第二章　時空度規的微擾理論

選擇 FRW 度規（Friedmann-Robertson-Walker metric）當作我們的背景度規，因此在（3+1）維時空中的微小線段（line element）為

$$ds^2 = {}^{(0)}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j)，\quad (2.1)$$

其中 t 為物理時間（comving time），而 η 則為保角時間（conformal time），習慣上我們用希臘字母 $\mu = 0,1,2,3$ 表示時空分量，而羅馬字母 $i = 1,2,3$ 則只有空間分量，上式中

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}[1 + \tfrac{1}{4}\mathcal{K}(x^2 + y^2 + z^2)]^{-2}。\quad (2.2)$$

當 t 或 η 不變時，可視為一鑲嵌在（3+1）維時空內的超平面（hypersurface，即三維空間），$\mathcal{K}$ =0、1、-1 分別表示超平面為平坦、封閉、開放的情形。

在此，我們先討論度規有微擾的情況

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}，ds^2 = {}^{(0)}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu，\quad (2.3)$$

由於 ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$ 與 $g_{\mu\nu}$ 皆為對稱（symmetric），可知 $\delta g_{\mu\nu}$ 也是對稱，因此 $\delta g_{\mu\nu}$ 的自由度只剩下 $16-6=10$。另外，可將 $\delta g_{\mu\nu}$ 分成三部分，分別是 time-time 的純量、time-space 或 space-time 的向量、space-space 的張量，而這三種都可以造成度規微

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0-0 & 0-i \\ i-0 & i-j \end{pmatrix}。\quad (2.4)$$

1. 純量微擾：即只以純量來構造$\delta g_{\mu\nu}$。純量必須滿足協變的條件，可分為下列 4 類：0-0 項正比ϕ; 0-i 項或 i-0 項正比$B_{,i}$，下標表示是在三維超平面下的協變導數（Covariant derivative），即$B_{,i}=D_iB$;i-j 項可分為兩種，一種正比$\psi\gamma_{ij}$;另一種正比$E_{,ij}$，其中$E_{,ij}=D_iD_jE=E_{,ji}$為對稱的3×3二階張量。四個純量ϕ、B、ψ、E皆為（3+1）維時空座標的函數。在最後的結果(2.5)中，為了得到較簡潔的推導過程，我們在這些變數前加上適當的係數（並不影響純量微擾的變換性質）。

$$\delta g_{\mu\nu}^{(S)}=a^2(t)\begin{pmatrix}2\phi & -B_{,i}\\ -B_{,i} & 2(\psi\gamma_{ij}-E_{,ij})\end{pmatrix}。\qquad(2.5)$$

2. 向量微擾：0-i 項或 i-0 項正比S_i；i-j 項也可由向量F_i來構造：$F_{i,j}+F_{j,i}$，可看出交換下標 i、j 時結果不變所以是對稱的。如果要求「純的」向量微擾，我們就必須扣掉向量場中對應到純量的部分，因此我們加入兩個限制條件：

$$S_i^{,i}=F_i^{,i}=0，S_i^{,i}=D^iS_i，\qquad(2.6)$$

即希望這兩個向量場的散度（divergence）為零，因為向量場中的散度通常對應到純量。例如在真空中的電磁波，如果我們只看電場或磁場，可知其散度為零，即電荷密度或磁荷密度為零，散度對於波來說就是縱向的傳遞。如此就可去除掉縱波的可能性，故我們得到電磁波為橫波。最後我們可將向量微擾表示為

$$\delta g_{\mu\nu}^{(V)} = -a^2(t)\begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & F_{i,j}+F_{j,i} \end{pmatrix}。 \tag{2.7}$$

3. 張量微擾：i-j 項正比 h_{ij}，這是一個對稱的 3×3 二階張量。當然，為了得到「純的」張量，我們加入兩個條件：

$$h_i^i = 0，h_{ij}^{,j} = 0。 \tag{2.8}$$

分別對應到扣除張量中的純量和向量部分。因此我們將張量微擾表示為

$$\delta g_{\mu\nu}^{(T)} = -a^2(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}。 \tag{2.9}$$

對於這三種微擾我們做個總結。首先，在自由度分析上，純量微擾由四個純量函數構成，因此自由度是 4。向量微擾由兩個向量構成但是加入兩個限制條件自由度從 6 降為 4。張量微擾必須為對稱，因此自由度是 6，另外兩個限制條件給出四個限制方程，故自由度從 6 降為 2。三種微擾的自由度總和為 10，和我們一開始分析 $\delta g_{\mu\nu}$ 的自由度相同。若只考慮線性近似(即一階微擾項)三種微擾可獨立的演化，所以我們可分開討論。不過向量微擾不會隨著宇宙的演化而增加，反而是衰減。另外張量微擾會導致重力波產生，並不會和能量密度及壓力的不均勻耦合。只有純量微擾可能會導致不均勻結構的發展，因此對於物質的動力學有著較為重要的影響。接下來，造成 CMB 大尺度結構的純量微擾將會貫穿全文。