第伍章　結論與建議

在本研究中，主要是透過比例問題的表面結構和深層結構來探究國一學生的解題表現及解題策略，首先，先從全部 460 個樣本學生瞭解比例問題測驗的結果，再從中選取 24 位不同數學學業成就的學生接受較深入的訪談，在量與質的資料配合下，瞭解比例問題的表面結構和深層結構與學生解題的關聯性，因此，期望藉由本研究的結果，幫助學校教師更清楚瞭解學生在比例概念的學習情形，以期能協助學生更有效、更正確的學習，再者，也提供未來教學上的建議及可繼續進行研究的方向。

第一節 結論

首先，比例問題的表面結構分析結果如下列三項：

一、 「不同數字型式」結構下，學生在比例問題的解題表現及解題策略情形

在本研究中將比例問題測驗依照數字型式分成四個題本，並針對不同數學學業成就學生分析其解題表現及解題策略，由統計的結果得到數字型式的學習由易至難應為$\boxed{\text{第三式}}\rightarrow\boxed{\text{第一式}}\rightarrow\boxed{\text{第二式}}\rightarrow\boxed{\text{第四式}}$，其資料分析的結果如下：

(一) 高數學學業成就學生：不管在哪一種數字型式下，其解題表現及解題策略都不易受數字型式的影響，解題策略多偏向使用「公式法」。

(二) 中數學學業成就學生：在某些題目(第 2、11、13 題)較容易犯錯，會想使用「差數相等」策略解題，有些原因是與數字型式有關，有些原因則是因為不瞭解題意而犯錯，解題策略會因數字型式不同而改變解題策略。

(三) 低數學學業成就學生：容易因數字型式不同而有不同的解題表現及解題策略，幾乎是依照題目中的數字關係來決定其解題的結果，如果發現題目中的數字之間是有整數倍關係，則會使用乘法策略中的單價法或倍數法來解題，若沒有發現題目數字間的整數倍關係，則會傾向使用差數相等的策略來解題，因此，在第四式的表現明顯比其它題本的表現差很多。

二、 「不同語意類型」結構下，學生在比例問題的解題表現及解題策略情形

本研究將 15 題比例問題測驗依照語意類型分為四大類，並針對不同數學學業成就學生分析其解題表現及解題策略，由分析的結果猜測語意類型的認知學習由易至難應為熟知的量數問題→關係集合問題→放大-縮小問題→部分-部分問題，其資料分析的結果如下：

(一) 熟知的量數：不同數學學業成就學生在熟知的量數問題表現都最好，而且在此問題下多傾向使用「單價法」的解題策略。

(二) 部分-部分：這類的題目對學生而言是最容易犯錯的，部分-部分-不混合問題其錯誤的解題策略較常出現「對應項相等」、「和數相等」及「差數相等」的解題策略；部分-部分-混合的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「差數相等」策略。

(三) 關係集合：關係集合的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「差數相等」策略。

(四) 放大-縮小：這類的題目學生犯錯的比率較高，放大-縮小-外在量的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「差數相等」策略；放大-縮小-內在量的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「乘積相等」策略和「差數相等」策略，而在 T4 題本使用「差數相等」策略的人數明顯比其它題本多。

三、 「不同量的性質」結構下，學生在比例問題的解題表現及解題策略情形

在本研究中將 15 題比例問題測驗依照量的性質分為五類，並針對不同數學學業成就學生分析其解題表現及解題策略，其結果為學生在「離散量」的題目其解題表現優於「連續量」的題目；在「外比」的題目其解題表現優於「內比」的題目，因此，不同量的性質會影響學生的解題表現。

由分析的結果猜測量的性質的認知學習由易至難應為離散量−離散量−外比或離散量−連續量−外比→連續量−連續量−外比→離散量−離散量−內比或連續量−連續量−內比，其資料分析的結果如下：

(一) 離散量-離散量-內比及連續量-連續量-內比：這類題目因為是「內比」，題目中數量的單位都相同，因此，犯「差數相等」策略的比率較高。

(二) 離散量-離散量-外比、離散量-連續量-外比及連續量-連續量-外比：這類題目對不同數學學業成就學生而言較容易，因為是「外比」，題目中數量的單位不相同，因此，較常使用「單價法」來解題，犯「差數相等」策略的比率較低。

綜合以上三個表面結構的分析結果發現，高數學學業成就學生幾乎不受比例問題的表面結構影響其解題表現及解題策略；中數學學業成就學生較易受數字型式影響其解題結果，其它語意類型及量的性質則視題目而定；低數學學業成就的學生則至少會受其中一個表面結構影響其解題表現及解題策略，另外，數字型式是三個比例表面結構中最容易影響學生解題表現及解題策略的主因。

整體表現中，數字型式中 T1 及 T3 題本表現最好，T4 題本表現最差；語意類型中的「熟知的量數」問題表現最好，「部分-部分」問題表現最差；量的性質中的「離散量–離散量-外比」及「離散量–連續量-外比」的表現最好，「連續量-連續量-內比」及「離散量-離散量-內比」的題目表現最差。

本研究總共訪談了 24 名不同數學學業成就的學生，其比例的深層結構部分分析結果如下列三項：

四、 「比例概念的共變原則」結構下，學生在比例問題的解題表現及解題策略情形

研究者分別針對不同數學學業成就學生是否瞭解「比例概念的共變原則」進行訪談，分析「比例概念的共變原則」的瞭解與其解題表現及解題策略是否有關，其資料分析的結果如下：

(一) 高數學學業成就學生：高數學學業成就的學生平均答對題數約為 14.125 題，且 8 個學生當中有 7 個學生都具備比例概念的共變原則，顯示這個概念對他們而言都已瞭解。

(二) 中數學學業成就學生：中數學學業成就的學生平均答對題數約為 11.625 題，8 個學生當中有 3 人為不穩定及不具備比例概念的共變原則，代表中數學學業成就學生當中有一些人不是很清楚比例概念的共變原則。

(三) 低數學學業成就學生：低數學學業成就的學生平均答對題數約為 8.375 題，8 個訪談學生當中沒有一個人是完全瞭解比例概念的共變原則，即使他們知道題目中的一個數量變多時，另一個數量也會跟著變多的關係，但他們很容易受到題目或其它因素的影響而改變解題的策略，而且多會傾向使用「差數相等」策略來解題，因此，低數學學業成就的學生表現很不好。

在解題策略方面，若學生清楚比例概念的共變原則，則會傾向使用「倍數法」來解題，因為他們知道當一個數變成 k 倍時，另一個數也會變成 k 倍，他們會觀察到數字間的關係是兩個同時乘以 k 倍，因此，在這樣的認知情形下就會形成使用「倍數法」來解題，尤其是在第一式及第三式時最為明顯，因為 $a:b=c:x$，若 a 和 c 之間有倍數關係，則最容易想到的就是倍數法，但若為第二式，雖然學生知道可以使用倍數法，但因為 a 和 b 之間有倍數關係，使得他會比較傾向使用整數倍的關係來解題，所以，這時學生可能就會採用「單價法」解題。

由研究的結果知道學生的答題正確率與比例概念的共變原則有一定的關係，具備比例概念共變原則的學生其答對率普遍較高，答對題數都在 12 題以上，但相反言之，答題正確率高卻不代表一定具備「比例概念的共變原則」，有些學生被研究者判定為不穩定具備比例概念的共變原則，但答對題數也都在 12 題以上，原因可能為題目的練習效應或受數字的影響而導致得到正確的答案，所以，我們不能只憑答題正確率來判斷學生對比例概念瞭解的情形，比例問題的答題正確率只能做為參考。

五、 「比例概念的不變原則」結構下，學生在比例問題的解題表現及解題策略情形

研究者分別針對不同數學學業成就學生是否瞭解「比例概念的不變原則」進行訪談，分析「比例概念的不變原則」的瞭解與其解題表現及解題策略的關係，研究結果發現比例概念的不變原則比共變原則認知層次較高，原因是大部分的學生都能從題目中的數字察覺到倍數關係進而瞭解數量間的共變關係，但能發現倍數關係不代表具備比例的共變原則，可能只是因為比例問題的表面結構而答對問題，而不是真正掌握共變原則，所以研究者在訪談的過程中會不斷的試鍊及追問，以確切判斷學生是否瞭解共變原則，在判定為瞭解共變原則後，發現這些學生也都能掌握不變原則，因此，能掌握比例概念不變原則的基礎是要先能瞭解比例概念的共變原則，

而且不變原則的意涵不是單純從比例問題的表面結構可以解釋清楚的，所以，研究者認為只要能清楚瞭解比例概念的共變原則，則在認知上也能清楚掌握比例概念的不變原則，因此，不同數學學業成就的學生在不變原則的表現與共變原則的表現結果相同，這兩者幾乎是共存的，但在認知的層次上卻有所差別，由於大部分低數學學業成就的學生都會受比例問題的表面結構影響，所以他們在深層結構的建構上還尚未發展完全，反觀高數學學業成就的學生，因為他們對比例的深層結構認知清楚，所以較不易受比例問題的表面結構影響。

六、 「比例概念的相對改變原則」結構下，學生在比例問題的解題表現及解題策略情形

研究者分別針對不同數學學業成就學生是否瞭解「比例概念的相對改變原則」進行訪談，分析「比例概念的相對改變原則」的瞭解與其解題表現及解題策略的關係，其資料分析的結果如下：

(一) 高數學學業成就學生：高數學學業成就的 8 個學生當中只有 2 個學生具備比例概念的相對改變原則，其它學生為不穩定及不具備比例概念的相對改變原則，顯示這個概念相較於共變和不變原則是較難理解的。

(二) 中數學學業成就學生：中數學學業成就的 8 個學生當中不穩定及不具備比例概念的相對改變原則各佔 4 人，所有的中數學學業成就學生沒有一個人是完全瞭解比例概念的相對改變原則。

(三) 低數學學業成就學生：低數學學業成就的 8 個訪談學生全部都不具備比例概念的相對改變原則，他們對這個概念幾乎不能夠理解。

研究結果發現比例概念的相對改變原則比共變、不變原則認知層次更高，原因是訪談時要請學生說出使用乘除的運算方法和加減的運算方法差別為何是較不容易的，首先，學生要能清楚知道乘除運算和加減運算所代表的意涵，才有辦法區辨這兩者的差異。有些學生處於不完全瞭解相對改變的階段，當題目為「熟知的量數」問題或者為「外比」的題目時，他們比較能感覺出乘除運算和加減運算的差異，但如果題目為「內比」且兩數量間的差較小或相等時，那麼他們就無法比較之間的大小關係，而容易使用差數相等策略來解題，代表即使他們具備了比例概念的共變和不變原則，但如果在比例概念的相對改變原則不清楚時，很容易產生錯誤的解題策

略，使得解題的表現也較差，因此，能理解比例概念相對改變原則的學生較理解比例概念共變、不變原則的學生少，所以，比例概念的相對改變原則是決定學生是否能正確解題的關鍵因素。

由分析的結果顯示，比例概念的相對改變原則與學生的數學學業成就有明顯的關聯性，能真正瞭解「比例概念的相對改變原則」的學生幾乎都是屬於高、中數學學業成就的學生，而不能瞭解「比例概念的相對改變原則」的學生則大多屬於低數學學業成就的學生，這代表學生的數學能力應該從比例概念的相對改變原則來做劃分，能穩定瞭解比例概念相對改變原則的學生才能真正掌握比例問題而使用正確的解題策略解題。

由訪談的結果，深層結構的表現分數可預測數學學業成就分數約 47%左右，其迴歸方程式為 $y = 36.2 + 7.96x$ ，其中 x = 深層結構的表現分數、 y = 數學學業成就分數。深層結構的表現分數可預測比例問題的答對題數約 54%左右。其迴歸方程式為 $y = 6.36 + 1.56x$ ，其中 x = 深層結構的表現分數、 y = 比例問題的答對題數。

最後，由以上的分析結果，研究者認為學生受表面結構影響的先後順序可能為 $\boxed{\text{數字型式}}$ → $\boxed{\text{語意類型}}$ → $\boxed{\text{量的性質}}$，而深層結構的認知順序由易至難應該為 $\boxed{\text{共變原則}}$ → $\boxed{\text{不變原則}}$ → $\boxed{\text{相對改變原則}}$，研究者透過進一步分析瞭解比例問題的表面結構與深層結構的關聯，其分析的結果如下：

七、 比例問題的表面結構與深層結構解題之間的關聯性

(一) 表面結構的數字型式 VS.深層結構的共變、不變原則：負中等相關，兩者相互預測的正確度為 56%。

(二) 表面結構的數字型式 VS.深層結構的相對改變原則：負非常高相關，兩者相互預測的正確度為 86%，代表比例概念的相對改變原則與題目的數字型式有很高的相關，能夠預測的正確度非常高，也就是說，愈具備相對改變原則的學生，則愈不容易因題目數字型式的改變而有不同的解題表現，反之，愈不具備相對改變原則的學生，則愈容易因題目數字型式的改變而有不同的解題表現。

(三) 表面結構的語意類型 VS.深層結構的共變、不變原則：負中等相關，兩者相互預測的正確度為 60%。

(四) 表面結構的語意類型 VS.深層結構的相對改變原則：負低相關，兩者相互預測的正確度為 37.5%，這兩者的關聯度不強，所以要用相對改變原則來預測語意類型的解題表現是較不容易的。

(五) 表面結構的量的性質 VS.深層結構的共變、不變原則：負中等相關，兩者相互預測的正確度為 49%。

(六) 表面結構的量的性質 VS.深層結構的相對改變原則：負低相關，兩者相互預測的正確度為 21%，這兩者的關聯度不強，所以要用相對改變原則來預測量的性質的解題表現是較不容易的。

八、 學生在解比例問題時無法正確解題及遭遇困難的原因

透過研究者收集到的資料及訪談的結果發現學生在解比例問題時無法正確解題及可能遭遇到的困難如下情形：

(一) 只會記老師教過的方法或公式，解題很厲害，但不知道其理由。

(二) 遇到題目太長或沒看過，不能獨立思考使用正確的解題策略。

(三) 數字型式影響最大，若學生觀察到數字間有整數倍關係就會用正確的解題策略運算，若沒有整數倍關係就會傾向使用「差數相等」策略，因為差數相等策略可以解決所有數字的運算問題，因此，學生可能都沒有瞭解題意或掌握題目的關鍵，只是看到數字就做運算，沒有考慮是否符合題目的意思。

(四) 學生在解決熟知的量數問題正確率較高，能瞭解使用「單價法」的意義，代表他們對這種題型的單位量處理能力還可以，但在其它語意類型的題目，則就沒有這麼好的表現了，尤其是「部份-部份」及「放大-縮小」的問題，學生因為練習的次數較少，而且有些類型較沒見過，因此，錯誤率就相對提高。

(五) 學生在做「部份-部份-不混合」問題時，常常會因為不瞭解題意而使用「對應項相等」、「和數相等」及「差數相等」的解題策略，在「放大-縮小-內在量」

問題其錯誤的解題策略多偏向使用「乘積相等」及「差數相等」策略，所以應該提高學生在解題前先瞭解題意的能力，才能避免因誤解題意而產生錯誤的解題。

(六) 學生在做「內比」的題目時會受到單位相同的干擾而選擇使用「差數相等」策略，而「外比」的題目較易使用單價法解題，所以表現較好。

(七) 若學生對分數的概念及運算能力差，則當他們在做連續量的題目時，如果出現非整數倍，則學生的表現就明顯落差很大，代表學生習慣於整數，對分數較不熟悉，如果學生在解題時只停留在表面結構上，則這種題目答錯的機率就很高，所以學生使用「差數相等」策略是為了逃避分數或小數的運算。

(八) 有些學生的分數四則運算沒有問題，但還是無法正確回答問題，代表他的深層結構概念沒有很穩固。

(九) 學生在解$6:3=12:x$的問題時，他可能會出現$6\div3=2$，$12\times2=24$的錯誤計算方式，因為學生容易想成 6 是 3 的 2 倍，所以 12 也要乘以 2 倍，在運算上值得提醒學生小心數字間的關係。

(十) 沒有「相對」概念的學生不會做「比較問題」，他們無法用數字去比較大小，只能用感覺的方式去判斷，如果數字差距大，學生可能還能回答正確，但若數字差距小或差相等，則他們就沒辦法有效比較出大小關係。

另外，依據文獻中所提的錯誤解題策略中，學生使用「加法策略」的情形最多，而文獻中的「加法策略」即是指本研究中的「差數相等策略」，因為使用此策略的學生人數明顯較多，所以研究者在訪談時會著重於有使用此策略的學生，請學生說明使用「差數相等」策略的原因，以探討多數學生使用此策略的想法，學生使用此解題策略的原因如下：

(一) 看不懂題目意思及不瞭解題目數據間的關係，所以以直覺猜測，沒有明確原因，只是因為差數相等策略比較好算，至少可以算出一個答案來。

(二) 逃避使用分數或小數運算，知道要使用乘除運算，但因數據不好算(沒有整數倍)或不會做，所以使用加減運算代替。

(三) 依據數字大小關係決定，相差少的就容易使用差數相等策略。

(四) 遇到不熟悉或題目太長的問題，因為不瞭解題意，所以選擇差數相等策略解題較為容易。

(五) 依據題目中為同類量或異類量決定，同類量就用差數相等策略，異類量就用乘法策略。

學生會使用錯誤的解題策略，其實真正的理由都是因為沒有完全瞭解比例概念的深層結構，學生只是上課聽老師講比的運算性質和公式(內項相乘等於外項相乘或交叉相乘)，沒有真正內化與理解其意涵，因此，綜合文獻與本研究的結果，研究者認為學生能夠正確解決比例問題必須具備以下四個條件：

(一) 能夠瞭解單位量的意義。

(二) 具備分數四則運算的能力。

(三) 具備正確讀題及瞭解題意之能力。

(四) 能夠瞭解比例的深層結構概念－共變、不變和相對改變原則。

第二節 建議

在此依據研究結果，對於國一學生在解比例問題時提出一些建議，同時也整理研究結果，供學校的數學教師在進行教學時參考之用，其建議如下：

一、 教學順序上的建議

由研究結果發現學生對比例概念的認知是有順序性的，因此，建議教師們可以依照學生的認知發展由簡至難循序漸進的教導。

(一) 比例問題的表面結構

學生在解比例問題時因為會受表面結構的影響而有不同的解題表現和解題策略，因此，建議教學上的順序為：

(1)數字型式：因為學生的整數運算能力比分數運算能力好，所以比例問題的數字型式可先從整數倍開始，然後再進一步到非整數倍的題目，讓學生感受到雖然數字型式不同，但其題目的意涵都相同。

(2)語意類型：學生對「熟知的量數」問題較容易理解且解題的經驗較多，可以先從這類的題目開始引導使用不同的比例解題策略，之後再由易至難提出關係集合問題、放大-縮小問題，最後為部分-部分問題。

(3)量的性質：因為「外比」的題目其數量間的單位不相同，學生比較容易理解其概念，所以建議教學時先讓學生瞭解此部分的概念後，再延伸至其它的問題，而學生對「離散量」的認知發展也比「連續量」來得早，所以在量的性質上也建議從離散量的題目開始教,學生較容易掌握其概念。

(二) 比例問題的深層結構

由研究結果發現，學生瞭解比例問題的深層結構的確有助於學生正確解決比例問題，因此，教師們在教學時務必確實教導學生比例的深層結構概念，而非只是強調運算而已，所以，此部分的建議如下：

(1)共變原則：剛開始教學時，可先讓學生發現數量間的倍數關係是共變的，並強調「一個數量變成 k 倍，另一個數量也變成 k 倍」，而不能用「一個數量

變大，另一個數量也變大」這樣的敘述來描述比例的共變關係，容易產生誤解。

(2)不變原則：學生瞭解共變關係後，接著讓他們去發現數量之間的倍數(比值)關係永遠不變，並讓學生清楚瞭解「每一單位比」及「單位比值」的意涵。

(3)相對改變原則：確定學生都瞭解比例的共變和不變關係後，進入到認知層次較高的相對改變關係，讓學生思考使用比例方法解題時，兩個比前後項的「差」有何變化關係，學生若能發現「差數也會跟著倍數改變，並非固定不變」這件事，則可告訴學生這兩者數量是相對改變的關係，它們的差也是相對於原數量在共變。

二、 教學方法上的建議

在教學時，教師不要只強調比例的運算性質及公式，而應該針對比例的深層結構概念深入的講解與提出問題讓學生思考，以下提出兩個重要且需強調的部分讓教師們做參考。

(一)減少學生使用錯誤解題策略的教學方法

由於在解比例問題時使用「差數相等」策略的學生相當多，因此，教師們在教學時，可讓學生討論兩數量之間的關係有哪幾種，並讓學生比較這些關係有哪些相同及相異之處，最後，給予學生適時的引導，讓學生清楚知道比例概念的兩數量關係與圖形變化，避免與其它概念混淆。以下研究者提供簡單的教學步驟讓教師們做參考：

- 步驟一：瞭解兩數量關係的種類

  兩數量的關係主要分為下列四種，其中的 $k>0$：

  (1) $y=kx$　(2) $y-x=k$　(3) $x+y=k$　(4) $xy=k$

- 步驟二：瞭解兩數量共變的關係和圖形

  (1)一個數變大，另一個數也變大：$y=kx$ 和 $y-x=k$

  (2)一個數變大，另一個數變小：$x+y=k$ 和 $xy=k$

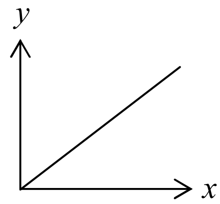
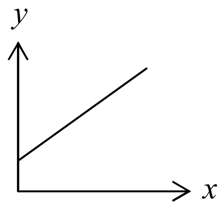
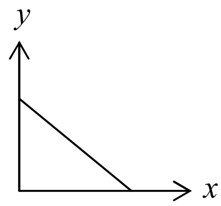
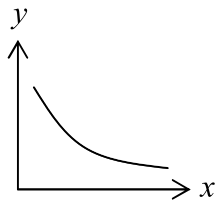
- 步驟三：瞭解兩數量是相對或絕對關係

  (1)絕對關係(一個數增加 k，另一個數也增加 k)：$y-x=k$

  (2)相對關係(一個數變成 k 倍，另一個數也變成 k 倍)：$y=kx$

經過一連串的探究過程後，可將結果歸納為下表 5-2-1 及圖 5-2-1 所示：

表 5-2-1 兩數量的關係及圖形特徵

	解題策略	關係式	圖形	特徵
正確的解題策略	乘法策略	$y=kx$		1.x 和 y 成正比 2.線型函數 3.通過原點的直線 4.x 愈大，y 也愈大
錯誤的解題策略	差數相等	$y-x=k$		1.線型函數 2.不通過原點的直線 3.x 愈大，y 也愈大
	和數相等	$x+y=k$		1.線型函數 2.不通過原點的直線 3.x 愈大，y 愈小
	乘積相等	$xy=k$		1.x 和 y 成反比 2.非線型函數 3.不通過原點的直線 4.x 愈大，y 愈小

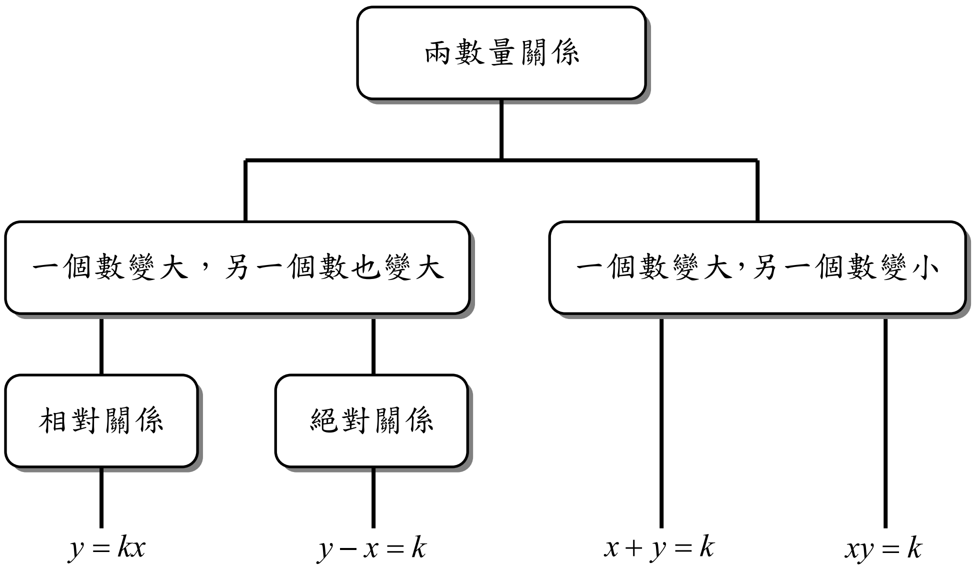


圖 5-2-1 兩數量關係的分類圖

在此，研究者也為「為什麼使用差數相等解題策略的學生人數眾多」提出解釋，由上面的圖表可知道原因，因為「差數相等」的數量關係和乘法策略一樣都是呈現“正相關”，兩種方法有很多相似之處，因為兩者都是一個數量變大，另一個也跟著變大，而且都是線型函數，只差別在一個為相對關係，另一個為絕對關係，只要學生不能掌握比例的相對改變原則，那麼就很容易在解題時使用「差數相等」策略，比例概念的數量關係與「差數相等」的關係較類似，與其它的關係差異較大，因此，教學時應著重讓學生澄清這幾種數量關係的差別，這將有助於減少學生使用「差數相等」策略來解題。

(二)讓學生區辨相對與絕對關係的教學方法

學生在相對概念剛開始建立時，有時候會與絕對概念混淆在一起，因此，教師可提供學生一些問題做比較，讓學生思考兩數量之間是相對還是絕對關係，哪種情況下要使用數量之間的差來運算，哪種情況下要使用數量間比的概念來運算，到底要如何判斷使用哪一種方法才能符合題目的意思，教師可以提供學生下表 5-2-2 幾個例子，讓學生判斷兩數量間是絕對還是相對關係的使用時機：

表 5-2-2 判斷兩數量間為絕對與相對關係的例子

	絕對關係的例子	相對關係的例子
例一	當弟弟 4 歲時，哥哥 6 歲，請問當弟弟 6 歲時，哥哥幾歲？	用保特瓶來量哥哥和弟弟的身高時，發現弟弟有 4 個保特瓶高，哥哥有 6 個保特瓶高，如果改用罐頭來量，則弟弟的身高有 6 個罐頭高，那麼哥哥的身高應該會有幾個罐頭高呢？
例二	哥哥和弟弟跑步的速度相同，一開始，哥哥讓弟弟先跑一段距離，然後才開始跑，當哥哥跑了 2 圈時，弟弟已經跑了 4 圈，請問若兩人維持相同的速度繼續跑下去，則當哥哥跑了 4 圈時，弟弟應該跑了幾圈？	哥哥和弟弟跑步的速度不同，他們同時出發，當哥哥跑了 2 圈時，弟弟已經跑了 4 圈，若兩人維持各自的速度繼續跑下去，則當哥哥跑了 4 圈時，弟弟應該跑了幾圈？

另外，教師也可提供絕對或相對關係皆可使用的例子，例如：「有二條蛇，甲蛇長 3 公尺，乙蛇長 2 公尺，若二條蛇的成長速度相同，則二年後甲蛇變成 6 公尺，那麼乙蛇應該變成幾公尺？」，可讓學生說說自己的想法，說明使用絕對改變和相對改變兩種方法的意義。

另外，本研究中發現學生在「放大-縮小-內在量」的解題表現不佳，代表這類的題目對學生而言是較困難的，因為「內在量」是指物體本身的數量，在解題時容易將題目的數量視為「絕對關係」，較易犯「差數相等」策略，因此，教師可提供多一些內在量的題目讓學生思考其數量關係，以「九十一年第二次國民中學基本學力測驗」的第九題及第二十五題為例：

9.<u>小宏</u>家中有一老舊長方體水塔，其長為 3 公尺、寬為 2.5 公尺、高為 1.5 公尺。現在想依照原有長寬高的比例擴建一新水塔。若新水塔的長比原來多了 0.6 公尺，則下列關於新水塔的敘述哪一個是正確的？

(A) 高為 2.4 公尺

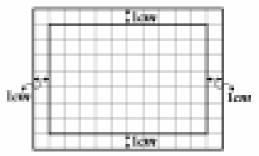
(B) 高為 2 公尺

(C) 寬為 3.1 公尺

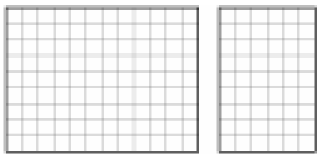
(D) 寬為 3 公尺

25.下列每個選項中都有兩個長方形。根據圖中所給的方格紙、數據，判斷哪一個選項中的兩個長方形是相似的？

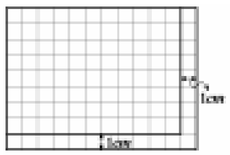
(A)



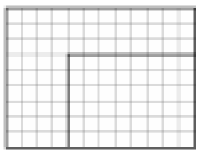
(B)



(C)



(D)



在提供完學生例子後，可以讓學生討論以下的問題：

(1)什麼情況下兩數量的「差」會保持不變？探究其原因為何？

(2)什麼情況下兩數量的「差」會一直改變？這兩數量之間的「比」或「比值」是否保持不變？

(3)比較兩數量間的絕對與相對關係有什麼不一樣？

除此之外，建議教師們不僅要提供學生做比例的「缺項問題」，還可提供「比較問題」讓學生比較兩數量大小，而比較兩數量大小的方法有「差」和「比值」兩種，例如：「<u>美好</u>超市售有兩種不同容量的光泉牛奶，小瓶 250 毫升售價 10 元，大瓶 500

毫升售價 20 元，因為成本提高，所以美好超市決定調漲光泉牛奶的售價，小瓶 250 毫升調漲成 12 元，大瓶 500 毫升調漲成 24 元，則你認為哪一種容量的牛奶調漲的價錢比較多？」

- 第一種回答：因為小瓶的調漲 12-10=2 元，大瓶的調漲 24-20=4 元，所以大瓶調漲的價錢比較多。

- 第二種回答：因為小瓶調漲 2 元(12-10=2)，而 2 元佔原來售價的 20% (2÷10=20%)，而大瓶調漲 4 元(24-20=4)，4 元也佔原來售價的 20% (4÷20=20%)，所以不管小瓶還是大瓶，調漲的幅度都是 20%，因此兩種容量的牛奶調漲的價錢一樣多。

總之，數學教師們在教學時，不要只強調及練習比例數字間的運算，應該多變化題目類型，加強學生對比例的瞭解，並提供學生不同解法，不要受題目表面結構的限制，多嘗試一題多解，如此一來，學生才能對比例概念融會貫通，而不再只是單純的做計算解題而已。

三、 比例問題測驗上的建議

本研究的比例問題測驗題目與一般教學現場中使用的題目部分相似，研究結果顯示比例問題測驗答題正確率高的學生對比例的深層結構概念不一定瞭解，可能只是因問題的表面結構或以前的解題經驗而答對，因此，教師們在測驗學生是否瞭解比例概念時，不應只是用這樣的測驗題目來當做學生最後的學習成效，只能做為參考，所以，建議教師們在出題時，可從非整數倍的題目來檢測學生是否具備了共變、不變和相對改變的概念，瞭解學生的問題是出在計算能力的不足還是未具備比例的深層結構概念，之後再來進行補救教學。

另外，研究結果也發現學生在「熟知的量數」及「外比」的問題較容易使用單價法解題，不易使用錯誤的解題策略，顯示他們對這些問題是較容易理解其意涵，也較能掌握其共變和不變的概念，所以，如果想測驗學生是否真正瞭解比例的深層結構概念，建議應該避開這些題目，並盡量使用一些學生較少見過的題目，這樣才能有效檢驗出學生是否瞭解比例概念。

四、 補救教學上的建議

學生在本研究中使用錯誤解題策略的主要原因為：

(一) 不瞭解比例的深層結構概念。

(二) 分數運算能力不好。

(三) 誤解題意，讀題能力不佳。

因此，依照以上三種錯誤情況依序提供以下的補救教學建議：

(一) 如果學生的問題是在比例概念的不瞭解而造成解題錯誤，則應該讓學生重新學習比例概念，加強比例的深層結構概念，多變化題目類型，使學生感受題目中隱含的比例概念，而非做簡單的的數字計算解題。

(二) 若學生解題錯誤的原因是因為分數運算能力不好而逃避使用正確的解題策略，則應該加強學生的分數運算能力，使其不管在什麼樣的數字型式下都能不受影響而正確解題。

(三) 有些學生可能一時讀題太快，或因題目太長、複雜而沒辦法掌握題目意涵時，則可讓學生學習如何分析題目意思，待瞭解題意後再解題，而不輕易決定其解題的方法，訓練學生能掌握題目中的關鍵要素，判斷正確了再解題。

五、 未來研究方向的建議

本研究以量化的資料收集及質性的訪談探究了許多關於國一學生在解比例問題時會出現的情況，研究者在研究完畢後發現未來還有很多值得改善及新的研究方向，所以提供往後的研究者一些建議做為參考：

(一) 本研究的受試對象僅限於彰化縣立某所國中一年級學生，建議後續研究可推廣至其它縣市及增加樣本人數，以建立研究的外在效度，再者，可將此研究往國小高年級或國二學生發展，瞭解不同年級的學生在解題時，其比例概念瞭解的程度是否有差異，並可探究隨著學生學習的經驗增加及年齡的增長，是否有助於減少使用錯誤解題策略的比率。

(二) 本研究的比例問題只探討第四項的缺項問題($a:b=c:x$)，未來後續研究可推廣至其它項的缺項問題，並可再繼續探究學生在「比較問題」的解題表現及解題策略情形。

(三) 在題目設計方面，因為本研究的表面結構分為三類，受於題目不能過多的限制，所以有些類型的題目只有一題或兩題，導致有些類型題目的信度不高，此乃本研究缺失之處，因此，在設計題目時，值得慎重考量題目的取捨。

(四) 本研究的結果有些為研究者根據資料所歸納猜測的，其猜測的正確性還有待後人詳加驗證，希望未來的研究可朝著這個方向發展，使我們能更確切瞭解學生在比例概念的學習認知發展順序。

(五) 本研究的表面結構只限定於數字型式、語意類型和量的性質，而各數字型式的數字大小都限定在 30 以內，語意類型及量的性質類別也都有其限制，因此，是否還有其它的表面結構與學生的解題表現有關連，則尚待開發與研究。

(六) 未來希望朝著發展出能鑑定學生是否瞭解比例深層結構的測驗題本，而不需要透過訪談即可測驗出學生在比例深層結構概念的瞭解程度，進而能幫助教師瞭解學生真正的學習成效。

(七) 未來還可朝著比例問題的表徵進行研究，可探究文字、圖形及表格三種不同的表徵是否與解題的表現有關，可提供教師改善學生的學習情況。

(八) 本研究發現一些學生錯誤解題的原因，在教學上，還有值得改進的空間，因此，未來可發展一些教學上的內容及方法，以減少學生錯誤解題及發生解題困難的比率。

雖然本研究在整個設計及過程中有些尚欠周詳及完整之處，但還是在研究的結果中發現了很多學生學習比例問題的情形，提供了未來一些較明確的研究方向，也希望對教育界有些微的貢獻。