一種面貌。以下為三個李師處理不確定性的相關數學教學實例：

1. 空間三角形面積：在 2-4 的例題 3 中，需求解空間中兩向量所圍成的三角形面積，原先李師只是口頭說明，它恰巧等於兩向量所構成平面之法向量長度的$\frac{1}{2}$，後來則決定，將原先在 2-6 的這個部分提前先證明(A,20091105)；
2. 平面族：在上 2-5 平面族之前，李師並沒有預先安排要引入 2-6 二元一次方程組，當時因為看到學生的眼神有些許茫然，才臨時做了這個決定，讓學生了解平面族的幾何意義與由來(A,20091103)；以及，
3. 重複組合：在重複組合第一節課的最後，李師製造出一個大表格，統整排列組合的題型，訪談時他提到這並非事先安排好，因為，當時該堂課程上完恰巧還有時間，而且這個部分學生錯誤率高，所以，想藉此讓她們思考與沉澱，便很即興的將它臨時製造出來(D,20100512)。

Ball 等人(2008)認為，SCK 是教學特有的數學知識和技巧，意指，教師必須要去做一種別人不會去做的數學工作(work)，包括鬆綁(unpacking)數學。數學工作包含了表達數學概念、回應學生為什麼的問題、辨識在使用一種特殊表徵時什麼被包含其中、連結表徵到基本的概念以及其他的表徵、將正在教的主題連結到以前或未來的主題、評估以及調整教科書的數學內容、修正數學任務使它更簡單

或更難、評估學生論述的可信性、給予或評估數學解釋、選擇和發展可使用的定義、使用數學符號及語言和評論它的使用性、問具有生產性的問題、為了特殊目的選擇表徵、檢查等值(equivalencies)，這些都是 Ball 等人對 SCK 的部分操作型定義。李師根據當時的教學情境，對教學的數學內容作即興的調整，這種即興所發展出的數學內容，雖然並不屬於 SCK 的操作型定義，然而卻可將它視為 SCK 的另一種面貌。亦即，它可以反映出數學教師即興所展現的數學教學功力，藉此可以擴展 SCK 的操作型定義。另一方面，這種伴隨即興教學調整而產生不同的數學教學順序，亦可視為是 KCT 的另一種面貌。即興式的 SCK 與 KCT 也具有顯和隱兩個面向，在數學課堂教學中，如果因為學生的提問而做即興的調整，由於容易被觀察到，所以它們是外顯的。然而，以李師而言卻是內隱的，因為，數學課堂教學中師生的互動鮮少，李師多是解讀學生的表情而即興調整數學教學的內容，所以，個人無法在調整的當下立即察覺，反而在訪談中李師才有機會表明。

二、 顯隱性、滲透性與流通性

在第四章的階段小結中，個人曾經提出許多數學教學實例，說明李師 MKT 架構中不同領域之間的相互影響。在不同的數學教學情況之下，不同的領域會展現出不同的顯隱性。以個人感受而言，李師 MKT 架構中的 KCS 多半是外顯的，特別是，學生常見的數學概念迷思與數學學習的錯誤，他會在課堂上清楚指明並加以提醒，或者，說明為此他在自編數學講義上所做的數學內容安排。所以，此時的 KCS 會影響 KCT，而且所呈現的 KCT 亦是外顯的。此外，李師 MKT 架構中的 KCC 和 KCT 多半是內隱的，個人在前面已提出許多他具有豐富 KCC 的證據。一般而言，這些都不是展現在數學教學實作中，而是在訪談中，經由李師說明哪些現在要用到的數學概念，已經在前面悄悄地灌輸給學生，或者，哪些例題的編排是為了以後在教授某個數學概念時得以順利連結。在這種情況之下，個人

感受到 KCC 對 KCT 具有相當大的影響力，同時，所呈現的 KCT 也是內隱的。個人認為，李師將數學教學視為一種縱向的知識培育過程，讓數學學習可以連結以前、現在和未來的數學概念，而且，並不侷限在當下或者當年級。因此，這樣的 KCC 使得 PUFM 中一致性的數學教學特徵更為顯著。

除了顯隱性之外，李師 MKT 架構中有某些領域具有滲透性。個人發現，KCC 和 KCS 是李師在做數學教學決定，或者數學教學內容安排時，最具影響力的兩個領域。李師的數學教學展現 PUFM 中深度、廣度和透徹性的特徵，然而，足以展現這三項特徵的基石便是豐富的 KCC。建立在這樣的 KCC 之上，他便能夠根據對學生數學學習的了解(KCS)，選擇數學概念合適的表徵或者調整數學教材的內容(SCK)，以及，調整數學教學的順序或在例題上做特別的安排(KCT)，這說明了 KCC 滲透於他的 MKT 架構中。此外，李師的數學教學多以學生的感受或學習為中心考量，他希望她們沒有負擔的學習數學，因此在表徵或者講法上，會選擇學生最容易理解的方式來呈現；或者，依據對學生數學學習的了解，特意安排講義的例題。這些是 KCS 影響了 SCK 以及 KCT，但是，這種彼此間的相互作用在訪談中比較有機會被引出。同時這也說明了，李師 MKT 架構中不同領域的數學知識具有流通性，時而 KCC 流通至 KCT，時而 SCK 流通至 KCT，時而 KCS 流通至 SCK。所以，「教學用的數學知識(MKT)」是一體的，難以單一切割論述，而且彼此間的邊界是模糊的(相互流通的)。

第二節　接續研究的建議

本節將依據 MKT 和 PUFM 的關係，以及針對李師所發展的高中數學教學觀察系統，和高中數學教師的專業發展，提出幾個可以接續研究的方向。

一、 MKT 與 PUFM 的關係

本研究的研究目的為，探討資深高中數學教師的數學教學實作知識，然而，個人無法預先設想會收集到哪些資料，以及資料所呈現的特性，在研究的過程中，只能邊摸索、邊探究，並邊紀錄。第四章的研究結果顯示，李師所展現的PUFM 主要特徵，而幾個數學教學實例也說明了 MKT 和 PUFM 的差異。在研究初期，尚未分析教學影片之前，個人可明顯地感受到李師展現出 PUFM 所具有的深度、廣度和透徹性，然而，在對教學影片做完編碼後，個人欲對編碼結果做更進一步解釋時卻發現到，若只從 PUFM 的觀點，無法為李師的數學教學提出完整的解釋，必須引入 MKT 的某些元素。個人藉由這些研究的結果，試著表徵李師 PUFM 和 MKT 的可能關係圖，請參見下圖 5-1。

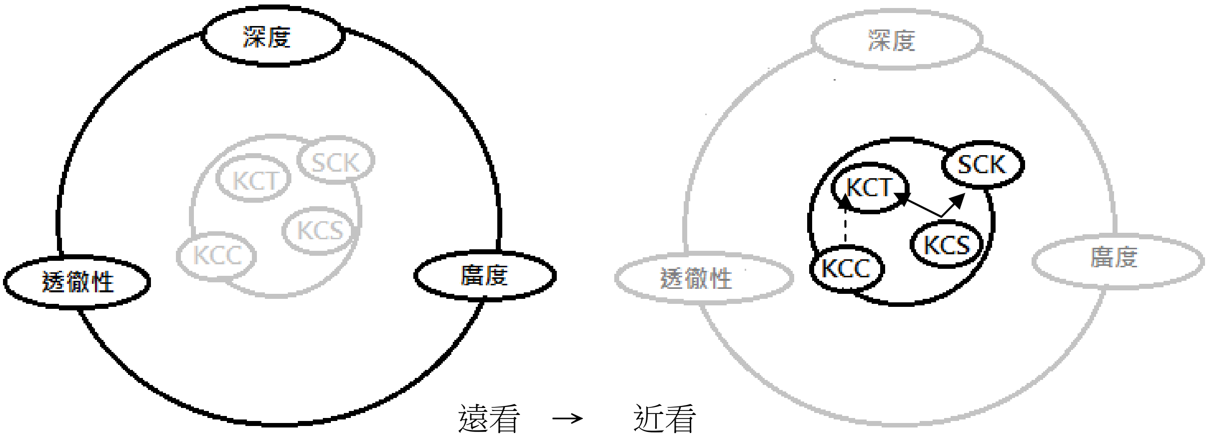

圖 5-1：李師 PUFM 和 MKT 的可能關係圖示

個人發現，李師的數學教學乍看之下傾向 PUFM(外圈)，然而，當進一步分析時，卻可看到一些 MKT 的內涵(內圈)，其中，SCK、KCC 和 PUFM 的特徵較為相近，KCC 較凸顯「透徹性」的特徵，SCK 則較凸顯「深度」和「廣度」的特徵，而 KCS 和 KCT 與 PUFM 較為無關。以李師數學教學的 MKT 內涵而言，KCC 對 KCT 的影響多為內隱的(使用虛線箭頭)，而 KCS 對 KCT 和 SCK 則是有

時外顯有時內隱。兩者之間並非包含關係，反而如同鏡頭的遠(外圈)和近(內圈)，故李師主要是 PUFM 取向的高中數學教師，同時也呈現部份 MKT 的樣貌。

不同的個案教師會呈現不同的數學知識樣貌，有的教師可能是傾向 MKT，但是，當進一步分析卻帶有 PUFM 的影子(如圖 5-2)，也可能兩者並沒有何者特別突出，卻有共通之處(如圖 5-3)。這些是未來研究者可以延續深究的方向，或許也能夠試著描繪出大部分台灣資深高中數學教師所呈現的關係圖示。

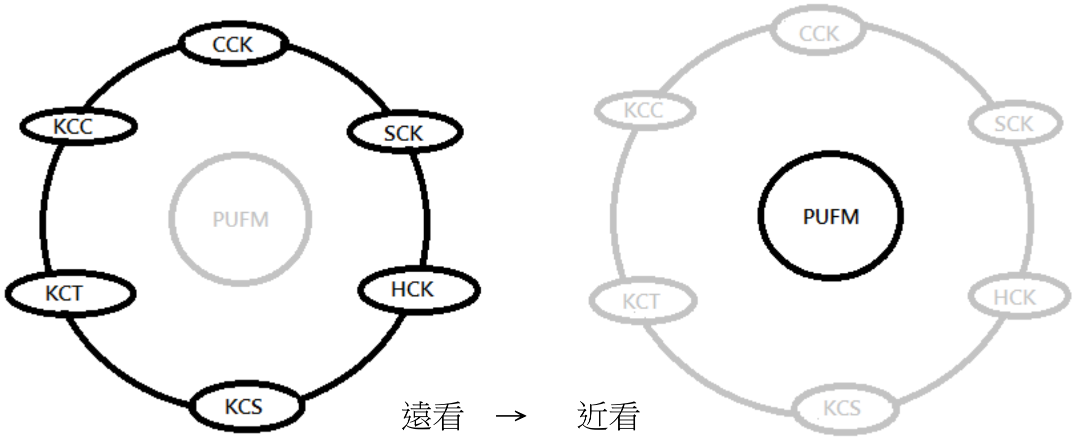

圖 5-2：遠看似 MKT，近看卻有 PUFM 元素的關係圖示

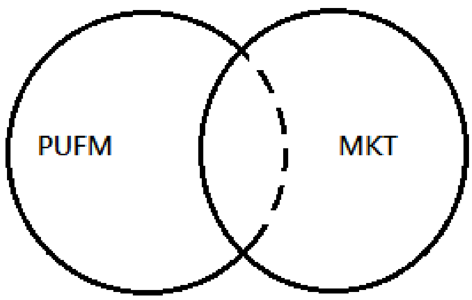

圖 5-3：同時展現 MKT 和 PUFM 的關係圖示

二、 高中數學教學觀察系統的發展

從第三章的討論中發現，LMT (2006)原先的 MQI 系統並不完全符合李師的

高中數學教學。這也說明了，台灣資深高中數學教師與美國國小數學教師，在不同的文化背景、教育政策、家長與社會的期待，以及自我專業的發展等等的因素之下，造成了數學教學實作知識的差異。在對編碼做增加或刪減的過程中，或許能夠反映出台灣高中數學教師特有的教學特色，甚至，可以試著找到一套屬於台灣高中數學教學文化的 MQI 系統。在研究過程中，個人曾經面對一個李師的教學片段，無法立即找到合適的編碼。個人卻相信，這樣的數學教學手法是相當常見的，特別是，當教師在引入數學公式或者數學定義的時候。例如，教師想帶領學生使用 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，可能會先藉用 $(3+4)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 4 + 4^2 = 49 = 7^2$ 來說明或引入，此時強調的就是，數字與符號(或定義)的連結。若是編碼系統中納入此編碼，並觀察它發生的情境以及頻率，或許可以用來判斷是否這就是台灣高中數學教師的一種教學特色。

在與另一位獨立登錄者的討論過程中發現，數學描述與數學解釋時常會有模糊不清之處。在本研究的登錄程序中，數學描述與數學解釋只能擇一，倘若可同時選取，或許能夠減少這樣的情況發生。或者，可以嘗試將它們再做細分，例如，數學描述可分為帶有數學解釋的數學描述、不帶數學解釋的數學描述，或數學解釋分為帶有數學描述的數學解釋、不帶數學描述的數學解釋。如此一來，在第三章造成低信度的「直接使用數學定義演示例題」，則可被歸類在帶有數學解釋的數學描述中。在概念連結的部分，亦可再細分為橫向連結與縱向連結，有助於研究者從數學教學觀察系統的結果中，清楚地掌握到數學教師所展現的連結類型。縱向連結可以特別反映出 MKT 中的 KCC，或者 PUFM 中一致性與基本概念的數學教學特徵；橫向連結可以特別反映 PUFM 中多重觀點的數學教學特徵。

此外，本研究的信度檢驗為個人先將課堂的分析片段切好後，再交給另一位獨立登錄者，故分析單位為個人所決定，並不會產生不一致的情形。未來可嘗試將信度檢驗分為兩個步驟，首先，先各自決定好分析片段，倘若遇到分析片段不

一致的情形，研究者必須決定能夠接受的誤差範圍，再開始對教學影片作分析，最後計算出 K 值。個人認為，這是個具有挑戰性的嘗試，也希望本研究的結果，有助於提昇高中數學教學觀察系統的品質與實用性，做為發展或者檢測的工具。

三、 高中數學教師專業發展的啟示

猶記李師在訪談中曾說「老師要多讀點書」，對李師而言，書的類型不僅包含高中數學課程內容，也包含了微積分這類的大學用書，以及國內外數學競試的考題。在個人研究李師數學教學的過程中，深深地感受到「知識就是力量」。他豐富的課程知識以及學科知識，有助於他編排數學教學的內容或者講義的例題，以及處理數學教學實作中所產生的不確定性。此外，他仔細觀察學生的學習狀態，了解她們在數學學習上的概念迷思和常犯的數學錯誤，建立在這樣的了解上，他能夠預先在數學教學內容或者講義中做合適的安排，加以改善或者提醒。

初任數學教師由於數學教學的知識結構尚未定型，而且，尚處於摸索與熟悉高中數學課程內容的階段，可以藉由多方閱讀，強化自身的課程知識或者學科知識。同時，應培養對學生數學學習的敏銳度，提昇與學生學習相關的知識，避免教師的預設教學軌道與學生的預設學習軌道無法接合，而降低了數學學習的成效。資深數學教師的數學教學知識結構已呈現穩定的狀態，然而，近年來數學課程內容與課程綱要有些許的變動，某些新的數學概念被納入數學教科書中。在與李師訪談的過程中個人發現，李師不僅了解這些變動，而且，為了順應它們還費心閱讀與準備數學教材。所以，資深數學教師的數學教學知識結構應該隨學校課程轉換而彈性的調整，以符合學生數學學習的新需求。更重要的是，資深數學教師不能害怕或抗拒這樣的轉變，應當要持續地學習和充實自我，讓既有的數學教學知識結構能與新的元素連通。如果，資深數學教師能夠同時發展 MKT 和 PUFM，那真是一件再美好不過的事了！

參 考 文 獻

中文部分：
1. 林清山(1992)。**心理與教育統計學**。台北：東華書局。
2. 范良火(2003)。**教師教學知識發展研究**。上海市：華東師範大學出版社。
3. 金鈴(2009)。**資深高中數學教師 MKT 的初探研究**。台北市：國科會。
4. 許秀聰(2005)。**一位資深高中數學教師重構教學概念的行動研究**。國立台灣師範大學碩士論文，台北市。
5. 黃凱旻(2002)。**一個輔導中學數學實習教師教學概念轉變的行動研究**。國立台灣師範大學碩士論文，台北市。
6. 崔懷芝。**量表信度的測量：kappa 統計量之簡介**。查詢日期：99 年 10 月 1 日，檢自 http://www2.cmu.edu.tw/~biostat/online/teaching_corner_011.pdf。
7. 饒見維(1996)。**教師專業發展－理論與實際**。台北市：五南。
8. Bogdan, R. C., ＆Biklen, S. K. (2001)。**質性教育研究理論與方法**(黃光雄主譯)。嘉義市：濤石文化。(1998)
9. Strauss, A., ＆Corbin, J. (2001)。**紮根理論研究方法**(吳芝儀、廖梅花譯)。嘉義市：濤石文化。(1998)
10. Yin, R. K. (2001)。**個案研究法**(尚榮安譯)。台北市：弘智文化。(1994)

英文部分：
1. An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in china and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 145-172.
2. Ball, D. L. (1988). *Knowledge And Reasoning in Mathematical Pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, Michigan. (博士論文)
3. Ball, D. L. (1989). Teaching mathematics for understanding: What do teachers need to know about the subject matter. *National Center for Research on Teacher Education*. East Lansing.
4. Ball, D. L. (1990a). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90*(4), 449-466.
5. Ball, D. L., ＆Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teaching: Knowing and using mathematics. *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 83-104). London：Ablex Publishing.
6. Ball, D. L., ＆Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical future. Paper presented on a keynote address at *the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik* held in Oldenburg, Germany, March 1-4, 2009.

7. Ball, D. L., Lubienski, S. T., ＆Mewborn, D. S. (2001). Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers' Mathematical Knowledge. In Virginia, Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching Edition* (4th ed.) (pp. 433-456). Washington D.C. : American Educational Research Association.
8. Ball, D. L., Thames, M. H., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J., ＆Phelps, G. (2009). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Psychology of Mathematics Education, 33*, 1-98.
9. Ball, D. L., Thames, M. H., ＆Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.
10. Barnes, C. (2002). *Standards reform in high-poverty schools: Managing conflict and building capacity.* New York: Teachers College Press.
11. Begle, E. G. (1979). Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of the empirical literature. Washington, DC: Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics.
12. Brophy, J. E. (1991). Conclusion to advances in research on teaching, Vol. 2: Teachers' knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice. In J. E. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction* (pp. 347-362). Greenwich, CT: JAI Press.
13. Brown, J. S., Collins, A., ＆Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32-42.
14. Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., ＆Carey,D. A. (1988).Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 29-37.
15. Cochran, K. E., DeRuiter, J. A., ＆King, R. A. (1993). Pedagogical content knowledge: An integrated model for teacher preparation, *Journal of Teacher Education, 44*, 263-272.
16. Cohen, D. K., ＆Ball, D. L. (1999). *Instruction, capacity, and improvement. CPRE Research Report Series (RR-043)*. Philadelpfia: Consortium for Policy Research in Education.
17. Cooney, T. J. (1994). Teacher education as an exercise in adaptation. In D. B. Aichele, ＆A. F. Coxford (Eds.), *Profession development: 1994 yearbook* (pp. 9-22). Reston, VA：National Council of Teachers of Mathematics.
18. Dewey, J. (1997). *Democracy and education*. New York: The Free Press. (Original work published 1916)
19. Dunkin, M. J., ＆Biddle, B. J. (1974). *The Study of Teaching*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.
20. Eisenberg, T. A. (1977). Begle revisited: Teacher knowledge and student achievement in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 8,*

216-222.

21. Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. New York: Nichols.
22. Etzioni, A. (Ed.). (1969). *The semi-professions and their organization: Teachers, nurses, and social workers.* New York: Free Press.
23. Even, R., ＆Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics, 29,* 1-20.
24. Fennema, E., ＆Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York：Macmillan.
25. Frick, T., ＆Semmel, M. I. (1978). Observer agreement and reliabilities of classroom observational measures. *Review of Educational Research, 48*(1), 157-184.
26. Gilbert, J. K., Boulter, C. J., ＆Elmer, R. (2000). Positioning models in science education and in design and technology education. In J. K. Gilbert, ＆C. J. Boulter (Eds.), *Developing Models in Science Education* (pp. 3-17). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
27. Gilbert, W., Hirst, L., ＆Clary, E. (1987). The NCA Workshop's taxonomy of professional knowledge. In, Jones, D. W. (Ed.). *Professional Knowledge Base: NCATE Approval. Fortieth Annual Report of the North Central Association Teacher Education Workshop* (pp. 38-57). Flagstaff, AZ: University of North Arizona.
28. Goodland, J. I. (1984). *A place called school*. New York: McGraw-Hill.
29. Hansen, D. T. (2001). Teaching as a moral activity. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Edition* (4th ed.) (pp. 826-857). New York: Macmillan.
30. Herriott, R. E., ＆Firestone, W. A. (1983). Multisite qualitative policy research: Optimizing description and generalizability. *Educational Research*, *12*, 14-19.
31. Hill, H. C., ＆Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal of Research in Mathematics Education*, *35*, 330-351.
32. Hill, H. C., Ball, D. L., ＆Schilling, S. G. (2008).Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,39*(4),372-400.
33. Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., ＆Ball, D. L. (2008).Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: an exploratory study. *Taylor ＆ Francies*

Group, 26, 430-511.

34. Hill, H. C., Rowan, B., ＆Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement**.** *American Educational Research Journal ,42,* 371-406.
35. Holmes Group, (1986). *Tomorrow's teachers*. East Lansing: Author.
36. Lampert, M., ＆Ball, D. L. (1999). Aligning teacher education with contemporary K-12 reform visions. In G. Sykes, ＆L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 33-53). San Francisco: Jossey Bass.
37. Lappan, G., ＆Theule-Lubienski, S. (1994). Training teachers or educating professionals? What are the issues and how are they being resolved? In: Robitaille, D. F., Wheeler, D. H., ＆Kieran, C. (Eds.). Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education. Sainte-Foy, Quebec: Les Presses de 'Universite Laval, 249-261.
38. Learning Mathematics for Teaching (LMT) Project, *Learning Mathematics for Teaching (LMT) Project*. Retrieved October 20, 2009 from http://sitemaker.umich.edu/lmt/faq_about_video_codes
39. Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K., ＆Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. In J. E. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction* (2), pp. 87-113. Greenwich, CT: JAI Press.
40. Leinhardt, G., ＆Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology, 77*, 247-271.
41. Ma, L. (1996). *Profound Understanding of Fundamental Mathematics: What is it ,why is it important, and how is it attained?* Unpublished doctoral dissertation, Stanford University, Stanford. (博士論文)
42. Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
43. Maccoby, E., ＆Maccoby, N. (1954). The interview: A tool of social science. In G. Lindzey (Ed.), *Handbook of social psychology (vol. 1)*(pp. 449-487). Cambridge, MA: Addison-Wesley.
44. McDiarmid, G. W., ＆Clevenger-Bright, M. (2008). Rethinking teacher capacity. *Handbook of Research on Teacher Education Edition (3)*, pp.134-156.
45. McEwan, H., ＆Bull, B. (1991). The pedagogic nature of subject matter knowledge. *American Educational Research Journal, 28*, 316-334.
46. McIntyre, D. I. (1980). Systematic observation of classroom activities. *Educational Analysis, 2*(2), 3-30.
47. National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for*

teaching mathematics. Reston, VA: Author.

48. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.
49. Noddings, N. (1992). Professionalization and mathematics teaching. In D. A. Grovws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 197-208). New York: Macmillan.
50. Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park, CA: Sage.
51. Peterson, P. L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational Researcher, 17*(5), 5-14.
52. Quinton, A. (1967). Knowledge and belief. *The Encyclopedia of Philosophy, 4,* 345-352.
53. Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. In P. Sullivan, &T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* Vol. 1 (pp. 273-298). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
54. Schwab, J. J. (1978). Educational and the structure of the disciplines. In I. Westbury, ＆N. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education* (pp. 167-183). Chicago: University of Chicago. (Original work published 1961)
55. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2)*,* 4-14.
56. Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*.* *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.
57. Shulman, L. S. (2005). *Signature pedagogies.* Retrieved October 1, 2010, from http://www.hub.mspnet.org/index.cfm/11172.
58. Shulman, L. S. (2005).*Teacher education does not exist*. Retrieved October 1, 2010, from http://www.ed.stanford.edu/suse/news-bureau/educator-newsletter.html.
59. Smith, D. E. (1987). *The everyday world as problematic: A feminist sociology*. Boston: Northeastern University Press.
60. Sockett, H. T. (1987). Has Shulman got the strategy right? *Harvard Education Review, 57*, 208-219.
61. Steinberg, T., Haymore, J., ＆Marks, R. (1985). *Teachers' knowledge and structuring content in mathematics.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.
62. Stevens, C., & Wenner, G. (1996). Elementary preservice teachers' knowledge and beliefs regarding science and mathematics. *School Science and Mathematics.*

96(1), 2-9.

63. Znaniecki, F. (1965). *The social role of the man of knowledge.* New York: Octagon Books, Inc.

附錄一：數學教學觀察系統

附錄一(1)：LMT(Learning Mathematics for Teaching project, 2006)的 MQI 系統

VIDEOCODES: MATHEMATICAL QUALITY OF INSTRUCTION

Directions: Stop tape every 5 minutes and check mathematical events.

I. Instructional formats and content													
	A. Format for segment			B. Content topic									
Clips	a. whole group	b. small group/ partner	c. individual	a. Number concepts	b. Operations	c. Geometry	d. Measurement	e. Probability	f. Data	g. Discrete math/Combinatorics	h. Patterns, functions, and algebra	i. Money, time, and calendar	j. Percent, ratio, and proportion
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													

C. Lesson/segment type				
Clips	a. review, warm up or homework	b. Introducing major task	c. Student work time	d. Synthesis or closure
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

附錄一(1)(續)：LMT(Learning Mathematics for Teaching project, 2006)的 MQI 系統

	II. Knowledge of mathematical terrain of enacted lesson																																															
	a. Conventional notation (mathematical symbols)				b. Technical language (mathematical terms and concepts)				c. General language for expressing mathematical ideas (overall care and precision with language)				d. Selection of numbers, cases & contexts for mathematical ideas				e. Selection of correct manipulatives, and other visual and concrete models to represent mathematical ideas				f. Multiple models				g. Makes links among any combinations of symbols, concrete pictures, diagrams, etc.				h. Mathematical descriptions (of steps)				i. Mathematical explanations (giving mathematical meaning to ideas or procedures)				j. Mathematical justifications				k. Development of mathematical elements of the work (i.e., moving the math along)				l. Computational errors or other mathematical oversights			
	P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP	
Clips	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I
1																																																
2																																																
3																																																
4																																																
5																																																
6																																																
7																																																
8																																																
9																																																
10																																																

B. Overall level of teacher's knowledge of mathemat		
Low	Medium	High

附錄一(1)(續)：LMT(Learning Mathematics for Teaching project, 2006)的 MQI 系統

	III. Use of mathematics with students																															
	a. Classroom work is connected to mathematical idea or procedure				b. Deploys manipulatives and other visual and concrete models to represent mathematical ideas				c. Elicits student description				d. Elicits student explanation				e. Records the mathematical work of the lesson				f. Interprets student productions				g. Uses students' errors				h. Launch of task/problems			
	P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP		P		NP	
Clips	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I	A	I
1																																
2																																
3																																
4																																
5																																
6																																
7																																
8																																
9																																
10																																
11																																
12																																
13																																
14																																

附錄一(1)(續)：LMT(Learning Mathematics for Teaching project, 2006)的 MQI 系統

IV. Mathematical features of the curriculum and the teacher's guide																																				
	A. Mathematical features of the curriculum																																			
	a. Conventional notation (mathematical symbols)			b. Technical language (mathematical terms and concepts)			c. General language for expressing mathematical ideas (overall care and precision with language)			d. Selection of numbers, cases & contexts for mathematical ideas			e. Selection of manipulatives, and other visual and concrete models to represent mathematical ideas			f. Multiple models			g. Makes links among any combination of symbols, concrete pictures, diagrams, etc			h. Mathematical descriptions (of steps)			i. Mathematical explanations– – giving mathematical meaning to ideas or procedures			j. Mathematical justifications			k. Development of mathematical elements of the work (i.e., moving the mathematics along)			l. Computational errors or other mathematical oversights		
	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP
Name of curriculum	A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I	

B. Mathematical features of the teacher's guide																																						
a. Mathematical point of the lesson			b. Mathematical goal of the lesson			c. Choice/benefit of notation and recording			d. Choice/benefit of language			e. Choice/benefit of examples or contexts			f. Additional problems to scale up or scale down as needed			g. Choice/benefits of representation			h. How to get the model working			i. How to use multiple methods, explanations, or ways of thinking			j. What students might have difficulty with and how to respond			k. What students might say, along with what to say/ask/do if the student says a particular			l. Ways to be sensitive to issues of culture, diversity, or language			m. Ways to check for student understanding		
P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP	P		NP
A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I		A	I	

C. Content topic of curriculum									
a. Number concepts	b. Operations	c. Geometry	d. Measurement	e. Probability	f. Data	g. Discrete math/ Combinatorics	h. Patterns, functions, and algebra	i. Money, time and calendar	j. Percent, ratio, and proportion

附錄一(1)(續)：LMT(Learning Mathematics for Teaching project, 2006)的 MQI 系統

		V. Use of mathematics to teach equitably																					
	a1. Real-world problems or examples not present	a2. Real-world problems or examples present				b. Explicit student tasks and work		c. Explicit talk about themeaning and use of mathematical language		d. Explicit talk about ways of reasoning		e. Explicit talk about mathematical practices		f. Instructional time is spent on mathematics		g. Teacher encourages diverse array of mathematical competence		h. Teacher emphasizes student effort and conveys message that effort will eventually pay off		i. Teacher encourages and gives opportunities for students to work autonomously		j. Expressed expectation that everyone will be able to do the work	
Clips	NP*	S		I		P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP
		a	i	a	i																		
1																							
2																							
3																							
4																							
5																							
6																							
7																							
8																							
9																							
10																							
11																							
12																							
13																							
14																							

*check if not present, otherwise leave blank and code a2.

附錄一(1)(續)：LMT(Learning Mathematics for Teaching project, 2006)的 MQI 系統
(中文對照)

主類別	次類別	
教學形式和內容	片段形式	1.全體活動　2.小組活動　3.個人活動
	教學內容	1.數的概念　2.運算　3.幾何 4.測量　5.機率　6.資料 7.離散數學或組合數學 8.樣式、函數及代數 9.金錢、時間和行事曆 10.百分比、比率和比例
	課程形式	1.回顧、暖身或回家作業 2.介紹主要工作 3.學生操作時間 4.綜合或結尾
教學活動中數學領域的知識	1.常用符號（數學符號） 2.技術語言（數學名詞及概念） 3.一般語言為了表達數學概念（全面的關心及使用語言的精確性） 4.數學概念的數字、情況及脈絡的選擇 5.表達數學概念對正確的操作物及其他視覺和具體模式的選擇 6.多樣的模式 7.在任何符號、具體圖案、圖表等等的結合間做連結 8.數學描述（如步驟描述） 9.數學解釋（對概念或步驟給予數學意義） 10.數學的驗證 11.工作中數學元素的發展（將數學向前推移） 12.計算錯誤或其他數學疏忽	
對學生使用的數學	1.教室工作連結到數學概念或步驟 2.展現操作物及其他視覺和具體模式去表達數學概念 3.引出學生描述 4.引出學生解釋 5.記錄課程中的數學工作 6.解釋學生成果 7.使用學生的錯誤 8.離開工作或問題	
課程及教師帶領的數學特徵	A：課程的數學特徵	1.常用符號（數學符號） 2.技術語言（數學名詞及概念） 3.一般語言為了表達數學概念（全面的關心及使用

		語言的精確性） 4.數學概念的數字、情況及脈絡的選擇 5.表達數學概念對正確的操作物及其他視覺和具體模式的選擇 6.多樣的模式 7.在任何符號、具體圖案、圖表等等的結合間做連結 8.數學描述（如步驟描述） 9.數學解釋（對概念或步驟給予數學意義） 10.數學的驗證 11.工作中數學元素的發展（將數學向前推移） 12.計算錯誤或其他數學疏忽
	B：教師帶領的數學特徵	1.課程的數學要點 2.課程的數學目標 3.標記和記錄的選擇或好處 4.語言的選擇或好處 5.範例或脈絡的選擇或好處 6.額外的問題視需求衡量增減 7.表徵的選擇或好處 8.如何讓模式運作 9.如何使用多樣的方法、解釋或思考方式 10.學生可能會遇到的困難以及如何回應 11.學生可能會說什麼伴隨著要說、問或做什麼如果學生問一個特別的事情 12.對於文化、差異或語言議題敏感的方式 13.確認學生了解的方式
	C：課程的內容主題	1.數的概念 2.運算 3.幾何 4.測量 5.機率 6.資料 7.離散數學或組合數學 8.樣式、函數及代數 9.金錢、時間和行事曆 10.百分比、比率和比例
數學的使	1.真實世界的問題或範例的表示	

用為了教學的平等	2.明確的數學任務及工作 3.明確的談論意義以及使用數學語言 4.明確的談論推理方式 5.明確談論數學實作 6.教學時間在數學上的花費 7.教師鼓勵對數學能力不同的配置 8.教師強調學生的努力並傳達出努力終將會有收穫的訊息 9.教師鼓勵並給予學生機會去自主工作 10.表達希望每個人都能夠做好工作

附錄一(2)：本研究的數學教學觀察系統 (修改自(LMT, 2006))

<table>
<tr><th>主類別</th><th colspan="2">次類別</th></tr>
<tr><td rowspan="3">教學形式和內容</td><td>教學形式</td><td>1.全體活動　2.小組活動</td></tr>
<tr><td>教學內容</td><td>1.幾何
2.離散
3.機率</td></tr>
<tr><td>教學的進行方式</td><td>1.概念回顧或檢討家庭作業
2.介紹主要的工作或概念
3.教師示範例題
4.做總結
5.學生操作
6.其他</td></tr>
<tr><td>教學活動中數學領域的知識</td><td colspan="2">1.數學的符號
2.數學的詞彙或其定義
3.表示數學概念使用的語言
4.為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇
5.選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念
6.多重模型
7.對符號、具體的圖像及圖表做連結
8.數學描述
9.數學解釋
10.數學證明
11.數學驗算
12.計算錯誤或其他數學的忽視
13.多觀點
14.比較
15.分析
16.概念連結
17.提示教材地位</td></tr>
<tr><td>對學生使用的數學</td><td colspan="2">1.使用學生錯誤
2.引出學生回答
3.使用學生成果
4.使用具體操作物說明數學概念
5.回答學生問題</td></tr>
</table>

附錄一(3)：數學教學觀察系統登錄單

日期	教學形式		教學內容			教學的進行方式					
	全體	個人活動	幾何	離散	機率	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											

附錄一(3) (續)：數學教學觀察系統登錄單

	教學活動中數學領域的知識																
	數學的符號	數學的詞彙或其定義	表示數學概念使用的語言	為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	多重模型	對符號、具體的圖像及圖表做連結	數學描述	數學解釋	數學證明	數學驗算	計算錯誤或其他數學的忽視	多觀點	比較	分析	概念連結	提示教材地位
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	

附錄一(3) (續)：數學教學觀察系統登錄單

對學生使用的數學					
	使用學生錯誤	引出學生回答	使用學生成果	使用具體操作物說明數學概	回答學生問題
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

附錄一(4)：數學教學觀察系統登錄單劃記範例

日期	教學形式			教學內容					教學的進行方式					
	全體	小組活動	個人活動	代數	幾何	機率	離散	分析	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他
(1)0000~0247	v				v				v					
(2)0247~0527	v				v					v				
(3)0527~0800	v				v				v					
(4)0800~1312	v				v					v				
(5)1312~1431	v				v							v		
(6)1431~1900	v				v					v				
(7)1900~2106	v				v							v		
(8)2106~2506	v				v						v			
(9)2506~2821	v				v						v			
(10)2821~3550	v				v					v				
(11)3550~3647	v				v							v		
(12)2647~4033	v				v					v				
(13)4033~4348	v				v						v			
(14)4348~4717	v				v							v		

附錄一(4) (續)：數學教學觀察系統登錄單劃記範例

教學活動中數學領域的知識																	
	數學的符號	數學的詞彙或其定義	表示數學概念使用的語言	為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	多重模型	對符號、具體的圖像及圖表做連結	數學描述	數學解釋	數學證明	數學驗算	計算錯誤或其他數學的忽視	多觀點	比較	分析	概念連結	提示教材地位
(1)0000~0247					v	v	v	v								v	
(2)0247~0527					v		v	v						v			
(3)0527~0800				v	v	v			v					v			
(4)0800~1312				v	v	v			v					v		v	
(5)1312~1431								v									
(6)1431~1900		v		v	v	v			v					v	v	v	
(7)1900~2106		v			v			v									
(8)2106~2506				v	v				v						v		
(9)2506~2821					v	v		v			v	v		v			
(10)2821~3550				v	v		v			v				v			
(11)3550~3647								v									
(12)2647~4033		v		v	v	v		v		v				v			
(13)4033~4348				v	v	v			v								
(14)4348~4717			v		v			v							v	v	

附錄一(4) (續)：數學教學觀察系統登錄單劃記範例

	對學生使用的數學				
	使用學生錯誤	引出學生回答	使用學生成果	使用具體操作物說明數學概念	回答學生問題
(1)0000~0247					
(2)0247~0527					
(3)0527~0800					
(4)0800~1312					
(5)1312~1431					
(6)1431~1900					
(7)1900~2106					
(8)2106~2506	v	v	v		
(9)2506~2821					
(10)2821~3550					
(11)3550~3647					
(12)2647~4033					
(13)4033~4348					
(14)4348~4717					

附錄一(5)：2009 年 11 月 6 日登錄結果

註：由於此筆資料量繁多，故在此僅呈現做為信度檢驗那三堂課的登錄結果。

1106	教學形式		教學內容			教學的進行方式					
	全體	個人活動	幾何	離散	機率	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他
(1)0000~0155	v										v
(2)0155~0704	v		v			v					
(3)0704~1055	v		v				v				
(4)1055~1350	v		v				v				
(5)1350~1734	v		v					v			
(6)1734~1918	v		v						v		
(7)1918~2546	v		v					v			
(8)2546~2759	v		v			v					
(9)2759~3059	v		v					v			
(10)3059~3204	v		v					v			
(11)3204~3442	v		v						v		
(12)3442~3923	v		v					v			
(13)3923~4424	v		v						v		

附錄一(5) (續)：2009 年 11 月 6 日登錄結果

	教學活動中數學領域的知識																
	數學的符號	數學的詞彙或其定義	表示數學概念使用的語言	爲了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數	多重模型	對符號、具體的圖像及圖表做連結	數學描述	數學解釋	數學證明	數學驗算	計算錯誤或其他數學的忽視	多觀點	比較	分析	概念連結	提示教材地位
(1)0000"01 55																	
(2)0155"07 04				v	v	v				v			v				v
(3)0704"10 55		v	v	v	v	v			v	v							v
(4)1055"13 50		v		v					v	v			v	v			
(5)1350"17 34		v		v	v	v			v				v				
(6)1734"19 18								v					v	v			v
(7)1918"25 46				v	v			v	v		v	v	v			v	v
(8)2546"27 59					v	v			v								
(9)2759"30 59				v				v									
(10)3059"3 204				v				v								v	v
(11)3204"3 442								v					v	v			v
(12)3442"3 923				v	v		v	v	v			v	v		v		
(13)3923"4 424				v	v			v					v	v	v		

附錄一(5) (續)：2009 年 11 月 6 日登錄結果

	對學生使用的數學				
	使用學生錯誤	引出學生回答	使用學生成果	使用具體操作物說明數學概念	回答學生問題
(1)0000~0155					
(2)0155~0704					
(3)0704~1055					
(4)1055~1350					
(5)1350~1734					
(6)1734~1918					
(7)1918~2546					
(8)2546~2759				v	
(9)2759~3059					
(10)3059~3204					
(11)3204~3442					
(12)3442~3923					
(13)3923~4424					

附錄一(6)：2010 年 4 月 27 日登錄結果

427	教學形式		教學內容			教學的進行方式					
	全體	個人活動	幾何	離散	機率	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他
(1)0000~0310	v										v
(2)0310~0520	v			v		v					
(3)0520~0729	v			v				v			
(4)0729~1147	v			v			v				
(5)1147~1254	v			v				v			
(6)1254~1547	v			v			v				
(7)1547~1857	v			v				v			
(8)1857~2121	v			v				v			
(9)2121~2256	v			v				v			
(10)2256~2550	v			v					v		
(11)2550~3132	v			v		v					
(12)3132~3439	v			v		v					
(13)3439~3902	v			v					v		
(14)3902~4527	v			v				v			
(15)4527~4644	v										v

附錄一(6) (續)：2010 年 4 月 27 日登錄結果

	數學的符號	數學的詞彙或其定義	表示數學概念使用的語言	為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數	多重模型	對符號、具體的圖像及圖表做連結	數學描述	數學解釋	數學證明	數學驗算	計算錯誤或其他數學的忽視	多觀點	比較	分析	概念連結	提示教材地位
(1)0000~0310																	
(2)0310~0520				v					v								
(3)0520~0729				v				v									
(4)0729~1147					v		v		v				v				
(5)1147~1254				v				v									
(6)1254~1547	v	v							v				v	v			
(7)1547~1857				v				v					v		v		
(8)1857~2121								v	v				v	v			
(9)2121~2256								v	v					v			
(10)2256~2550				v				v	v						v		
(11)2550~3132				v	v				v			v		v	v	v	
(12)3132~3439				v	v				v						v		
(13)3439~3902									v					v	v		
(14)3902~4527				v					v				v		v		
(15)4527~4644																	

附錄一(6) (續)：2010 年 4 月 27 日登錄結果

對學生使用的數學	使用學生錯誤	引出學生回答	使用學生成果	使用具體操作物說明數學概念	回答學生問題
(1)0000~0310					
(2)0310~0520					
(3)0520~0729					
(4)0729~1147		v			
(5)1147~1254					
(6)1254~1547		v			
(7)1547~1857					
(8)1857~2121					
(9)2121~2256					
(10)2256~2550		v			
(11)2550~3132					
(12)3132~3439					
(13)3439~3902					
(14)3902~4527					
(15)4527~4644					

附錄一(7)：2010 年 6 月 2 日登錄結果

602	教學形式		教學內容			教學的進行方式					
	全體	個人活動	幾何	離散	機率	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他
(1)0000~0144	✓										✓
(2)0144~0244	✓				✓		✓				
(3)0244~0821	✓				✓			✓			
(4)0821~1341	✓				✓		✓				
(5)1341~1631	✓				✓		✓				
(6)1631~2053	✓				✓			✓			
(7)2053~2402	✓				✓			✓			
(8)2402~2511	✓				✓			✓			
(9)2511~2639	✓				✓			✓			
(10)2639~2824	✓				✓			✓			
(11)2824~3502	✓				✓			✓			
(12)3502~3637	✓										✓
(13)3637~4124	✓				✓			✓			
(14)4124~4311		✓			✓					✓	
(15)4311~4441	✓										✓

附錄一(7) (續)：2010 年 6 月 2 日登錄結果

	教學活動中數學領域的知識																
	數學的符號	數學的詞彙或其定義	表示數學概念使用的語言	爲了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	選擇正確的操作物或可見的具體模型	多重模型	對符號、具體的圖像及圖表做連結	數學描述	數學解釋	數學證明	數學驗算	計算錯誤或其他數學的忽視	多觀點	比較	分析	概念連結	提示教材地位
(1)0000~0144																	
(2)0144~0244		v															
(3)0244~0821				v					v				v				
(4)0821~1341				v				v	v			v	v				
(5)1341~1631				v				v									
(6)1631~2053								v				v	v	v			v
(7)2053~2402				v				v					v				
(8)2402~2511								v									
(9)2511~2639									v								
(10)2639~2824								v					v				
(11)2824~3502									v			v	v	v		v	v
(12)3502~3637																	
(13)3637~4124								v	v					v			
(14)4124~4311									v								
(15)4311~4441																	

附錄一(7) (續)：2010 年 6 月 2 日登錄結果

對學生使用的數學					
	使用學生錯誤	引出學生回答	使用學生成果	使用具體操作物說明數學概念	回答學生問題
(1)0000~0144					
(2)0144~0244					
(3)0244~0821					
(4)0821~1341					
(5)1341~1631					
(6)1631~2053					
(7)2053~2402					
(8)2402~2511					
(9)2511~2639					
(10)2639~2824					
(11)2824~3502					
(12)3502~3637					
(13)3637~4124					
(14)4124~4311					
(15)4311~4441					

附錄一(8)：前導階段研究登錄結果總表

	教學形式		教學的進行方式						教學活動中數學領域的知識						
拍攝日期	全體	個人活動	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他	數學的符號	數學的詞彙或其定義	表示數學概念使用的語言	為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	多重模型	對符號、具體的圖像及圖表做連結
10月27日	14	0	2	5	3	4	0	0	0	3	1	7	12	7	3
10月29日	8	2	2	0	4	1	2	1	0	0	2	3	4	3	2
10月30日	12	2	1	3	6	0	2	2	0	2	4	5	7	3	0
11月3日	13	0	1	4	7	0	0	1	0	0	0	8	8	3	2
11月4日	12	1	1	1	5	1	1	4	0	1	1	4	4	3	3
11月5日(1)	5	0	0	3	2	0	0	0	0	1	2	2	4	1	1
11月5日(2)	4	1	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2	0	1
11月6日	13	0	2	2	5	3	0	1	0	3	1	9	7	5	1
11月9日	10	2	2	0	5	1	2	2	0	0	0	5	6	2	1
11月10日	22	2	5	1	8	0	2	8	0	0	1	6	10	5	0
11月11日	18	0	0	1	12	1	0	4	0	0	0	5	6	4	1
11月12日(1)	13	0	0	0	10	0	0	3	0	0	1	5	5	2	1
11月12日(2)	11	0	0	3	4	1	0	3	0	1	3	3	6	3	0
11月13日	13	0	0	0	9	0	0	4	0	0	0	5	8	3	1
11月18日	14	0	8	0	2	0	0	4	0	0	2	8	7	2	1
11月19日(1)	12	0	9	0	0	0	0	3	0	0	0	5	5	1	0
11月19日(2)	14	0	9	0	0	0	0	5	0	0	0	5	3	0	0
11月23日	9	0	8	0	0	0	0	1	0	0	0	3	3	1	0
總計	217	10	10	52	24	83	12	10	46	0	11	18	88	107	48

附錄一(8) (續)：前導階段研究登錄結果總表

拍攝日期	教學活動中數學領域的知識									對學生使用的數學						
	數學描述	數學解釋	數學證明	數學驗算	計算錯誤或其他數學的忽視	多觀點	比較	分析	概念連結	提示教材地位	使用學生錯誤	引出學生回答	使用學生成果	使用具體操作物說明數學概念	回答學生問題	*總片段數*
10月27日	8	5	2	1	1	0	7	3	4	0	1	1	1	0	0	14
10月29日	6	5	0	1	0	1	1	0	1	2	0	1	3	0	0	10
10月30日	10	8	1	2	2	1	2	1	0	4	0	0	2	0	0	14
11月3日	6	5	2	0	5	1	5	0	1	4	0	0	1	0	0	13
11月4日	5	5	0	0	1	4	2	0	3	4	0	1	1	0	0	13
11月5日(1)	2	3	1	0	0	1	3	1	0	2	0	0	0	0	0	5
11月5日(2)	3	1	1	0	2	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	5
11月6日	6	7	3	1	2	8	5	2	2	6	0	0	0	1	0	13
11月9日	4	5	0	2	2	4	5	1	3	4	0	1	0	0	0	12
11月10日	12	7	0	2	1	8	7	1	3	3	0	0	0	0	1	24
11月11日	10	8	0	1	4	5	6	4	0	2	0	0	0	0	0	18
11月12日(1	7	5	0	1	1	4	5	2	3	3	0	1	0	0	0	13
11月12日(2	5	4	0	0	1	4	2	2	0	1	0	0	0	0	0	11
11月13日	6	5	0	1	2	4	1	0	0	1	0	4	1	0	0	13
11月18日	7	5	0	0	5	6	2	1	1	2	0	0	0	0	0	14
11月19日(1	5	4	0	0	3	3	5	1	0	0	0	0	0	0	1	12
11月19日(2	7	1	0	0	2	2	2	0	1	4	0	0	0	0	0	14
11月23日	2	5	0	0	3	1	0	0	0	0	2	1	0	0	1	9
總計	111	88	10	12	37	58	61	19	22	42	3	11	9	1	3	227

附錄一(9)：第一階段研究登錄結果總表

拍攝日期	教學形式		教學的進行方式						教學活動中數學領域的知識						
	全體	個人活動	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他	數學的符號	數學的詞彙或其定義	表示數學概念使用的語言	為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	多重模型	對符號、具體的圖像及圖表做連結
4月27日	15	0	3	1	7	2	0	2	1	1	0	8	1	1	1
4月28日	12	4	0	0	12	0	4	0	0	0	0	6	3	5	1
4月29日	13	2	0	0	7	1	2	5	0	0	0	1	4	0	0
總計	40	6	3	1	26	3	6	7	1	1	0	15	8	6	2

拍攝日期	教學活動中數學領域的知識									對學生使用的數學						
	數學描述	數學解釋	數學證明	數學驗算	計算錯誤或其他數學的忽視	多觀點	比較	分析	概念連結	提示教材地位	使用學生錯誤	引出學生回答	使用學生成果	使用具體操作物說明數學概念	回答學生問題	*總片段數*
4月27日	6	10	0	0	1	5	5	6	1	0	0	3	0	0	0	15
4月28日	7	10	0	1	1	6	4	0	2	3	0	3	0	1	3	16
4月29日	2	6	0	0	3	2	0	2	0	0	0	3	0	0	1	15
總計	15	26	0	1	5	13	9	8	3	3	0	9	0	1	4	46

附錄一(10)：第二階段研究登錄結果總表

	教學形式		教學的進行方式						教學活動中數學領域的知識						
拍攝日期	全體	個人活動	概念回顧或檢討家庭作業	介紹主要的工作或概念	教師示範例題	做總結	學生操作	其他	數學的符號	數學的詞彙或其定義	表示數學概念使用的語言	為了數學概念的數字、例題及脈絡的選擇	選擇正確的操作物或可見的具體模型去表示數學概念	多重模型	對符號、具體的圖像及圖表做連結
6月2日	14	1	0	3	8	0	1	3	0	1	0	4	0	0	0
6月3日	10	1	0	0	8	0	1	2	0	0	0	3	1	0	0
總計	24	2	0	3	16	0	2	5	0	1	0	7	1	0	0

	教學活動中數學領域的知識									對學生使用的數學					
拍攝日期	數學解釋	數學證明	數學驗算	計算錯誤或其他數學的忽視	多觀點	比較	分析	概念連結	提示教材地位	使用學生錯誤	引出學生回答	使用學生成果	使用具體操作物說明數學概念	回答學生問題	*總片段數*
6月2日	6	0	0	3	6	3	0	1	2	0	0	0	0	0	15
6月3日	7	0	0	4	1	3	1	0	0	0	3	0	0	1	11
總計	13	0	0	7	7	6	1	1	2	0	3	0	0	1	26

附錄二：數學教學影片與訪談轉譯稿

註：由於此筆資料量繁多，故僅呈現四個單元第一堂課的教學影片轉譯稿，以及部分訪談轉譯稿。

附錄二(1)：2009 年 10 月 27 日教學影片轉譯稿【2-4 空間平面方程式第一節課】

(clip1)T：我們來上平面方程式這個部分，我剛剛拿到一個這個模型，剛剛看到一個老師走過去，我稍微幫你複習回顧一下前面講過的部分，你稍微想一下，當初我們在正四面體座標化的時後，怎麼把它給座標化？（在黑板上畫直角座標系）第一種想法是把老師手上這一點當成原點，對不對，對不對，那你會想到這一點的座標是不是(1,0,1)對不對？這一點是(1,1,0)，這一點是(0,1,1)，所以我們當初好不容易建立這樣一個正四面體，也就是說把這一點拉到這邊來，這個座標變多少(0,0,0)設它當 A 點，這個 B 的設法是多少(0,1,1)，C 的座標是(1,0,1)，D 的座標變成(1,1,0)，對不對？好啦，我們現在開始想一件事情，譬如說我想求這個平面的方程式，為什麼老師想要求這個平面的方程式呢？我們那時候在上 2-1 一開始的時候，有講到一個公設「空間中不共線的相異三點可以決定一個平面」，可以吧？好，我們現在再來想一下平面方程式你想它會長什麼樣子？

(clip2)T：通常我們在講平面的時候會回想到原來平面上的直線，我想應該是這樣推嘛，一維二維三維這樣推出來的嘛，好，所以我們稍微來想一下喔，如果平面上，我們現在講的是平面上的直線，當初它的方程式長的什麼樣子，是不是 ax+by=c 這個樣子，那早期一點，你們在國中時帶，譬如說通過(1,1)(2,2)那你怎麼帶？是不是把(1,1)帶進去(2,2)帶進去對不對，然後得到 a：b：c 的關係以後，再把它那個位數給去掉，譬如說它是 x-y=0，那就變成 a=a，b=－a，c=0，然後把它給推出來對不對？那你再想三點應該有幾個變數？有人在考慮它應該是形像 ax+by+cz=d，因為當我本身把那三個點帶進去的時候，理論上應該可以把它解出來嘛，所以我們現在回復到跟當初國中一樣笨笨的發現應該怎麼解它，它應當是 b+c=d，對不對，再來啦，用這一點 a+c=d，用這一點帶進去的時候是 a+b=d，那我們從前的方法是把兩個減一減，是不是剛好就「ㄕㄨㄚˋ」了對不對？然後減出來之後得到 a=b，這兩個會得到 b=c，那你大概感覺上 b 就是等於 a 嘛，那其實推出來 a=b=c，而且得到結論 d=2a，所以好像是變成 ax+ay+az=2a，那推出來就變成 x+y+z=2，照理論上可以這樣解出來，那我想這是已經有點太簡單了啦！

(clip3)T：那我們在高中的時候怎麼去講這個概念，當初我們怎麼推的，稍微想一下想一下，這條直線假設是 ax+by=c，我們當初是怎麼找它的法向量，當初是

用這條直線平行 L'，就 ax+by=0，這邊很快可以找到一個座標(0,0)，這邊隨便抓一個點，最快的方法是找到(b,－a)，我們就可以從這個題目上造一個什麼向量，這是不是它的方向向量，對不對，再找一個跟它垂直的向量叫做(a,b)，這個叫做它的法向量，然後這樣做出來以後當初我們怎麼求直線，比如說把這一點的座標是(1,2)，那這個法向量假設是(3,4)，我們當初怎麼造這個直線的方程式，你就知道它 3 倍，因為假設這個點的座標(x,y)，這樣把它拉過來，它兩個會互相垂直，如果在這一點它就是個 0 向量，還是等於 0，但是我們可以發現(3,4)這個向量跟這個方向向量會互相垂直，那我們講到說，看到垂直的概念會想到內積，因為夾角跟內積本來就幾乎是一樣的東西嘛，那你就從這個題目上得到 3(x-1)+4(y-2)=0，那直線方程式是不是就跑出來啦。那我們當初在教快速的方法是看到(3,4)就想到 3x+4y=把(1,2)帶進去等於 11，對不對，這樣是不是跑出來啦，好，那我們在想一下，那個求平面的方程式你想應該怎麼做，我想你會想到什麼方法，如果能夠找到一個法向量，那是不是也是一了百了啦，有沒有抓到那個感覺，對不對，我如果法向量出來以後，那很多平面上的向量都會跟它垂直，所以其實有時候你會發現到，平面方程式來講法向量是一個蠻重要的概念。

(clip4)T：那這個時候我們就開始來想這個問題，比如說我們來想，這個平面的方程式，我們來想像有什麼方法可以做，其實我們這個時候可以想到一個方式，我抄這邊，這個地方是(1,0,1)，這個地方是(0,1,1)，這個是(1,1,0)，那我其實有個想法蠻單純的，就是我只要找個跟它垂直的向量，這個我假設令它 N 向量，因為它代表的是一個法向量的概念嘛，對不對，我就可以設它是什麼數據，它假設是(a,b,c)這個向量可以吧，剛剛我們是不是很無力找 abcd，那我現在就開始慢慢去想一下，如果可以找到法向量，應當就蠻快樂的，那我在想說，因為涵蓋了三點，這是一個大平面，那你想這個向量會跟哪些向量，跟 BCD（標上點的名稱），你想一下向量最大的特性是它是可以平行移動的，是不是可以平行移動，所以如果可以找到一個 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{BD}$ 應該會跟 $\overrightarrow{N}$ 有什麼概念？其實你就等於想說我就是把這個向量平行到這邊來，這邊同樣是 $\overrightarrow{N}$ 我是不是可以做平移，老師問你喔，那個法向量應該有多少個？

S：無限多個。

T：有多少個，那個直線就是無限多個阿對不對，只要跟它垂直的向量通通都算嘛，只要它不是一個 0 向量對不對，都是它的法向量，所以這時候我會有個想法，以它的解法做會比這個來的快樂一點點，我們會怎麼想，這個 $\overrightarrow{BC}$ 算出來是多少(1,-1,0)，這個 $\overrightarrow{BD}$ 是(1,0,-1)，可以吧，這個計算上施用的力量太多吧，那我們就可以透過什麼樣的概念，我們其實在講垂直的時候講過一個概念，一條直線一個

向量如果跟平面上的兩個互相垂直，兩個向量或兩個直線互相垂直，那跟它通過交點的每一條直線都會互相跟它垂直，如果一個向量跟平面上兩個向量互相垂直的話，我們那時候線性組合把它證明過嘛對不對，跟平面上任何向量都會垂直，其實理論上只要找到平面上兩個向量就夠啦，好，所以我們來試看看，你看這個東西$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，也就是說 a-b=0，那你從這個題目上$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，也就是說 a-c=0，那就得到 a=b=c，所以我們可以取到它的向量是(a,a,a)，但是沒有人想寫成這麼囉唆的東西，所以通常取它$\overrightarrow{N}$=(1,1,1)這樣是不是就夠啦。那我們就可以知道說你可以抓任何一個點，也就是說假設我現在抓的是這一點，那我平面上隨便任何一個向量，A 點座標假設(x,y,z)，平面上任何一個點，這兩個內積會等於 0，因為它如果不是在 B 點，這兩個向量夾角一定 90 度，那如果它剛好是 B 點，反正它零向量，零向量乘以任何一個向量還是等於 0，所以我們就可以用這個題目上直接寫出來就是 1(x-0)+1(y-1)+1(z-1)=0，得到 x+y+z=2，跟我們剛剛還留在這邊的有沒有一樣？是不是還是一模一樣？

(clip5)T：可以吧？那有時候你會發現每個時候你都這樣帶，那我想考試怎麼可能，我想還是要回到很現實的這一面嘛，所以我們要想到有沒有什麼更快速的方法，那我想有時候這只是個引進它的概念，這樣講會不會太快？抓狂了齁！好啦，那我們再來想一下齁，有時候像你懂了這個概念以後，我會通常想要把它拉回數學領域過來，數學講起來就文謅謅的感覺就出來，所以我們假設求平面方程式，這個時候你會發現到一個很重要的概念是它法向量的概念，法向量的概念整個是非常重要的，你可以從這個題目上發現到，其實你最後要解決問題是相異三點我們在平面上找到兩個向量，我要用這兩個向量找到它的法向量，那你法向量出來之後一個點，基本功夫是不是可以把它完成出來啦，所以我想整個平面應該是這樣慢慢建立起來。

(clip6)T：那我想我們要建立法向量又回到數學的本質，要怎麼去講它，所以這邊講義的部分老師第一個就介紹什麼叫作法線，可以吧，所以看講義第 23 頁就開始介紹什麼叫做它的法線，那在數學上講它的時候是這樣，這邊假設是一個平面 E，看的到吧，它就發現跟它垂直的直線，每一條跟它垂直的直線有無限多條，所以它說 E 是空間中的一個平面，你看講義 23 頁這邊，垂直 E 的這一條直線都稱做它的法線。法線和法向量有什麼瓜葛？這一條就稱做它的法線，我們剛剛講過有無限多條，對不對，好啦我們稍微緩一下，老師舉個例子讓你想一下齁，今天如果是一個座標系，這是 x 這是 y 這是 z 對不對，老師問你，xy 平面 z 軸是不是它的法線？是，因為它跟它垂直它也跟它互相垂直，對不對，當初我們講過它的證明嘛，這個時候開始派上用場了有沒有，當初不是講說直線跟平面的垂直是怎麼樣，理論上通過這個 O 點的每個直線都跟它互相垂直，我們最後證明說

只要兩條線跟它互相垂直，L 就跟這個平面互相垂直，所以通過它的每一條直線是不是都跟它互相垂直，所以 z 軸就是 xy 平面的法線，那請問法線到底要幹嘛？我法線上只要抓兩點，我是不是可以找到這條直線的方向向量，那直線的方向向量我們就稱它叫作法向量嘛，對不對，剛剛是不是有點這個概念就出來啦，所以有時候你要了解到比如說這是一個 xy 平面，z 軸就是它的法線，那法線可以找兩點(0,0,0)你可以找一個(0,0,1)，那這時候法向量是不是就出來啦，就變成多少數據(0,0,1)阿，是不是就(0,0,1)，那你就 0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0，所以做出來它的方程式就是 z=0，可以吧？以後你覺得(0,0,1)不好你就找(0,0,7)一樣可以阿，對不對？只是這邊改成 7，那你做出來 7z=0 還是改成 z=0。所以從這個題目上你會感受到一件事情，如果一個法向量是(2,4,6)，你會取什麼比較完美？(1,2,3)是不是比較可愛？那如果$(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3})$呢？你還是(1,2,3)會比較幸福一點點嘛，因為我們習慣性把它變成整數的一個概念嘛，那老師問你一下，yz 平面的法向量應當是多少？是不是就這一條，你可以找(0,0,0)跟(1,0,0)，所以這個平面你要怎麼寫，x=0，這個是不是就 y=0，你看 y=0 就切過去，z=0 就所有通通上面的點 z=0，一樣是不是可以把它做出來，所以我們現在開始已經有點那種平面的感覺了嘛，這樣可以吧，所以你看在講義上所寫的就是說 z 軸是 xy 平面的一個法線，很多法線中間的一條而已，那 y 軸是 zx 平面的一個法線，有很多條，這其中的一條而已阿，可以吧，那 x 軸是 yz 平面的一個法線。

(clip7)T：那我們這邊就開始介紹數學上的一種手法，它是平面的法向量，它介紹說如果 L 是平面 E 的一條直線，那我就可以平行 L 的一個非零的向量，通通稱做它的法向量。對不對？所以法向量有多少個？無限多個嘛。所以在這邊老師跟你說數學上有時候它的一個講法，因為它為了強調把它的那個，因為由方程式我們就可以感受到我需要一個法向量嘛，我還需要平面上的一個點嘛，結果這樣是不是就可以把它完成出來了，很多那種平面方程式你就不要把它想太多嘛，想辦法找到它的法向量，想辦法找到它的一個點，其實就瞭了嘛，所以它整個精神就在這裡而已，這樣可以掌握的到吧？以後再難的題目，其實它本身最終的目的就想辦法凹一個法向量凹一個點這樣就好了，可以吧？所以整個數學的核心就在這邊，所以當初就數學上的語言就平面上的法線平面的法向量，那 L 的方向向量是 E 的一個法向量，$\overrightarrow{N}$ 垂直平面上的任何一個向量。

(clip8)T：那我們這時候開始想到一個問題，你什麼東西都三個這樣一個一個帶，你會發現到老師有點在耍白痴故意找那些(0,1,1)這些可愛的數據，那也是因為剛剛老師拿這個東西走過去，我把它借過來，我就想說從這邊做個開端，那你會發現你眼睛一瞪它，x+y+z=2 一下子就看出來了嘛，對不對？像剛剛如果 A 點的座標是(0,0,0)，你要求這個平面的方程式，你要硬湊它也可以，就變成 x+y-z=0 就

出來啦，但是我是覺得什麼東西都這樣去凹它，真的太辛苦了，那我們有時候會面臨到一些數據，比較不是那麼可愛，你就回家上完數學課夢見老師逼你們在那邊想數學，已經很辛苦了還要逼你們做，來，比如說我現在舉個例子來講，老師隨便抓個例子，這個題目上做起來不是很漂亮，也不見得說它很簡單，比如說我們找這一點的座標是(0,0,0)，（有學生比賽回來，分組第一，大家歡呼，我們班真的天生麗質耶，游泳都沒什麼練，全校第三名。）好啦，來，像這個題目上我們就發現到，比如說我隨便抓，這一點是 A，這一點是 B，找個難一點的數據來做，什麼數據會最難？

S：分數、π、根號。

T：質數對不對？分數你放大以後就變成整數啦，如果(1/3,2/3,3/3)，你就把它拉三倍，還是整數啦，沒有人用分數在做啦，對不對？蔡○○講這個概念可以吧，若它給的是(1/3,2/3,3/3)，那我就變成(1,2,3)的向量我可以把它拉長嘛，所以當初我們在講這個圖形的時候在強調一個概念嘛，你可以把它放大成(0,2,2)(2,0,2)(2,2,0)或變三倍四倍，抓的一個原則就是怎麼樣，放大兩倍體積放大八倍，表面積那些放大成四倍，那長度變成兩倍，那角度不會改變嘛，對不對？所以我想很多向量那種同樣的感覺你就抓的到了，可以吧？通常最難的是什麼數？有什麼更難的？隨便凹啦。

S：根號。

T：根號寫出來很醜而已嘛，我們找質數啦，取個平衡點啦，B(2,3,5)。

S：(7,9,11)。

T：9 是質數？

S：(7,11,13)。

T：這樣夠難了吧，那我們一定會想到找一個更難的東西嘛，畢竟有的方程式不是簡單的數據能夠凹的嘛，所以你會想到這個數據是多少？這個向量假設是(a,b,c)或者令它(x,y,z)都無所謂了啦，因為你們在解方程組的時候比較習慣這種感覺嘛。

(clip9)T：那你是怎麼做它？做這個向量一個是多少，7x+11y+13z=0，那這個就是 2x+3y+5z=0，兩個前後都無所謂嘛，那你們當初在解這個方程式的時候怎麼解它？

S：加減消去（很小聲地說）。

T：這個 z 看起來一點都不可愛對不對，就乘 5 倍乘 13 倍，真的是…對不對，是不是這樣，那你一樣可以把它解的出來阿，35 扣掉 26 剩 9x，那再來呢，55 減 39 加 16y 等於 0，因為你現在主要是 x：y 嘛，就是 16：(-9)，你同樣可以用什麼方式來做，隨便抓就是這樣嘛對不對，那 21 跟 22 就變成什麼數據，x 加上多少，39,55，是不是就是 x+16y=0 對不對，因為 22 減 21 是底下減上面嘛，對不對？

S：16z。

T：16z，對對對，老師也年輕過對不對，x：z＝16：(-1)，所以你可以發現到是 x：y：z＝16：(-9)：(-1)，那算起來是不是很耗時間，對不對？如果你真的每一步都這樣算，那算完聯考就放榜了，對不對，那太慢了嘛，所以有時候你會發現，這個向量就取它，很自然的發現 16x-9y-z=0，理論上你可以這樣把它解出來，但至少這個方法比原來那個方法好一點點了嘛，對不對，但還是不夠好啊，你看這個題目我們驗算一下，因為老師現在計算能力都不是很好，(2,3,5)帶進去就變成 32-27-5 對啦，7 帶進去，所以很多數學假設你沒把握要做這個動作阿，可以吧，所以老師有時候教你做這些東西你就慢慢體會，它 112-99-13 有沒有剛好等於 0，所以有時候解題老師是覺得說不用一定要很快啦，你用數學概念，然後把它算對還是比較重要嘛，對不對？可以吧？好，那我們就開始想一下有沒有什麼很快速的工具一下就可以把它解出來了？

(clip10)T：那這當然是在你們學習平面的方程式它變得很重要嘛，你什麼東西都用這種方法推，反而不像○○○○的學生了啦，對不對，好吧，那我們就來研究一下。這是老師想要跟你講的第三個概念，好，這平面假設告訴你兩個向量，一個向量是(a_1,b_1,c_1)，這邊是(a_2,b_2,c_2)，好啦，我們就可以想像，這向量我把它平移到這一點過來可以吧，那這個地方假設令它是(x,y,z)，以後我們在做這個題目上不會用這種方法去算它，就不太會用這種方法算它，所以，有時候我是覺得說從用你當初類似國中那個方法，你慢慢解也是可以啦，但是你人生是黑白的，考試的時候不要說會做但解不出來，這個方法好像有一點點，但是你還是要學到這種的能力，你看，這個東西我們慢慢導一下，然後那個結論就是你記的方式，你會得到$a_1x+b_1y+c_1z=0$，$a_2x+b_2y+c_2z=0$，那其實我們現在找的是什麼數據，x：y：z 嘛對不對，可以齁，那要怎麼找？其實你發現跟這個一樣嘛，這個 z 通通先把它消滅掉，可以吧，那你要把它同乘c_2把它同乘c_1，那你要上面減下面或底下減上面都無所謂阿，隨便啦，反正開心就好啦，你看$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=0$，那這兩個數據你可以得到$x:y=(b_1c_2-b_2c_1):(a_2c_1-a_1c_2)$這個要把它變號，這樣可以接受吧，好，再來，這個就消滅掉了對不對，那再來消滅掉哪一個，y，你要消滅掉 x 也可以啦，你消滅掉它的時候變b_2、b_1，所以變成$(a_1b_2-a_2b_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)z=0$，那你會發現到 x：z……這種應該都懂了，因為我們現在抓 x 當標準，那這時候他們發現比出來剛好是變成哪一個，這個數據就變成$(b_2c_1-b_1c_2)$：……，我們把這個變號，因為我很想讓它完全一樣有沒有，那就變成$(b_1c_2-b_2c_1):(a_1b_2-a_2b_1)$，這樣是不是出來啦，所以你會發現 x：y：z＝$(b_1c_2-b_2c_1):(a_2c_1-a_1c_2):(a_1b_2-a_2b_1)$是不是這樣的關係？ㄟ這個東西你背的起來嗎？背的起來才怪勒！對不對，我們仿造這個形式做看看對不對，是不是等於這個數據喔，所以你看像，我看應該是對啦，那有時候我們是覺得說有很多像這種情況下，所以數學有時候還是需要一點熟練性啦，有些方法還是要學起來，有很多數學的東西老師為什麼用這麼多次來跟你教，因為老師覺得說你本來從無知嘛，一種學習的狀況嘛，到你有了基本上的知識以後，然後強調你回家要稍微

操作，然後要把它稍微沈澱嘛，那在出來以後才是你自己的東西嘛，那你才能夠把它做的非常的精簡，所以我時常囉囉嗦嗦在這邊講這些話對不對，那有時候像你碰到像這種的狀況，你可以把它像圖像化那種感覺出來嘛，有時候老師說你可以怎麼去想它嘛對不對，那像這種的情況下你怎麼去做它？你其實就可以從這個題目上想到一個方法，有沒有發現這個向量 $a_1, b_1, c_1, a_1, b_1, c_1$ ，那這是各種不同的記憶方式其中的一種而已，那我想對於一個你數學真正要達到很顛峰，我想這也是很基本的概念，也就是說用這個方法可以讓你計算速度馬上加速，那我想大概，所以有時候老師常常在講說在○○○○教書是很幸福，得天下英才而教書，是不是就像這樣？我們來慢慢的欣賞，這個就是哪一個中間這個，這個是不是就沒事，第二個在哪邊，我們來找一下來，這一個 y，剛好跟這個一樣 $(a_2c_1 - a_1c_2)$ 有沒有，對不對，那再來第三個呢，再找一個來，這個 z 是在哪邊 $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ，這樣是不是就出來啦，對不對，所以有人就發現到說這個就是 x：y：z，用這種快速的方法馬上得到它的結果，我們來操作一下你會發現你的計算能力要更強一點點，來，這個東西我們用 7,11,13,7,11,13，ㄟ這種方法並不是唯一的啦，那底下這一排是 2,3,5,2,3,5，來你看這個數據，慢慢做阿，這個變多少 55-39=16，26-35=-9，這個啦-1，有沒有，是不是就出來啦對不對。

(clip11)T：所以其實你現在學到這個地方齁，你至少有個基本的概念，你如果假設給我平面上相異三個點，我就可以在平面上找兩個向量出來，用這個大筆一揮，那個法向量是不是就會跑出來，是不是會跑出來，那你向量有了點有了，那是不是開始人生就變得很美滿了，其實你會發現數學就這一招而已嘛，一招為行天下嘛，有很多不管它怎麼變的話都不離這一招，其實整個題目上就這樣而已，所以有時候我們在做這個題目上，我們就可以放手去做很多這方面的概念。

(clip12)T：那如果說你給三個點在這題目上一寫，是不是就 16x-9y-z=0，那我想我們從剛剛一直講到這邊的時候，現在是走到一個比較數學化的東西啦，所以從一開始它的那個引進，到這邊又變成一種數學化的東西，所以我們這時候開始做一個平面方程式的解法，也就是說平面上假設 $\overrightarrow{N}$=(a,b,c)，上面有個點的座標它是 $P(x_0, y_0, z_0)$ ，那你想平面方程式要怎麼做？就是這樣嘛，來我們來做一下，你這個時候給個平面，我們不管前面那一段引言那一段概念，我們就從純數學的角度來講，跟它垂直的直線稱做它的法線，法線有無限多條對不對，那我們從它本身法線的概念，我兩點是不是可以找一個法向量，向量可以隨便平移嘛，我們當然是把它停留在這一邊嘛對不對，所以你看當初老師在講義上所寫的第一個就告訴你什麼叫法線，那法線它的目的就是要取得它的法向量，那向量跟有向線段最大的差別是向量可以平移，有向線段是卡死在那邊有頭有尾的對不對，向量可以任意你隨便遨遊嘛，那再來就是第三個告訴你法向量的求法，那這個時候你已經有了它，那這一點座標 (x_0, y_0, z_0) ，你就可以在那邊找到一個向量，這個向量

不管它是這一點以外還是這一點，那反正這個向量如果外面的點(x,y,z)，你就發現這個向量是(x-x_0,y-y_0,z-z_0)，那這個向量就變成多少$\overrightarrow{N}$，這假設 A 這假設 P，那這個就$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{N}$=(a,b,c)，那兩個的內積會等於多少 0，所以他們其實得到一個結論，平面的方程式 a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 對不對，所以其實你就慢慢發現平面方程式也沒有這麼可怕嘛，你只要能夠找到它的法向量找它上面一個點，其實就完工了，可以齁，那法向量你就想辦法找嘛，找兩個跟它各種不同的變化都可以阿，反正你隨便它，向量是不是可以平移阿，萬一兩個是類似那種歪斜的直線，上面兩個向量你可以把它平移下來都可以做阿，可以吧，所以這個題目上你可以在把它簡化寫出來變成 ax+by+cz=k，這 k=$ax_0+by_0+cz_0$，是不是等於這個型態？

(clip13)T：可以齁可以吧，好啦我們就隨便舉個例子來做一下，比較真實的一面要怎麼做，這樣可以吧，所以你假設像平面上隨便給你的時候，你就可以隨便找到它的什麼呢，隨便給你兩個向量，譬如說這一點座標假設(0,0,0)，不要啦，隨便找個數據啦，比如說是(1,2,3)這樣可以吧？那這邊呢，比如說(5,6,7)，那這邊呢(-2,-3,-1)，這樣可以吧，你就可以找到你慢慢抓它感覺，這個向量是多少(4,4,4)，其實你可以把它改成多少就好(1,1,1)，我就取它短一點就好了，因為我在乎的只是兩個互相跟它垂直的向量是不是就好啦，那你這個向量你可以發現它變成多少(-3,-5,-4)對不對，你可以用負的來做，或者像老師計算能力很差的可以改成什麼來做(3,5,4)一樣活的很快樂阿，對不對，所以有時候你做這個題目上萬一老師更可惡就會找分數給你，就像剛剛蔡○○講的萬一分數怎麼辦，那就抓狂了阿，分數怎麼辦，是不是就要放大縮小是不是有點伸縮的概念，老師想說剛剛你們講到這個順便幫你們克服一下，正負的概念還有伸縮的概念，其實對它不會有任何影響可以吧，那兩個哪個排前哪個排後你高興就好了，比如說你用 3,5,4, 3,5,4，那這邊就 1,1,1,1,1,1，然後做出來的答案多少，這個是 1,1,(-2)，那就 x+y-2z 用哪一點帶進去，用(1,2,3)帶吧，1＋2-6=-3 平面方程式常數是不是就「ㄕㄨㄚ、」對不對，所以其實有時候你會覺得說怎麼平面方程式好像好難好難，所以你要從它知道說怎麼會去想到平面方程式整個概念，然後到這個平面方程式，這樣就出來啦，那以後當然是這兩個向量它會變化的妖魔鬼怪給你們看嘛，可以吧，這樣懂意思喔，那千變萬化無所謂阿！

(clip14)T：比如說它給你兩個歪斜線，老師在講更難一點喔，兩個歪斜線要求含 L1 的平面，那你要怎麼做？要求這個平面，這個向量不小心讓它掉下去，哇，向量是不是可以往下掉對不對，那平面上就幾個向量，兩個向量然後用剛剛那個一比，是不是法向量就出來啦，對不對，這向量是不是出來啦，那隨便抓一點不就很可愛了嗎？所以你會發現整個千變萬化就這麼一招而已，沒有第二招了，所

以有時候覺得說很多數學不要太複雜化，這樣就好了，可以齁，那如果說比如說，ㄟ我們再來回想一下，當初講說決定平面常見到的方法有幾種，三點對不對，那這個你會了，那如果一直線跟線外的一個點那你要怎麼辦，一直線還有線外一點那怎麼辦，怎麼做？像老師是一個笨小孩，上面抓兩點也很可愛啦對不對，直線上抓兩點是不是就平面上三點啦，那你還是要這樣做阿對不對，我就拉一個這樣的向量拉一個這樣的向量，ㄟ這個是不是就出來啦，對不對，那很多人在講那個相交兩直線那怎麼辦？好，這邊把它講完我們就結束掉了，所以稍微耐一下性子講一下齁，這一條跟這一條直線要求它，你當然也可以跟老師一樣會找三點，隨便找，你何必要找哪一點一樣活的很好對不對，那如果快速一點你就可以找到一個向量再找一個向量，是不是就可以兩個向量啦，「外積」是不是就「ㄕㄨㄚ、」結束啦，那這裡我在隨便抓一個點，是不是其實它整個精神就是找它的法向量，那法向量其實就是永遠那一招嘛，對不對，比一比然後答案就出來啦，那還有最難的這一招，很多老師好像通常在考月考不考這個就覺得很有失落感，因為這個題目上學生都不會阿，我笑說出這個題目就像「別人的小孩死不了（台語）」對不對，考完這個以後就會很有挫折感，那老師比如說碰到這種的題目上你就抓不共線三點我是不是一樣做得很好對不對，是不是這樣，有同學說抓兩個向量怎麼比，當然比不出來阿，所以有時候你會抓一個向量，這邊抓一個點，就把它回到這個樣子嘛，對不對，那你在抓一個點是不是可以決定一個向量，然後兩個向量，ㄟ這個就出來啦，點向然後就出來啦，可以吧，至少喔今天講完以後你可以稍微沈澱一下，其實整個平面的架構就是這樣，好啦，那下一節課我們就可以來操作題目，可以齁！

附錄二(2)：2009 年 11 月 6 日教學影片轉譯稿 【2-5 空間直線方程式第一節課】

(clip1)班級經營

(clip2)T：我們今天來講空間中的直線，我們來看一下空間中的直線方程式。你稍微回想一下，平面上的直線方程式它寫出來是什麼樣子？來想一下這邊喔，是什麼樣子？L：ax+by+c=0 這個型態，那你有沒有曾經想過說空間中直線的方程式？平常的慣例喔都是 x,y 變成 x,y,z，但是，所以有時候我們會很常想的可能是 ax+by+cz+d=0，問題它是一個平面，那一定不是一條直線，所以其實有些同學反應非常快，在上半堂課有三個同學問我說直線的方程式長的是什麼樣子，那你想它是長的什麼樣子？所以有時候有很多數學喔，它慢慢去思考，我們在講直線的方程式講過兩種方法，一個是這種標準式就是一般式嘛，還講過一個叫什麼參數式對不對？好那這個地方好像有點問題，所以有時候你去嘗試它的作法，我們稍微回想一下平面，當初在講它的參數式是這一點的座標假設(x0,y0)，如果有一個方向向量，它如果今天它的方向向量是(a,b)，那當初我們怎麼想它？這一點的座標假設是(x,y)，那會有什麼特性？這個向量跟方向向量是不是互相平行？所以如果它兩個都不是等於 0，你就發現 $(x-x_0,y-y_0)$ 平常都是把它除以多少，a 跟 b，但是有時候我們避開這個問題，怎麼避開，就寫 $(x-x_0,y-y_0)=t(a,b)$，因為如果它等於 0 它是不是也可以活得很好。所以當初寫出來是 $x=x_0+at, y=y_0+bt$，那這時候寫出來就是它的參數式。那你稍微想一想，這個東西應當好像有點樣子，對不對，甚至當初講到兩點的座標，我們並沒有一個很嚴謹的公式給你，比如說它這邊是(1,3)這邊是(5,8)，那其實你很容易就可以找到一個向量(4,5)，這時候寫出來 x=1+4t,y=3+5t，是不是就出來啦，那當然有人背 x_2,x_1，老師當初為什麼不要你背那個公式，萬一它今天是(5,9)，那你為什麼要找(4,6)，當然找(2,3)會比較理想一點點嘛，當初包括在講格子點，整數解，是不是從這裡頭跑出來，可以吧？其實比較高段的直線方程式還是要具備這方面的概念，比如說兩個平面它有交線，那一定要做這種二元的直線上的參數式，才能夠把它做到非常完整，這樣可以接受吧？這是一個大概基本上的能力，好像沒什麼問題吧？

(clip3)T：好，我們現在就開始拉回來空間中，我們來想一下空間中你想該怎麼做？你假設它今天的座標是 (x_0,y_0,z_0)，如果這一點的座標是(x,y,z)，有一個這不是方向向量喔，平面上的直線有它的法向量，空間中它平面的法向量是(a,b,c)，通常直線上只探討它的方向向量，可以吧？所以我說數學不要太複雜化啦，那你這時候應當會想到說 $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，這個假設是(a,b,c)比較習慣，那你想要怎麼做它？它就是跟哪一組會有關係阿？是不是就是兩個互相平行？所以如果 a 向量平行 b 向量，那 a 向量就等於 t 倍的 b 向量是不是就出來了？所以你從這個題目上可以想像第一個直線的參數式要怎麼做？直線的方程式就稱 $x=x_0+at, y=y_0+bt, z=z_0+ct$，那這種東西我們延續當初的講法稱它叫做參數

式，那如果沒有特別的就強調 $t \in R$ 。這個題目上可不可以去控制它的線段？我們當初在平面上老師跟你強調參數式它主要的目的是把一個直線一個曲線上變成一點一點是不是在跑它，有點變成說整條線變成一點一點在做它，有點「點化」的感覺嘛，是不是這樣。所以有很多很多像這樣的題目上，這寫出來叫直線的參數式，這可以接受吧。那老師問你，一條直線的參數式表示的方法是不是唯一的？它表示的方法是不是唯一的？不是唯一的嘛。而且不只唯一，它有多少個無限多個嘛（學生也有回答無限多個）。你那個方向向量是不是有無限多組，你可以正的你可以負的，你可以兩倍 1/2 倍隨便你高興嘛，那通常我們在習慣性的寫法是寫哪一組，讓它 abc 三個的最大公因數是 1，那個是我們最想要的那一組，所以這只是一個習慣性的寫法，你也不要把它想太多。所以考試你就發現到，如果在考試的角度來講，不太敢考直線的參數式，直線的方程式，為什麼不太敢考？因為每個人都寫一個，老師要一個一個去驗證嘛，到底它是不是嘛，但是你一定要會阿，因為它不讓你考這種東西是因為怕學校裡頭老師不好改而已阿，它換個方式馬上就可以考你了，所以這種東西有時候還是要了解。那如果說今天給兩點呢？你看講義這邊給 PQ 兩點，其實 PQ 就是它的一組方向向量，所以通常這樣帶進去也是一組答案，對不對這可以接受吧。

(clip4)T：ㄟ你覺得這種參數式寫出來很漂亮還是醜醜的？怪怪的喔！好，那老師在跟你介紹第二種它的東西叫做什麼，另外一種我們來慢慢欣賞一下。然後你體會它兩個的差別在哪裡。有人就從這個題目上發現 $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ 這組向量跟哪組向量互相平行？跟(a,b,c)是不是互相平行對不對？所以平行有的寫法是怎麼寫它，寫成這樣 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ ，當然這種寫法它有個條件限制 abc $\neq 0$，可以接受吧。ㄟ這種寫法喔，我們給它一個名字叫做直線的對稱比例式，你覺得這兩種哪一種比較好？這兩種你比較欣賞哪一種？兩個都要會阿。其實你慢慢跟它看，這個東西要規範 abc≠0 對不對，那答案萬一 abc=0 是不是很難過？所以有時候養成一個習慣，因為這種對稱比例式寫出來都美美的，比如說一個題目上寫 L_1, L_2 ，在美編的角度來講它是美美的，可以吧，當然有些同學比較習慣這種方式，那你如果說以不要考慮太多，那個其實在寫答案的時候非常實用。這個在計算過程不太會用它，幾乎都用它。那有些老師是先教這個在教那個，那老師因為從平面上的直線拉過來，所以先講這個再講這個，單純啦。可以吧，那你要寫這個的時候你要注意到 a,b,c 不能夠等於 0 喔！

(clip5)T：那這邊老師幫你提醒，萬一等於 0 要怎麼辦？所以老師在講義上寫一個例子，出現 0 的時候就稍微把它做修訂。比如說 A 的座標是(1,2,3)，方向向量是(1,0,-3)，那怎麼做它？比如說我們來慢慢看這個數據喔，它如果說本身 A 點座標(1,2,3)，那它有個方向向量(1,0,-3)，老師跟你講參數式要怎麼做？怎麼做？你就寫成這樣嘛，x=1+t、y=2，0t 要不要寫，你要寫當然可以阿，z=3-3t，$t \in R$

這個答案是不是就出來了。那對稱比例式呢？有人把它簡稱對稱式，$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-3}$，理論上你要寫 1、0、-3，那這種寫法可不可以？所以通常怎麼做，這個就是 y 永遠等於 2 有沒有看到，所以這個題目上通常把它寫成這邊是多少 $\frac{x-1}{1}=\frac{z-3}{-3}, y=2$，所以你如果看到這個題目上你就發現其實它本身喔，你無形之中導了一個概念，來看到這邊喔，y-2,0，所以看到這個題目要懂得去解它，可以吧，所以看到這個題目上要能夠回覆到這種感覺，因為這個是你在計算中心中的一個感覺嘛，但是你表現出來的時候就是要用這種方法表示它，因為它 0 能不能當分母？不能。那就是牢牢把你給套住嘛，那如果說你今天在一個計算的角度，我如果把它幻想成 $\frac{y-2}{0}$ 我一樣可以活的很好，懂它意思吧。所以有時候這種題目是蠻獨特的一個現象出來，那有些人是說比如說像這種題目上把它想像成它是一個什麼樣子，你看，也有人把它寫成-3x+3=z-3，所以如果寫成 3x+z=6 還有一個 y=2，這其實也是它的一個，那這種地方寫出來的方法，因為它是兩個平面嘛，所以像這種東西改良以後有時候寫成一些形式就稱做兩面式，這樣懂意思吧。

(clip6)T：所以其實你所看到的整個數學上的感覺，他會以三種不同的面貌出來呈獻給你，一種是什麼參數式，一種是什麼對稱比例式，一種是什麼兩面式，那這三個你要轉換成哪一種方式來做題目上，其實你可以把它轉換得很快，比如說，這個東西我要變成一個兩面式可不可以，兩個一組兩個一組然後把 t 給去掉是不是就出來了，那也可以把它變成這種對稱比例式，我用這兩個這兩個是不是也可以寫成兩個平面阿？講這樣聽懂不懂，因為對稱式跟參數式是兩個很容易去做變換，那這一個跟兩面式是不是很容易做對調，那現在主要難一點是兩面式有些題目喔真的出的是兩面式給你，我們那時候在 2-4 是不是講過一些題目，過兩平面的交線這種問題，所以其實有很多很多那種兩面式的題目上你如果數學想要單純化，你要的就是我看到兩面式馬上就可以回覆過來，那這樣你就會覺得其實也沒有什麼難度阿，這可以接受吧，那你像這種不定方程式的解法就要很強，可以吧。

(clip7)T：那我想我們稍微來做一個題目上練習，我假設今天給的是一個兩面式，你能不能回覆到參數式跟它的對稱比例式？能不能這樣對過來，我們來看一下喔，老師現在直接先用第 2 題來講，$\begin{cases} 2x-3y+2z+1=0 \\ 6x+y+z-7=0 \end{cases}$，我們待會就隨便讓你抓一點來想，其實應該蠻快的，ㄟ這種隨便的兩面式都可以做它，你不用擔心太多啦，可以吧，我們學校這本天書裡頭什麼難題也都有，待會你看到哪一題覺得想要做做它的，那你就把它拿出來做，所以我想整個都還好吧，我們學校這裡頭

真的好多題目都很難，好啦，先不管它了喔，那像這個題目上怎麼把它化成它的參數式，你稍微養成一個習慣喔，你看哪個很不順眼，就把哪個給去掉，這我們上次講過類似這樣的題目，比如說這次你看哪個不順眼，z 喔，那 z 就把它乘幾倍 2 倍，它減它 10x+5y-15=0，那你看 2x+y-3=0，那這個地方你看，老師當初花了時間幫你講尤拉法，為什麼學尤拉法，這時候你就派上用場了，所以老師有時候瘋瘋癲癲，但是老師還知道以後要上什麼東東啦，那你這個題目上就發現令 x 等於多少，隨便你令喔，你假設令它 1,1 可不可以，可以阿，我隨便找到一組(1,1)是不是也是很幸福的一件事情，那你有時候為了單純令 x=t,y=3-t，那你的 z 呢？帶進去這裡頭就好了嘛，z=4-5t，那這很明顯就是它的參數式，ㄟ，3-2t 啦，z=4-4t，做完這個題目老師教你一個驗證的方法喔，來我先寫對稱比例式，那這個地方你要寫對稱比例式你要怎麼做？其實你就發現，它的對稱比例式要怎麼寫它，$\frac{x-0}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{-4}$是不是就出來了，可以接受吧，然後老師在教你這個題目上其實老師糊里糊塗在算它，有時候擔心會算錯，那你會發現到一個題目的特性，讓你不會算錯，看喔，直線的方向向量是不是在這個平面上，也在這個平面上，所以跟這兩個平面的法向量是不是會互相垂直，平面上的直線跟它法向量是不是互相垂直？所以這時候你可以做這樣一個驗算，你看喔，這個法向量就是多少？$\overrightarrow{N}_1=(2,-3,2)$，$\overrightarrow{N_2}=(6,1,1)$，所以你看這種題目上如果老師真的是算錯，像剛這樣糊里糊塗算錯，老師還是可以馬上把它解決出來，因為老師有時候做完題目之後會有一個檢驗的工具，你看 6-2-4=0,2+6-8=0，那就是保證沒有錯，那當然就很放心嘛，所以有時候老師才會說解題喔，尤其是那種計算容易出差錯的，其實你步調稍微放慢一點，穩紮穩打慢慢慢慢去做它，可以吧，其實你的功力就會大增阿，有時候驗算在整個數學上的計算喔，還是一個蠻重要的概念。所以你現在至少有個基本能力，就不管他怎麼樣的數據，我都可以直接做它的驗算。

(clip8)T：ㄟ來，隨便挑一兩個平面我們來做看看，其實你都很容易可以做到它的，李○○還好吧？想通沒？（解釋給學生聽）它意思是這樣嘛，它現在這兩個平面是不是要求它的交線？那你求出來是這個對不對，這個很容易做吧，這可以轉成這一個吧，老師教你這個驗算是什麼樣的工具，看這邊喔，這條直線它的方向向量是不是就是橘色的這條線上，那你會發現這個平面的法向量是不是就這樣，這條線上，就好像說我把這個移過來，兩個向量會互相垂直，對不對，所以這個題目上是驗算的一個能力，這不是計算喔，到這裡就結束啦，這邊是它的一個驗算能力，也就說這個平面有它的一個法向量，那它的法向量跟這個方向向量(1,-2,-4)是不是要互相垂直，因為(1,-2,-4)畢竟是這個平面上的一條直線的方向向量嘛，那這個方向向量跟你的法向量是不是會互相垂直，這概念有吧，不要教你驗算啦，把你教的天昏地暗，可見有時候妳們都很少做驗算的工具，空間這一段喔，計算錯誤的成分會非常非常多，很多都計算錯啦，所以老師有時候會教你驗

算的工具，要理解一下，可以吧。

(clip9)T：那我們稍微改個數據，比如說 2x+3y+z=7,7x+5y-2z=8，那像這種題目上你怎麼去做它？上面乘 2 就把 z 給消滅掉對不對？那加起來變成等於多少數據，11x+11y=22,x+y=2，那這個參數是不是一下就出來啦，可以吧，所以有很多像這種題目上你就發現 x=t,y=2-t,z=1+t 這樣是不是就出來啦，可以吧。

(clip10)T：ㄟ那萬一中間你解出來的數據是 3x+7y=17，那你怎麼做？你是不是要找到一組解，那平面向量我們是不是都講過了，還好吧，你如果用眼睛瞪它可以瞪得出來，你就直接看嘛對不對，瞪不出來是不是就用尤拉法，想起來了沒？所以寫出來 x=1+7t,y=2-3t，所以當初上的很多那種不定方程，這時候是不是就派上用場了，可以吧，很多數學它的解法其實蠻單純的，這種題目上你要有一點這個能力，那其實就都沒問題啦，可以吧。直線喔，整個概念在引進的時候是比較單純一點點，我想你可以接受直線的一個表達方法吧，那你覺得你還有更好的方法嗎？

(clip11)T：大概一個就是參數式的概念嘛，一個對稱比例式的概念嘛，那對稱比例式它最可怕的地方在萬一它方向向量有 0，三個 x 分量 y 分量 z 分量有等於 0 那你是不是要把它寫成一個特殊的題型，那另外還有一種就是所謂的兩面式的一個概念嘛，那其實你就發現兩面式都可以完全化成什麼型態，你可以為所欲為化成參數式，可以把它化成一個對稱比例式，是不是都可以把它化開，其實那種難度幾乎就都沒有了嘛，可以吧，反正這三個你可以很隨性的去互換它，你如果覺得說今天心情要用什麼方式來做它，那你就用什麼方式來做它，對不對，那如果有一種操作非常熟練，那其實是一樣的，所以有時候你慢慢體會到參數式跟對稱比例式那是用的最多的，它兩個互換也是非常快，所以有些題目上你假設不是說要強調很快速的解法，你就乾脆把兩面式化成對稱比例式，多了一個步驟再來就沒有難度了。不然就像上一節課所講的，通過哪一點跟什麼東東一大堆，那解法上其實很有高度技巧性的一個概念嘛，這樣懂意思吧，可以喔，所以我想有很多的數學它大概都是像這種型態就出來啦，好啦給你一分鐘想一想看有沒有多大的問題。沒有我們就開始要來講一下直線，其實直線的解法蠻單純的啦，但是因為它在直線上一定要碰到平面的概念，所以其實在講直線其實在講兩邊怎麼綜合，那你假設平面那個部分講不清，空間一定會出問題，可以吧，所以平面的東西回去趕快把它給做一做，不然兩個糾纏在一起就哇～，就天下大亂。

(clip12)T：來我們來看像第一題來，直線的參數式跟對稱比例式怎麼做？老師給你一個建議，先去抓它的方向向量，那它的方向向量你要怎麼做？(0,3,4)這一點的座標(1,1,0)，那我想先找到它的一個方向向量 $\vec{u}=(1,-2,-4)$ ，這樣是不是就出

來啦，你有沒有發現到你要找(0,3,4)跟(1,1,0)，是不是隨便挑，那我順便從這個題目上幫你夾雜一些概念進去，你看喔 P(0,3,4)Q(1,1,0)，那你假設寫參數式那要怎麼做？就 x=0+t,y=3-2t,z=4-4t，ㄟ這個題目上老師稍微帶你看一下這些數據喔，你看這邊喔，P 的時候 t＝0，座標在那邊老師不想寫太多太雜，Q 點的座標是 t＝1，其實你就發現 0.1,0.2,0.3,0.4,是不是東東東在那邊，對不對，中點的部分就是 t＝0.5，所以它如果要求是 PQ 這個線段你要怎麼寫它，從 0 爬到多少 1 嘛，好，老師問你一件事情喔，那如果這一段呢？不含這一點就是 t＜0，如果不含這一點從這邊過去，它就 t＞1，那你們都很聰明的小孩嘛，可以開始去幻想嘛，你是不是可以從 t 來控制它要哪一段，隨便你控制它阿，那種感覺可以抓的到吧，那如果寫它的對稱比例式，它的對稱比例式寫出來就變什麼形式 $\frac{x-0}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{-4}$，ㄟ這種寫法不是唯一的，如果老師當初寫出來是 x=1-t,y=1+2t,z=0+4t，這兩種寫法是不是一模一樣？對不對，你的對稱比例式也可以寫成 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{4}$，還是要改成 1,-2,-4 隨便你，剛我們一直強調這種寫法是不是唯一的，不是。那如果是這樣呢，那整個 t 是不是天下大亂，Q 這時候變 t=0，它就變成 t=1，因為當初你向量是往這邊拉嘛，那這一段就變成 t＜0，這一段就變成 t＞1，是不是通通都出來啦，可以吧，你要寫幾等分的點是不是從比例就可以找出來了，可以抓到那種感覺喔，所以其實有時候直線上有它很獨特的功能跟那些方法，那第二題就剛剛這一題嘛，我們剛剛跳過去講第二題嘛，你這樣聽懂不懂，稍微想一下喔。

(clip13)T：你在寫這邊的時候，老師提供你一個想法喔，你稍微想一想，我們在做平面的方程式，你稍微這個地方想懂兩個就通了喔，在講平面方程式你需要哪兩件工具？上面的一個點還要一個法向量，對不對，那這法向量的求法大概只有兩種模式會呈現給你，第一種是明白告訴你它的法線、法向量，這是同一國的嘛，一種是告訴你平面上可以平移到平面上的兩個向量，是不是永遠都是這一招？可以平移到平面上的兩個向量，用它的比例式一做答案是不是就出來了，這樣懂意思吧？那在求直線的方程式它的方法一模一樣，想辦法找到一個點，在想辦法找到它的方向向量，它方向向量給你的條件喔一定也是幾個，2 個條件，一種是比如說像第三題，它通過一個點跟一個平面互相垂直的直線，那平面的法向量就可以變成你直線的方向向量，那有些更毒一點點，就會給這種題目上，老師比給你看喔。這兩個平面是不是有一條交線，然後跟這條平行的直線又通過一個點給你，那你怎麼求這條直線的方程式？當然你可以是兩面式化成它求這條直線嘛，也可以用什麼東西來做，其實這個平面上的方向向量是不是已經跟它互相垂直了，可以吧，你就會發現如果利用到這兩個向量就可以找到這一個，所以如果以

解題的思維角度喔，你稍微敏銳一點點，如果它今天只是給你一個向量，你就在猜，它可能是跟法向量方向向量牽扯在一起的概念，如果它給兩個可以找到方向向量的，心中一想，搞不好就是用那個比例式把它給比出來，所以其實解直線的方程式喔沒什麼竅門，往這個方向想它，你解題的思維就比較容易可以帶到，可能要稍微想一下喔，老師跟你講過其實整個第二章的核心課程都在哪邊，都在這一段喔，2-5 這一段是相當難的一段喔，那後面很多蠻抽象的一些概念我想該講的老師也講，不該講的老師也都講進去了喔，可以吧，那老師的估算是大概下禮拜就可以把直線比較告一個段落。那 2-6 本身兩三節課就可以把它結束掉了，你們這個時候要趕快把 2-3、2-4 趕快把它給完稿喔……。

附錄二(3)：2010 年 4 月 27 日教學影片轉譯稿　　【重複組合第一節課】

(clip1)班級經營

(clip2)T：好了喔，好了我們來上課了，ㄟ相異的五件物品分給相異的，老師故意寫相異的幾個人，比如說三件禮物分給相異的五個人，那如果每個人恰得ㄧ件的方法數有多少種？每個人最多只有一件。(1)每人最多一件那這方法數是怎麼樣 P_3^5，對不對，第一個禮物是有幾種分法?5 種再來幾種 4 種再來幾種 3 種，那你稍微想一個概念喔，這個人他拿到禮物的方法可能是 0 跟 1，有沒有涵蓋 0，是不是有涵蓋 0 對不對。好再來，(2)每人可以兼得，也就是說他可以分到沒有，也可以幾件 1 件 2 件 3 件，那它的分法是多少種？5^3 還是 3^5 ？5^3 。好，我們現在在變一個題目上妳再稍微把它想一想喔，相異的五件禮物，五件物品任取三件，那這三件你會發現它有沒有它的順序性，沒有。那你在解題目上應當是多少種，C_3^5 。

(clip3)T：好現在問題來啦，如果今天是相同的五件物品，相同的五件物品，然後分給三個人，那當然是，ㄟ這個題目上表示人可不可以重複拿到，重複的感覺就跑出來了對不對，那這題目上妳想要怎麼做?我們先講個最笨的方法，什麼方法你看，假設把它分成甲乙丙對不對，甲有幾種方法，(5,0,0)，來我們從 0 開始排，(0,0,5)(0,1,4)(0,2,3)(0,3,2)(0,4,1)(0,5,0)，笨一點沒關係嘛對不對，那還有他如果拿一件變成多少(1,0,4)(1,1,3)(1,2,2)(1,3,1)(1,4,0)(2,0,3)(2,1,2)(2,2,1)(2,3,0)(3,0,2)(3,1,1)(3,2,0)(4,0,1)(4,1,0)(5,0,0)，一共多少個 21 個對不對，是不是這樣，那你覺得什麼東西都這樣做，理論上可以做得出來，但機會其實並不多啦，對不對，那你想有沒有什麼方法可以克服？有什麼方法可以克服？我就把它想成一個什麼數據，慢慢想有什麼方法可以克服？

(clip4)T：其實這個東西你就發現三個人剛好幾件，是不是三個人分這五件，所以你可以把它想成 x+y+z=5，這樣可以說的通吧對不對，那這答案你要怎麼去克服它？其實這就是需要思考的問題，有沒有什麼方法可以很快的把它給克服掉？那沒有我們就講一個古代人的想法喔，你看有人竟然想到這個方法，所以老師有時候講說上排列組合需要一點什麼，心智年齡，就是這樣，可以接受別人的一些想法慢慢想一下，我可不可以把它想成有五個，那想到什麼方法可以克服它？你可以想這樣喔，我如果把一個東西把它切割掉，它變成多少，左邊是 x 中間是 y 右邊是 z，我可以想到一個方法，你看喔，跟它有沒有一樣喔，這個是多少(0,0,5)，中間是 1,2,3,4,5，是不是到(0,5,0)了，1,2,3,4,5,6 剛好是代表 1,2,3,4,5,6 到這邊，對不對，(0,0,5)啊，左邊 x 啊中間 y 啊右邊 z 啊，是不是(0,0,5)，(0,1,4)(0,2,3)

(0,3,2)(0,4,1)【老師動筆學生唸】，是不是(0,5,0)，那再來這個如果放這邊(1,0,4)(1,1,3)(1,2,2)(1,3,1)【老師動筆學生唸】(1,4,0)對不對，2 開頭，中間是 0,1,2,3，3 開頭 0,1,2，4 開頭 0,1，這邊是不是就(5,0,0)，那這種東西喔怎麼把它進到排列組合的領域？你發現它其實需要幾個加號?是不是這兩個位置其實就是它的什麼東西，是不是加號，對不對，所以這時候有人想到說我如果再加兩個加號進來給它，就變成，顏色好像都一樣換一個，變成 1,2,3,4,5,6,7，多了兩個什麼符號，是不是加號，然後你看喔，如果我取這兩個，那就多少，是不是兩個加號的位置佔掉它，就(0,0,5)，(0,1,4)，2,3，3,2，4,1，是不是 0,5 了【口誤】，如果第一個站這邊，這個位置呢是不是(1,0,4)，(1,1,3)(1,2,2)(1,3,1)(1,4,0)，2，中間是 0,1,2,3，3 的時候中間 0,1,2，4 的時候就(4,0,1)(4,1,0)，這是不是就(5,0,0)，所以有人就想到說，ㄟ那如果這樣我就可以把它變成什麼樣的題目就好了，變成什麼樣的題目就好啦，x+y+z 就變成 7 個裡頭加幾個，是不是取兩個?為什麼它是 7?它 7 哪邊來的？五個 1 在兩個加號，這樣是不是變 7 個，那個 2 代表什麼符號？加號嘛。是不是就出來啦，那種數學上的感覺可不可以抓的到？有沒有？

(clip5)T：所以像這種是人的一個巧思，所以有時候你去看古代，從當初的那個 polya 他們當初的一些發展過程來講，這不是你一夕間可以想的到的嘛，這可以體會吧，所以你像這題目上，老師改個數據給你看看，看你有沒有有點感覺喔，x+y 假設等於 7，那你想答案你要怎麼做? C_1^8，你可以看到答案嘛，x 可以 0,1,2,3,4,5,6,7 嘛對不對，如果 x+y+z=7，那就變多少 C_2^9，那如果 x+y+z+u=7 呢? C_3^{10}，對不對，那種感覺可以抓的到吧，其實那底下就是那什麼符號，加號嘛。

(clip6)T：所以像剛剛那個題目上寫出來就變成你相同禮物，分給 k 個人，那其實像這種題目上要怎麼去做它？也就是說你如果碰到這個數據我們來探討，能夠寫成 $x_1+x_2+...+x_n=k$ 的，這種所有的解那要怎麼做？所有的非負整數解可以含 0 嘛，剛我們在講是不是有涵蓋 0 的概念，可以吧，那你想它解法多少種？應當是 C 的多少，它這個題目上有個特性它加號有多少個，(n-1)個嘛，1 有多少個，有 k 個，那剛剛我們是怎麼做的，這應當是這兩個的和對不對，(n+k-1)，取多少個(n-1)，C_{n-1}^{n+k-1}，你如果要背，這你如果懂它當然是很容易阿，對不對，那有些人是覺得說，你有時候你慢慢體會到有很多很偉大的數學因為他們數學家本身都很聰明嘛，所以他們會想到一個讓他很容易去記它的方法，就很像我們上過微分的概念，牛頓是不是呆呆的去找，那每個人都知道可以這樣用它，那這個時候它真正道理你就發現到這變成什麼型態，10 個抓 3 個跟 10 個抓 7 個有沒有一樣？一樣嘛對不對，所以這時候它改寫成什麼型態 C_k^{n+k-1} 看起來比較漂亮一點點，k

看起來比較舒服嘛，那這個東西好不好背?不好背，所以人類就創造了一個符號，創立了一個符號，這個符號的目的是要做什麼，讓大家比較容易記嘛，所以有些符號你懂得它為什麼而來，他就想到說 H_k^n ，所以我現在令重複組合的時候，不講這個符號也可以啊，那你原理要真正的懂啊，這樣懂不懂，那你如果說有這個符號，其實它跟那個 C 的時候有點一樣，這一定是相異嘛，這一定是什麼概念，是不是相同，5 個我抓 3 個這是不是相同，那 H 同樣有這個類似的感覺，這一定是有好幾類對不對，三個我是不是甲乙丙三個人剛好五件，這五件是不是就相同那種感覺，對不對，但有時候你記這個符號你要懂得它就是這種意思。

(clip7)T：所以我們來看一下像那個剛我們在講的這個數據喔，你看，如果我在做 x+y+z=7，我想我們如果以直接的解法怎麼來做， C_2^9 ，這個 9 就兩個加號七個 1 嘛，這樣懂意思吧，這個 9 就是加號兩個，然後這個 1 有幾個，7 個，那合併是不是 9 個，那這個 2 呢，就是加號有幾個兩個，那這樣是不是做的出來啦，那其實它整個數學涵義就是這樣一個意思，那會有這種巧思並不太容易嘛，不是你有就一下就想到的啦，懂不懂，好，那你再看，如果用公式的解法來解它是怎麼做？看喔，它就 H_7^3 ，按照這個模式對不對，公式阿，n 個阿，是不是 7 個，那你就要懂得這個公式要會背阿，變成多少，相加是不是要減 1，那如果你會這個不會背這個公式還是沒有用阿，所以到底要不要背公式你自己做隨你阿，這樣可以吧，那就是變成多少 C_7^9 ，那還要再轉回去其實跟這個都一樣 C_2^9 ，有沒有一樣，所以你慢慢就發現重複組合其實就這種一個概念，其實我們那時候在探討就發現相異的取相異的對不對，可重複不可重複，那一定都有排列那種感覺嘛，那如果說它本身有抓出來是相同，可重複不可重複，一個是不是叫組合跟重複組合的概念，這樣懂意思吧，懂不懂，所以這就是所謂重複組合的概念，好這樣可以想的通吧，可以吧，所以通常有時候什麼時候用重複組合來做，你就發現一定是類似可以寫成這種型態的題目，才可以做它的什麼，重複組合喔，一定是寫成它的這種形態才可以做重複組合喔，不是什麼題目都可以用重複組合來做，那我們用一些例子來驗證一下哪些可以用重複組合來做哪些是不可以的，那種感覺可不可以抓的到，可以嗎？這樣講聽懂不懂，有沒有好難？其實重複組合就這樣一個很獨特的一個想法就出來了，來我們先看講義的第三題來。

(clip8)T：28 頁的第三題來看喔，它說相異的禮物分給五個人，三件相同禮物分給幾個人，五個人，那每個人可以重複取得的方法是多少種？那每個人最多一件的方法？你看這題目上有區隔可重複跟不可重複嘛，對不對，那它本身的取法有什麼共同的特性，它可以是 0 對不對，有沒有涵蓋 0，有，這概念要懂。所以你

看像第三題你要怎麼去寫這個題目？相同的五個禮物，三件相同禮物分給五個人，那表示什麼意思，這五個人剛好分成幾件，它可以重複嘛對不對，所以表示 x+y+z+u+v=3，等於 H_3^5，那這做到最後就變成 3,4,5,6,7，其實就 C_3^7 是不是就一樣意思?寫顛倒了，公式是 3 然後它變成等於 4，跟直接做法完全一樣，四個加號 3 嘛，3 是中間再放四個加號進去，是不是同樣意思。那像第二小題每個人最多一件表示它可不可以重複，可不可以，不可以啦，它不可以那要怎麼辦？不可以那你想要怎麼辦？每個人可以重複的東西，那第四題呢？喔第二小題還沒講完喔，那第二小題這個題目上變成怎麼樣啦，C_3^5，五個人是不是抓三個人出來，各給他一個禮物，所以什麼叫重複組合什麼叫組合，這兩個的關係要稍微拉開一點點，這可以拉開吧，可以吧。

(clip9)T：好那再來，我們來看一下第四題這一題，三件相異的禮物分給幾個人，五個人，ㄟ這相異相異就有點什麼樣的感覺，是不是排列的感覺，有順序性的是排列，沒有順序性的是組合，就抓過來組合那種感覺可以抓的到吧，所以你看每人可以重複取得的方法變多少 3^5 還是 5^3 ？5^3 。第一件禮物是不是有五種分法，我們講說可以重複的是在哪邊底下，比較重的在底下嘛，唯一的是不是在上面，那第二個呢？P_3^5，這樣是不是就出來了。那種感覺可以抓的到吧，所以重複組合本身是一個好像很簡單又好像蠻難的一個東西，懂不懂它整個一個人家在發展它的邏輯的概念怎麼想出來的，那這種東西你要比較虛心一點對不對，看看人家當初怎麼把它研發出來，怎麼把它給想出來，這可以理解吧，可以喔。好那我想老師就把一些整個我們在念排列組合，大概會碰到一些問題老師幫你做一下分析，然後慢慢來把它想一下，可以喔。

(clip10)T：其實你要慢慢去懂得說排列、組合、重複排列、重複組合它的差別性在哪裡，那哪些可以用這四個解出來，哪些不可以解出來，這樣懂意思吧，來慢慢聽喔，這邊已經算是在收尾的動作了，這邊講完以後其實排列組合已經都結束了，可以吧，剛好就結束了，你看喔，我舉個例子來講喔，相異的五件物品分給比如說 7 個人，那這種分法有多少種？ㄟ這個題目上喔，它當然是可不可以重複？第一種，它如果可重複那怎麼辦？不可重複，那這邊是可以重複第一個答案應當是多少？

S：P_5^7。

T：那第二個呢？

S：7^5。

T：是不是好像答案都對對不對？是不是這樣，好那再來問題就來啦，相同的五

件物品分給比如說分給 7 個人，那不重複你要怎麼辦？是不是 C_5^7 ，抓五個出來每個人給一件，那如果底下呢？可以重複阿，H 多少， H_5^7 ，是不是應當這個數據，那感覺可以抓的到吧，可不可以？對不對？ $x_1, x_2, ..., x_7$ 分得幾件，是不是分得五件，對不對啦，這樣可以嗎？

(clip11)T：再來問題就來了喔，這東西你會才怪喔。如果今天它是相同的五件物品，分成三堆，放到三個相異的相同的箱子，還有一種是相同的五件，這種稍微少一點點對不對，還是你取它五個它三個，那我們到時候看哪些可以做，五件物品對不對，放到相異的，ㄟ剛剛講相同相異對不對，那這邊相同這邊相異，是不是相異放到三個相同的怎麼樣呢，這個就真的是有點難度啦，放到三個還有七個，這懶的去想也是三七，好那像這種題目上要怎麼去做它？你發現東西有相異相同對不對，其實最難的是後面那一個，大家保證都會抓狂(台語)，ㄟ來老師讓你看一下一件事情喔，它不可重複對不對，它不可重複怎麼樣，它有七個，是不是七個相同的箱子，慢慢看喔，1,2,3,4,5,6,7，然後五件禮物分給它那你要怎麼做？這有什麼好討論的，這裡頭有五件全部都放一件，其他是不是兩件是空的，所以方法數只有幾種，一種啦。對不對，對不對？這有時候有點耍智障的題目很多人還是會上當喔，對啊，它不重複阿，那就七個都一樣的箱子裡頭對不對，有五箱都放一個，有兩箱是不是就沒有，這答案應當是多少，1。所以這種題目上本身喔如果真的考到喔，很多人還是會錯，好啦，真正要講的是這一個啦，三個相同的箱子那怎麼辦？所以這個七的我們就帶過去就好了喔，不要把它講得太正經八百，可以吧，就一個啦喔，那像這種題目上，能不能夠用這些來把它給克服？你如果可以，那你就太偉大了，懂不懂，所以我記得當初老師有講過，那個在重複組合前面有講過說有一招，笨笨的一招慢慢慢慢討論，對不對，那如果碰到這種相同相同，你看排列組合喔一定是相異相異對不對，是不是相異相同，有沒有那種感覺，對不對，所以這種題目上老師跟你講沒什麼招，你就怎麼樣，無比的耐心跟信心，慢慢做，那就是變多少(5,0,0)(4,1,0)(3,2,0)，還有呢(3,1,1)，這是不是都不一樣，還有呢(2,2,1)，還有沒有，沒有啦，好像沒有了，所以這種情況下是不是只有慢慢去探討它，我現在是講完最後這個部份幫你把整個做一下分析啦，這樣可以聽的懂吧，好那我們來看像這種東西，可以重複的怎麼樣呢，阿這個東西其實不可重複，阿老師寫錯了啦，這些東西就是怎麼啦，這些東西如果上面就七個只有一種，那如果放到三個有它，三個已經有點什麼樣的概念，有點重複的概念，所以它就變成可重複對不對，那就變成剛剛講的哪幾種方式，是不是變成(5,0,0)(4,1,0)，這種東西喔其實哪裡像排列組合，是不是就慢慢探討，這在考你的智慧跟耐性(3,2,0)(3,1,1)(2,2,1)，是不是剛好就做出來，是不是就五種？

(clip12)T：好再來，再來相異的五件物品放到三個相同的箱子，這就有點難度

了，這真的有點難度，考試考到這個區塊喔，會對的其實並不多啦，五件物品，放到七個相同的箱子，ㄟ這方法是幾種？這個方法是有幾種？是不是也是只有一種？七個箱子嘛，對不對是不是都一樣，那最後是不是咚咚咚咚把它丟進去，然後另外兩件是空的是不是只有這一招，所以它方法數還是多少，1。那最後我們探討這個東西，來，唉這個東西到現在目前有沒有什麼解法？有沒有什麼解法？沒有啦，所以有些老師心眼壞一點點就會考你這些啦，然後每個人就開始往那洞裡頭跳，什麼 C 啦重複排列重複組合啦，排列啦組合啦通通都不對啦，那這個題目上大概只有什麼方法，就是只有這個怎麼樣呢(5,0,0)還有多少(4,1,0)，還有多少是不是(3,2,0)，還有多少(3,1,1)，還有多少(2,2,1)對不對，對不對，那這個題目上你就發現你這個東西要怎麼做，$C_5^5=1$ 方法只有一種，那因為三個箱子都相異嘛對不對，那這個就變成 $C_4^5C_1^1=5$ 五種，那這種東西呢 $C_3^5C_2^2=10$ 就是十種，這個就會有問題，這要怎麼做? $\frac{C_3^5C_1^2C_1^1}{2!}$，因為它今天假設是 ABC,D,E 跟 E,D，對它來講是不是完全都一樣，所以它的方法數變成等於多少 10 種，這個呢 $\frac{C_2^5C_2^3C_1^1}{2!}$，因為 AB,CD,E 跟 CD,AB,E 對它來講是不是都ㄧ樣，所以這個題目上無比的耐心算出來以後它變成等於多少 15，那就只有利用到 1+5+10+10+15 加一加答案變多少，是不是就 41，那答案是不是就跑出來了。

(clip13)T：那其實我們在高中裡頭所碰到的題目喔就只有這一些而已，只有這一些而已，這一題會吧？ㄟ你這邊如果真的聽懂，大概就沒有多大的問題了啦，所以這些你如果真的高中在探討的排列組合就只有這些東西，那比較正規的應當是只有哪些而已，只有這個區塊而已，這一段才是真正排列組合想要探討的部分，也就是說它已經變成有規律性的部分，那這個部分其實已經怎麼樣呢，不在排列組合能夠操作的範圍，跟樹型圖是不是幾乎沒有兩樣，可以抓到那一點點數學上的感覺嗎？其實念數學有時候要抓到它真正的一個感覺，這老師跟你做一個說明的動作啦。平常你們在考試這個都不會錯，這個也知道它 C 大取小，H 怎麼呢異同，大概都可以，但是如果碰到右邊的題目上就開始胡思亂想，相同相同數學上沒有解法我們都可以接受，就只有慢慢討論，但碰到最右邊那個通常都掛掉，這邊就寫個什麼 C_3^5 啦，然後就標準錯誤答案，你這樣懂不懂，可以體會喔，可不可以體會，所以如果可以重複呢，這個地方一定可以寫成多少型態，這邊喔七個人，就可以寫成多少型態 $x_1+...+x_7=5$，要寫成這種型態的題目上才可以怎麼樣呢，用這個東西來做，那你有時候看這個題目上你寫不出來，對不對，能不能寫成那種型態，寫不出來，三個箱子裡頭，是不是第一個箱子第二個箱子第三個箱子才是等於有五件嘛，不是這樣嘛，對不對，所以其實最難的部分喔，考試

有老師心地壞一點點就會專門考這個區塊，那這種區塊有時候比較會有爭論，是不是比較會有爭論，可以吧，重複組合前面老師講的拉哩拉雜的就是在講這些特殊的處理模式，聽懂不懂，那排列組合就「ㄕㄨㄚˋ」就結束了，真的就沒有啦，然後再來就屬於那些比較零零雜雜的題目阿，那種感覺可以抓的到吧，並不是什麼題目你都可以做，所以有時候你假設問老師說這邊假設有 20 件相異的禮物，分給七個相同的箱子，我說你回家慢慢做嘛，這樣懂意思吧，那這跟樹型圖一樣是一個高難度，看起來是很簡單其實就是要無比的耐性慢慢去做的一個題目。這個不會錯啦，這個不會錯，就是會錯這個跟這兩個區塊會錯，相同相同就只有慢慢做應當也不會有問題，就這兩個題目上稍微謹慎一點點，可以吧，懂得道理要知道什麼題目上怎麼去解它，我們上課很少去教這種比較特殊觀念性的題目啦，但是因為這個地方真的是錯得太離譜了，所以我想還是要跟你講解一下，這樣可以吧，可以喔。

(clip14)T：那老師在最後在補充一樣東西喔，那個題目上已經算是有點課外的喔。相同的怎麼樣呢，用重複組合這邊講一下概念，也有更難的題目上是這樣，比如說相同的七件禮物七件物品，分給三個人，對不對，可以剩下，也就是說它有沒有七件都一定要把它給分完？那這種題目上真的是有點怎麼天殺的啦，誰想的到，那有人可能會想到這個方法，x+y+z=0,1,2,3,4,5,6,7 對不對，對不對，我可能分一件、不分、1234567，是不是全部都拿走，那你如果用這種方法慢慢討論它變成什麼情況下，H_0^3 H_1^3 H_2^3咚咚咚加到多少是不是H_7^3，那這解出來是不是天都快黑掉了，是不是這樣，那這種東西有沒有什麼想法可以克服它？你聽老師講一下喔，講了以後我們就把它結束掉告一個段落囉。ㄟ這種東西有人想到這個方法，甲乙丙小於等於多少 7，對不對，來，純欣賞用的喔，有人在想到這一招 x+y+z+k=7，為什麼，當 k=0 的時候是不是就這一種？0,1,2,3,4,5,6,7，0,1,2,3,4,5,6,7 k 嘛，對不對，所以如果沒有分完的題目上其實都還好，就是等於多了一個，是不是多了一個，所以這種題目上的解法就怎麼去做它，$H_7^4 = C_7^{10} = C_3^{10}$是不是一樣的道理？可以吧，那我想整個重複組合到這邊應當是告一個段落了，有點難喔，稍微想一下稍微想一想，像這種題目上老師跟你講過已經到達極限再超過難度整個數學上沒有多大的含意，可以嗎？那些甲至少一件兩件那些東西我們後面再來說，那些都已經沒有難度了啦，所以我想到這個地方就可以結束了，可以吧，那有一種喔怪怪的題目啦，甲至少一件啦，那像這種題目上至少一件那類似這種東西，我想等我們碰到這種題目上以後再來轉一下彎這樣就可以了啦，對不對，所以老師跟你講其實整個排列組合就學這些東西，那你如果說變化很複雜，但是又不多的部分可以引進什麼概念？樹狀圖的概念，那有些比較尖端的題目上可以引進什麼概念？是不是排容原理的概念？這樣懂不懂？那整個數學就這樣一個架構而已，可以吧，還有什麼問題把它想一想，以後就可以見招拆招，可以解盡

所有任何的題目都可以做出來，可以吧，什麼時候排列什麼時候組合，重複排列重複組合，你這邊如果把它想懂至少考月考可以考個還不錯的成績出來，雖然老師最後再補充這些東西有點功利，但是好像也是非這樣教你，排列組合看起來很簡單做起來其實都很難，那如果那種超出排列組合領域的範圍，我想並不是你所能夠一下就想出來的，稍微抓到有這種的心態，不要以為什麼題目都可以做對不對，這樣可以嗎？好啦，那我們來把講義的題目上操作一下，來，我們就從 28 頁，唉快下課了，還有一分鐘算了，所以再來我們就操作一些題目上，那我是要跟你講一下喔，重複組合的概念就這樣而已，我們後面的操作是這些東西怎麼去把它，老師就後面題目再講。

(clip15)班級經營

附錄二(4)：2010 年 6 月 2 日教學影片轉譯稿　【數學期望值第一節課】

(clip1)班級經營

(clip2)T：老師跟你們解釋一下什麼叫期望值，期望值的全名叫做試驗的，叫做數學期望值，那這邊我跟你講一個基本概念喔，教數學唸數學的都稱它叫期望值，然後唸物理的都叫數學的期望值，因為它不太相信這是真理啦。那有些人把它想的更誇張一點的是什麼，試驗的數學期望值，所以這種東西是一種很理想化，像那種柏拉圖的世界，那種非常理想化的東東啦。

(clip3)T：那我稍微舉一個例子跟你講一下喔。我假設丟一個銅板，正負兩面的銅板，在數學想法裡頭，我丟兩次應該是怎麼樣？為什麼叫數學期望值？這樣丟兩次以後，應當是一個正一個怎麼樣？負的……，ㄟ這樣可以理解吧？我丟兩次應該是一個正的一個怎麼樣？負的，所以它平均有正的會幾次？一次，那這個叫它本身的什麼？好像一種期望值的概念，對不對？好像又有點像是平均值的概念，我如果丟四次，你看如果說丟兩次，應該是它正負各一個，那如果丟四次的呢？數學的期望值，為什麼強調數學期望值？理論上正負應當各幾個？是不是各兩個？那如果丟六次呢？應該是一，理想應當是三正還有多少，是不是三負，對不對？那比如說它要求正，正面次數的一個期望值，那它這是變多少，一，它就是變成二，它就變成多少，是不是變成三，我們再來玩一個情況下，丟骰子，丟骰子你會發現到什麼狀況？理論上強調數學期望值，試驗的期望值，也就是說當我丟六次，理論上會呈現像這樣，一二三四五六，各幾次？是不是各一次？對不對？所以我丟六次以後，得到六點的期望值應該是多少？是不是一次？那如果假設只丟一次，你想你要算幾次？是不是六分之一次？你可以體會那種感覺嗎？那如果說我今天假設，抓到這邊的時候給一百塊，抓到這兩個給三百塊，抓到這個給三千塊，對不對，那老師問你一件事情，我假設丟六次，你可以得到多少錢？照理說他有三次得到多少錢 100 塊，會有兩次得到多少 300 塊，會有一次得到多少是不是得到 3000 塊，那這個就是你丟六次的怎麼樣？期望值，我丟六次以後期望值應該是這麼多，那你看它算出來以後這邊是 300，再加 600，再加 3000，那應該是三千多少？是不是九百塊？那我平均一次多少？平均一次要把它整個除以多少？除以多少？是不是除以六？它把它除以六？對不對？那答案是不是變成多少？650 塊錢，這個是不是就是你的一個丟一次的一個平均值?那這種東西我可以把它寫成這樣，來你看喔，這種我可以把它寫成$\frac{3}{6}\cdot 100+\frac{2}{6}\cdot 300+\frac{1}{6}\cdot 3000$，那你看這個題目上我可以慢慢把它獨立算，這邊是五十塊，對不對？這個是多少？100 塊，是不是一百五拉？這個是 500 塊，所以加起來才會是 650 塊，這個其實就是它的什麼，好像是一個平均值對不對？那平均值是不是就又是

一個什麼值？其實你慢慢可以體會到，這個平均值是不是就是它的什麼值？是不是就它的期望值？是不是就是它的期望值？所以你慢慢可以體會到什麼叫做期望值的概念？這可以接受吧？可以吧？可以喔。所以有時候你會覺得說什麼叫做期望值，期望值就是一種算術平均值。那我想這樣有了這個概念以後，其實這個題目上做起來就會非常的怎麼樣，方便，不要把它想的太複雜，期望值其實一下不小心就上完了嘛，可以嗎？

(clip4)T：好我們來看一下講義 20 頁這個部分喔，這個我們來看一看像這個狀況，它說喔，某項試驗的樣本空間用這個來當例子，它的點數可能一二三四，對不對？每個樣本點它是不是一二三四五六？各對應到一個，它對到一百塊，它對到一百塊，它對到一百塊，它對到三百，它對到三百，它對到多少，是不是就六點是對到三百塊，ㄟ這種文字上的定義稍微了解一下，樣本點是不是有六個對不對？每個樣本點都對到一個值，這就是定義上 w_1 、 w_2 、 w 多少？3， w_4 、 w_5 、 w 多少？ 6，那是不是對到一個值叫做 m_i ，對不對？這就 $m_1m_2m_3m_4m_5m_6$ 是不是對到一個數據，可以吧？那你就發現，反過來講，100 塊所對的機率是多少？是不是 $\frac{3}{6}$ ？300 塊所對到的機率是多少？ $\frac{2}{6}$ ，3000 塊所對到機率就變成多少？是不是變成 $\frac{1}{6}$ ？對不對？然後它說，你把它 $p_1 \cdot 100 + p_2 \cdot 300 + p_3 \cdot 3000$ ，所得到的數據稱做該試驗的數學期望值，什麼叫數學期望值？所以你在做題目上的時候，你內在的世界就想說它是平均值的概念，這樣就好了啦，所以老師跟你講喔，來，丟骰子一次的平均的期望值是幾點？丟六次是 21 點，對不對，平均一次是幾點？是不是 3.5？老師當然直觀的想它，我丟兩次它的點數應該是多少？對不對？這樣懂意思嗎？比如說你考學測，考一科的期望值是十五，那你考兩科就多少？三十阿，考三科，四十五阿，那考四科就六十，考五科就多少？七十五，然後這樣就夠了阿，對不對？所以這種有點平均的概念，這樣是不是可以完成它。好，這樣可以接受吧？什麼叫期望值這樣懂了沒？它是一種純粹烏托邦很理想化的那種數學，那這期望值為什麼它有存在的一個必要？有很多人喔，就覺得這種東西應該是不會剛好是這樣，但是經過很多實驗以後，比如說有人做實驗，就丟銅板丟了多少次，十萬次，你就發現其實怎麼樣，正負大概是五萬次左右差不多，那誤差不會太大，所以如果它這種很大的數，也就是在大數法的情形底下，這種期望值是可以被肯定的，可以接受吧？所以，這種只是一種數學上的一種自然界的一種反應，所以像比如說以後你假設去當醫生，會有所謂開刀的什麼失誤率，嗯，比如說有些人要去做什麼腦神經外科的醫師啦，對不對，那她會有講說失敗率是多少，可能跟你講說 2%，那它可能是怎麼樣，台灣近幾年來在開，比如說開了一萬個，那剛好又有二十個掛掉，對不對？那這樣就是，如果兩個掛掉那就是萬分之二嘛，那如果是二十個出問題，喔比如說開了以後會有失敗的案例嘛，對不對，那百分之二那表示一萬個會有幾個？兩百個，你就想說你不會那麼倒楣對不

對？但是你會聽到還是有這種案例在嘛，那這種東西就是變成所謂它的期望值，也就是說它把轉換成那種數據，你的期望值你成功的機會是百分之 98，喔那種東西就變成期望值那種感覺，也就是機率也是一種期望值，你成功康復的機會，期望值是多少，一個是 0.98 那種之類的一個概念，這可以吧？所以我想有很多那種東西你不要去把它想得太複雜。

(clip5)T：好再來看第一個來，期望值喔，其實就是一種算術平均數的概念，這可以接受吧？所以期望值你如果真的不會算，你就用到什麼，國小的算術平均數的去算它，答案其實就是對的，喔但是它有更重大的一個使命在後面會被用到，所以我想說很多那種倫理背景還是要懂。那第二個比如說丟一個骰子點數期望值是多少，它說理想化丟六次，一二三四五六，所以各幾次？一次，所以平均一次是多少？3.5，那我想因為這種題目上有個現象就是說，我們現在目前假設沒有講到第二段，那每個題目算起來都很可怕，你看第二個，本次試驗成功的機率假設是 P，你這時候 n 次試驗的期望值就變成等於多少，是不是就 np，還有操作一次的數學期望值 k，操作 n 次的數學期望值變多少，是不是 nk？那底下有個非常經典的一個證明，ㄟ這個證明喔屬於蠻經典的一個證明，稍微看一下喔。ㄟ這古代人喔其實是充滿先人的智慧，真的啦，有時候你能想像他們幾百年前是這麼厲害，不要想說幾百年前他們還穿著獸皮在那邊亂跑，他們數學都比你還要厲害了對不對？你看他們的證明，$k \cdot C_k^n = n \cdot C_{k-1}^{n-1}$，底下就是它的證明，然後它底下，比如說成功的機率是 p，失敗的機率是 q，那 p+q=1，那 n 次試驗成功的數學期望值是多少?以它本身是$0 \cdot C^n$乘上它的機率嘛，那再來是 1 乘以它，然後利用到上面的數據把它 n 給抓出來怎麼樣，就得到這堆數據，再用二項式定理證明它等於 np 嘛，一個蠻，蠻獨特的一個操作模式，那因為這個證明本身啦，我們今天在上這有點跳著這樣過去啦，那因為這一段的部分，因為它屬於它前一頁前一兩頁這邊的東西，可以吧，那我想我們就稍微先相信它是對的啦喔，因為你仔細看它也都是都沒有錯，對不對？二項式定理嘛，所以你如果懂這概念，我們來看第一題來，你這邊老師就坐著上課就很輕鬆拉，你自己動大腦把它想一想吧，把它想一想，你從那個算術平均數的角度去看它喔，不要把它呢搞得很緊張，然後腦子充血，大腦都想不出來。

(clip6)T：兩個白球，三個紅球，抓一個球，老師問你，我抓五個球會抓到幾個白球？兩個阿，那我抓一球的時候阿，期望值會變多少，五次有兩次白球，平均一次是多少？是不是就是$\dfrac{2}{5}$？那如果你，所以這種你從平均值的角度來看，五次白球幾次？是不是就兩次？所以平均的時候變成多少？是不是$\dfrac{2}{5}$？那如果從另

一個角度來做，你看喔，白球次數的期望值要怎麼辦？抓到白球的機會，抓到沒有白球的機會是不是抓到什麼？抓到紅球是不是就$\frac{3}{5}$，這白球 0，抓到$\frac{2}{5}$是不是乘 1，定義是不是這樣來做它。那如果抓兩次喔，ㄟ從剛剛的直觀來講，就變五分之多少？是不是$\frac{4}{5}$？那你如果說沒有這概念你怎麼解這個題目，那就變成很有學問了喔，你看，所以跟你講第二段主要是要跟你講一個概念，因為它如果抓兩顆球，可能是什麼球？可能是什麼球？紅紅、紅白、甚至可能是白白，對不對？那你會發現這個白球機率 0 的機率，對不對，這個 0 顆白球它的機率是多少？2 顆都紅球的機率是多少？來我們慢慢算它，C_2^5，然後再來呢，C 多少？是不是C_2^3？那做出來是不是就$\frac{3}{10}$？你就抓 2 顆阿，2 顆都紅球阿，對不對？那再加上中獎一顆的機會是多少？三取多少？一　，二取一，是不是有六種？這邊是得到幾顆？1 顆，再加上兩顆都白是十分之多少？二取二一，是不是$\frac{1}{10}$乘以 2 顆？那你把它加一加答案是多少？$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$，答案就變五分之多少？四，一樣是不是可以把它給完成出來。ㄟ你在這邊的時候你慢慢會體會到喔，為什麼它要用機率去把它給呈現出來？慢慢有沒有抓到那感覺，因為我假設沒有白球的情況下，是這一個，我就可以不用像剛剛一樣把所以狀況都怎麼樣都列出來，你列出來是不是有十種不同的狀況，操作起來是比較囉嗦，你們都很聰明喔，所以大概都抓到那種數學上那種感覺，為什麼它把它轉成p_1乘以它的m_1，p_2乘以它的m_2，p_3乘以它的m_3，懂意思吧？所以你可以這樣慢慢來算，但是你會覺得這樣算起來會很辛苦，因為當它假設它要抓 3 顆球的時候，妳就想要抓狂了對不對？有沒有抓到那個感覺？那或者它本身的狀況多一點會更難過，所以在數學上其實就是說它的起步是從算術平均數這概念去引導進來的，那你可以從機率慢慢操作操作操作這樣把它給操作出來，那更快速的方法就是直接利用到什麼，np 的概念，是不是整個就把它導給出來？那因為這一段本身在高三的時候還會再重複重疊一次，但是那時候所講的會比較更深一點點，所以數學本身是螺旋式的東西嘛，你越往後面學它，你的層次就越高，解題能力當然就越強，這樣可以嗎？聽得懂喔？好再來，我們來看 20 頁這邊。

(clip7)T：ㄟ今天搞不好一節課不小心就被老師把數學期望值給上完，雖然老師也沒有準備說要上這一段，但本來這個東西上起來就很快嘛，來，看到 20 頁來，你挑一個解它其實就夠了啦。第二題，我們慢慢來想喔，9 個紅球，3 個白球 選取的機會都均等，ㄟ老師問你，我如果抓 12 顆，理論上有幾顆白球，3 顆，是不是有 3 顆，可以喔。那老師問你一下，所以這個題目上理論上假設抓 12 次，它的期望值是不是有 3 次白球，所以它期望值做出來答案應該是多少？是不是

$\frac{1}{4}$？那取兩顆的機率應當就變成多少？是不是$\frac{1}{2}$？這答案是不是了啦。好像沒有想像的難嘛，ㄟ這樣可以接受吧。那如果說你不要這個方法，老師用定義的方式做給你看，你就會產生這個問題，因為它紅球有紅 1 紅 2 到多少，紅色的 9，白色的假設十號到十一號到多少？是不是十二號？是不是這個樣子？任取一顆，你就可以發現白球 0 顆的情況下，ㄟ老師寫顛倒過來，其實這個東西有時候有人講說要很硬梆梆的寫它，那老師故意把它寫成顛倒，這樣其實也是一樣，你 m_i 乘 p_i 跟 p_i 乘 m_i 其實是一樣，但是習慣上它的定義是$\frac{9}{12}\cdot 0+\frac{3}{12}\cdot 1$，你看乘出來是不是也是等於$\frac{1}{4}$，那如果抓兩顆球會有什麼現象？兩顆都是紅球的有多少種？C_2^{12}，C_2^{9}，一顆紅球的個數，就是C_2^{12}，加上兩顆的就是C_2^{12}還有多少？3 取 2，你看它做出來的答案應當還是多少，$\frac{1}{2}$，應該可以接受吧？你如果不信我們來做看看，這做出來以後是 66，這做出來是多少，27，這做出來以後是 6，這個答案還是$\frac{1}{2}$了，有沒有？所以表示剛剛那個證明模式理論上沒有問題啦，可以喔。好啦，這只是一個，傳統式的一個解法，那這是一個比較利用到算術平均數直觀的想法。

(clip8)T：好再來第三題叫你們算，好第三題，挑戰自己的，看看來，挑戰看看，看看答案能不能一下就把它寫出來。一袋中有 50 塊錢的硬幣 3 個，10 塊錢的硬幣 3 個，5 塊錢的硬幣 4 個，一共有幾個硬幣？10 個，它總數多少？150，30，20，200 塊對不對？好來第一個答案多少，20 嘛，第二個呢，40，是不是「ㄕㄨㄚˋ」。可以吧，沒有想像那麼可怕啦。

(clip9)T：來第四題來，這聯考的題目，它就是一個概念而已，ㄟ李○○算出來了哦，她說 10 塊錢對不對？那其實我們可以怎麼想它，慢慢再把它給靈活一點點喔，9 個硬幣，4 個 1 塊錢其他 5 個是同值，袋中抓一個硬幣的期望值，9 個變多少?抓一次 6 塊錢，9 次當然會是期望值多少？54 嘛，然後總錢數要 54 阿，那 4 塊錢呢？1 塊錢是不是有 4 個，4 塊錢，對不對？那其他 50 塊錢是不是五個硬幣？每個硬幣幾塊錢？是不是 10 塊錢？所以有人假設說，把這 5 個硬幣的錢假設是 K，那就 5K 加上多少 4，除以 9 剛好是等於 6，那 K 做出來等於 10，如果你從上面的算術平均數的概念去解釋它，整個答案是不是就對了？可以吧？ㄟ老師這樣子直接從前面跳攻過來，獨立這樣講它還可以接受吧。

(clip10)T：好吧，那第五題來，這一題就有點算有點變化啦喔，數學期望值，1 人的機率 50%，2 人的機率 25%，3 人的機率 20%，4 個人的機率是多少，5%，

對不對？你看它是不是照這樣寫嘛？$\frac{1}{2}\cdot 1$，$\frac{1}{4}\cdot 2$，$\frac{1}{5}\cdot 3$，$\frac{1}{20}$乘以多少？4，當然你可以把它想成 100 次嘛，有 50 次錯 1 個人，25 次 2 個人，對不對？那 20 次是 3 個人，5 次剛好幾個人？4 個人，一樣是不是可以求它的平均值出來，可以喔。所以這個情況下你可以看到你從平均值的角度來想它，也是可以做得很圓滿。你從硬梆梆的機率來做它，但是老師希望說喔，以解題的角度來講，用算術平均數會比較快，但是如果以未來的角度來講，那個原理一定要懂，這可以吧？喔，所以有些東西它在這邊講它總是有它背後的一個目的，來李〇〇算出來答案多少？1.8，對不對？哇我真的很崇拜你，你真的越來越厲害了！

(clip11)T：來第六題來，好挑戰一下自己做做看，你們真的是十項全能，從哪邊教都可以啦。1 號球是 1 個，2 號球是 2 個，3 號球是 3 個，n 號球是 n 個，25 號球是不是，25 個，2 號球，25 號球，那，1 號球可以得到多少？99 塊，2 號球可以得到多少？是不是 98 塊？ㄟ那取到 19 號的機率是多少？它球數剛好是多少個，1 加 2 加，加到多少，是不是加到 25？那這樣做出來是$\frac{25}{2}$乘多少？ 26，等於 13，做出來是不是等於 325？對不對？所以它第 19 號球的機率是這個多少，325 分之多少？19。第一小題的答案是不是就出來啦？那第二小題求它的期望值，那期望值，期望值就是它的什麼值？是不是算術平均數？好，那怎麼做這個答案，你會發現如果說你從那個平均值來算它，就變成 1，乘以多少？1 個 99 塊的，有 2 個乘多少 98，到第 K 號球乘以多少(100-K)，加加到多少？25 乘多少 75，ㄟ那這個題目上就有點什麼的味道啦，是不是$\sum$ 的味道。那$\sum$ 還有印象嗎？忘掉了啦喔。那完了以後，整個答案還要除以多少，是不是除以$\frac{1}{325}$，平均值是不是把它寫在前面嘛對不對？如果機率的角度來講，是把它寫說，要把它寫成多少$\frac{1}{325}$，$\frac{2}{325}$，$\frac{k}{325}$，325 分之多少?25，其實計算有沒有一樣？你看兩個其實是一樣，一樣的東西嘛，只是開始的寫法不一樣嘛，別人只是先把整個總數算出來再除以多少？是不是除以它的 325，那機率的算法是不是每個都$\frac{1}{325}$，$\frac{2}{325}$，提出來，是不是每個都一樣?所以有些東西是不同的一個呈現，但它做法其實是完全一模一樣的東西，這可以接受吧？好啦，那這個怎麼算？所以寫出來就變成什麼數據啦，$\sum_{k=1}^{25}k(100-k)=100\sum_{k-1}^{25}k-\sum_{k=1}^{25}k^2$ ，那這個公式忘掉了嗎？

$\sum k=\frac{n(n+1)}{2}$，$\sum k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，對不對，童年的回憶，陳〇〇這麼厲害也忘掉，ㄟ所以老師跟講喔，到高三，你會發現到一件事情，眾生平等，高一的

東西你還有記憶嗎？林○○你公式會背嗎？她也不會了啦對不對，所以一切重新再來啦，有沒有覺得？所以有時候老師跟你講到高三喔，真正的開始，就是大概畢旅以前回來以後，那才是人生的一個極限的一個挑戰，高一的東西大家都忘光了啦，所以，ㄟ你們這個時候不急著買一些書啦，因為北一女中的老師到高三以後，你看老師這種，好像和藹可親的，在高三有時候都會很粗暴阿對不對，就開始揍你阿，弄你很不喜歡的暑假禮物喔，對不對？現在開始在那邊累積了，我剛在那邊數那個，數那個，準備那個模擬考試卷題目有 100 多張，對阿，那就是把這些大概一年中那些東西會讓你回家做的，看到老師就開始畫叉叉啦，對不對，這種東西有時候，所以你不暑假開始做規劃怎麼來得及，所以老師跟你講喔，你不管高一高二變得怎樣，高三你可以重新來，喔所以老師時常講說社團忙完以後怎麼樣，靜下心來衝它個 8 個月，人生才開始，所以從前怎麼樣都把它忘掉喔。所以它做出來以後就變成 2 分之多少，25 乘多少 26，那做出來是不是 325？那這個數據呢，6 分之 25 乘多少 26，乘多少 51，那就 17 乘多少 325，我把 6 切割成這樣，對不對？那你做出來以後就變成什麼數據，你看原來這答案我寫比較亂喔，沒關係喔，這邊是 100 乘多少 325，扣掉多少 17 乘 325，那這約掉，約掉，約掉，做出來答案是變成多少 83，整個就出來啦，可以喔。

(clip12)T：所以你有時候會真的發現到是什麼，高一的東西都忘光了啦，你不要去跟學妹講說高二不要念了啦，反正高三你都忘光光了，高一不要念了喔……，疊合你現在還有印象嗎？$a\sin\theta + b\cos\theta$，最大是 $\sqrt{a^2+b^2}$，你就懂這個數據就好了，對不對？……，所以老師時常跟你講一個概念，那個在○○○○唸書實在是很辛苦，但內在要快樂，有時候瘋瘋癲癲也不錯阿，對不對？不要太ㄍㄧㄥ喔。

(clip13)T：好來第七題來，我們來看一下來，這邊開始就有點小難度了，一個箱中有五個紅球，兩個黑球，每次隨便從袋中抓一個球出來，抓出來以後不放回去，那取到紅球它就結束，那取球次數的一個期望值那該怎麼算？阿，這個不會了啦，老師用第六題稍微講一個概念就是說喔，有很多東西它期望值會融合到其他高一高二的課程進去，這是很合理，那用這一題，有時候我很怕你們說喔，阿反正我只會懂得平均值的概念，我其他都不理它，那如果萬一碰到第七題，還是會有問題喔，因為這個狀況它是每個取出來都不放回去，抓到紅球它就結束了。比如說萬一第一顆抓到紅球，那就停了，第二顆抓到紅球，那就結束了，你這種東西，它是不是一個用平均值概念可以想像出來的東西，它不是喔，所以老師才講說兩者有些題目上是，你用平均值的概念馬上就可以算出來，但是到某種程度以後，還是要有點它定義這種東西來做比較完整，懂不懂？所以有時候數學為什麼它很多理論背景還是要懂，道理就在這種東西啦，所以有時候唸書有些題目我們可以解得很快樂，有些也是要按部就班這樣來做。好，你就可以想到一個狀況就是說，假設一次的，那就是第一次取出的是什麼球？紅球，這個機率是變成等於

多少？是不是$\frac{5}{7}$？如果抓兩次的呢？白球紅球，黑球，那這時候它的機率就變成抓到白球，黑球的機率是$\frac{2}{7}$再$\frac{5}{6}$，對不對？對不對？我們已經有這個能力了嘛，所以是$\frac{5}{21}$。那如果抓三次呢？它是不是就黑黑還有紅，那它的機率就變成等於多少？$\frac{2}{7}$，$\frac{1}{6}$，再來是五顆紅球，那做出來答案是二十一分之多少？1。那你如果按照定義來做，那要怎麼做？一次的乘以多少？$\frac{5}{7}\cdot 1+\frac{5}{21}\cdot 2+\frac{1}{21}\cdot 3=$

$\frac{15+10+3}{21}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$，這個就答案跑出來啦，對不對？所以像這種如果它不是一個很均勻的一個狀態，因為它如果抓到紅球後面就沒機會了，這個題目上可能要慢慢想一下喔，因為突然間很快就直接平均算出來，碰的一聲兩倍三倍就算出來，然後突然間好像是你要利用到比較嚴謹的數學定義才能解出來的題目上，有時候突然間覺得好像不太能夠接受，要稍微想一下喔，這很多數學的東西喔，還是要懂得它該怎麼處理是對的。

(clip14)T：好那個第八題喔，它不是取球啦對不對，而是它的次數這種狀況。好吧，你如果想好的人就往第八題追它，沒有想好就再把它用力想一下。好，那個第八題呢，有甲乙丙丁四個人用一個硬幣先丟出正面的可以得到三十塊，ㄟ這表示什麼意思，甲蹦一聲下去可以得到幾塊？三十塊，乙呢？要甲失敗他才能夠成功對不對，像這種題目上妳可以慢慢去想它，這解法越來越多，其實慢慢就越來越開闊了。

(clip15)T：有時候這種題目上喔，有很多人都常問說要怎麼唸數學才會唸的好，昨天有一個高一教過的小朋友來找我，她就說，她覺得她花很多時間在念數學，那為什麼高一念的很好到高二變的很糟糕，我跟她講一個概念就是說喔，你數學要好第一個觀念要很清楚，然後第二個題目上要做得夠多，因為你如果考試，比如說十五題，有十題曾經做過，可能一下子就把它寫完了，後面的五題就怎麼樣，慢慢想慢慢做，那你假設題目做得少，只做了五題，十題，你要衡量的時間是不是比較多，你會發現考試寫不完，所以你通常考試寫不完，那最糟糕的是哪種狀況?拼命做題，做到最後你變成看過題目你才會做，但是其實這種學習的方式喔，以後考試會很吃虧，喔就是比如說我做了一萬個題目，好像什麼題目都做過，那萬一出一個你沒看過的題目呢，你還是找不到你的印象中在哪邊嘛，那其實是蠻辛苦的。所以有時候一些觀念還是要慢慢聽懂，阿下課啦。

附錄二(5)：2009 年 10 月 29 日與 11 月 10 日課後訪談轉譯稿

註：由於訪談內容繁多，故捨棄較不相關的問題與談話內容，僅截錄部分訪談轉譯稿。

10 月 29 日

Q：您的上課內容是如何安排的？

A：有很多我想要傳達的概念，並不會說一次就把它給教完，我可以在上第二次講的時候這邊就給它講進去，那她們的問題就可以當場給它克服，或者說她們在問習作的時候邊問邊答，不過○○○○的學生來講喔，習作通常都沒有問題，所以習作只是強迫她們去操作一些概念而已。

11 月 10 日

Q：為什麼您一直強調驗算？強調驗算的想法是從教學裡面來嗎？

A：因為她們一拿來考卷就會有很急迫的感覺，想要趕快把它給算完，算了以後都會有個特性，都會算錯，驗算你的速度會稍微慢一點，也是讓她們養成習慣，不要數學很像是在趕菜市場一樣，有時候你會發現太緊急的時候心要夠靜，然後就可以慢慢給破解掉，所以驗算會讓她的計算速度拉慢一點點，一方面來講確定它沒有錯，然後她就會比較有信心再往下做下去。所以我覺得以整個教學來講有這兩個功能，第一個不會錯，第二個讓她速度稍微拉慢一點點，因為在解題的時候太匆忙，算錯你在拉回來會浪費更多的時間，培養她們一個比較穩定的狀態去做數學。

Q：為什麼教學中會停頓個幾分鐘再繼續呢？

A：你數學要沈澱完了以後在出去才是你自己的東西。所以有時候是在拉她們的速度，但也要懂得這些概念。

Q：截距式這邊體積是否有漏加絕對值？

A：我在上這邊的時候都強調它是第一卦限，因為截距式本來就不在我上課的一個核心裡面，所以你看我當初上課的順序慢慢去抓它，我第一個抓它在第一卦限，然後講完以後學生都操作到很熟練了以後，那時候我就問她們一個概念，比如說(2,-1,3)，那她們就會知道從這邊拉到第一卦限來，你如果太多的東西就變成是在背公式，其實在整個解題上我完全沒有用到這個公式，我只是一直跟她們強調一個概念，你 x_0 以後，a 就變成它的三倍，b 就變成它的三倍，c 就變成它的三倍這個概念，那你任何的卦限就回到第一卦限來操作， 所以其實我在上課的時候，這邊沒有把它講到說正方向，其實應當是寫正方向就不用搞這些。

Q：當初在講平面族為什麼會想要先講 2-6？

A：這個平面族因為在學校補充教材和在很多考試中都會碰到它，那你總要把它觀念講懂，為什麼平面族長這樣，那沒有 2-6 你怎麼講清楚，所以我當初在

寫的時候本來想說先不要理它，教學生怎麼去做它，然後那一天看學生的感覺，有好幾個都有點疑惑的感覺為什麼這樣做，那我想一想她們心中一定想為什麼是這樣，所以就拉到 2-6 去講那個概念，所以它本身那個幾何意義出來以後她們就懂了。

Q：您認為一個老師應該有的良知是什麼，比較詳細的描述是哪些？

A：我想還是我強調的那個概念，要讓學生有動力去唸書，不要把自己雕塑成老師很像是個巨人，把學生踩在腳底下，而是要鼓勵學生唸書。所以我是覺得說該很重要的東西就跟學生強調很重要，不該講的就淡淡講過去，就是該教的你就教，不該教的你就不要教。

Q：那哪些是該教的，哪些是不該教的呢？

A：整個數學概念的主軸就是該教的，那有時候會讓學生很困惑，怪怪的那種題目，那種太技巧性像競賽的題目，你在上課就不適合，那是你有些學生有獨特的興趣，她們私底下找我……所以有時候你在教學生的時候，不要做那些競賽的題目給學生去思考，有時候我們在出題也會有這個毛病，有時候你想了一個禮拜兩個禮拜，一個很漂亮的解法，然後就放在你考題進去，那你學生要在 3 分鐘 5 分鐘內想到那種解法哪有可能，所以有時候有很多這種題目自己要避開啦……評她應該要會的，而不是一個題目裡頭設好多陷阱去害她，不能夠設陷阱，你要設陷阱也要給她一點提示阿。

Q：考試要考有鑑別度的又要考學生應該要會的，中間如何取得平衡？

A：其實你出一些概念的題目讓她思考，○○○○的學生什麼題目考很高，傳統的題目，你如果出的再難她都考 100 分……所以你在出考題要跟學測一樣聯考一樣，其實學測題目不是難，它只是很陌生而已，那學生碰到陌生題目就栽在那邊阿，所以我講學測題目，像○○○○有個特性阿，進考場不會，出來的時候自己撞牆，都是這樣阿，出來以後每一題碼都會。

Q：如果今天是您出題，那您構題的想法會從哪邊來？

A：其實我們單純一點，比如說我在出這一張，我會想哪些觀念是學生應該要會的，那這邊我就鎖定它要出哪一題，那我就會從這邊開始去設計它題目出來。比如說講到兩歪斜線，那我怎麼出它的考題，其實我本身就發呆阿，那我就會想說那這條直線跟這條直線，我可以出什麼考題。所以說為什麼我寫講義很快，因為我大概知道要教學生什麼東東，那我就按照那個組合去想它，就是這樣阿，因為有時候你把它想的太複雜只會搞的更亂。

Q：雖然您沒有刻意的構思，但是在課堂裡頭您希望營造出怎麼樣的氣氛？

A：我是覺得至少學生的心情要快樂啦，因為她快樂才會想要去念它，然後對老師認同她才想要去念書……而且我覺得當一個人比較快樂，整個腦筋才會比較清醒。

Q：當初您踏入教職就是這麼想嗎？

A：對阿，因為我本身就是一個比較快樂的人阿。

Q：那您怎麼營造那樣的氣氛？

A：其實學生你本身真誠對她們，她們給你的回饋會更多，那就大家都很快樂阿

Q：那您覺得學生為什麼要學這些數學？這些數學對她們的意義是什麼？你希望她們學到什麼？

A：當然是有用阿，比如說你要唸理工，你會發現要考研究所要唸很多數學阿，高中數學你不要以為它沒有用，它其實本身當初這些數學都是在大學要用到才搬回來這邊，只是說她們做的太廣泛了，所有科目只要沾到一點邊的都把它給搬過來，那比如說你念社會組哪裡需要這麼多數學。

Q：那您期待您的學生學到什麼程度？

A：她可以活用阿，有一天她上了大學以後，她要用到它的時候她也都會啊。

Q：但是這個部份是現在還沒有辦法評鑑到？

A：你如果知道大學要上什麼東東，你怎麼會不知道它現在的難度，至少最基本的要領，它微積分基本的東西你要把她教到她以後看的懂微積分阿。

Q：那您對教數學的嚴謹性會不會特別要求？

A：其實你慢慢發現我講話雖然瘋瘋癲癲，可是我本身數學的架構應該是非常完整的，該講的都會講，只是什麼時候去講它而已，比如說你看兩平面的交線，你不要看我翻一本書的動作，那其實就是讓她們思考為什麼它夾角要這樣定，所以，我並不是一開始就講那些硬梆梆的東西，而是做很多引導，最後在平淡中把它給帶過去。

Q：一開始怎麼會想到要用這樣的教學手法呢？

A：要想啦，沒有一開始就這樣，也是要慢慢去想啦，所以我那天跟你講說，教數學要把很難的東西可以淡淡把它教到很簡單嘛，你去看費曼的故事，為什麼他會是一個頂尖的教授，我是覺得他就是用這種方法來教，所以有時候當一個老師還是要看點書。

附錄二(6)：前導階段研究總結性訪談轉譯稿 【2010 年 1 月 14 日】

Q：直線的法向量是什麼時候提的？

A：在第一章，在講直線的時候就講到法向量，所以當初的時候 ax+by+c=她們就知道(a,b)就是它的法向量。

Q：為什麼要一直強調法向量這只是個記憶法？

A：主要是因為你如果要用到比較純數學的方向 ijk，用行列式表達，其實那種東西是你如果在寫書你可以把它寫到 0 缺點，但在實用性幾乎就是等於 0。所以對學生來講這樣的技法是比較自然，有時候你看很多書上為了寫用 ijk，寫出來多少 i 加多少 j 加多少 k，那是一個很正統的寫法，但是你在教書哪有可能教學生用這種方式做，不太可能。所以很多東西理論上是可以把它講到 0 缺點，可是實際上還是要用這種方式教，學生才會覺得很自然可以把它給解決。因為我會跟她們強調這不是一個很完整的表示方法，至少她們懂，那等到有一天高三複習的時候你在跟她講 ijk 的概念，讓她串起來她整個就懂了。我是覺得在教書喔，不能夠一下全部都塞給她，其實本身就是有點高一給一些高二給一些，慢慢慢慢這樣在給，給到高三的時候統整起來她就會更乾淨俐落。

Q：避談外積，那麼打算什麼時候要講？

A：我在最後面的時候就有跟她們講一下了啦，這種東西為什麼不去講它，因為在講平面向量的部分有時候你做出來會有正負，你如果避談外積，就可以把正負隨便去做伸縮的動作，那你外積把它固定以後，其實它就是一個蠻固定的東西啦，比如說萬一這個向量是(2,2,4) ，那其實你在做的時候為了讓它精美數據，馬上把它縮成(1,1,2) ，那做出來之後萬一有(-1,-2,-3)馬上可以把它改成(1,2,3) ，其實它整個空間變化的幅度會更大。

Q：在講外積比例的時候，如果有學生說 x: y=0: 1，x: z=0: 2，所以 x: y: z=0: 1: 2 那怎麼辦？

A：其實喔，那種數學太嚴謹的東西，比如說 3:0 是 3 除以 0 的一個概念嘛，我們都會講說它不可以嘛，就好像說我們在講空間中直線的時候，分母不能夠等於 0，那都是有數學上很嚴謹的寫法，其實你有沒有發現到真正在操作題目的時候，你如果像那種 x-1/3=y-1/2=3 (?)，其實學生都怎麼做都把它寫成 z/0，還是都用這種方式來寫阿，那因為這種東西只是因為在數學上我們為了更完美的狀況，不要讓它出現有 0 違反我們數學上的規則，那其實這種東西本身並無妨。你何必說一定要把它很數學化很僵硬，那其實學生她們懂這些道理，所以在上課我跟她們說理論上不能 3:0:2 嘛，但實際上你就把它當成向量的感覺好像(3,0,2)這樣的感覺，有時候我覺得教書還是要著重它的實用性啦，那如果真的要你很嚴謹的計算題，那你寫法當然就更嚴謹了，那她們學生也都懂這個道理，有些東西我們都會先教，後面幾堂課就慢慢說它的道理，那有些那種很艱澀的部份留到最後在做完整的說明。該講的都會講到，但是

有時候只是實際上的問題，因為有時候你太「ㄍㄧㄥ」數學上的東西，好像覺得我們跟她講的非常嚴謹非常嚴密喔，但學生不見得可以接受的了。

Q：那如何決定哪一個時間是恰當的時間？

A：像我每一個班上課的順序都不一樣，我都看她們的感覺反應是怎麼樣啦，其實有時候你眼角喵一下，有些已經開始在傻眼了，就知道這個地方不能夠講下去阿，那回去的時候我就會稍微做一下筆記阿，我就稍微記一下這一班哪邊沒有教到，找個時間到時候在卡回來阿。

Q：所以你腦袋已經有了一些架構了對不對？那那些是經過長期經驗累積下來還是一開始教書就已經知道？

A：長期累積的啦，我在中正高中的那幾年我就花了很多時間在唸書阿。有很多我們還是沒有摸透的東西就慢慢去看。有時候我覺得教書喔，應當要把很深的東西用很淺顯的東西表達出來，那學生慢慢頓悟到之後，再慢慢把它的整個架構做的很紮實，這樣學生才能夠接受，你開始就講學生不能接受的，她們聽下去的動機就比較沒有了。上課不要說要把你懂的東西都給學生，學生本身沒辦法負荷，尤其是你半生不熟的部份更不能給學生。像這種很難的東西你要在她們沒有壓力的時後教她，然後她就可以吵翻天了。所以有些東西你可以在後面教她她會懂，而且她很快樂，所以我是覺得為什麼不留後面在教她。

Q：三個的算幾有提到嗎？

A：沒有，因為這東西平常是講兩個，要從四去推三，因為講這個截距式一直都不在我教書的一個重點，我是有在高三整理一些這種題目給她們，所以我就不想要來這邊花你太多太多的時間，那你上次有跟我講過那是重心的概念，那種題目上其實我們都擺在高三最完整，因為其實高三的第一章節就是專門在講不等式的部份，有講條件有講絕對有講線性規劃的部份，包括它所有很嚴謹的證法，後面才會跟她們講的更完整一點點，那她們還是可以接受這種題目啦。因為當初有大概講說數學史的部分有講到說柯西怎麼去發展它的柯西不等式這些東西，那比如說像柯西它不等式數學史的部分我是留到講到球面切線的時候後面才講，也是拉到後面來講，我就稍微講一下說當初一個圓，那從切線的角度發現這種柯西不等式的形式，那因為從圓的部分講到球面，像 $6x-3y+2z=k$ 這種形式她們就懂了。

Q：有沒有想過把重心這樣的觀念講給學生聽？

A：我在高三的講義上有寫到這種問題，其實我們有時候在教書的時候，高一教什麼高二教什麼高三教什麼大概都有個譜啦，這種東西都是經驗的累積啦，其實我一生都是教高三比較多。

Q：截距式會不會由一般式切入學生會覺得比較自然？

A：因為我是覺得說前面一直都用外積比例式的概念去講平面方程式，因為照理說三個變數你這樣做也是對的啦，我在想說就延續上一節課的東西就直接這樣卡進來，其實我要跟你強調我在教書這一段我其實都不太想教，所以我只

是有點應付了事，就有點這樣把它帶過去，遇到問題學生可以克服就好了。所以這其實不在我上課的主體之內。有些東西是因為它補充教材什麼都會有，那學生到時候會問，所以我就把它列入講義裡頭，反正早晚都會被問我就先把它給教過去。照理來說這種算幾不等式要等到高三講才比較合適，但是高二這種題目都很多阿，所以我最後把她們教到說你看到那個點就知道答案啦。所以這種東西不教就算了，要教我就把你教到很公式化的東西，因為這種東西是用公式化完全可以克服的。這是屬於我高三還會去碰的問題，現在算是提早教。不要把後面的東西搬到前面來教，這樣學生會很有壓力阿。

Q：p.27 的例題應當用到平面族反向的概念來解，但是並沒有提到，為什麼？

A：直線可以畫成兩面式，我是到後面 2-5 才回來講這個概念。

Q：p.27 中包含一直線與另一平面平行的平面，如果直線沒有和平面平行則是無解？所以是不是當初已經設計好的？或者有沒有想過要故意設計它不平行？

A：其實在題目上我們都已經設計到一個平面阿直線剛好是上面的一條直線了啦，都已經設計好了，設計一個沒有答案的會怪怪的，這只能在考試的時候可以去設計這種題目啦，就問它有沒有相交，沒有相交就找出來，有相交就講出什麼原因，小考才有可能這樣去做它啦。其實我本身的想法是平面族不要動的太多，平面族其實不是高中課程的一個核心啦，所以你有沒有發現我的核心是在教她們說如果它告訴你兩個平面的交線，你就可以把它直線給拉出來，所以我當初在上第一章的時候就花了一節多的時間，跟她們講那個不定方程式的解法，包括尤拉解法什麼東西都教進去了，所以她們到這邊的時候會覺得很自然啦，所以第一章其實就有個伏筆在那邊了啦。

Q：兩平面夾角這個部份，當初在講兩直線夾角是用斜率去定義？

A：不是，是用法向量，第一章是用法向量來講，這個公式是我只是從第一章直接多拉一個，故意把平面變成直線化。因為向量沒有死角，但斜率是有死角的，所以在講平面向量的時候講到兩個，一個是用方向向量來講，講完最後直線以後在後面 1-4 再用法向量來講一次。所以她們就知道說為什麼當初不能夠講方向向量，因為平面沒辦法講方向向量，所以這時候她們就懂為什麼要引進法向量的概念，所以這裡頭只是拉一下而已。高三的時候會比較她們成長的過程，有哪幾種解法，大概哪幾種解法她們大概有個譜阿，她們會挑一個她們最合適的解法，不可能什麼解法都要她們一下之間都會啦。

Q：平面的直線當初是用斜率定義方程式，有沒有學生問說為什麼空間的直線不行？

A：斜率本身只有 x.y 座標比阿，那你空間哪有斜率，沒有啦。第一章在講直線方程式的時候也是用點，然後斜率都改成方向向量。

Q：那老師那時候在教的時候，有沒有想到告訴她們說為什麼在空間中平面的時候我們不考慮斜率，有沒有想過錯誤示範給她們看，讓她們了解不能用那種方法要用向量的方法？

A：也沒有啦，沒有跟她講那麼多啦，講太多學生有時候會亂掉啦，有很多那種

東西其實你可以事後慢慢講，就像這兩個禮拜很像神仙般的生活，你想講什麼就講什麼。其實我覺得學生在第一次學習的時候讓她單純化，跟第二次學習是不一樣的。

Q：講義上關於正射影面積的形狀是用三角形，不曉得您最後怎麼也想提到不規則形，因為這個會用到無窮分割的概念？

A：因為我們在教書的時候都會發現到，設計給她這一塊的面積是多少，那我這邊講到三角函數也是想給她一個訊息，任何一個形狀你可以做成無窮多個三角形和的一個概念，曲線的部份嚴格來講她要一個極限的概念，但是有些東西她們知道是無窮多個三角形，所以怎麼比都相似，其實她們學生那種概念就已經有了，就知道你分成一百塊分成一千塊分成一萬塊都是這種比例關係，所以她很自然就可以接受這種概念。照理來說這種曲線的部份應該在講圓的部份，在講π的概念那邊切入會更合適，所以如果她們有問到比較細的部分在講進去她們就懂了。有時候我在寫的時候會想到下學期要學哪些東西，因為寫了很多東西，所以腦筋還沒有燒掉，大概想一想還是很容易。

Q：在教學或者寫講義的時候會有一些解題思維，請問您的解題思維是如何培養出來的？或者是如何去訓練學生的解題思維？

A：我覺得解題要單純化，有時候我會想說可不可以用很自然很簡單的方式講給學生聽就懂了，甚至有些例子我都嘻嘻哈哈這樣去講，那那些抽象的概念她們就懂了，有些東西不一定一定要把它強求到什麼程度，可以體會就好了。

Q：所以您在解題過程中，會比較考量到學生的感受？

A：對對對，反正學生聽的進去的解法才比較重要。

Q：p.34(4)當初有提供三種解法，不曉得三種解法是否有優先順序？

A：其實你會發現到其實教到最後學生都只有一個解法，參數式。

Q：那當初您怎麼會想說再多講另外兩個方法？

A：因為前面很多學生的訓練都是用前面平面族的概念在做，不然就是用外積啦，一大堆很艱澀的東西，其實有時候我在教難的會先教，教的越來越簡單，教到最後就回歸到它整個上課的一個體系。因為我那天要上課以前看到學生都用這種方法在做，但是外積的方法還要再找到一個點，我在講第一個方法第二個方法，最後都會在講還是這個方法好，我還是要她們用不定方程解，所以其實我在教書還是我的一個理念啦，我就是要用不定方程式解它，然後一種一種方法最後還是這個好，她們學生感受的到那種感覺。你講一些解法讓學生比較一下，我是覺得解法單純就好，你看我最後訓練完學生的思維喔，兩平面都是化參數把直線寫出來，都沒有其他的解法，這是我想要傳達給學生的一個信念，你數學不要太複雜化，其實就是一招為行天下。這可能是因為我看很多武俠小說，對人生的一種感覺，想一想為什麼要把整個簡單的東西搞的很複雜，教的很複雜可能是老師本身有問題，是因為他還不能夠用一種很簡單的方式去看它，然後還停留在那種解題技巧，所以在教書來講，有一種是專門尋找解題技巧的老師，真的是不合適走上教書這條路。

Q：p.35(7)當初帶學生做這一題沒有帶學生檢查同異側，之前是否有提過同異側的概念？

A：沒有，因為這個題目在直線的時候就有提到過，這直線的時候同側異側，這講下來就有點線性規劃的觀念，所以在直線上很容易畫那兩點的位置，但空間就打迷糊。

Q：但如果在第二小題學生沒有注意到同側異側的話，異側的話其實就不用那麼麻煩。

A：這題也是我不太想講但是逼的我非講不可的一個題目。

Q：那您覺得這種題目要擺在哪裡講比較好？

A：這高三複習的時候都還會再碰到一次阿，那那時候講完線性規劃以後，很多這種題目上都會帶到啦，其實你會發現到我們在暑假的時候第一章大概就會把它結束掉。在這邊沒有一個完整法向量的概念其實就像國中有點在騙人一樣，你在講空間一定要透過平面去引導她。所以當初在寫這一題的時候，就把 A 點 B 點都標給她。基本上這種題目出題老師不會出，但是補充教材有，你不教就會怪怪的。這也是我想避重就輕的一個部份。

Q：這一題中直線的參數式有用 t=0,t=-1,t=-2 去描述 A,Q,對稱點三點，但後面影帶中好像沒有再出現，這樣的觀念對學生來說重不重要？

A：這是一個向量的概念嘛，其實這種東西只有在講對稱的時候才會用到而已阿，其他其實沒有多少機會。我在後面講圓的切線就會用到法向量去做引導，會再用到，如果可以用同一個概念把整個串起來，這樣才會更完美。

Q：p37(10)也提供了三種解法，那想法是不是跟我們前面提的是一樣的？

A：有時候提供很多種解法是為了把不必要的挑掉。

Q：有沒有想過要去比較三種解法之間的差異性？還是只是想要讓學生去感覺說哪一種解法比較好？

A：我就是要讓學生自己去感覺，因為這邊的孩子很聰明，所以一兩題她們就知道哪些方法比較好。因為其實很多東西沒有絕對的。

Q：空間中兩直線求角平分線，因為這一題要用到菱形的解法，怎麼會想要挑這一題？

A：天書裡頭有這個題目，那你不教一定都問，那我就想說與其等她問，我不如先教。

Q：那如果天書裡頭沒有這樣的題目，您會挑這一題嗎？

A：不會，因為太技巧了。有時候我們看到一些題目都會覺得很痛心，本來這種東西是為了儲備她未來大學可能會用到的概念，所以我們很認真去教她，但是最後變成是在耍技巧，技巧性的題目都出來了，那學生就變成學它以後一輩子也都沒有用。像幾個新老師我都講說，妳們有空把大一微積分翻出來看一看阿，哪些東西會教你就懂得它該教，但如果連大一微積分都沒有的，就不要教太多啦，因為它畢竟是銜接大一的課程。

Q：當初在講月亮劇團的時候 L 和 M 是歪斜嘛，但是學生知道這兩條直線是歪

斜的狀態嗎？

A：曉得啦，她們看到 2,3,4 就知道啦，就算沒有歪斜一樣可以做阿，解出來就無限多組解阿，其實我當初是覺得它是很難的一個題目，想說嚇嚇她們，結果我當初的解法不是用這種方式解，那個陳○○就講說那我就參數參數兩個向量平行，那個解法比老師想的都還快阿。有些技巧性的東西是老師要懂不是學生要懂，反而用你的解題技巧可以勸阻學生不要再學這種東西。

Q：加快加深加廣在您的教學或者講義題目的編排上會比較看重哪一個？

A：加速應當是最好。我會挑一些適合學生的書讓她回去看，因為有很多數學上的東西你從後面看它它其實就很快，因為你的高度夠嘛，你如果一直在解題就像一直在迷宮裡面轉來轉去，但如果你高度夠，你就看的到有哪些路可以通，所以我會覺得加速是最好的方式，但是加速要自己有辦法看書小孩才有辦法。那像補習班就是在做加深的動作，加廣這個部份就除非說學生家庭背景非常好的，比如說自己的老爸老媽是教授，父母可以去做引導跟討論，那才有辦法，所以加廣是要人教的。

附錄二(7)：第一階段研究總結性訪談轉譯稿 【2010 年 5 月 12 日】

Q：在一開始 H 的引入是使用 C，之後為了方便起見創立了 H，而且在解題中教師都會寫三個式子，是否有沒有特別強調哪一種寫法？

A：沒有，講解過程用 C 來講解學生很容易接受，但是在應用題目的時候還是 H 會比較方便，比如說我舉個例子來講，昨天在幫她們複習的時候，比如說一個三位數，它的數字總和如果是 8，那這種東西寫出來就是 x+y+z=8，那你去掉 1 以後變成 x+y+z=6，馬上就是 H_6^3，所以有那個 x+y+z 的東西好像感覺上你這樣可以直接寫成 H_6^3 ，也可以寫成 C_2^8 都可以對不對，但如果比如說她們在分東西，比如說五樣相同東西分給四個人，那她們其實很容易就馬上寫出來 x+y+z+u=8，她們就馬上 H 多少取多少，有時候在計算上到後面反而這個是比較方便的。所以講原理要從 C 開始來講，那其實如果在應用上，H 學生領受的程度會比較高一點點。

Q：那後面有沒有想說全部都用 H 來講？可不可以一開始概念引入的 C 就不寫了？

A：但是你要去解釋為什麼 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ ，那個道理一定要從組合才能夠講。不然你直接寫這個 H_k^n 規定它是多少，學生會問你為什麼它給下這個規定，所以其實在講原理一定從 C 來做嘛。

Q：會有這些經驗是否因為做了很多日本或國內的題目所累積下來的？

A：有時候比如說在做教書的時候，為了跟她們講這些東西，其實在講的時候學生會有困惑的感覺，然後你要一直去修正自己的講法，那教那麼久就知道哪一條路會比較方便。因為比如說這個題目你這樣教不通，那就想第二個方法講給它通，那有時候我們在教書的時候要有一點分寸是說，不要好像你懂的東西都交給學生。題目變化很多，所以我們在教她的時候強調說你只要跟 x+y+z 這種型態才可以用重複組合來做。其實這種觀念學生就很容易抓到它。

Q：這個觀察是您從教學經驗中獲得的，還是自己的學習過程？

A：對啊，就糊里糊塗就發現怎麼去追尋它的一個重點，要不然學生就胡思亂想。所以我們在教很單純，你碰到 x+y+z=多少，那你就知道它是 H_k^n ，所以用組合引進門而已，你要懂的這個東西才做它，因為並不是所有東西都可以做，因為這裡頭最大的障礙是相異分給相同，相同分給相異，有些是可以用重複組合來做，有些是不可以的。所以我上課常跟她們強調一個概念，有規律的其實才叫排列組合，沒有規律的那根本不叫排列組合。

Q：所以像您一直強調說要寫成這個樣子，是不是也是希望讓學生自己去判斷說

這個題目可不可以寫成這個樣子？

A：對。所以考試最常考的是，你看每張考卷都會考阿，相同的 6 顆球放入 3 個相異的箱子裡，那每個人都知道三個箱子 x+y+z=6，她們都知道很明顯是 H_6^3，那如果有些老師毒一點，相異的 6 顆球放到 3 個相同的箱子，那你就發現不是三個箱子等於 6，那這種東西很明顯就沒有辦法，沒有辦法就只有一招用分組分堆，沒有什麼招阿，那並不是排列組合可以克服的問題，所以有時候讓她們了解相同相同不能寫成這個樣子，所以它每個東西都有它的一個模式。像我在出考題有個特性就是說哪些該考我就考，所以我覺得說這邊的教材大概哪些觀念上要考，我就比如說把它寫十個起來，我出題就涵蓋這些，頂多你為了鑑別度，可以放一些有鑑別度的題目上來給她考。考試其實讓她有思考性又不會太難，其實這樣就夠了，讓她其實不會她可以慢慢排。

Q：我看到您的講義前面有一節專門講排容原理跟樹狀圖。

A：因為其實你要了解到，排容原理剛開始是引導集合的概念，為什麼是 1-2＋3。我在講樹狀圖有時候讓她去了解排列真正的起源是從樹狀圖出來......，去解釋乘法跟加法原理其實是同一個東西出來，有時候用這種題目上讓她們了解加法原理，乘法原理就是比較快速的加法，你要乘法就一定的特性是狀況一樣用乘的，狀況不一樣當然是用加的，就用一種淡淡的東西說明它整個的一個概念。所以有時候為什麼在排列前一定要講樹狀圖，但不會去把它講很難的樹狀圖，那完了以後跟她們強調說樹狀圖不能隨便用，那樹狀圖通常的設限頂多是三棵嘛，我就笑說樹如果太大一定會倒掉。所以在考前，今天跟她們講說，考試什麼時候用分組分堆，什麼時候用樹狀圖，那是最難的部分嘛，次數有限用樹狀圖，次數比較多用分組分堆。

Q：當初在上重複組合第一節課的時候有給這個表格，那這個表格是以前幫學生上課的時候就會做這樣的分類嗎？

A：我不一定耶，有時候我上課就是跟著感覺走。這個有時候是上完以後再講，有時候是提醒一下說我們還有些問題是沒有辦法克服的。

Q：像昨天在講複習的時候也是分類這樣講下來。

A：對，其實就有個條理在那邊嘛，那這個東西因為教到這邊要教她們分說哪些用排列哪些用組合，那些用重複排列哪些用重複組合，不要搞在一起，因為搞在一起就一團嘛，所以讓她們分類說你如果是不重複的部分，就不能夠重複嘛，那一定是排列跟組合嘛，那排列的東西就變成等於說是 P 大取小，C 大取小，組合底下是相同的概念，那可重複不是重複組合就是重複排列嘛，那也跟她們提醒說為什麼底下是重複的，那有些題目上根本是不可能做的出來，所以排列組合本身是有個規範在那邊，那如果沒有規範就有點像在考益智遊戲。

Q：所以本來上課前是沒有準備要講這個表格，是剛好上想說整理一下嗎？

A：對啊，那時候好像上完還有一點時間對不對，這個時候剛好四個都上過了嘛，

所以用個時間讓她們去思考一下看她們怎麼去沈澱這個過程。

Q：我感覺您第一節課很像有做脈絡的安排，一直想幫學生分清楚這些概念到底差在哪裡。

A：因為我上課腦筋裡頭大概有個想法就是說，我怎麼去把它給解釋出來。那是一個很自然隨機就把它給列出來，就讓她們體會，並不是你是萬能的，有時候舉的例子都比較傳統嘛，因為我是覺得說第一次上課喔，那種例子寧願傳統一點點，那種所謂傳統的題目就是大家很容易接受的題目，就很自然馬上可以把它給排出來，你就很自然這樣講。那比如說第二次上課，像剛講那些千變萬化的題目上，就在第二次複習或到高三的時候再栽進來，所以我並不是說第一次就什麼東西都教給學生，而是我覺得你高二的學生觀念就是要很清楚。我在教有時候我們會想說我高一要怎麼教高二怎麼教高三怎麼教，比如說我現在就把你教到觀念很清楚，那到高三比如說偏向學測，它應用問題，我可能就會舉像剛剛這種例子，這那種例子就慢慢去引導她，其實她整個架構就會完成。

Q：當初在編 H 這個部分的講義，題目的來源為何？

A：就教教書就很像是基本的東西這樣去抓而已阿。

Q：那老師抓的時候有沒有考量到什麼例子當起始例？

A：第一個一定是最簡單的嘛，所以比如說我舉的例子是 x+y+z，因為我在說明假設 x+y=5，它的所有答案我不是把它排一排，然後中間在講說我是用切割的方式來把它完成出來，所以當初我不知道舉什麼例子，好像舉 x+y+z=5，那我就把所有解法把它寫出來，然後為什麼這些數據我就把它比一比，然後再引進到加兩個加號的概念，然後就變成這個題目上是五個然後另外兩個加號，那從這裡頭要抓兩個擺兩個加號的位置，所以它才會有得到這樣的數據嘛，那像這個題目上我在做的時候，就可以用類似這種例子，因為很多題目上會有整數解，所以就講說 x+y+z=7 如果要求它正整數解，那這個地方因為前面重複排列已經講過說一定要用排容原理，或者分組分堆慢慢去做它嘛，那這時候就講說因為組合最大的障礙就是有前後順序的差別，抓 A 抓 B 跟抓 B 抓 A 是一樣的嘛，那就問說現在假設七個都一樣，那我抓第一個跟抓第二個還不是一樣都算兩個，所以我先給它一個以後公平一點其實都一樣，然後用這種題目去講它可以移動的觀念，然後再講些不等號再來才講些應用問題，其實當初在寫講義也是用這種模式寫出來的。

Q：那像例題 13 怎麼會想要把它放進來？

A：其實我本身真正要上課是講到這邊而已啦（第 12 題），後面的題目上是因為○○○○的補充教材（天書），它們的一些題目都有夾雜很多這種概念，那我是覺得說不跟她講，學生怎麼會想的到它，那就是變成把它帶一帶，她們自己就可以去看那本補充教材。

Q：像前面這種題目是因為比較常考嗎？

A：其實我在講重複組合的部分，其實只有講到這邊而已啦（第 6 題），後面這

邊開始就是一些統整的工作，後面其實都統整的工作，就在講些 P 排列組合重複排列重複組合，它們中間的差異性在哪裡。

Q：學生在學 H 這個地方學生比較大的困難是什麼？

A：四個會打架啦！所以後面在講這些題目上，哪些是排列哪些是組合，哪些 P 哪些 C，哪些重複排列哪些重複組合，要她們整個把它分的很清楚，其實後面所有的動作都在做這個動作。你不能夠說給她新的東西，不讓她跟其他做個區隔，那她學了以後孤伶伶也不知道要幹嘛，然後考試又喜歡兩個湊在一起。所以你這樣跟她講她就很清楚，她就懂得什麼時候該用 C 什麼時候該用 P，所以甚至不是跟她講說 C 一定是大小，這邊一定是異這邊一定是同，那如果這樣湊就可以做，P 一定是大小，因為 P 的特性一定是大跟小，那 H 的時候一定是相異這邊相同，那指數的時候重複排列一定是唯一嘛，那這邊是不是可以重複，所以我在跟她們講說你頭是不是只有一個，在頭上，手腳好多在底下。所以有時候我會跟他們強調排列組合是亂中有序，用一種很簡單的方法把這個問題給處理掉。

Q：這邊給學生練習的時間跟空間時比起來變多了，是不是因為想要讓學生自己想過自己練習？

A：因為你說像這種題目上她們怎麼可能一下就想出來，一定想不出來嘛，那她們其實做完以後會先跟隔壁做一個對照，然後不對就像麻雀嘰嘰喳喳探討一下，那其實有時候這種時間就是他們腦力在激盪，那完了以後她們就慢慢慢慢比較清楚，所以其實這些題目上都很類似，激盪完一個題目後她覺得她有概念，那第二題如果她全對可能就很有自信，那如果錯她還可以在做修訂。出題我會覺得你會的我就讓你拿到分數，不會故意搗蛋這樣。學生有興趣唸書你教的才會快樂。

Q：為什麼 H 不會想用不盡相異物直線排列切入而是用 C？

A：用 C 會比較乾淨俐落，要講 H 轉成 C，還是用方程式來講切入學生是最容易的，這個切法應當是最容易，學生聽了覺得理所當然，會比較單純化一點點啦。每一種東西的講法都很多啦，教起來好像也都沒什麼狀況，不要切得太快。

Q：第一節課後半部的那題補充題把它加一加其實也可以把它連結到二項式定理，當初是否有想說順便拉到後面去上？

A：沒有，因為拉太快其實學生沒辦法承受，教書不要一開始就覺得老師很厲害什麼東西都教，要留一點後面在教阿，學生才覺得你後面還有東西阿。所以我才講說我教書大概分成三個步調，第一個就是建立基礎的概念，那在高三上學期的時候因為考學測，就強調他她身情境上那種感覺，我怎麼去活用這些題目上，那到指考的時候強調的是數學能力嘛，那種東西就是在題目上在做加深的動作，不然你高二都教完，高三就覺得索然無趣阿。

Q：您提到排列組合這邊要學的好，需要小學的計算能力、國中的國文程度以及高中的心智年齡，所以您認為這邊學生需要的是什麼？

A：其實是心智年齡。因為計算只有加減乘除在那邊算，這裡頭主要是安定她們的心就是她只有小學的計算能力就可以做了，因為很多人進來考到圓錐曲線已經滿腹創傷，那我講這個話是給她們一個理想，她們可以從這個重新開始，所以這其實是鼓勵學生的話，在鼓勵學生你可以從這邊重新站起來，所以很多學生前面學的不好，會覺得這邊是個契機，她還是會乖乖念，那唸完以後搞不好她就念的不錯，她人生整個改觀過來。國中的國文程度，因為有很多語意上會看不懂，順便跟她們講一下聯考的排列組合為什麼這麼長，因為它怕會有瑕疵嘛，所以說到你可以看的懂，所以你看學測指考題目上那有多長，那其實是為了描述它，所以有時候甚至帶一帶說數學老師的國文程度都不太好。有些很簡短的題目真的會讓人家語意不清，所以排列組合有一個現象，你考完試的以後要給學生一個申訴的機會。心智年齡是分兩個部分，第一個是說很多那種很優秀的學生覺得天底下什麼題目她都會做，那其實要去了解有些解法不是她一下子就可以想出來的，你要體會數學的東西是很多人在前面建立的東西，那你為了超越他，所以你只好踩著他的肩膀這樣跳過去，所以為什麼去教排列組合可以讓你做的更快，一些比較樹形圖的可以跳躍式的把它給做過去。

附錄二(8)：第二階段研究總結性訪談轉譯稿 【2010 年 6 月 23 日】

Q：在學期望值之前，學生需要具備哪些概念呢？

A：其實只要有簡單機率的概念就夠了，所以我當初從平均值的角度來做它一個出發點，讓學生慢慢從平均值的角度得到 $m_i p_i$ 那種概念，因為其實有時候像我們丟骰子都把它看成一樣，但有些比例是不一樣的，她就可以感受到那種感覺為什麼它是不一樣這樣。也就是說它怎麼改變用 p_i 去講之後，她們就知道哪些可以用平均值的概念快速完成，哪些東西一定要是慢慢這樣去操作它，其實都還好啦，所以我覺得並沒有需要很多那種數學的能力，我想是不太必要啦。

Q：個人在做影片分析時發現，您對期望值把它分成三層，第一層是讓學生感受期望值是一種很理想化的狀態，第二層是期望值可以用平均值來想它，第三層是再變成 $m_i p_i$ ，是這樣嗎？

A：對對對，其實我是這樣。我們唸數學的稱作期望值，那唸其他領域的都叫做數學期望值，有期望值就是代表說那是在一種很理想的狀態，所以我第一個先灌輸她這個觀念，那第二個我是從平均值的角度這樣切進來，第三個就是 $m_i p_i$ 的概念，對，沒有錯，我在教書的時候當初的步調本來就是這樣來講它。

Q：講義的例題是否有刻意安排，因為期望值兩節課中，前半部題目可以用平均值來做，但後面很多題目必須要用機率來做？

A：對對對，其實我是有拉開，我一節課就比較講平均值的一些概念，那因為數學到某一種程度以後，你本身平均值的概念很難去講它，就像剛我講那五顆紅球三個白球，那用平均值怎麼去講它，講不太下去了啦。

Q：所以學生不可以兩個只用一個去做就好？

A：對，也就是說數學本身就有點像是螺旋式的，我們先講簡單在講難的部份嘛，那有些老師在講是直接給它下定義，然後什麼東西都做，那你就發現有些題目上本來就很簡單，把它講的很複雜，那我是覺得說學生可能接受程度會比較差。所以我是兩節課，其實我那時候臨時跳過去講，就是第一節課講平均值的概念，哪些題目可以用平均值這種東西來操作，那其實也給她們概念上是說，假設沒有那種平均值的概念，那還是要回到數學本身定義的東西來操作它，因為數學本來就是一個抽象化的東西嘛。

Q：p.20 當初的証明是先跳過，那後來有帶學生回來看這一段嗎？

A：因為通常在這一段，比較嚴謹的是在選修上才有這一段。

Q：所以是安排到那個時候再講嗎？

A：對對對，其實她們小孩子很聰明，我故意把證明寫的很詳細嘛，那她們其實有時候像這種證明她們就發現，你把它分兩段，她還是覺得說它有點小技巧嘛，那這種東西你看證明，證明到最後它是對的嘛，那學生她們還是可以接受。然後，等到上選修上的時候，我就慢慢去磨這個東西給她們看。

Q：當初在上這邊的時候，重複試驗還沒有上到，學生會不會看不懂？

A：不會啦，其實我在上前面的時候喔，那個 C^n 取多少那個概念，其實都灌輸過給她們了，所以我前面講了很多比如說像五個紅球三個白球，那第一顆第二顆第三顆到第八顆抓到白球的機率為什麼都一樣，因為像那種東西為什麼能夠 C_k^n ，其實它們每個狀況的機率都一樣，所以在前面的時候已經講過那種東西，我還畫過那種大表格給她們看，那時候她們可能沒辦法頓悟說為什麼講那些，等到上這邊的時候她們就懂了。就懂了其實在排列的角度來講比較容易講，反而波利耶這邊講起來比較辛苦。所以在前面其實我本身已經知道後面要講什麼東西，那我就把一些比較容易講的概念就把它給講到。

Q：證明是證明第一點，那像第二點後面很多題目都有用到，不曉得有沒有學生問說為什麼會這樣呢？

A：因為前面很多那種概念喔，其實她們都很容易接受這種東西啦，因為其實有些東西你跟她帶過以後，然後，我是覺得她們好像也都沒什麼問題耶。

Q：當初好像是用比較直觀的感覺去講？

A：對，那就是平均值的概念嘛，所以當初為什麼強調數學期望值，就是在一種很理想化的一個狀態，所以像後面這種例子就是在說明這樣啦，那你假設說慢慢做，做出來答案都是一樣啦。

A：其實到這邊(第七題)的時候就想告訴她一個觀念啦，這個觀念就是說並不是，像取到紅球對不對，那你就發現數學為什麼要給它下定義，如果它全部都只是 np、nk 的話，那根本期望值就不用講那些定義了嘛，你就到平均值在講它不就沒事了嗎，那因為從這邊導到這個概念以後，然後這邊還要跟它講為什麼數學上還要定義 $m_i p_i$ 的概念，那學生到這邊的時候就發現到，ㄟ原來是這種樣子啦。所以到這邊其實都是用平均值概念的題目，後面開始就全部都不是了嘛，也就告訴她們說，到某一種程度以後，數學還是有它的必要性啦，也就是說很多東西都已經抽象化了嘛。那更深的東西可以用它來做延續嘛，所以我在講定義前我一定會講很多例子，然後最後才得到數學上有這樣定義的方式，那當你發現這些沒辦法操作的時候，你是不是一定要按照定義這樣來做它。所以我在教書的時候我本身一直有這樣一個概念，引進例子，一個前言讓她稍微懂它到底是什麼樣的意義，然後做一些題目上讓她感受，最後為它下一個定義，那比較粗淺的題目你當然是可以這樣做，到某種程度之後妳為什麼需要數學的道理就在這個地方。其實我教書不管是在哪個單元，都用這樣一個架構去講它阿。

Q：那像第七題這邊 $\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}$ ，是否有用到條件機率呢？

A：喔對，但這種條件機率你不要跟它想太多，學生每個都會做，其實我們在講後面乘法律的那個部份，我跟學生講一個概念，乘法律的部分喔像比如說條件機率，那條件機率本身為什麼要有條件機率，其實條件機率每個馬都曉得，

你如果用縮小樣本空間的概念或改變樣本空間的概念，比較私下上課來講我們都講縮小樣本空間，如果以寫書的角度，因為它本身有些稜稜角角，我們有時候都會講說用改變樣本空間的角度來講這種數據，那其實學生只要有縮小樣本空間的概念，條件機率她們都沒什麼問題啊。你要有條件機率的概念，才能夠講乘法律才能夠講貝氏定理整個把它給講下去，那包括從這個題目上可以定義獨立事件的概念，那是很獨特的一段，它整個動脈是在說數學上為什麼要講這一段，因為它本身是那種數學上開始慢慢文字化的概念。比如說像這種球的部份，你 5 顆 2 顆，那以排列的角度來講，它現在變成等於說抓兩次，取到紅球結束，那一定是黑球再來是紅球嘛，那她們知道說在擺黑的情況下是 C_1^2 有兩種，紅球是不是 C_1^5，然後再這樣排過去，所以她們一除以後就馬上知道一個 $\frac{2}{7}$，一個 $\frac{5}{6}$，其實前面在講排列的時候已經跟她們講過這種概念了，那現在這個時候其實她們都會用，所以在後面講條件機率講乘法律，它主要目的不是要你解這個題目，而是要它引進後面獨立事件那種數學抽象化的專有名詞，然後比如說導貝氏定理，兩個三個怎麼去導它，其實它整個架構在文字上比在真正實質上的計算，應該來的更重要。

Q：如果把 $\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}$ 寫成樣本空間 $\frac{2\times 5}{7\times 6}$，是不是可以避開樣本空間？

A：對，用 $\frac{P_1^2 P_1^5}{P_2^7}$ 這樣來講它應該會更完整一點點，但是我覺得○○○○的小孩子直接這樣操作它比較乾淨俐落，所以就像武當箭法，一刀斃命阿。有些東西為什麼不去講那麼多就直接殺過來，那她們學生都能懂。有時候看學生的反應啦，有時候我是覺得說你流程如果很流暢，學生她們都很理所當然，其實這樣就夠了，你如果什麼東西都要講到非常嚴謹的話，上課會停頓在那邊，流暢度就不會很夠。

Q：樣本空間都是討論有限個的，但例題 8 是無限的樣本空間，為何會想放入？

A: 其實喔，在○○○○教書，難免會放一些比較難的概念，那其實我這個題目上主要是跟她們講一個概念是說，甲第一個投正面是 $\frac{1}{2}$，其實乙是甲的多少，$\frac{1}{2}$ 嘛，其實我上到最後的時候是在講一個概念，它的比變成 $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$，變 8:4:2:1 那個概念，那其實它整個機率總和是多少，期望值總和是不是等於 30 塊，所以其實到最後的說法是有點再說這些概念啦，它 $\frac{8}{15}$，它 $\frac{4}{15}$，它 $\frac{2}{15}$，它 $\frac{1}{15}$，其實有時候在說明的是這種概念的一個過程。所以比較嚴謹的角度，這種題目上如果說在寫正式的書裡頭來講，這些東西一定會避開，但是因為這邊是○○○○的學生，有時候我們在教的時候難免它的深度會比較高。所

以你看我在編講義，1~6 題其實都是很傳統的那些題目，那這個地方就引進到為什麼要有數學上的定義，那這個地方就有點夾雜在課外補充的概念。

A：第十題這個題目我在上的時候，我其實講過兩種方法，一個是從排列的角度去講它，那有時候我是覺得說，大部分比如說會用這種類似樹狀圖的概念去講它，那我只是在解釋說，所以其實我本身是在引進一個樹狀圖的概念，所以包括後面 8、9、10 其實就是，第 7 題就是在引進為什麼要用機率，第 8 題就在引進另外一個觀念，第 9 題一個觀念，第 10 題又是另外一個觀念。其實我寫到這邊我是有點在想到哪邊勒，在想到貝氏定理，貝氏定理有時候我們都會畫這些圖的概念，那它本身有兩個發展的體系，一個是利用到樹狀圖的概念，一個是利用到分割的概念，它其實兩種都有這樣來講它，所以我本身在上這邊的時候是想建立這樣的概念，就等於說我有想到我後面馬上要上到這一段，因為我們教材是上完這邊以後馬上跳高三的課程，然後就覺得說，其實我第一個先上我先用排列的概念來講它嘛，比如說桌球比賽嘛，先勝三回，那反正至少要比賽五場，所以我就把整個排一排，五場，那它如果約定三場，那就是他目前兩場他勝了，所以也就是說這兩個一定是圈圈了嘛……其實你有沒有發現到如果真的很高難度的題目喔，用這個(樹狀圖)做不見得可以做的出來，用這種(排列)東西解題反而更精緻一點點。我在講這邊的時候有兩個能量，第一個就是說，後面等到碰到那種貝氏定理的時候，我也可以用這個來講，那我就讓這兩個東西其實是結合在一起的。所以其實 8、9、10 是在有點儲備那種比較高深的能力啦，就有點不是以它的重點為導向，而是以它本身數學能力作一些導向，因為畢竟以後她們在考聯考，都要追尋到一種比較頂尖的狀況嘛。

Q：那麼例題 11 和 12 呢？

A：我當初講這個東西，只是因為很多學生喔都會在講學科能力測驗到底是怎麼記分，然後指定考試怎麼去算它的分數，然後順便把這個辦法，因為這題目當初是我自己寫的，我就去把那個聯考的前面那一段給 copy 下來，它其實就是這種一個方式嘛。

Q：把多重選擇題的每個選項視為是非題是因為它每個選項獨立計分嗎？

A：對。這種東西如果讓它變的比較容易喔，就可以加個前提，就說今天假設答案是 ABC，那它本身的期望值是多少？那這樣題目上就變的很簡單，所以當初在寫這個講義我就不太想去改變它，就只要假設它今天的答案是 AB 或 ABC，那整個就變得非常簡單，你 A 猜對的時候變多少，B 猜對的時候變多少，每個猜對的機會都是等於 0，所以這種東西我們也知道怎麼去讓它更簡單一點點，那只是說順便幫她們分析以後在考指考在考學測，她們怎麼去算她們的分數，所以像這種東西我本身也是有點在耍心機啦。

Q：12 題的第二小題有沒有想說要去解釋為什麼第一個答案與後面的不同，又為什麼後面四個的答案會相同？

A: 這種題目如果你設計答案是 ABC，那題目的難易度幾乎就沒有了，所以我只

是用這個東西在說明，其實我本身當初寫這個題目的目的只是要說明它聯考給分的標準，然後順便告訴她們學測不會還是要努力地猜阿，因為期望值畢竟是為正的嘛。並不是要把它當成一個考題來講，只是在說明而已啦，不是為了解這個題目上，而是用到期望值的概念來告訴妳它以後聯考的分數怎麼去算它，因為畢竟那兩個算分是不同的。

Q：剛您提到說這個部份高三會有所重疊，在教學內容方面是否有做調整？

A：有一點小重疊，其實我是把後面先拉到前面來，照課程來講，它在這一段只有講到平均值的概念，然後什麼東西寫到定義的方式，比如說像現在目前課本的講法是說，你任取一球那沒問題，那任取兩球它要怎麼樣算？你取到兩球的機率要乖乖把它算出來，我取到白球個數一個的機率要乖乖把它給算出來，然後這題目上要把它給算出來，我是覺得說好像學生不需要做的那麼辛苦嘛，因為在課程的一個訓練上來講，主要是要引導到她有能力來做這種證明。其實是它為了講證明，先訓練學生這種計算能力，然後我是覺得說這樣講學生上課根本都不太會聽阿，然後就開始直接講一下說像這種東西它怎麼出來的，然後大概就有些含糊帶過去，然後到高三的時候再講這一段證明慢慢給她們看，因為這東西其實是有技巧性的。所以有時候我們在上高三的書有時候很痛苦就是說，像這東西我就用 p、q 來做，那很多書上都適用 p 跟 1-p 嘛，其實我覺得用 p、q 比較能夠呈現二項式定理的感覺，所以有時候我們在用這些東西也是有小尷尬的時候啦，應當我是覺得用 p、q 來講會比較完整一點點。

Q：前兩單元都有簡單的要領，那期望值這邊的要領是什麼？

A：有啦，其實我上課到最後幫她們做總整理的時候也跟她們提醒說，你如果這個題目上一眼看過去，有那種感覺是平均值的概念，比如說我可以膨脹它的次數縮小它的次數，這種概念我發現其實最後在講貝氏定理就非常好用，貝氏定理都是 1 嘛，然後 p(A)以後就是再乘 $P(B|A)$，那有時候我就跟學生講說，這個地方假設不是 1，比如說你一個$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$ ，那我假設定義它 6，那這概念學生馬上就會這樣翻過來，那 6 以後它$\frac{1}{2}$就變 3，它$\frac{1}{3}$就變 2，其實這種比例關係，機率本來就是這樣一個概念，那這種東西建立其實是用期望值把它建立起來的，因為它其實就是一個平均值的概念。其實我第一個是要告訴妳說哪些東西應當是不會影響到它的一個狀況，那什麼時候可以利用到平均值的概念去操作很多像機率的問題，那另外第二種領域就是說，如果碰到題目上你發現，因為它本身變化很多嘛，哪些可以用平均值，哪些還是要回到它真正原始的定義，就有點類似這種的概念嘛。有時候什麼東西都教，教到最後學生都會亂掉，所以我覺得教書要有一個主軸，不一定要面面俱到，不要什麼東西都要把它教到底。

Q：上課的步調一開始都會舉起始例？

A：第一個先吸引她們的焦點在這邊嘛，那有時候舉那些例子喔，我是覺得說你不能夠什麼東西都佈置好了，比如說你到教室去的時候，就看她們整個學習的狀況，比如說有時候拿掃把代表空間中的直線，這邊一個地方，這是一條直線，然後就開始建立它本身抽象化的概念，因為學生你一下用定義的方式講它她沒辦法承受，就讓她慢慢去感覺。所以一開始講些實例，她生活週邊上所看到的，然後她慢慢就可以接受這個概念，然後同樣大部分都是從實例講到數學化的一些東西，然後才給它下一個定義。那你就發現有些比較難的題目上，你那簡單的方法根本沒辦法應付嘛，你就非得用數學的方式去處理它抽象化的概念，那有時候也讓她們了解為什麼要有數學，它整個目的在哪裡，慢慢訓練以後，她們抽象化的概念就會比較具體一點點。其實我在不同班講的例子也都不一樣~你如果故意用一個東西，她們學生會覺得比較沒有樂趣嘛。所以我有時候就直接從在現場上的一個狀況，就找個例子來做它的一個說明。

Q：自然組與社會組的教學是否有所不同？

A：講義上是一樣，但是在舉例子就會變得比較淺顯一點點，就不會說一下就殺到底那種感覺，就會講一些簡單的東西慢慢去引導，那時間就會比較長。所以在引言的時候社會組會拉的比較長。