

日本算額題的趣味教學

蘇意雯

臺北市立成功高級中學

壹、前言

今年農曆春節總共有九天的連假，很多國人都趁著難得的假期全家出國旅遊。而鄰近的日本由於交通方便及治安良好，向來是民眾出遊的熱門選擇。大部分的日本旅遊行程，總免不了安排到寺廟神社參觀，在寺廟裡大家舉目可見的是琳瑯滿目的繪馬，如圖一所示。繪馬是日本民眾在寺廟祈願的憑藉，除了繪畫精妙、色彩鮮豔，頗具民族特色之外，也曾與日本的數學文化相關，甚至促進了「和算」（日本本土數學）的發展。

本文是以筆者旅遊中所碰觸的數學文化脈絡為源起，運用日本繪馬中的數學題目做為中學幾何教學之運用，希望在異國風情的引領下，讓學生能體會數學的多元風貌，以提升學生對於數學的喜愛，進而能對學習有所裨益。



圖一、日本太宰府天滿宮琳瑯滿目的繪馬

貳、繪馬 vs. 算額

早期，日本人會獻上馬匹給神社或寺廟表示崇敬，但由於馬隻昂貴難以擁有，逐漸地，他們就以畫有馬隻的繪板代替，而所畫的對象也逐漸由馬匹延伸到他種物件，這就是現今所謂的「繪馬」。在繪馬的背面，可以寫上祈求人的心願，以及他們的姓名和住所。那麼，如此懸放在寺廟中用來祈福的繪馬，到底與數學有何關聯呢？

江戶時代（1603~1867 年）的日本人信仰虔誠，他們會設計各種式樣的匾額到鄰近的寺廟或神社酬神。如果是把數學問題和答案用漢字書寫在板上，這種還願的書板就叫做「算額」，因此，算額可以說就是數學風貌的繪馬。換句話說，和算家不在木製的書板上畫上馬匹酬神，而是另外以一種數學的形式來呈現（蘇意雯，2006）。

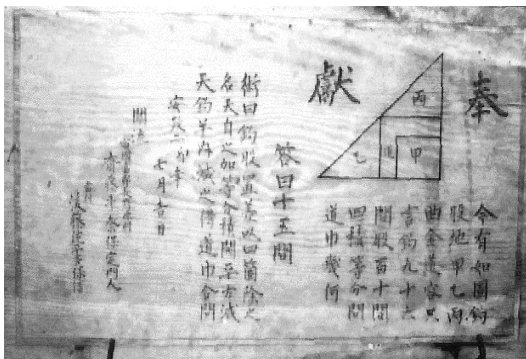
事實上，奉納算額的意義有三種：一是感謝神佛的恩賜；另外，也表示對和算教師的尊崇，最後一種，則是展示研究的成果，因為神社和寺廟，是當時人們交流的一個最佳場所，在此，算額可以有很高的能見度，也能引起有志之士的討論和共鳴。在算額上所書寫的數學知識，幾何問題多於代數問題。至於為何會有這樣不同

的呈現風貌，主要是因為幾何圖形包含了美麗的圓形或多邊形，而顯得更有吸引力。至於典型的算額問題，則是求邊長或者圓的直徑，其中當然也包含了直線、三角形、內切圓和圓周長等問題。以下，就讓我們欣賞一些算額中有趣的數學題目。

參、算額趣題舉隅

大致來說，一塊算額包括 1~10 個不等的問題，在整塊算額的配置上，通常上方是彩色的圓或三角形等幾何圖形，接下來的部分是題目、答案及解法。位於下方的則是流派、教師、展示者的名稱及奉獻的日期。算額上的這些題目正是訓練學生數學實作的素材。

首先，介紹布置於飯田市一色神社中的一個算額（圖二），這片算額長為 91 公分，寬為 51 公分。茲說明題目的內容如下。



圖二、一色神社的算額 (<http://www.wasan.jp/nagano/issiki.html>)

本題原文如下：

今有如圖鉤股地，甲、乙、丙、曲全道容。只言鉤九十六間，股百十間，四積等分，問道中幾何？

答曰：十五間。

在數學史融入數學教學的過程中，若遇到古代數學文本，教師可於課堂中翻譯成現代數學術語，以方便學生理解。在本題中，所謂「間」，是日人所用的長度單位，日本人以六尺為間，約合 1.8182 公尺。現在，將本題翻譯成白話文，並解釋做法如下：

問題：有一個直角三角形，鉤長 96 間，股長 110 間，內含一條寬度相等的 L 型的道路如圖所示，已知矩形甲與乙、丙兩三角形及道路這四個部分面積都相等，問道路寬為何？

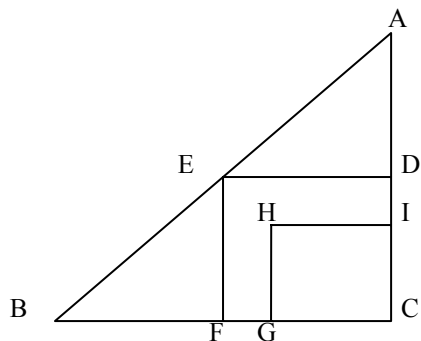
答案：15 間。

接下來，我們運用現代數學符號表示其解法。如圖三所示，由於三角形 AED 的面積 = 三角形 EBF 的面積 = $\frac{1}{2}$ 矩形 DEFC 的面積。

$$\therefore \overline{AD} = \overline{DC} = \frac{1}{2} \times 96 = 48,$$

$$\overline{BF} = \overline{FC} = \frac{1}{2} \times 110 = 55$$

設道路寬為 x ，則 $48 \times 55 = 2(48 - x)(55 - x)$ ，整理可得方程式 $x^2 - 103x + 1320 = 0$ ，解得 $x = 15$ 或 88 （不合），因此，得出道路的寬度。



圖三

其次，我們看看三角形內切圓的問題。這是布置於長谷觀音堂中的一個算額（圖四），本算額長為 95 公分，寬為 52 公分。此題原文如下：

今有鈎股弦內如圖隔中鈎容大小圓二箇。其大圓徑三十二尺，小圓徑二十四尺，鈎股弦各問幾何？

答曰：鈎六十尺，股八十尺。

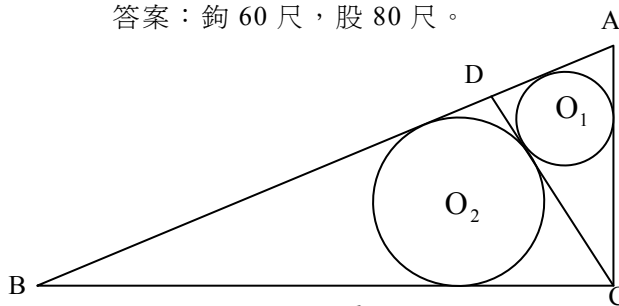


圖四：長谷觀音堂的算額
(<http://www.wasan.jp/nagano/hasekannon.html>)

我們還是一樣對本題加以翻譯，並解釋做法如下：

問題：現在有一直角三角形如圖所示，做斜邊上的高分此三角形為兩個三角形，兩三角形內各自有一內切圓。大圓直徑 32 尺，小圓直徑 24 尺，請問鈎股弦各為多少？

答案：鈎 60 尺，股 80 尺。



參考圖五，

設小圓 O_1 半徑 r_1 ，大圓 O_2 半徑 r_2 ，

$$\overline{AC} = x, \overline{BC} = y, \text{ 則 } \overline{CD} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

同理

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{y^2 - \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

在三角形 ADC 中，

$$\overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x = 2x + 2r_1,$$

整理可得

$$(2r_1 + x)\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + xy = x(x + y) \dots (1)$$

同理，於三角形 BDC，

$$\overline{BD} + \overline{CD} + \overline{BC} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y = 2y + 2r_2,$$

整理可得

$$(2r_2 + y)\sqrt{x^2 + y^2} = y^2 + xy = y(x + y) \dots (2)$$

$$(1) \div (2) \text{ 可得 } \frac{2r_1 + x}{2r_2 + y} = \frac{x}{y}, \therefore y = \frac{r_2}{r_1} x$$

把 $y = \frac{r_2}{r_1} x$ 代入(1)，可得

$$(2r_1 + x)\sqrt{x^2 + \frac{r_2^2}{r_1^2} x^2} = x\left(x + \frac{r_2}{r_1} x\right)$$

整理可得

$$x = \frac{(r_1^2 + r_2^2) + (r_1 + r_2)\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_2}.$$

同理，可得

$$y = \frac{(r_1^2 + r_2^2) + (r_1 + r_2)\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1}$$

在本題中，

$2r_1 = 24$, $2r_2 = 32$, $\therefore r_1 = 12$, $r_2 = 16$ 代入得鉤為

$$\frac{(12^2 + 16^2) + (12 + 16)\sqrt{12^2 + 16^2}}{16} = \frac{960}{16} = 60$$

得股為

$$\frac{(12^2 + 16^2) + (12 + 16)\sqrt{12^2 + 16^2}}{12} = \frac{960}{12} = 80$$

而三角形之斜邊為 100。

承上題的三角形內切圓的題型，接著，我們再介紹布置於長野市北尾張部的連開庵中的一個算額（圖六）。本算額長 43 公分，寬也是 43 公分。不過，本題較為困難，因此，比較適合程度好的學生或是資優班的學生研究。以下，我們就對題目的內容加以說明。



圖六：連開庵的算額
(<http://www.wasan.jp/nagano/renkan3.html>)

本題原文如下：

假如有圖隔斜容等圓二等，乃不知三斜欵鉤股，只云中鉤四寸、全圓徑三寸，問等圓徑？

答曰：等圓徑二寸。

我們還是一樣對本題加以翻譯，並解釋其做法如下：

問題：如圖所示，從一個大三角形頂點畫直線分割成兩個小三角形，每一個小三角形各有一內切圓，此二內切圓相等，不知道大三角形的邊長，只知道大三角形底邊上的高是 4 寸，以及大三角形的內切圓直徑是 3 寸，問兩等圓的直徑為何？

答案：兩等圓直徑為 2 寸。

在解這個問題之前，我們先來看看一個定理：如圖七，若三角形 ABC 之內切圓半徑是 r ，底邊 BC 的高是 h ，則

$$1 - \frac{2r}{h} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

由於三角形 ABC 的面積等於 $1/2$ 三角形周長 \times 三角形內切圓半徑，故

$$\frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{r}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{r}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{r}{\tan \frac{A}{2}} \right) \times r = \frac{1}{2} \times \left(\frac{r}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{r}{\tan \frac{C}{2}} \right) \times h$$

又因為

$$\tan \frac{A}{2} = \tan \frac{\pi - (B + C)}{2} = \tan \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) \right] = \cot \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)$$

所以，

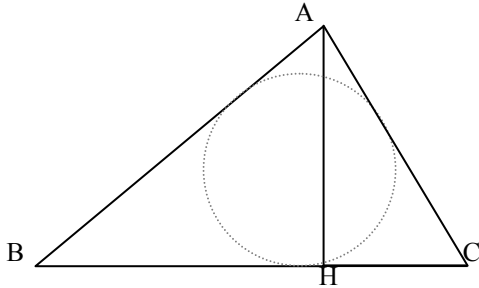
$$(2r - h) \left(\frac{1}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \right) + 2r \left(\frac{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}} \right) = 0$$

$$(2r - h) \left(\frac{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}} \right) = 2r \left(\frac{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} - 1} \right)$$

$$\therefore (2r - h) \left(\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} - 1 \right) = 2r \left(\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \right)$$

整理可得

$$h - 2r = h \times \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}, \quad \therefore 1 - \frac{2r}{h} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$



圖七

根據上述定理，由題意可畫出圖八。

若設大圓半徑為 R ，等圓的半徑為 r ，則我們可得出下列三式：

在三角形 ABD 中，

$$1 - \frac{2r}{h} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{\angle ADB}{2} \dots (1)$$

在三角形 ABC 中，

$$1 - \frac{2R}{h} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \dots (2)$$

在三角形 ADC 中，

$$1 - \frac{2r}{h} = \tan \frac{C}{2} \tan \frac{\angle ADC}{2} \dots (3)$$

(1)×(3)可得

$$\left(1 - \frac{2r}{h}\right)^2 = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{\angle ADB}{2} \tan \frac{C}{2} \tan \frac{\angle ADC}{2},$$

其中

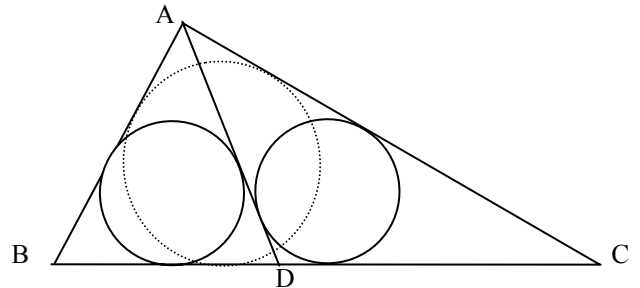
$$\tan \frac{\angle ADB}{2} \tan \frac{\angle ADC}{2} = \tan \frac{\angle ADB}{2} \tan \frac{\pi - \angle ADB}{2}$$

$$= \tan \frac{\angle ADB}{2} \cot \frac{\angle ADB}{2} = 1。$$

把(2)式代入，得 $\left(1 - \frac{2r}{h}\right)^2 = 1 - \frac{2R}{h}$ ，整理可得

得 $r = \frac{h - \sqrt{h^2 - 2hR}}{2}$ ，等圓的直徑就是

$2r = h - \sqrt{h^2 - 2hR}$ 。在本題中代入 $4 - \sqrt{4^2 - 4 \times 3} = 2$ ，就是等圓的直徑。



圖八

在古代數學文本中，除了題目和答案之外，還有所謂的「術」，就是我們今日的解題方法。但通常「術」只是寥寥數語的代公式，真正的解答還是需要讀者自行推敲。在筆者的教學過程中，當學生首次接觸到古文本，對於古代數學家僅以隻字片語就交代全部的計算過程總是瞠目結舌，從而往往對於數學家所提出的「解法」不知所云。此時，我們應鼓勵學生靠自己的能力解題，給予出整道數學問題一個完整的解法，這對於他們也是一大挑戰。例如，上題的解法是「術曰：置中鉤內減全圓徑，餘乘中鉤開平方以減中鉤，餘得等圓徑。」所表達的就是

$$2r = h - \sqrt{h^2 - h(2R)} = h - \sqrt{h(h - 2R)}$$

這個式子。以白話文來解說，此法就是：把底邊上的高減掉大三角形內切圓的直徑，剩下的乘上高並開平方根，用底邊上的高減去上面開平方根求出來的答案，就

可得到等圓的直徑。也就是本題中代入 $4 - \sqrt{4(4-3)} = 2$ ，求出等圓直徑。

肆、數學文本融入數學教學

日本的學者由於擔憂現代日本人已不知算額為何物，並在急切希望保存此文化遺產的理念之下，正積極整理解析現存的算額。另外，也有日本中學教師，嘗試在平面幾何的教學中融入算額文本。他們所採用的方式，是在教授完幾何圖形的基本性質、定理的證明之後，於相關例題的應用上，提供算額的題目，讓學生以上課所學習到的平面幾何算法求解。儘管在算題中以漢文所表達圖形的問題居多，會造成日本學生學習上的些許困難，而必須仰賴教師加以解釋，但是，這些人的努力，都是希望這個特殊的文化財得以讓日本人重新認識，甚至讓世界上更多對此有興趣的人分享。

對於臺灣的中學教師而言，由於我們並沒有保存和發揚算額文化的重責大任，正可以好整以暇的客觀擷取一些有趣的算額題目，讓學生了解數學是人類的活動，數學的發展與社會文化脈絡息息相關，並藉著算額圖片和繪馬的古今對照，讓學生擁有多元文化的關懷。也就是透過對數學文化遺產的緬懷、追溯、獵奇與探索，讓學生得以認識古算家的數學思維與發展軌跡，以及領會文化交融的啟發與創意。

Richard Courant (1953) 在 Morris Kline 所撰寫的《西方文化中的數學》一書中的序言常為人所津津樂道，其中一段話是這麼說的：「許多世紀以來，人們一直遵循數學是文化的組成部分之傳統，但在我們這個教育普及的時代，這一傳統卻被拋

棄了。科學家們與世隔絕的研究，教師們少得可憐的熱情，還有大量枯燥乏味、商業氣十足的教科書和無視智力訓練的教學風氣，已經在教育界掀起了一股反數學的浪潮。然而，我們深信，公眾依然對數學有濃厚的興趣。」時至今日，這仍是一段振聾發聵的警語，如何提升學生學習數學的興趣，不要只是為了考試需要，囫圇吞棗地勉強背誦下一大堆公式及定理，正是身為教育工作者所要努力的目標。以數學與文化的關係切入，利用古代數學文本所呈現的多樣風貌，吸引學生的注意，讓學生體會數學知識呈現的背後，其實蘊含著璀璨的歷史風華，也能從認識數學的文化性、趣味性開始，進而願意接近數學，領略數學的知識面向，這正也是一條值得嘗試的道路。

伍、參考文獻

- 洪萬生 (1996)：數學史與代數學習。科學月刊，27(7)，560-567。
- 蘇意雯 (1999)：日本寺廟內的算學挑戰。HPM 通訊，2(8/9)，13-18。
- 蘇意雯 (2006)：探索日本寺廟的繪馬數學。科學月刊，37(10)，788-791。
- Kline, M. (1953) (張祖貴譯, 1995)：西方文化中的數學 (*Mathematics in western culture*)。台北市：九章出版社。
- 大山 誠(1998)：桐生市天滿宮の算額題について。日本數學教育學會誌，80(7)，20-23。
- Itō, E., & Kobayashi, H., & Nakamura, N., & Nomura, E., & Kitahara, I., & Yanagisawa, R., & Tanaka, H., & Ōtani, K., & Sekiguchi, T. (2003). *Japanese temple mathematical problems in Nagano Pref. Japan*. Nagano : Kyōikushokan.