國立台灣師範大學物理研究所碩士論文

# 牛頓運動定律的來源及其根本意涵

## ——科學革命時期『力』概念的發展

學生：陳玠同

指導教授：姚珩

中華民國一百零八年七月

# 致 謝

感謝我的父母對我的支持和鼓勵，使我能朝著興趣發展，無憂無慮地完成碩士研究。

感謝指導教授姚珩老師在我轉撰寫期間，不辭辛勞地指導，提供許多的想法，傾囊相授中啟發我的靈感，讓我能順利完成論文。

感謝論文口試委員張海潮教授、劉祥麟教授對論文提出修改和具體建議，讓內容更加嚴謹完整，更能感受到論文的張力。

感謝國立台灣師範大學的老師與助教們，不管是修習課程或是完成論文的程序都給予實質上的幫助，給我更多的視野和觀點。

感謝師大和各貴校提供良好的環境與資源，以及其他專家期刊與書籍，讓我的論文更加穩固扎實。

感謝吳承宣同學與我討論研究內容，激發我的思考，並且在口試當天幫忙場佈與紀錄，分擔了許雜事，讓我能專心準備報告。

最後感謝各位夥伴以及運轉的世界，陪伴我這段難忘的歷程，讓我如願地完成階段性的任務。

願祝大家面向大海，春暖花開。

# 摘 要


牛頓第二運動定律的發展並非一蹴可幾，它需要無數科學家的智慧累積。

文章主要分成三大部分：第一部是惠更斯首次提出離心力的概念，並且將離心力數學化，提供牛頓正確量化結果，成為力學的先驅者。第二部是牛頓受虎克影響，將地表的蘋果落地與天體的月球運行以向心力的概念貫穿合一，並且在《論運動》證明出向心力等價於面積定律。第三部是運動定律的提出，並且以加速度預測星運行軌跡，在探討蘋果受地球吸引或是兩巨大星體運動必須使用力來解決積分問題。

《原理》出版後，在混雜的宇宙中建立出井然有序的天體模型，之後的物理學家無不跟隨著運動定律，所有的理論皆必須建立在牛頓的心智創見之上。



**中文關鍵字：**牛頓、運動定律、力、加速度、惠更斯、自然哲學與數學原理、虎克、向心力、離心力、科學革命、萬有引力

**英文關鍵字：**Newton, force, gravity, Principia, centrifugal force, centripetal force, Huygens, Hooke

# 目 次

# 圖目錄

# 第一章　　前言

高中生在學物理，最重要的是牛頓的第二運動定律，衍生出所有的物理公設無不出自於此。

但學生對運動定律卻是懵懵懂懂，F=ma 到底如何來也不曾過問，只把他當成公式背起來解所有的考試題目。將 F=ma 與質量等於密度乘以體積 M=DV 做比較，這兩個式子的等號是否有相同意義？大家把力等於加速度乘上質量，視為約定俗成的公式。

大多的科學家試圖將力解釋清楚：Euler 認為力是速度的微分 ( deviation)；Lagrange 與 Hertz 將力視為造成運動的原因，甚至是說某種影響；Lazare Carnot 巧妙地避開力與加速度的因果關係。Kirchhoff 表示力只是理論性的概念，而 Mach 卻認為力是運動的結果(Coelho, 2009, p, 92-105)。力和加速度的關係到底為何，是由 F 知道 a，由 a 知道 F，還是並無關係？

而定律及定義差別，在於透過物理與數學解釋此現象，並可以將此套用在其他的恆存自然現象上而形成公理；而定義只是一個人為的設定，並不能解釋自然原因。如果將力視為定義，但為何正巧能解釋圓周與落體運動同是向心運動，並且得出萬有引力定律？此外，只要知道加速度就可以瞭解所有的運動變化，但為何還需要使用力？

在十七世紀，沒有一個物理學家將力說清楚，甚至是錯誤的想

法，而牛頓是如何突破眾人盲點，正確地將此力概念落實提出？這值得深入探討，運動定律的建立是我主要的研究動機。

# 第二章　　機械論對力概念的觀點

## 第一節　機械論對力的看法

## ——固有力為唯一可被接受的力

**近代哲學之父笛卡兒**( R. Descartes, 1596~1650)從小聰穎過人，常對師長或前人所傳授知識的真實起疑，而有「我疑故我思，我思故我在」之名言。周遭一切事務皆可懷疑，但唯一的一件事無法懷疑，就是「三角形內角和為 180 度」，即一切幾何命題為真。因此笛卡兒主張物理性質應從幾何性質出發，而長、寬、高之廣延性質成為主要探討，當物體縮得很小則可將此想像成「**質點**」，而掌握質點的位置變化為「**運動**」，而後的科學家也依照質點、運動思考思考一切物理。

在文藝復興時期的自然主義(或神秘主義)中，把**心靈與物質**（mind & matter）**精神與肉體**（spirit & body）視為不能分離的統一體，笛卡兒主張為了要建立起思考的有效性與嚴密性，必須要在精神和肉體之間劃出一到清楚的界限。此**二元論**將物質本性剔除掉所有的精神性質，如細碎的土瓦堆積成沒有生命的疆域，但這正為著近代科學的目的而設計，**十七世紀後半期每位重要的科學家無異議地接受肉體、精神二元論，開創近代科學的物理本性**。

所以在十七世紀前半期西歐科學界興起了反文藝復興自然主義的運動，建立起一種整體性、確定性的機械論( mechanism) 哲學概念。掌握物質世界裡的思維，所使用的方法即是要透過柏拉圖所主

張在現象背後的數學實體或理念(idea)，而笛卡兒的思想是源自於**新柏拉圖主義**。對於心靈(mind)與靈魂(soul)視為神秘的、或宗教的領域，而非單純的思維認知，所以笛卡兒認為科學的思維是無法觸及宗教的世界與回答靈魂的問題。(姚珩，2011, p, 15)

任何現象只要通過理解就可消除疑問，物質世界中並無深不可測的秘密，所以任何神秘的性質都要被撤底排除。所有的運動中皆是由物質微粒間的碰撞所引起的，**「力」只能為一物體對另一的擠或壓，其餘的解釋將視為神秘性質而加以批評**，因此吉爾伯特( W. Gilbert 1544~ 1603)描述磁具有靈魂的假說不再被看重。

機械論力學的有效性有賴於慣性運動及動量不滅的建立：慣性運動為物體不受任何干擾會繼續運動下去；而動量不滅則是在碰撞中，運動能從一個物體傳遞給另一個物體，但運動的總和不會因此而減少。「**運動物體的力**」就類似我們所說的動量，此為機械論者所接受的概念，且只有經過碰撞才有力的交互作用，而沒有可不接觸而能互相影響的作用力存在。

## 第二節　笛卡爾的離心趨勢

笛卡兒認為**任何旋轉的物質皆有逃離圓心的性質**，引入了**離心傾向**（endeavor）、**離心趨勢**（tendency）的概念。星體在環繞著太陽而力圖擺脫中心，為了能解釋星體可以穩定在特定軌道上， 機械論的學者也嘗試去建構一個理性的宇宙論，溪流渦旋的現象成為關鍵，因此首次引進了**渦旋理論**。宇宙間布滿了流體般的以太物質，快速移動中形成各個的渦旋環流，使行星的離心趨勢達到平衡而確定出行星的軌道。

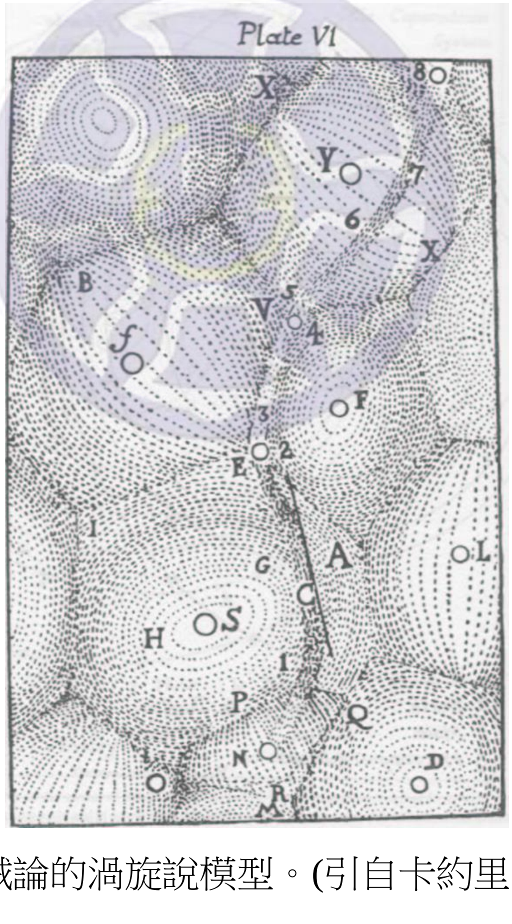



圖 2-1：笛卡兒機械論的渦旋說模型。(引自卡約里，2002，p. 48)

# 第三章　　牛頓力學的先驅——惠更斯

## 第一節　惠更斯論離心力

相繼笛卡兒( R. Descartes 1596~ 1650)機械論之後，惠更斯 ( C. Huygens 1629~ 1695)發展出一套有系統性的概念來解釋天體模型，將機械論所說的離心趨勢稱為離心力( vis centrifugam)，此為笛式學派所接受的概念，並且惠更斯以離心力貫穿全文。此論文正式發表於 1673 年 *Horologium Oscillatorium* 的附錄中，裡頭只有結論卻沒有任何證明；卻在死後發表拉丁論文 *De vi Centrifugal* 中，有詳細的論述。

惠更斯天體運行的探討，可回朔至 1659 年的手稿，以角速率和圓半徑來表示離心力的大小——對於固定週期，離心力正比於圓半徑；對於固定半徑，離心力正比於速率的平方。假如半徑為$r$，速率為$v$，ω為角頻率，以現在的代數表示：離心力$F \propto \omega^2 r$ 或$v^2/r$。

惠更斯行星模型中，假如物體不受任何干擾或外力，則是直線前進。物體在運動中總想回到直線前進的形式，所以在圓周運動中，總**有一股趨勢將其脫離圓弧拉回直線運動的趨勢，這趨勢叫做離心力**。在單位時間內行星行走距離為圓弧$BD$，而在單位時間內不受任何干擾所行走的線段為$\overline{BF}$，而$\overline{ADF}$為通過圓心的直線，其中$\overline{DF}$為曲線回到直線的大小，即為離心力的大小。

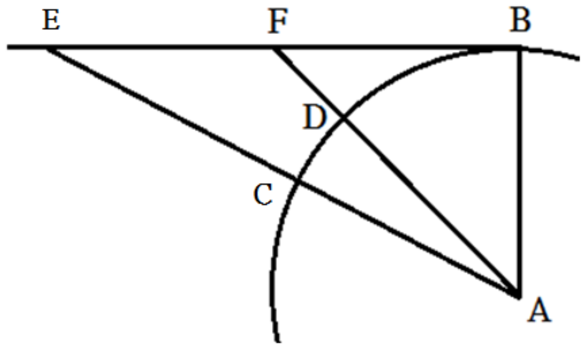



圖 3-1：惠更斯認為當物體在作圓周運動時，會有離開圓心回到直線的趨勢，此趨勢稱為離心力，離心力的大小為$\overline{DF}$、$\overline{CE}$大小。

**離心力是出自於惠更斯，並且是第一位正確表達其值。**

( Harman, 1982, p, 479)

惠更斯的論文中一共設有十七個假設，以各種方式解釋離心力說服讀者。其中最重要的假設一至假設三，以兩個物體在三個情境中量化離心力——不同圓半徑，相同的角速度可；相同圓半徑，不同速度；不同圓半徑，相同速度，而非再是純粹質性探討，他給了物理學家很好的數學經驗，包括牛頓在內，這也為何惠更斯是力學的先驅者。

在第一個假設中，精確地說出在相同週期下，離心趨勢與半徑大小有成正向關係：

**假設一**

假如兩個一樣的物體在**相同時間內**行走完一個圓周，**大圓周的離心力會大於小圓周的離心力**。(Huygens, 1659/ 2015, p, 260)

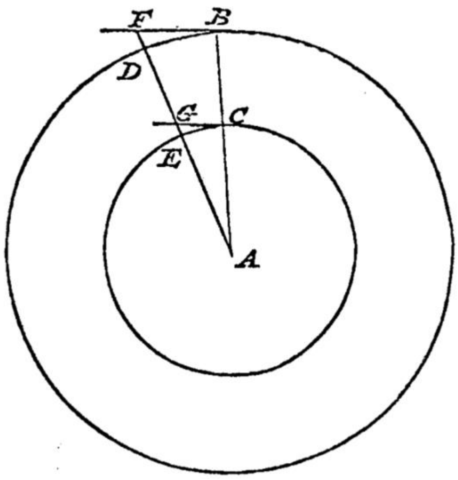



圖 3-2：惠更斯論文假設一示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 260)

半徑為$\overline{AC}$和$\overline{AB}$的兩個圓，相同時間內兩相同物體行經相同徑度。在非常短時間內可以得出相近的兩圓弧，且從 $B$ 點和 $C$ 點得到對應切線$\overline{BF}$和$\overline{CG}$和對應兩弧。因此，物體運行至圓弧 $BD$ 會經歷一個作用離開圓心，以向外的形式阻礙圓弧運動並自然地加速，而單位時間內改變線段$\overline{DF}$大小。另一方面，物體行走在圓弧 $CE$ 上也會以一樣的效用離開圓心，且在相同的時間內改變$\overline{GE}$。

另外，同樣是大圓與小圓的情況，只是物體在同樣速率下探討離心力的大小：

**假設三**

假如兩個相等物體以同樣的速率分別對不同大小的圓做運動，它們的**離心力會與直徑成反比**，所以小圓的力會比較大。( Huygens, 1659/ 2015, p, 261)

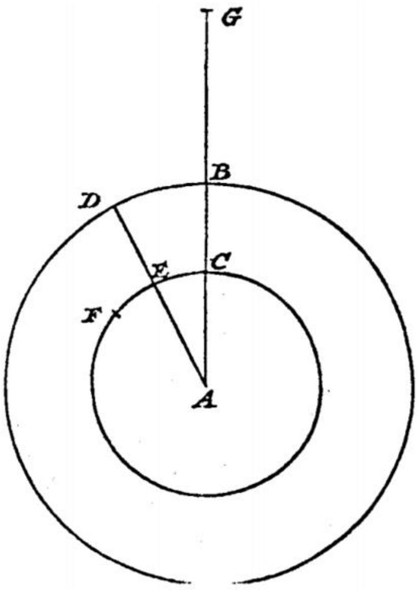



圖 3-3：惠更斯論文假設三示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 231)

假設二探討物體在等圓卻不等速的離心力狀況，並且提出一個實驗證明離心力的存在：

**假設二**

假如相同的物體在同個或一樣的軌道以不同的速率做旋轉，但這兩個都是作均勻等速運動。而**遠離中心的力，速率快的物體會比速率慢的物體還要大**，也就是說，假如繩線綁住物體並從桌面穿過圓心，另外一頭懸掛重物，而此**物體的重量會相等抵抗離心力，重量大小與速率的平方成正比**。

( Huygens, 1659/ 2015, p, 260)

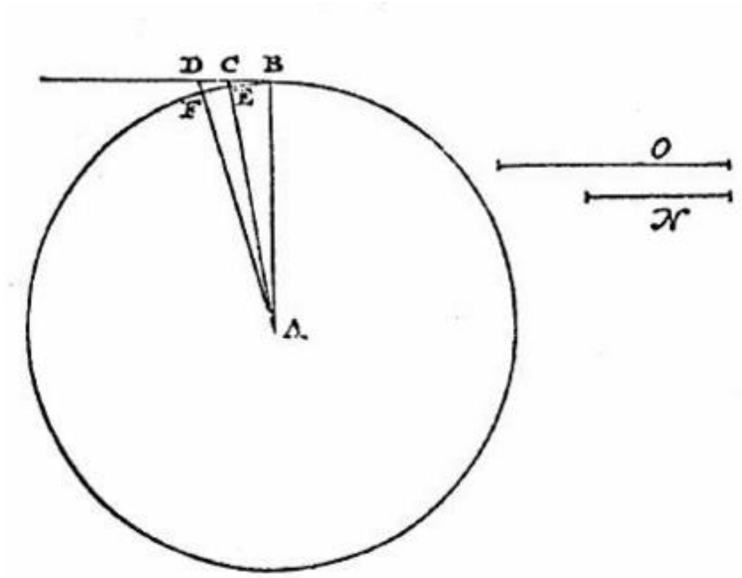



圖 3-4：惠更斯論文假設二示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 261)

令 $A$ 為圓心$\overline{AB}$為半徑，物體在圓周移動得一瞬間，速率較慢的物體以線段 $N$ 表示，速度較快的物體以線段 $O$ 表示。假如取一個非常小的圓弧 $BE$、$BF$，則它們的長度比例於 $N$ 和 $O$ 線段，可以證明經歷相同的時間內，相於較慢的物體行走 $BE$，較快物體則行走 $BF$，而切線$\overline{BC}$和$\overline{BD}$相等於 $BE$ 和 $BF$ 圓弧。

任何一個物體會受到趨勢的影響而沿著繩線向外脫離圓心，圖中離心力大小分別為$\overline{EC}$和$\overline{FD}$。而離心力與速度的關係為如何，惠更斯並沒有去證明，但我們可以利用相似三角形得出$\overline{BC}^2 = \overline{EC} \cdot \overline{AC}$和$\overline{BD}^2 = \overline{DF} \cdot \overline{AD}$，在極短的時間下$\overline{AC} \approx \overline{AD} \approx \overline{AB}$，近似於圓半徑，而$\overline{BC}:\overline{BD} = N:O$，所以離心力之比為$\overline{EC}:\overline{FD} = N^2:O^2$，即為速率的平方。

為了將離心力具體化，必須要從現象著手，惠更斯很巧妙地將

繩子穿過鑽孔的桌子，桌面上放著旋轉的球，另外一頭懸掛著重物，如圖 3-5，當球在旋轉的時候物體就會被拉起，要使球在桌面穩定旋轉，物體重量要等於離心力大小，並且重量與旋轉速率平方成正比。

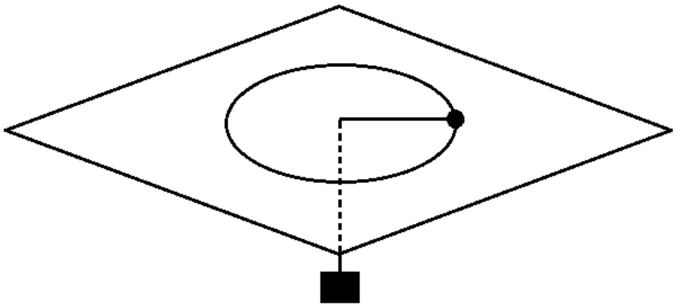


圖 3-5：小球在固定的圓上做運動時，垂掛的重量等於離心力的大小。

惠更斯想從現象將離心力具體化；但重性與離心力的關係為何？接下來做個深入的探討。

## 第二節　離心力與重性之關係
## ——機械論與數學觀的結合

至於重性(gravity)怎麼來的，離心力是否和重性相關，如果有相關孰先孰後？

重性與離心力環繞於惠更斯的論文裡，其中第五個假設如下：

**假設五**

假如一個物體在地球圓周上運動的速率等同於物體掉落四分之一的地球直徑，而此時離開圓心的效果會等同於重性的大小，也就是說，它將會強而有力地拉著繩弦並保持物體懸掛著。( Huygens, 1659/ 2015, p, 262)

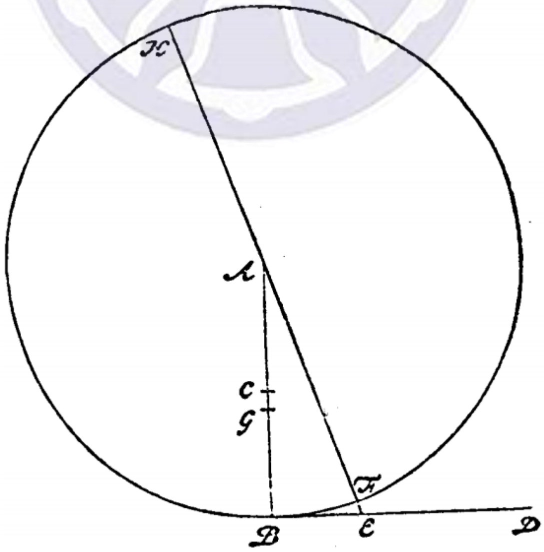



圖 3-6：惠更斯論文假設五示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 263)

在第二個假設中已清楚表示離心力的存在，而離心力和重性對

於機械論是個重大的問題，懸掛的物體提供重量，使繩線通過圓心保持物體旋轉。而這兩種作用並非簡單的杜撰，而惠更斯在研究各式各樣的圓錐擺運動中，建立出離心力和重性的關係。

在第五個假設，可以用代數來表示：地球半徑為 $r$，而先前伽利略已表示物體下落的距離與時間平方成正比，而速度與時間成正比，所以距離與速度的平方成正比關係，此外惠更斯也說明離心力大小與速率的平方成正比。

現在令降落速度為 $v$， $g$ 為重力加速度，地球半徑為 $r$，而速度與時間的關係為 $v$=$gt$。此命題利用速率與的關係$v^2 = 2gS$，而此時掉落的速度在地球表面離心力的加速度為$a = {v^2}/{r}$。假如物體掉落為四分之一地球直徑長度，$v^2 = 2g\,{r}/{2} = gr$，而$a = {v^2}/{r} = {gr}/{r} = g$，惠更斯的假設五確實正確。

另外，惠更斯又說出${\overline{CB}}/{\overline{BD}^2} = {\overline{CG}}/{\overline{BE}^2}$的關係式，其中$\overline{cg}$、$\overline{cB}$為自由落體在特定時間內掉落的長度，$\overline{BD}$、$\overline{BE}$為物體以落體以其掉落地球直徑四分之一的速率$\sqrt{gr}$，並在與對應$\overline{cg}$、$\overline{cB}$特定時間內所行走的距離。

現在設兩個時間分別為$t_1$與$t_2$，而$\overline{CG} = {1}/{2}\,g{t_1}^2$， $\overline{CB} = {1}/{2}\,g{t_2}^2$；$\overline{BD} = \sqrt{gr}t_1$，$\overline{BD} = \sqrt{gr}t_1$，所以${\overline{CB}}/{\overline{BD}^2} = \frac{{1}/{2}\,g{t_1}^2}{(\sqrt{gr}t_1)^2} =$

$1/_{2r}$，$\overline{CG}/_{\overline{BE}^2} = \frac{1/_2 g t_2{}^2}{(\sqrt{gr}t_2)^2} = 1/_{2r}$，得到$\overline{CB}/_{\overline{BD}^2} = \overline{CG}/_{\overline{BE}^2} = 1/_{2r}$。

至於要如何得出$\overline{CG} = \overline{FE}$，惠更斯並沒有任何的計算，只寫出結論。在這裡可以利用前面的式子得出此結果：$1/_2 g t_2^2 = \overline{CB} = 1/_2 r \rightarrow t_2 = \sqrt{r/_g}$，所以$\overline{BD} = \sqrt{gr}t_1 = \sqrt{gr}\sqrt{r/_g} = r$；$\overline{CG} = 1/_2 g t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{2\overline{CG}/_g}$，所以$\overline{BE} = vt_1 = \sqrt{gr}\sqrt{2\overline{CG}/_g} = \sqrt{2r\overline{CG}}$。最後$\overline{FE} = \overline{BE}^2/_{2r} = 2r\overline{CG}/_{2r} = \overline{CG}$。

只有在掉落二分之一半徑的速度繞行地表離心力才等於重性。此外，在 1667 年，以一個中心有孔的圓掛重物試圖量出地球在赤道時旋轉速率使離心力相等於重性，如圖 3-5 所述。

雖然惠更斯希望讓大家相信重性和離心力相關，但在他的論文沒有清楚的解釋。但這兩種關係重要嗎？它的意義有何在？

在先前笛卡兒與伽利略( G. Galileo 1564~ 1642)對於加速度大小爭論以及對重性現象做清楚解釋，而惠更斯對重性的解釋卻是模糊不清，他是站在哪一方呢？儘管惠更斯相信物體下落的距離與時間平方成正比，但他對伽利略的工作存在著偏見，迫使他更進一步探討，對於物體下落的性質的原因可以進一步說出離心力的性質，且在序文的最後一段，這兩種性質是一樣的。在此情況，繩線以物體重量的大小拉住物體作圓周運動，而繩張力使物體行走距離的效用

正比於時間平方，換言之，

**惠更斯對自由落體給予特別的性質，說明離心力與重力(性)是相等關係，甚至是一樣的自然性質**。他的目的並不是支持伽利略的理論，反而**想要去證實伽利略的重力(性)加速度是由笛卡兒啟發**，是只考慮物體運動的動量，重力(性)是離心力造成的結果，而非初始原因。( Gandt, 1995, p, 128)

在他的 *Discour Sur la Cause de Pesanteur* (1690)，流體物質以渦旋形式旋繞地球產生離心力效用，並驗證伽利略的定律：

一個可以最終找出伽利略已被認可的定理之原因，而更能清楚解釋落體加速度其速度是隨著時間而增加。而天體是被物質的部分連續性地推擠，這些物質努力上升到它們的位置而且連續均勻的力作用於它們，最後我們所觀察到落體運動，成為重要的結果速度隨著時間成比例增加。( Gandt, 1995, p, 128-129)

惠更斯的手稿中，更清楚地表示重性產生的原因：

物體的重性和等同(體積)的物質以非常快地速度離開圓心所產生的效果。

這保持物體懸掛著的物質不斷地向後退去，並盡可能沿著半徑方向離開圓心使物體掉落。

雖然在一開始物質以單位長度奇數倍等比方式(也就是說，距離與時間平方成正比)地離開中心，沒有力施予重物就不會

有相似的加速度運動接近中心，**所以這兩件事必須相等的運動起始條件：物質遠離中心，然後物體向中心掉落**。

從這裡出發，假如我們已經找到在特定時間內物體下降多少，舉個例子：假如物體在$1'''$中下落 3/5 的直線距離，我們也將知道物質向上遠離中心，且以 3/5 的直線距離在$1'''$中。我們必須知道以這種方式在特定的地球半徑了解物質的速度。( Gandt, 1995, p, 129)

「物質」( matter) 這術語為「隱含物質」( subtle matter) 的縮寫，惠更斯無疑地將笛卡兒所認為宇宙充斥的液體以及快遞速度環繞著地球，並且環繞著太陽及整個宇宙，因為隱含物質是無法被法被觀測的，而透過重物的掉落間接證明物質的存在。

先前早已有實驗解釋落體現象：

木栓 *B* 放在充滿水的管內，當管子沿中心軸 *A* 旋轉時，由於管內的水之離心趨勢或受到的離心力作用較大，會朝管端 *P* 移動，而將木栓壓向管底。重力(性)( gravity)便是在一個充滿以太( ether)物質的渦旋世界中，一些離心趨勢較缺乏、較弱的物體，由於**受到以太物質因離心趨勢造成重組與碰撞，而被迫落向中心或拉向地心，遂形成重力(性)**。（姚珩, 2011, p, 16 ）。

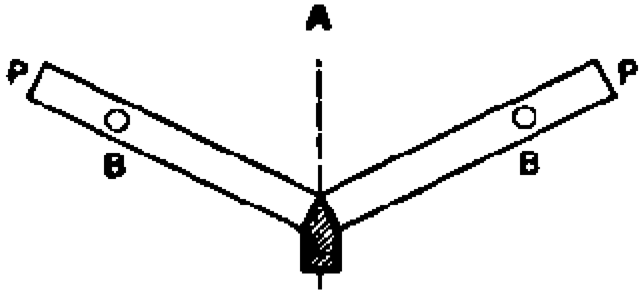



圖 3-7：木栓 B 放在充滿水的管內，當管旋轉時水會往外推至 P 點而木栓將朝管底運動。 (引自姚珩, 2011, p, 16)

雖然重性與重力都叫做 gravity，在牛頓《原理》出版前，物理學家把掉落當成一種性質，重性比重力更能貼近歐洲十七世紀的物理觀。

而這「隱含物質」就是以太，是一個感受不到但有體積的物質，甚至比物體還重，**當「隱含物質」被地球甩開時，會留出空缺，使物體向下掉落填補空，因而有下落的性質產生**。**下落性是離心力的結果**，在 *De vi centrifuga* 以伽利略的定律原因加以解釋，並以此作為向心力發展的基礎。自然作用的強度是由物質附著於旋轉的繩或輪上所離開中心的大小所造成。

在全部的前言中，並沒有提及離心效用或是圓周運動，只提到重性及繩線張力提供物體重量。惠更斯強調分析繩子的張力所提供物體重量，就可以正確分析離心力的原理。我們的手感受到繩子因離心力產生的張力，相對的手也提供由物體體重量。惠更斯將張力與物體被釋放時所造成的運動互為相關，而張力和運動就是趨勢或效用：

> 繩子被延展是因為重物對其做出一個離開的效用。( Gandt, 1995, p, 130)

所以只要能量出物體被釋放時運動的大小，就可以找出繩子的張力，即為趨勢的大小，重性就是使物體掉落的效用。**「隱含物質」以距離正比於時間平方的方式離開圓心，重物也會以距離正比於時間平方向下墜落**；但重物被繩弦所束縛使物體維持平衡，而繩弦提供的效用也會隨時間平方成正比。假如在斜面上，效用就會漸少因為產生較少的速度：

> (物體在斜面上)會感受到較小的作用而且效用會明顯地減少，和另一個相關，垂直面的效用，在同樣時間內重物在空間運動的效用在斜面會小於垂直面。( Gandt, 1995, p, 131-132)

物體被繩子束縛，而從同個時刻起，它們做出一個效用，以相同的加速度並向外離開繩子，且行經對應的長度會有對應的時間。張力或是效用的大小可以藉由單位時間內移動的距離來估算，不同的移動距離比較出不同的張力。如果要更精準比較出張力的大小，就要嚴格確定一開始物體瞬間運動。惠更斯舉了一個例子：球被一條繩子懸掛著並且和弧面接觸。儘管弧面導引著球，起初弧面在 $C$ 點是垂直地表，而所造成的效用也是垂直的。假如繩子斷掉，球將會以圓弧的方式進行，但起始的運動我們將定義為球所產生的效用，因此必須以極小的時間來計算物體行進距離。

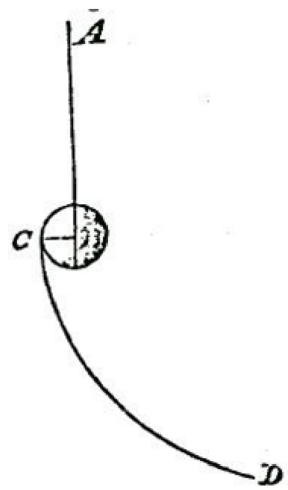



圖 3-8：當繩子掛著重物時，其繩張力會隨著弧面趨於平緩而逐漸減少。(引自 Huygens, 1659/2015, p, 256)

這種計算方式影響了牛頓，在論運動( *De motu*) 中也是以取極限來計算物體的初始運動。以運動的瞬間來計算作用強度更能清楚明確地找出效用的大小，在圓周運動中以切線速度算出離心力。

從重性以及證明物體墜落性，進而解釋並測量張力與作用效果，假如被繩子繫住並以非常快的速度作旋轉，球則會傾向$\overline{BCD}$切線方向移動，而球的傾向或效用可以被決定為：

> 當一個物體到達 $E$ 點時會趨向於 $C$ 點當它在 $B$ 點被釋放，而它會在趨向 $D$ 點時當物體在 $F$ 點。
>
> 假如在另一方面 $C$ 點和 $D$ 點分別在直線$\overline{AE}$和$\overline{AF}$的延伸上，這將會造成一個趨勢使物體從原本位置沿著連心線離開中心。以這種方式在第一個時間它將會以距離$\overline{EC}$遠離，在第二個時間以距離$\overline{FD}$遠離。
>
> 而這些距離$\overline{EC}$、$\overline{FD}$以及其他的時間內的距離會以級數平方倍的方式增加，而它們的比例將會是 1、4、9、16⋯假如

BE、EF 等圓弧取更小，級數平方倍的比例會更加精確，幾乎看不出它們距離的差別。( Huygens,1659/ 2015, p, 257)

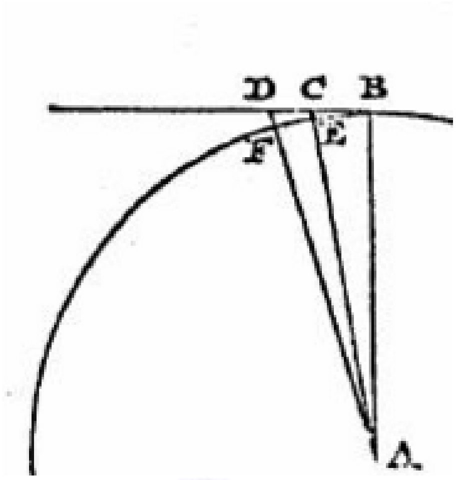



圖 3-9：當物體在作圓周運動時，在第一時間隔離心力所造成的位移量$\overline{EC}$，與在第二時間隔離心力所造成的位移量$\overline{ED}$ ，這兩位移之比$\overline{EC}:\overline{ED} = 1:4$。 ( Huygens,1659/ 2015, p, 261)

在極短的時間間隔內，利用相似形得出$\overline{BC}^2 = \overline{EC} \cdot \overline{AC}$和$\overline{BD}^2 = \overline{DF} \cdot \overline{AD}$，物體行經 $F$ 點為行經 $E$ 點的兩倍時間，所以$\overline{BC}:\overline{BD} \approx 1:2$，$\overline{AC} \approx \overline{AD} \approx \overline{AB}$，最後可以得到$\overline{EC}:\overline{DF} = 1:4$，而接下來的時間間隔也會以級數的平方繼續下去。

惠更斯更進一步說明**圓周運動離開中心所造成的努力正比於時間的平方**，而這**努力就是單位時間內所離開的距離**，也就**距離和時間的平方成正比，與落體運動的情形是完全相同的**：

這效用完全和一個實驗完全吻合當球體被繩子繫上，而在這個例子球體努力沿著繩子直線方向遠離以自由落體完全相同的加速度形式，在第一個時刻物體將會移動 1 的距離，在

第二個時刻物體會移動 4 的距離，第三個時刻為 9 的距離，依此類推。( Gandt, 1995, p, 134)

圖 3-10 正可以說明離心力的意義，在三個極短的時刻物體分別行至 $E$、$F$、$M$，而此離心力大小就是弧線上至質線上 $C$、$D$、$S$ 的長度，也是物體要回到質線上的強度，因此$\overline{CE}:\overline{DF}:\overline{SM} = 1:4:9$，這也可以說明離心力與重性的運動性質是一樣的。

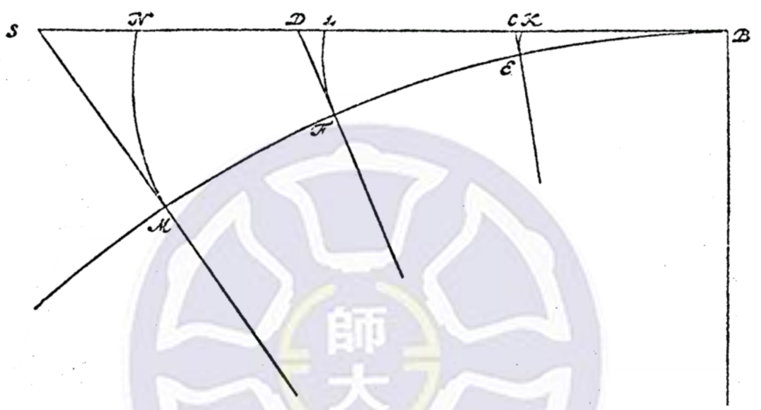



圖 3-10：離心力所造成的離開距離與時間平方成正比，與重性掉落距離與時間平方成正比是同樣的數學關係。 (引自 Huygens,1659/ 2015, p, 259)

雖然這虛擬的運動和落體運動是一樣的，而且效用是相近的：繩張力是由旋轉而產生的，並且和懸掛重物所抵抗的重量是一樣的自然性質。惠更斯獨到新穎的見解啟發了牛頓，在當時年輕的牛頓並不知道向心力，只知道離心力；而伯雷利更是惠更斯的擁護者，並且選擇旋轉座標作為解釋：

> 我所了解的離心力和惠更斯一樣當他在論文最後解釋鐘擺現象；舉個例子，假如一個人甩動石頭，手會感受到力

因為石頭做出來開中心的努力，這力叫做離心力。( Gandt, 1995, p, 138)

惠更斯明確地說明並且量化繩子的張力，但對於其效用的方向不是很在乎，並且也沒有非常嚴謹的運動分析，而旋轉的物體持續運動下去，這向外趨勢會無限繼續累加下去——這確實值得爭議。

而**惠更斯卻是第一位將機械論與數學觀整合**，也就是**量化離心力**。儘管只有數學結論沒有推倒，但年輕時的牛頓讀了惠更斯圓周運動受到啟發且推導出離心力的公式；雖然牛頓的論文以笛卡兒哲學原理( *Principia Philosophiae*) 為命名，卻深受惠更斯離心力概念的影響，內容與圓周運動與離開中心的趨勢( *Conatus Recedendi a Centro*)緊密結合在一起。

# 第四章　　是向心而非離心
# ——虎克的提示

## 第一節　地心說後行星運動之探討

1543 年，哥白尼( N. Copernicus 1473~ 1543) 臨終前發表了《天體運行論》，它取代了亞里斯多德 ( Aristotle B.C. 384~ B.C. 322)的地心說，以地動說說明行星以圓周運動圍繞太陽，此外以地球自轉說明晝夜交替。這理論在當時歐洲驚為天人，打破以地球為中心的思想，但有科學家反駁地球自轉白雲及飛鳥為何不會拋在後頭，儘管當時無法解釋，但相較於托勒密( C. Ptolemy 90~ 168)地心說的本輪與均輪，地動說卻只要一個圓形軌道就能解釋所有天體模型，更為簡單和諧，因此掀起科學革命的浪潮，天體成為物理學界中常被討論的議題，思考行星如何在特定軌道中運行。

磁早在以前被希臘人發現，並認為磁石具有靈魂且存在著魔力，所以早期物理學家從磁性得到靈感。在 1600 年，**吉爾伯特**( W. Gilbert 1544~ 1603) 發表**《磁論》**，內文討論到**星體繞日運動是透過磁之間的相吸**；而克卜勒( J. Kepler 1571~ 1630) 認為太陽是一個全部 $N$ 極的球體，當星體 $S$ 極面向太陽時會被吸引，而星體運行至 $N$ 極面向太陽時則被排斥，這相吸與排斥的交替而形成橢圓軌道；此外，**克卜勒**試圖以「**引力**」和「**牽引力**」來解釋此現象。

歐洲大陸的世界，笛卡兒( R. Descartes 1596~ 1650) 的機械論認

為旋轉的物體會受離心趨勢而甩開，宇宙中有眾多的渦旋，使星體能安穩地運行於特定軌道上，如水面上的樹葉因漩渦朝向中心而不至於被離心趨勢甩開。笛氏學派強調力必須要有接觸才具有意義，引力被視為隱密性質，並將此視為鬼怪加以抨擊。

儘管機械論的**渦旋理論**較為耀眼，**磁性理論**仍有部分物理學家擁護著，在解釋星體模型的理論裡，這兩派學說皆在歐洲大陸佔有一席之地。

## 第二節　向心運動概念的發展

用吸引解釋重性在 1636 年由**羅貝瓦爾**( G. Roberval 1602~ 1675)提出，有別於吉爾伯特，這種**吸引不是磁力而是其他性質**，在他的一封書信中寫道：

> 重力(性)可能是一種存在於下落物體本身中的性質，也可能是一種存在於像地球那樣的吸引下降物體的性質，或可能是使物體**相互吸引**結合在一起的一種天然趨向。類似磁體吸引鐵塊的情形…( Koyre, 1964/ 2003, p, 200)

很重要的一點，**羅貝瓦爾將星體與太陽之向心運動擴及至地球與落體間的關係**，並且點出這兩種運動源自同個原因，即物體相互吸引結合在一起的天然趨向，將天文與地表物理的現象結合一起。

過了幾年，羅貝瓦爾在《世界的體系》中提及：

> 散布在宇宙各處的流體物質，每一部份都被賦予了一種特定屬性或偶然性，此種屬性可使得所有物質彼此奮力拖動，且相互**吸引**。( Koyre, 1964/2003, p, 201)

羅貝瓦爾的研究未曾受到重視，其絕大部分的著作未被出版過，而他所提的宇宙論極為含混不堪，稱引力為「隱密性質」，這也是為什麼遭到機械論的譴責。

於 1666 年，波雷利( A. Borelli 1608~ 1679) 在他的天體模型中，

提及行星能在軌道上穩定運行，是由於受到向心及離心這兩種趨勢的平衡所致。既不會離開太陽，也不會隨之掉入。儘管提出有別於他人的渦旋理論，但依然承襲機械論離心趨勢的概念。

然而**虎克**( R. Hooke 1635~ 1703)又和波雷利有著不一樣的觀點，其中最大的不同虎克完全沒有提到「離心趨勢」此名詞，並首次提出**向心趨勢**，而非離心趨勢，這確實是一個大突破，使後人接受此世界體系。

## 第三節　虎克提出吸引強度的概念

虎克從小孱弱但卻有很高的天份。1653 年進入牛津基督學院就讀，1655 年擔任波義耳( R. Boyle 1627~ 1691) 的助手時，對空氣泵以及真空研究有卓越的建樹，七年後成為皇家學會實驗室的負責人。

在 1665 年發明史上第一支顯微鏡並在同年出版《顯微術》，此時虎克只有三十歲卻威嚇一時。此外他也當過倫敦 Gresham 學院幾何學教授，1666 年倫敦大火由虎克重建規劃，直至現今依然保持原本樣貌，而 1673 年發明反射式望遠鏡首次觀察到木星紅斑，過了四年成為皇家學會秘書，隔年出版《應力與應變成正比》即我們熟知的虎克定律。

對於虎克種種事蹟，不能否認其對科學的貢獻及它本身的天賦；可惜他在爭奪萬有引力的優先權在現今看來是完全的失敗者，但他確實影響牛頓發現引力並且完成最重要的第二運動定律。

1664 年 1 月虎克開始將注意力轉向天文，1666 年 5 月 23 日向皇家學會提交了一篇論文：

> 我一直覺得很不解，行星又沒有被限制在任何結實的軌道之中，為什麼要按照哥白尼的規定繞著太陽運動…又沒有可見的繩索把他們綑綁在它們的中心，卻從不過分地脫離，也不沿直線運動，就像所有的物體一次推動後就必須按直線的方式運動…因為一個在流體中朝著任何固定地點運動的固體必定保持在一條直線上運動，而不會有所偏離。然而所有的

> 天體雖然都是在流體中運動的普遍固體，卻沿著圓形或者橢圓軌道運動，這就表明除了最初的推動外，必然有某種別的原因使的它們運動折彎到那些曲線軌道。( 吳以義, 2013, p, 401- 402)

惠更斯與其他物理學家認為假如繩子斷了，石塊為何會飛離中心；相反的是，虎克一開始把問題焦點設為「為什麼不離開中心」，且認為物體不受任何外在原因會是單純的直線運動，**假如物理沒有沿切線方向飛離，必有一個力把物體拉住**，即「引力」的概念。虎克肯定笛卡兒慣性運動的想法，且認為宇宙間充滿流體或以太的物質，但他並不認為這些流體中有渦旋使星體安穩在特定軌道中。

至於行星是什麼原因做橢圓運動？虎克提出兩個可能性的猜測，其中第一個是：

> 第一種可能來自於介質密度不均衡，行星正是在這種介質中穿行的
>
> …距離中心或者離太陽較遠的那部分介質的密度要比較近的介質大，則直線運動總是由於內部介質的柔順和外部介質的更大阻力而向內偏斜…如果以太具有某些空氣性質，則很自然靠近太陽的以太因熱而變得稀薄，而遠離太陽較為稠密… ( Koyre, 1964/ 2003, p, 178)

虎克試圖用以太的不同密度來解釋行星運動，想將星體向心性質具體化，從機械論發展出一套假設，似乎承襲了羅貝瓦爾的假說。在虎克發表初期，他並沒鐵口直斷此為「向心力」或者是「引力」

——屬於隱密的性質，倒是以趨勢代替為力，虎克認為此解釋較能大眾接受。

但虎克因為無法考察而拋棄了用以太解釋星體模型的假說。可是過了五十年後，牛頓在 1717 年英文版的《光學》中疑問 21 提到類似所表述的與虎克的類似，用以太的壓力來解釋引力，而此介質

> 在太陽、恆星、行星和彗星這些致密物體的內部，要遠比在他們之間空虛的宇宙空間中稀薄很多，並且從這些天體一直到距離很遠的地方，這種介質會變得越來越稠密…由此引起這些巨大物體相互吸引，並使物體的各部份西向各自。
>
> ( Koyre, 1964/ 2003, p, 161)

牛頓為了使他的以太理論更廣為接受，並且解決超距力無法解釋的矛盾。而這些物質會不會造成運動的阻力？牛頓增加一個假說，此介質彈性比空氣大 700000 倍，稀薄程度比空氣大 700000 倍以上，才不會干擾行星運動，且在一萬年內是不被察覺的。

倒是「吸引」屬性放在虎克第二個猜想，可能當時虎克對此把握程度不如以太密度。其內容如下：

> 第二個能使直線運動變為曲線運動的原因可能來自中心物體的一種**吸引屬性，通過這種性質，中心物體一直竭力要把它引向或拉向自身。如果假定了這樣一種定律，那麼行星所有現象幾乎通過這種機械運動的一般定律來說明**…( Koyre, 1964/ 2003, p, 178)

此外，虎克將引力具體化，以圓錐擺類比天體模型，當單擺在不同的水平高度旋轉，其返回中心的傾向( conatus)不是常數，且離中心越遠朝向重心的傾向就越來越大，單擺受到固定向下的重性，我們可以以簡單的數學關係找出向心趨勢的強度， $F_C : F_F = \sin\theta_1 : \sin\theta_2 =$ CD : FG。

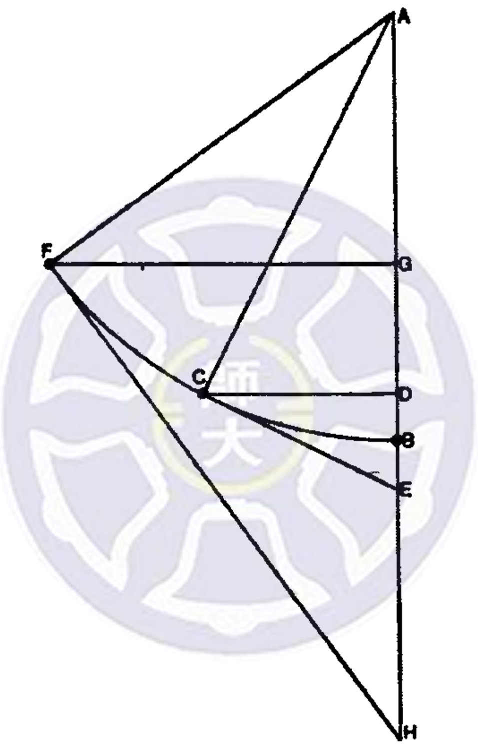



圖 4-1：圓錐擺在不同的平面上繞圓，其離$\overline{AH}$中垂線越遠，則向心趨勢越大。(引自 Westfall,1971, p, 209)

這有如在珠子繞行於碗上，因摩擦力衰減逐漸地趨於中心，而圓錐擺類比行星模型最好不過了。

於是在他第二篇論文(1666.5.23)寫道：

一直線運動如何通過遵循某種引力定律之作用，而形成曲線。這一引力定律還有待發現，其中包含著由實驗論證所引入的介紹。它顯示出：**圓周運動是由一種朝向切線方向之直線運動的趨勢( endeavor by a direct motion by the Tangent)，與一種朝向中心的趨勢( tending to the center)組合而成**：為此，在天花板掛上一個圓錐擺…如果開始向切線的趨勢的強於朝向中心的趨勢，那麼就會產生一種橢圓的運動，其最長直徑會平行於第一瞬間的衝擊；如果這個趨勢小於朝向中心的趨勢，那麼就會產生最短直徑會平行於第一瞬間衝擊的橢圓；如果這兩者相等，那麼就會產生一個精確的圓周運動。( Koyre, 1964/ 2003, p, 178- 179)

虎克試圖用圓錐擺來解釋星體的路經偏折，隨著衝力的不同，擺錘也劃出相對應的圓與橢圓，就如同星體的軌跡。很重要的一點這兩條路徑都是封閉曲線，這與行星軌道一樣，成為很好的類比。但在這兩種情況中，圓錐擺「**返回中心的傾向**」隨著中心越來越遠也變得越來越大，與太陽的吸引完全相反。即便如此，虎克確實有獨到見解，拋開引力的曖昧性質，提供物理學家不錯的想法。

1670 年，虎克在另一演講中提及，並在四年後發表成書《通過觀測來證明地球運動的一個嘗試》，提出與機械論不同的三條假設。虎克又邁進一步，吸引趨勢不再被認為是把行星束縛於太陽，或是把衛星束縛於行星的一種特別的性質，而是一種所有天體束縛在一起的普遍因素，而且這與我們地球重性是同一種來源。

第一條是，無論是什麼天體，都具有一種**朝向其中心的吸引強勢**。通過這種強勢，它們不僅吸引往自身的多個部分，從而使之不致分崩離析，就像我們所看到的地球一樣，而且也吸引所有位於其作用範圍內其他天體。結果是，**不僅太陽與月球對地球及其運動發生影響，同時地球也影響著它們，而且水星、金星、火星、木星和土星也通過各自的這種吸引能力對地球產生巨大的影響，同時地球的吸引能力也相應地以同一方式對它們中的每一個施以巨大的影響。**( Koyre, 1964/ 2003, p, 275)

第二條假設是，**無論什麼物體，只要它進入一種筆直且單純的運動狀態，它就會繼續沿此直線前行，直至被其他某些外來的原因所改變**，從而被迫進入一種划出正圓、橢圓或者其他更加複雜曲線的運動中。( Koyre, 1964/ 2003, p, 275)

1680 年，虎克列舉了九種重性的主要表現，其中有：重性的作用在任何時間都是一樣的，重性使得下落物體加速，而且在相同的時間裡得到相同的加速度。此外，還有一條是地球和天體都是球形的正說明這種趨勢的存在。並且以力學觀點再進一步解釋：

…引力，我視它為這樣的一種力量：可使得具有同質的類似物體相向運動，直到它們結合在一起。這種力可以是衝力或驅動力，吸引或迫使運動按此方式移動，使它們結合在一起。( 吳以義, 2013, p, 409)

虎克曾寫道「引力是世界上最普遍的基本原則之一」，但在先前羅貝瓦爾於 1644 年 5 月 23 日提出萬有引力定律，而後梅森( M. Mersenne 1588~ 1648) 在《物理數學思想》再次被提及。儘管如此，**虎克是第一個打破的機械論威權體制**。而在 1679 年的與牛頓的書信中提醒了牛頓用向心力來尋找星體運動的軌跡，這**使牛頓拋棄離心力的概念重新思考問題，最後得出萬有引力定律**。

至於引力作用有多強，虎克還無法用實驗得出：

> 第三條假設是，這種吸引能力作用有多強，取決於被作用的物體距離其中心有多近。至於它們之間的關聯程度有多強，我現在還沒有用實驗驗證；但如果這個想法真能夠付諸實施，將極大地幫助天文學家把所有的天體運動簡化成一個特別的規律，我認為只有如此別無其他途徑。只要一個人理解了圓錐擺以及圓周運動的性質，它就能輕易弄懂整個原理，並會知道如何在自然中尋覓此中真意。( Koyre, 1964/ 2003, p, 275)

將這物理性質與數學結合，這套萬有引力的定律才算是真正的成功。自從伽利略( G. Galileo 1564~ 1642) 提出自由落體距離與時間平方成正比後，開啟了新柏拉圖主義的思潮，物理現象數學化，並且遵循著簡單和諧，實驗論證反而不是最重要的。

在當時絕大部分得物理學家專注於碰撞及靜力平衡來尋找力；虎克則是從天文出發，認為如果能將引力數學化，就能真正了解整個原理。

儘管虎克並沒清楚地將向心趨勢發展的完善，但他卻完全打破機械論傳統的離心力模型中，這方面的成就依舊備受肯定：

**依循笛卡兒所建立的模型中，每個運動學的學生都必須依照其所說的物理在圓周運動下有離開中心的趨勢，而虎克是第一個打破這個既有的權威並且重新建立新概念**。

(Westfall,1971, p, 210)

## 第四節　虎克平方反比定律之猜想

1666 年 5 月，虎克認為引力大小反比於中心距離，而他力圖從鐘擺的運動中推出引力作用的數學公式；而在 1679 年虎克、哈雷( E. Halley 1656~ 1742) 、雷恩( C. Wren 1632~ 1723) 一起發現萬有引力平方反比定律。但在 1645 年法國人布里阿德( I. Bullialdus 1605~ 1694) 已有提出類似的想法：

> 至於說太陽得以羈挾眾行星的力量，是實實在在的，就像雙手一樣(抓住行星)，在整個宇宙中直線放射出去…這力越來越弱，很大的距離或間隔削弱了它，而它減弱的速率和光的形式一樣，即以距離平方反比的方式…( 吳以義， 2013， p, 412)

當然，虎克提出距離平方反比也不是憑空虛設。虎克認為，宇宙間以兩條定律構成世界的型態與秩序：一是**光**，二是**重性**。

1680 年和 1681 年之間，彗星再次激起宇宙研究的熱情，在 1682 十月虎克在皇家學會宣讀了《論彗星本質》。虎克稱光是「運動第一定律」，其次是重性：

> 這兩種力量似乎構成了世界萬物的靈魂，太陽和群星，還有行星，圍繞著太陽，或者圍繞任何其他中心物體。在所有這種物體中都可以看見，或多或少，有些支配這個運動，有些不然，但沒有任何一者沒有一定程度地兼有兩者，又為沒有東西沒有重力(性)，也因此也沒有任何東西在一定程度上沒

有光。( 吳以義, 2013, p, 410)

顯然**重性與光有一定程度的相似關係，且被歸類為同類**，虎克很自然地推論，這兩種力量作用方式是一樣，並且將重性稱為「**宇宙通則**」或「**萬有的**」。

至於光是如何傳播？他寫道：

> 光的傳播是物體的作用，不是神靈，光的作用在傳播中是一種和**距離平方成反比**的擴展。( 吳以義, 2013, p, 411)

重性的性質類似於光，光的傳播等同於重性，即以距離平方成反比的方式擴展；但虎克認為其是有限範圍，超過一定的距離重性不再有任何作用。

而 1680 年虎克以機械論的方式解釋引力，表面發出快速振動的以太使物體產生向心趨勢，就如光與聲音一樣，隨著球面的增大而減小：

> 我猜想這種力量總是與球面波的面積或表面成反比，即與距離的平方成反比；這一點可以由球面波的性質自然地得出，也將在日後通過在不同距離處所產生的效應更簡單地說明。
> ( Koyre, 1964/ 2003, p,181)

至於要怎麼證明，哈雷曾經告訴虎克單擺在山頂比山腳動得來得慢。為了檢驗引力的減少，虎克曾在聖保羅教堂和威斯敏斯教堂

的投樓頂上，以及深 300 尺的井坑裡做過數次實驗都徒勞無功。似乎這平方反比定律有很好的直覺猜想而無法用實驗證明。

但虎克與牛頓爭吵萬有引力平方反比定律的提出優先權：虎克透過光與重性為相同性質得出引力隨距離平方成反之比關係，並試圖以單擺實驗作為證明，可惜卻沒有明確的力與加速度的關係作為支撐；相反的，**牛頓是用第二運動定律——單位時間內物體的速度變化與力同方向且成正比做為出發，並從天體的圓周運動得到論證，推得向心力以距離平方成反比定律。**

物理想法的提出固然重要，但如果不將之數學也只是個假設或空談，這也為何虎克無法將萬有引力量化而成為完全的失敗者，後人也只記得牛頓在力學上的功勞。

正如虎克所說：

> 我敢保證，從事這項研究的人將會發現世界中所有運動都是受到這個原理所支配的，對它的真正理解將成為天文學的制高成就。( Koyre, 1964/ 2003, p, 275)

牛頓是完全拋棄了機械論的觀點純粹以力與數學的想法出發，這三大運動定律延續至今，儘管相對論的侵襲依然無法將之拋棄。牛頓的確達到天文學的至高成就，所有的運動都必須遵循的運動定律出發。

雖然牛頓在此領域的工作令虎克難以望其項背，但虎克是第一

個斷言可利用數學方法得出引力隨距離函數比率的變化，並且此比率具有普遍性及基礎地位。虎克確實扮演關鍵角色，比起同時代的人顯然出色許多，我們可以用 Koyre 的話對虎克做個評價：

> 虎克在彈性理論發展史上的功績已被歷史所認可，其基本定律已被冠以「虎克定律」之名；而另一方面，他對於天體力學的貢獻卻被牛頓的工作如此徹底地掩蓋了，以致我們幾乎無法去公證地評價和它們當時的價值和重要行有多大。為了能做到這一點，我們不應把虎克的嘗試與牛頓的成果做比較——它們之間沒有共同的衡量標準——而應與他的那些同時代人或直接的前輩，比如伯雷利的成果進行比較。( Koyre, 1964/ 2003, p, 274)

不能否認的是虎克的思想獨特且多變，他的實驗能力與直覺確實超出常人，與牛頓的書信往來中看出他獨特的思考，因此牛頓也不能造成對他的詆毀(附錄一)。可惜虎克一生中經常因理論以及發明的優先權和他人爭吵，言語傲慢讓人厭惡，而後來的史學家也會為此加以批評並對他不公正。

但虎克的承襲笛卡兒的思維辯證而沒有數學論證與物理密切結合，在他的機械學理論裡從來沒有正式的論文專書出版，就連引力的發現也沒有嚴謹的數學作為支持，只提出想法與概念。

最後一步公理的完成並非一蹴可幾，只要能找出這宇宙的奧秘，就可以被宣稱為力的發現者。只是虎客缺乏數學功底去之配他的創造力，這是他非常可惜的地方。

# 第五章　　牛頓向心力的誕生——

# 牛頓在力學上的第一個創見

## 第一節　十七世紀的衝力概念

在十七世紀歐洲的機械觀點，否定自然運動和受迫運動的分別，所有的運動皆是歸於同一個原因，而且並符合同一種原因。然而，這想法提出比概念理解還要容易，圓周運動依舊懸而未決。

在此時的科學家，致力於運動學的術語解釋上，反而沒有特別強調物體運動與力的真實探討。對於力架構與制度上的模糊，可歸咎於**笛卡兒**將「**物體的運動等同於力**」**(mv)** 以及保守的接觸力想法，以致後人無法跳脫此陷阱。

中世紀的科學家認為，**衝力**( impulse)會隨著行進而逐漸消失，而重性屬於自然運動的一種，當手給予物體一個脈衝，他會攜帶衝力而運動，其衝力可以克服自然運動而持續在空中運動，這衝力會隨著時間而減弱而無法克服重性向下掉落。

伽利略的學生托里切利( E. Torricelli 1608~ 1647)專精於碰撞所造成的力，並採用衝力概念。假如一千磅的重物可以打破大理石桌，那要如何將一百磅的物體達到同樣的效果？很明顯地，將它從一定的高度落下，在每個瞬間物體的重性會等於其的重量的方式增加「動量」( momento，不考慮方向性)，直至物體落在障礙物上阻止

其運動並破壞其「動量」。所以衝力的大小即為力的大小，如果有受到外界干擾，這動量會隨之改變，所以在不受任何外在因素影響下速率是固定的。

另外，笛卡兒所提出的**慣性力只存在於直線運動上**，也就是動量的特例，它會攜帶這種原初的**力**持續運動下去。牛頓年輕時認為兩物體的接觸會造成慣性力之間的傳遞，這動量改變的過程就是接觸力；但當時牛頓只考慮直線運動的力，卻沒推及曲線運動的受力情形，將圓周運動視為兩力平衡的動量守恆。

科學家將力視為衝力或者是慣性力與其傳遞的過程沒有一定的說法，這也是科學史上繼黑暗又混亂的時期，物理學家對力的解釋莫衷一是。

在伽利略的小球與圓弧的思維中，小球從特定的高度從斜面滑下，不管斜面斜度如何，在無阻力的情況中，小球會在另一端達到同樣的高度再滑落。但在地表無限延伸的狀況下，實際的運動狀況並不是直線而是繞行地球一圈。

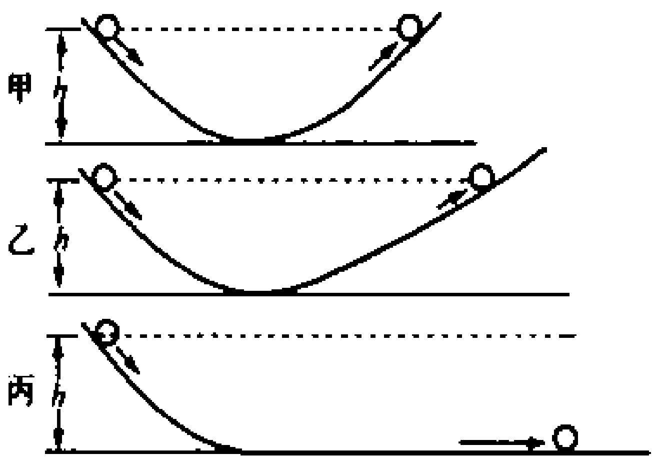


圖 5-1：伽利略的小球實驗，小球從斜面滑下來會在另一端回到一樣的高度，如果是在水平線上則會繞行地球一圈。

Boudr 提到伽利略所認為的慣性是圓動量大小的守恆，速率不變即不受任何干擾，等速圓周運動等同於靜止的平衡運動 ( Boudr, 2002, p, 54- 55) 。Westfall 也說出十七世紀的物理學家強調動量大小，而衝力概念即為力的概念，始終把圓周運動視為力守恆的均衡運動 ( Westfall, 1972, p, 189) 。

但圓球與斜面的實驗中，笛卡兒認為**圓周運動並不是「慣性」運動**，而是**圓動量的守恆運動**，如果不受任何干擾，這動量大小會穩定不變，這也造成伯雷利把圓周運動視為離心力與重性的平衡運動。此外，當時的物理學家不知速率與速度的差別，只考慮物體運動的快慢，並不在意移動的方向。

**惠更斯認為圓周運動是一個等速率的運動，它保持著固定「圓動量」大小**，因此惠更斯**將圓周運動視為一個平衡的狀態**，而離心力只有在物體作曲線運動才存在，假如是做圓周運動，而此時會有相同的力抵抗離心力，因為如此將此視為不受到任何干擾的狀況，星體圓周運動即重性與離心力的平衡。

伯雷利認為橢圓運動並不是一個均勻的運動，它隨著時間而有速率改變，而所具有的動量也有所不同，因此提出重性與離心力的消長而形成橢圓運動。

笛卡兒與惠更斯都認為離心力使物體做直線運動，也就是切線方向的運動，並且遠離圓心，但宇宙間充滿渦旋並碰撞著星體，這

造成牛頓以碰撞的形式來推算離心力的大小。當時的科學家知道物體變快與變慢與力有關，對於曲線運動困擾著所有的物理學家。

## 第二節　牛頓離心力之探討

笛卡兒於 1644 年發表《哲學原理》( *Principle of Philosophy*)影響了物理學家的思考方式，其主張物體可以視為質點，並且以運動作為基礎來描述，而所有作用必須要以碰撞或接觸來傳遞。

當時的牛頓深受機械論的影響，在 1665 年其《雜記》（*Waste Book*）詳細描述物體受到離心力作用下運動的情形。

牛頓先從一個物體沿著正四邊形軌道作等速率運動開始，而物體本身具有「原動力」或「慣性力」，而位移$\overline{\mathrm{ab}}$表示其大小。當遇到軌道壁時，物體遠離中心的趨勢力會作用其上，而接觸壁也施予反彈或作用力給物體，造成運動方向上的改變。

在惠更斯離心力的概念中，曲線運動的物體傾向回到原本的運動形式，這回去的距離為力的大小 (動量的改變為末速度到出速度所改變的量，也就是初速度減去末速度)。

物體從 *a* 點出發行至 *b* 點，碰撞後行至 *c* 點，假如不受任何碰撞則在相同時間內會直線前進至 *y* 點，如此延續下去，物體將沿著正方形的 *abcd* 軌道運動。

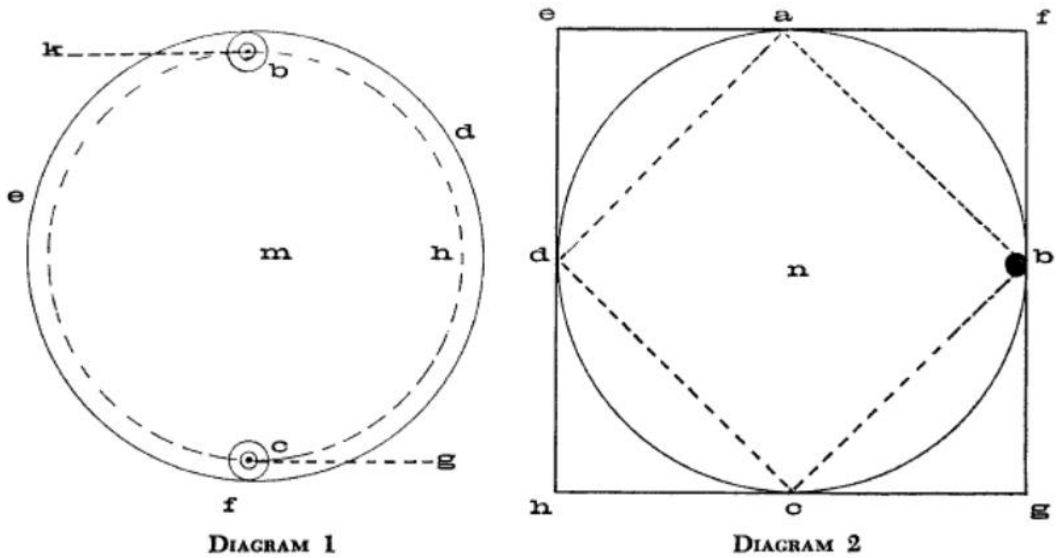



圖 5-2：牛頓利用軌道碰撞的想法量化離心力。(引自 Herivel, 1960, p, 547)

而物體有回到原本直線運動的趨勢，物體的運動力與物體運動速度的變化量成正比，而總反彈衝量與運動衝量的大小比值為 $4\overline{ab}$：$\overline{fa}$，也就等於內接正方形的周長與圓半徑的比值。

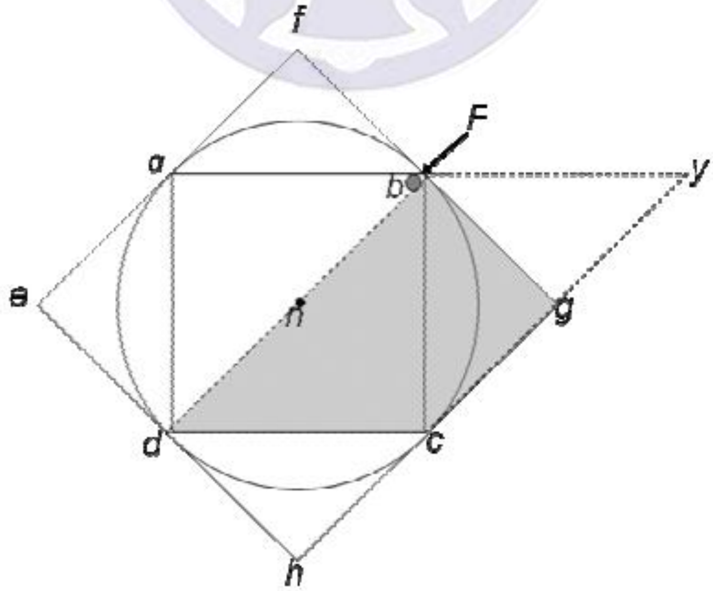



圖 5-3：物體在內接正四方形軌道運行，尋找碰撞所產生的反彈力。(取自田芷綾、姚珩，2010， p,23)

在正多邊行的運動中，利用相似三角形( $\Delta nab \sim \Delta axb$)，得出物體反彈衝量和運動衝量的大小比值為$\overline{ab}$：$\overline{nb}$，而完成一圈的所受到的總反彈衝量與運動衝量的大小比值為周長與半徑比。假如多邊形的邊不斷增加而形成圓，物體繞完一圓周所受到的總反彈衝量與運動衝量的大小比值為$2\pi\overline{na}$：$\overline{\mathrm{na}}$=$2\pi$：1。

物體作圓周運動在單位時間線段$\overline{ab}$為衝量的大小，以現在的代數表示為 $mv$ ( $m$ 維質量，$v$ 為速率)，而繞完圓周所受的總衝量大小為$2\pi mv$，若衝量與除以一圈所需的作用時間(週期 $T$)，即為平均作用力，而此離心趨力的大小為

$$F = {}^{2\pi mv}/_{T} = {}^{2\pi mv}/_{2\pi r/v} = {}^{mv^2}/_{r} \cdots\cdots (5.1)$$

藉由伽利略$t^2$定律，牛頓將此推演在克服離心力下物體做的圓周運動，物體從一開始繞行一整圈所離心力使物體離開的距離為時間的平方，其中繞行一周的時間為$T = {}^{2\pi r}/_{v}$，我們可以利用代數算出繞行一周離心力所以拋離物體距離為

$$S = {}^{1}/_{2}\, aT^2 = {}^{1}/_{2}\, {}^{v^2}/_{r} \left({}^{2\pi r}/_{v}\right)^2 = 2\pi^2 r \cdots\cdots (5.2)$$

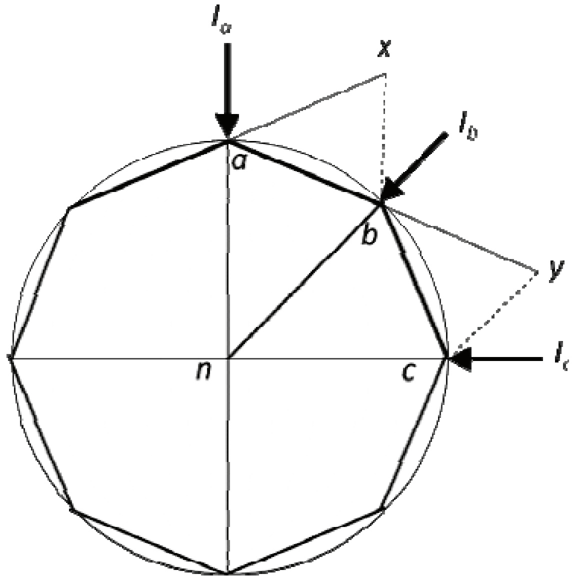



圖 5-4：論證物體在內接正多邊形軌道運行所受到的反彈力。(取自田芷綾、姚珩，2010， p, 24)

牛頓在 1665 年得出離心力正比於切線速度平方與半徑的比值。雖然與現今的正確結果吻合，但當時的牛頓依循着笛卡兒作圓周運動物體所具有的為向外趨勢，和惠更斯的離心力概念，並認為作圓周運動物體會對軌道壁產生作用，而軌道壁再向物體產生推擠，使物體克服離心力維持在圓周軌道上，這正好符合機械論物體所受的力必須是要接觸。而繩弦拉著球做圓周運動時，手提供了拉力，就等同於軌道壁給予主動推擠，因而球克服了離心力平衡於圓周上。這想法現在看來並不是正確，當時的牛頓並不知道物體是被吸引主動地朝向中心，而非被動地受到推擠。

## 第三節　月球試驗離心力之探討

牛頓於 1666 年利用克卜勒的週期定律——行星到太陽距離乘以週期平方倒數為定值，得出離心力反比於距離的平方：

$$v = {}^{2\pi r}/_{T}$$

$$\rightarrow v^2 = (2\pi r\ /\ T)^2 \propto {}^{r^2}/_{T^2} \propto {}^{1}/_{r} \cdots\cdots (5.3)$$

$$\rightarrow F = {}^{v^2}/_{r} \propto {}^{1}/_{r^2} \cdots\cdots (5.4)$$

牛頓在 1718 年晚年自傳裡，關於平方反比律發現的優先權曾提出的辯駁，認為他要比 1673 年惠更斯正式發表的相關論述還要早：

> 可能是 1666 年左右，我開始思考重力延伸到月球軌道，而且也找出如何估計運動質點在球面內運行撞擊至表面時所施的力：由克卜勒的行星週期律，我推算維持行星在它們各自軌道上的力，必定與它們到圍繞中心距離平方成反比。(田芷綾、姚珩, 2010, p, 25)

但在當時牛頓提出是離心力的概念而非是吸引的結果，所提出平方反比律原理並不是正確：

> 假如物體 *A* 往 *D* 方向行走圓弧 *AD*，而離新趨勢所做的努力將會由物體所攜帶，在 *AD*(我假定這長度非常的小)，這物

體不受干擾的情況下在相同時間內將會沿著切線方向移動相同的距離，從圓弧 *D* 點到切線 *B* 點距離為 *DB*。

現在有一個趨勢，使物體受重力影響而造成直線運動，以時間平方成正比的距離推動物體：為了要知道旋轉 *ADEA* 圓周有多少距離被推動，我設定為線 *BD* 為 *ADEA* 圓周平方與圓弧 *AD* 平方之比。現在$\overline{BE}/\overline{BA} = \overline{BA}/\overline{BD}$，然後藉由$DA^2$(或$\overline{DE} \times \overline{DB}$)比$ADEA^2$等於$ADEA^2/\overline{DE}$，我得到在繞完一個圓周的時間內，遠離圓心的努力推動物體造成連續性的直線(也就是第三個圓周比對應於直徑)。

舉個例子，而第三個比例為 19.73922 個半徑，假如日運動在赤道重性靠近中心的努力等同於來開中心的努力：而在一天內重物將會推離$19\,{}^{3}/_{4}$個地球半徑，也就是 69087 英里：而且在一小時內行走 120 英里。在第一個分鐘行經${}^{1}/_{30}$英里或${}^{100}/_{3}$ paces，在第二秒行走${}^{5}/_{108}$ feet 或${}^{5}/_{9}$英尺。但重性所產生趨勢的大小使重物在一秒內移動 16 feet，是大約 350 倍離開中心的努力(將移動他們)在同樣時間內，因此重性所產生力的大小為許多倍並阻止因地球旋轉使物體離開空中。

推論：因此在各式的圓離開中心的努力，為直徑以時間的平方所劃分，或為直徑以頻率(的平方)所疊加。所以月亮繞地球一圈需要 27 天 7 小時 43 分鐘或 27.3216 天(平方為$746\,{}^{1}/_{2}$)而且距離 59 或 60 倍地球半徑，我以月亮距離地球

60 個半徑並且將月球繞地球週期平方，並將地球半徑設為 1，將週期平方為$746\,{}^{1}/_{2}$，所以得出 60 比$746\,{}^{1}/_{2}$，分別是月亮和地表的遠離地球中心的努力。所以在赤道上遠離地球的努力為月球的$12\,{}^{1}/_{2}$倍，(地表的)重性為月球遠離地球的努力的 4000 倍。

假如月球遠離地球的努力總在地表同一面，地表和月球遠離太陽的努力將會小於月球遠離地球的努力，不然月球會繞的太陽旋轉而非地球…

而且重性地球遠離太陽的努力的 5000 倍…

最後形體距離太陽的立方與其繞太陽週期平方互為相關：遠離太陽的努力和距離太陽的平方互為相關。(Gandt, 1995, p, 139- 141)

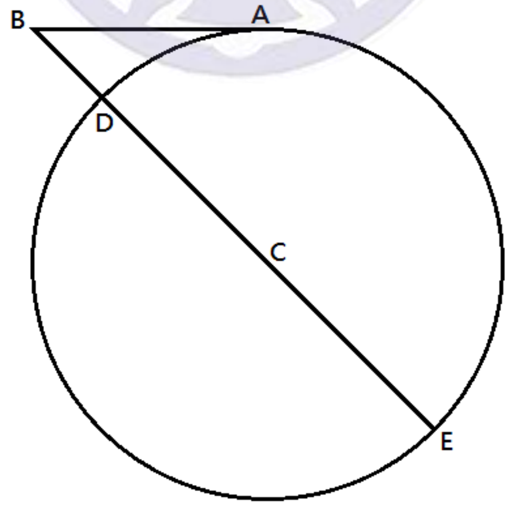



圖 5-5：利用幾何求出離心力$\overline{BD}$。

這篇最主要是比較重性與離心力的關係，且重性大於地球轉動

所造成的離心力，使物體免於被拋至空中，而在牛頓的手稿中，地表上的重性為離心力的 350 倍。離心力的概念從笛卡兒的發展而來的，在他的《哲學原理》一書中有提到「遠離中心的努力」；但相反的是，有別於惠更斯離心力造成重性的想法，牛頓認為重性和離心力一樣是相同的自然性質，而且使物體移動距離也是與時間平方成正比。

至於離心力是如何量化，且重性為何是離心力的 350 倍，牛頓用利用極限與相似三角形得出結果。首先保留直線並把 $ADEA$ 圓去除，將 $A$ 點與 $D$ 點連成直線，$A$ 點與 $E$ 點連上，可以得出 $\Delta BAD \sim \Delta BEA$ 兩相似三角形。在微小的時間裡，$\overline{BE} \sim \overline{DE}, \overline{BA} \sim \overline{DA}$，利用相似三角形找出線段比例：$\overline{DA}:\overline{DB} = \overline{BE}:\overline{BA} \approx \overline{DE}:\overline{DA}$，即 $\overline{DA}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DE}$。

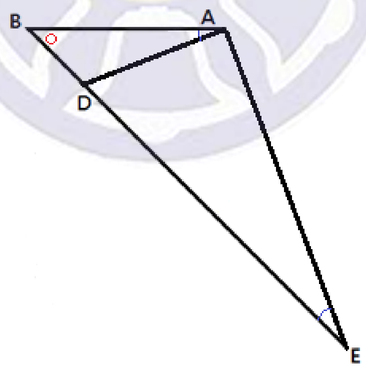



圖 5-6：利用相似三角形 $\Delta BAD \sim \Delta BEA$ 求出離心力 $\overline{BD}$。

離心趨勢的大小隨著單位時間成正比，$\overline{DB}$ 為離心趨勢的大小，在等速率圓周運動中，弧長 $DA$ 和圓周 $ADEA$ 的離心趨勢比就是兩者長度的平方比，即：

$$DA^2/_{ADEA^2} = \overline{DE}\cdot\overline{DB}/_{ADEA^2} = \overline{DB}/_{ADEA^2/\overline{DE}}$$

假如半徑為$r$，其中$ADEA$為圓周長$2\pi r$，$\overline{BD}$為直徑 2r，則$ADEA^2/\overline{DE} = 2\pi^2 r$，也就是文中所說 19.73922 個半徑大小，也約等於$19\,{}^3/_4$個地球半徑，即一天內行離地表 69087 英里。在一小時離心趨勢所對應的距離為$^{69087}/_{24^2} \approx 120$英里，一分鐘離心趨勢所行走距離為$^{69087}/_{(24\times 60)^2} \approx {}^1/_{30}$英里，或$^{500}/_3$英呎；在一秒離心力使物體時離圓心距離為$^5/_{108}$英呎，而重性每秒所使物體移動距離為$^1/_2\, g1^2 = 16$英呎，約為離心力的 350 倍，因此地表上的物體不會被旋轉的地球拋開。

而$\overline{DB}$就是在特定單位時間間隔離心力的大小，此式子$ADEA^2/\overline{DE}$代表一天的時間間隔，$ADEA$為地球一天所轉一圈的長度，所以此代表一天為單位的速度，另外$\overline{DE}$為直徑，大小與半徑成正比，所以將$ADEA$設為$v$，$\overline{DE}$設為$2R$，$ADEA^2/\overline{DE} = {}^{v^2}/_{2R}$，與惠更斯的論文離心力與速率的平方成正比相同，並與半徑成反比穩合。

**雖然牛頓朝向笛卡兒的啟示和要求，希望把地表運動和天體運動結合在一起，但牛頓似乎把重性等同於「力」，並且將之與離心力做比較**，甚至地表的重性大於地表離心力的 350 倍，以至於物體能留在地表上，但在當時機械論否定重性為力，顯然模糊曖昧。而

離心趨勢離開對應所走至圓周的距離隨著時間平方成正比是惠更斯的貢獻，類似於落體，在短時間的離開的距離確實精確，但在長時間的一天尺度就不盡如此。

牛頓在文中指出月球的離心力只有地表重性的四千分之一，而月球為何穩定於軌道上，牛頓並沒有說明，當時伯雷利表示星體能穩定在特定軌道上是因為離心力與重性的平衡，但不能表示牛頓隱含支持這些論點。如果要以渦旋理論加以解釋重性的來源，重性隨著距離平方成反比嗎？其實牛頓也不清楚，並且牛頓在當時不知道何謂是向心力。

此外，韋斯特福爾認為牛頓仍處於機械論的框架之中，儘管結果正確，不能是萬有引力的發現：

> **1666 年 ... 牛頓沒有使用引力的概念，仍舊侷限於傳統的機械論哲學思維框架；他沒有指出萬有引力，而只是指出離心的趨向。**（韋斯特福爾，2000，p, 157）

另外在 1684 年的《論運動》中也有類似的推導，除了弦切線 $\overline{DF}$ 沒有通過直徑外，最重的是牛頓所算的力是離心力而非向心力：

> 物體 B 作(等速率)圓周運動時，所受到向心力作用的大小正比於速率平方除上圓半徑。──《論運動》(1684)

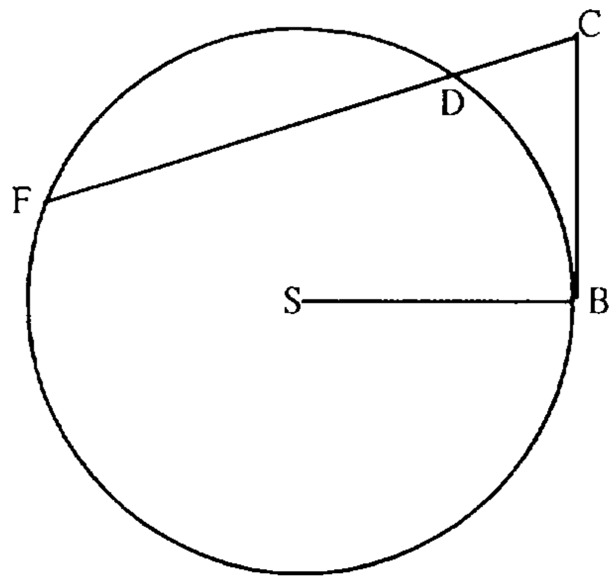



圖 5-7：利用另一種幾合方式求出離心力$\overline{BC}$。

我們可以加上簡單的輔助線，利用幾何證明得出：

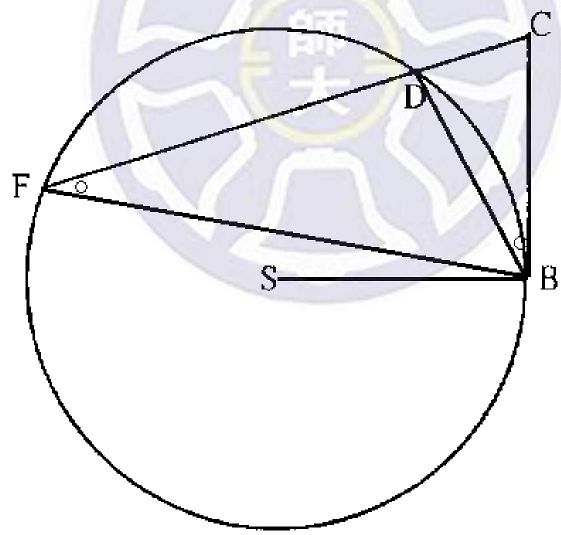



圖 5-8：畫上輔助線，利用相似三角形求出離心力$\overline{BC}$。

已知$\overrightarrow{CD}$為向心力的大小，其中ΔFCB~ΔBCD，所以

$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{BC}}^2/\overline{\mathrm{CF}}$，在極短的時間下，$\overline{\mathrm{CF}} \approx R$，$\overline{\mathrm{BC}} = v$，而$\overline{\mathrm{CD}}$

可以表示為 $F$，最後得到$F \propto {v^2}/{R}$。

**雖然數學結果一致，與前後二十年比起，向心力和離心力是截然不同的物理概念**。另外從月球的試驗，可以看出牛頓對力的含糊，將「離心力」與「重性」兩不相關的概念相結合，而牛頓在二十年前發現萬有引力的自述可能是杜撰，這平方反比定律提出的優先權顯得軟弱無力：

> 在 1660 年代於牛頓的手稿中，都未發現任何暗示指出太陽作用在行星之上的力，與地球作用在月球之上的力是同樣的。同時期，他認為行星具有遠離的趨勢，而在 1679~1680 年代或是更晚，他認為行星受到的為向心力，而連續地偏離行星的慣性軌跡，這兩者有很大的區別。也就是說，在 1665 年代，牛頓還沒有將重力普遍化的概念，而他說早有這樣的概念，只是晚了 20 年才發表，這樣的說法是沒有根據的。甚至在當時，他都還沒有月球會有力作用在地球上，或是行星會作用在太陽上的概念。( Cohen, 1980, p, 233)

牛頓的向心力概念需要受到某種的啟發，力的發現並不是一件簡單的是。惠更斯的數學觀給與牛頓重大的影響，有了量化的技巧，使牛頓只需臨門一腳完成運動定律，早期離心力數學化的過程物理構雖不正確，但卻是啟發牛頓邁向成功之路的重要因素。

## 第四節　牛頓向心力的確立

在 1679 年 11 月 24 日，虎克在第一封書信中向牛頓提到，提出向心吸引的概念：

…如果您樂於通過書信交流，指出對我的觀點不滿之處，特別是能讓我明白您對：沿著切線的直線運動，和一種朝向中心的吸引運動，所合成的行星運動的想法… ( Koyre, 1964/ 2003, p, 272- 273)

這是一個很重要的開端，二十年沒有再碰過天文運動的牛頓，專心於煉金術，停留在離心力的概念，從沒聽過圓周運動是一種朝向中心的運動，於是在 11 月 28 日回了虎克，

在此之前，我已經從哲學轉到其他領域的研究…在收到您的信以前，我完全沒聽說過您關於：用沿曲線切向的直線運動合成的行星運動的假說…

並提出一個物體直線從空中掉落會因為地球自轉而不會直接通過地心。

1679 年 12 月 13 日，也就是第五封書信中，牛頓回覆虎克：

…如果他的重力(性)是均勻的話，它將不是一條沿螺旋線朝地心下落，而會通過其離心力與重力(性)的交替平衡，如圖…( Koyre, 1964/ 2003, p, 288- 289)

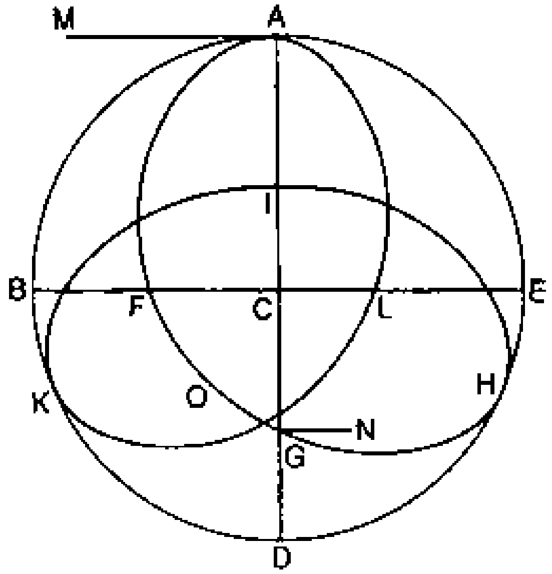



圖 5-9：牛頓在第四封書信所畫的示意圖。(引自 Koyre, 1964/ 2003, p, 288- 289)

由此封信中足以證明 1680 年的牛頓依然停留在離心力的概念，這似乎能說明牛頓尚未了解向心力。此外，也可以暗示圓周運動是重性與離心力平衡的結果，為何可以畫出花瓣的軌跡附錄一有詳細說明。

而虎克在 1680 年 1 月 6 日寫道：

您讓一個物體在到中心的所有距離上都被相等的力**吸引**，並用這種方法離計算物體所划出的曲線，就像對一個的凹拱中滾動球的計算是正確的，並且兩個拱點將不是由大約三分之一圓周所接合的。但我的假設是，**引力總是與到中心的距離平方成反比的**。( Koyre, 1964/ 2003, p, 289)

前面的幾封信虎克並沒有告訴牛頓引力和空間的關係為何，直到牛頓說地球吸引是均勻的，虎克才說是距離平方成反比。而虎克又在 1680 年 1 月 17 日再次寫信給牛頓，也是最後一封信：

> 此中心之吸引(central attraction power)與**距離的平方成反比**。毫無疑問，以您傑出的方法，您可輕易地找出這會是何種曲線，且提供造成此比例的物理原因。( Koyre, 1964/ 2003, p, 294- 295)

虎克看似占上風，告訴牛頓星體的運動只受吸引的影響，其中有一個重要的想法影響了牛頓，虎克將圓周運動視為一個不平衡的狀態，受到不平衡的趨勢影響而不再做直線運動，而牛頓承襲笛卡兒與惠更斯的離心力概念，認為圓周運動是離心力與重性的平衡，這也讓牛頓重新思考星體模型架構如何。

但可以明顯地發現，虎克並沒有說出向心力，只說出吸引強度( central attraction power)，對於機械論對非接觸力的排斥，虎克很巧妙地避開「力」( Force)這名詞。但到底何為是力，難道是笛卡兒所說的接觸和碰撞？思考力的本質成為關鍵。

由於虎克的提醒，牛頓思考最根本的問題，假如物體受到干擾其運動一定會有所改變，但如果物體不受任何干擾又是如何運動？慣性力又是如何呢？

機械論者認為力必須要接觸，力的大小就等於動量(mv)的大小，所以在機械論觀點力只有一種，就是慣性力，當兩物體接觸時第一

個物體慣性力的減少使得第二個物體慣性力的增加，而在當時物體受外界力的大小並沒有方向的概念，只與物體速率變快變慢有關。

所以在早期十七世紀慣性力的概念就是動量的大小，而慣性力其實就是直線運動的動量。一個物體的慣性力作用於另一物體則改變直線運動的動量大小，即代表物體有受外力作用。

**笛卡兒所認為的慣性力缺少運動的方向性**。

另外，伽利略在 1632 年提到若某個物體在水平面做運動，且在運動中沒有受到任何阻礙，則此物體將作均勻的等速率運動，如果此空間延伸至無限遠，則將永遠運動下去。而笛卡兒在 1664 年也提到所有物體會盡最大可能保持自己的運動，也就是它將保持同一速度和同一方向，除非有別的物體或減慢它的運動速度。

在先前，牛頓早期所寫的《雜記》，已試圖將力想法明確，認為力就是造成物體運動改變的某種原因：

3 需要真正足夠的力使物體趨於停止…

4 而力是被要求破壞任何運動的物體或是被要求增強任何物體的運動，而一個物體運動的增強也會造成另一個物體運動的破壞。

104 因此這似乎是使速度增加並造成另一個物體速度減少或阻撓的原因。這原因的效果我們通常稱之為力。( Westfall,

1971, p.344- 345)

當快的物體由後碰撞慢的物體，快的物體速度減少，而慢的物體速度增加，在接觸的剎那才有力的效果，沿用了笛卡兒的想法，牛頓認為的力就是慣性力之間的傳遞，速度快的物體比速度慢的物體有更大的慣性力。改變運動效果的原因稱之為力，慣性力代表動量，而慣性力就是力的說法不完全正確，精確地說，慣性力的改變才是外力。而在要使物體停止需要足夠的力，也就是要有足夠的動量才能將運動中的物體靜止。

只可惜牛頓沒有清楚說明慣性力與力之間的關係，直至 1780 至 1784 年間重新深入思考，並且到《原理》出現，才將慣性力正式定義，並且考慮其方向性；但我們必須將此功勞歸功於虎克朝向中心吸引的想法：

> 若沒有虎克在 1679 年向牛頓提出對圓周運動的看法，很可能牛頓一直都無法解決行星作橢圓運動的許多難題。也非常可能牛頓留下來的是他在光學與微積分上的成就，而沒有動力學與萬有引力的偉業！( Herivel, 1965)

虎克和牛頓的關鍵七封信對物理發展有了重大的意義，第六章第一節會提及牛頓的第一運動定律，接下來先探討向心力的數學化。

## 第五節　向心力的數學化

1684 年哈雷請教牛頓有關與距離平方反比的向心趨勢會畫出怎樣的圖形，對於此問題哈雷、虎克、雷恩已思索了五年之久。牛頓表示知道解答，但他必須整理一下內容，於是三個月後出版了《論運動》( On Motion)，全書包括三個定義——向心力、固有力、阻力，四個假設以及四個定理和七個問題。其中向心力為在物理學史上首次出現，並且將之列為定義一：

**定義 1**

一物體被推動或吸引，朝向中心點的力，稱為向心力。

(田芷綾、姚珩，2010，p, 30)

**Definition 1.**

I call **centripetal the force** by which a body is impelled or attracted toward some point which is regarded as the center.

( Brackenridge, 1996, p, 74)

牛頓將向心力放在定義一，**向心力**是**首次出現於物理史上**，虎克只說是朝向中心的吸引趨勢，而牛頓卻取而代之，將虎克的離心趨勢與惠更斯的離心力做結合，成為牛頓的心智創建。這不只是名詞上的改變，更有意義上的不同，沒有人敢稱之為力，只有牛頓首次突破力與接觸的關係。

但向心力的想法為何正確？其最重要的原因是向心力能將宇宙與地球表面的物理現象結合——惠更斯嘗試將離心力與重性視為因

果關係，且是離心力是造成重物下落的原因；而牛頓更指出月球的圓周運動與蘋果下落皆是出自於朝向地球中心運動的性質，以更簡單的概念加以詮釋，並且有更具有一致性。

在《原理》尚未出版前，牛頓並未提出第二運動定律，《論運動》中首次將向心力與面積定律以數學的形式等價，而牛頓的定理一就提到向心與面積定律的關係：

**定理 1**

以向心力運動的物體，它至中心連線所畫出的面積，正比於時間。

**Theorem 1.**

All orbiting bodies describe, by radii having been constructed to their center, areas proportional to the times. ( Brackenridge, 1996, p, 71)

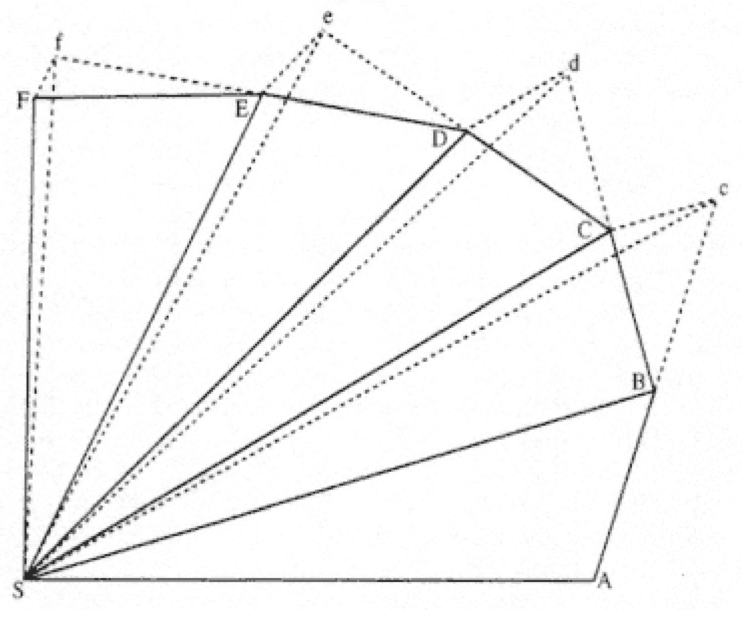



圖 5-10：牛頓定理一示意圖。(引自 Brackenridge, 1996, p, 80)

此圖之後也在《原理》出現，$\overline{AB}$是由 A 出發的線段延伸至 B 點，表示物體在固定的時間間隔內以固定速度所行走的距離。當物體在 B 點時受到一個朝向中心 S 點的脈衝力。

$\overline{Bc}$是由 B 點出發，延伸至 c 點的直線，$\overline{Bc}$線段長度等同於$\overline{AB}$，其代表物體沒有受到任何外力的狀況下再經過下一個時間間隔，繼續由 B 點走至 c 點。

因為物體在 B 點受到脈衝力，而在同樣的時間間隔走至 C 點，其長度為$\overline{BC}$。而$\overline{cC}$線段則是物體不受力所移動至 c 點到實際受力所行走至 C 點的長度，此代表物體因在 B 點受到一股脈衝力，使物體偏離$\overline{Bc}$的強度，所以$\overline{cC}$必須平行於$\overline{BS}$，並且和受力的方向一致。

我們可以看牛頓是如何不用第二運動定律解決向心力與面積定律的問題，從 [A] 至 [G] 我們逐一討論牛頓的方法。

在第一個時間間隔裡，物體行走$\overline{AB}$就是慣性力的大小：

> **[A]** Let the time be divided into equal parts, and in the first part of the time let a body by its innate force describe the straight line AB. ( Brackenridge, 1996, p, 81)

在假設不受任何外力的形況下，慣性力必定不會改變，所以速度大小和方向必定和第一個時刻一樣，且從 B 點在第二時刻走至 c 點：

**[B]** The same body would then, if nothing impeded it, proceed directly to c in the second part of the time, describing the line Bc equal to itself AB, ( Brackenridge, 1996, p, 81)

要解釋$\overline{cC}$和$\overline{BS}$平行，就必須用到面積定律。面積定律有兩種，一種是封閉曲線，另一種是非封閉的線。等速直線運動是非封閉的情況，物體做直線運動並經過 A、B、c 三點，由相似三角形得知兩平行線$\overline{cc'}$長度是$\overline{BB'}$的兩倍，並由三角形面積公式得出$\Delta SAB$與$\Delta SBc$面積相等，也就是物體不受外力時也運動符合面積定律：

**[C]** so that, when the radii AS, BS, and cS were extended to the center, areas ASB and BSc would be made equal . ( Brackenridge, 1996, p, 82)

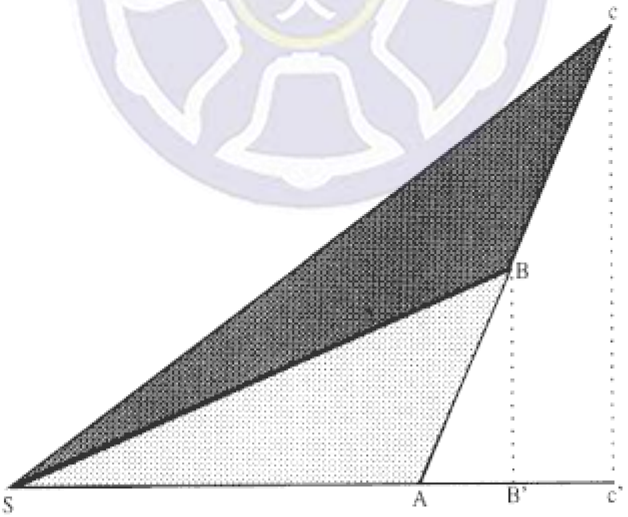



圖 5-11：等速直線運動符合面積定律，在兩相同時刻區間，$\Delta SAB$與$\Delta SBc$面積必會相等 。(引自 Brackenridge, 1996, p, 82)

另外一種是封閉曲線的面積定律，月球繞行地球的圓周運動符合面積定律。牛頓先是假設一個物體受到向心力，證明出會符合面

積定律，首先

> **[D]** Now when the body comes to B, let the **centripetal force** act with one great **impulse**, and let it make the body deflect from the straight line Bc and proceed along the straight line BC.
> ( Brackenridge, 1996, p, 83)

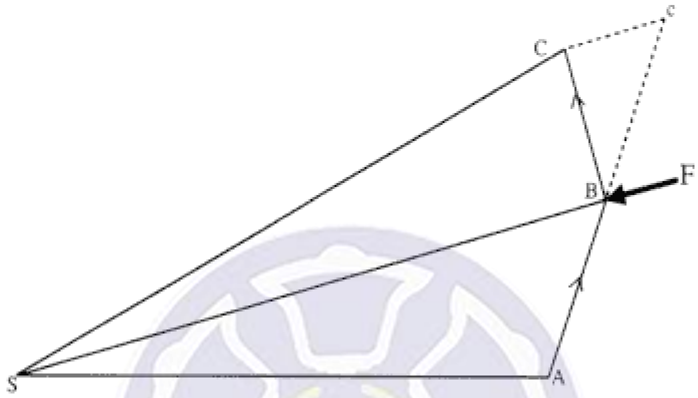



圖 5-12：物體在 B 點受到衝力，使之運行由原本$\overrightarrow{Bc}$變成 $\overrightarrow{BC}$。(引自 Brackenridge, 1996, p, 83)

**向心力**(centripetal force)首次在《論運動》[D]部分出現，這裡可以看出牛頓依然受到笛卡兒「力」名詞的影響；但當時慣性力與離心力是唯二能接受的力，不能接觸的力將一律排除，牛頓卻大膽使用向心力，除了要更正惠更斯的錯誤外，更重要的是要和虎克的概念做出區別，與向心趨勢明顯切割。

要如何找出受脈衝力的$\overrightarrow{BC}$，牛頓就必須在站在他人的肩膀上，當時伽利略就以兩位置平行四邊的方法得出原點位置向量，在水平拋體的狀況中，每秒水平移動的大小皆一樣，而垂直移動距離與時間平方成正比，而這兩位置與原點連線，並將兩連線分別平移至水

平與垂直位置，可以形成對邊畫出矩形，原點至對角連成的線就是我們現在所說的向量疊加。

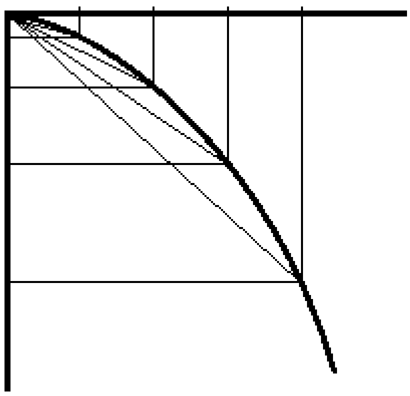


圖 5-13：伽利略位置向量疊加。


圖 5-14：兩位移分別為$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AD}$。

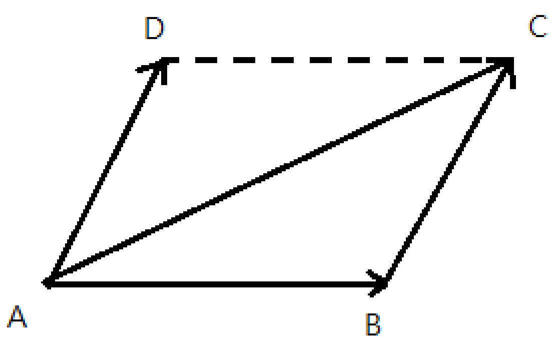



圖 5-15：$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$兩位置的向量疊加可以利用平行四邊形法，得出對角線$\overrightarrow{AC}$。

雖然伽利略並沒有將之具體命名，但已有向量位置的疊加的想法。牛頓比照伽利略，「力」也可以以向量的方式疊加，在《原理》的假設一，兩個力的合成可以產生新的力：

**COROLLARY I.**

A body by two forces conjoined will describe the diagonal of a parallel gram, in the same time that it would describe the sides, by those forces apart. ( Newton, 1687, p, 84)

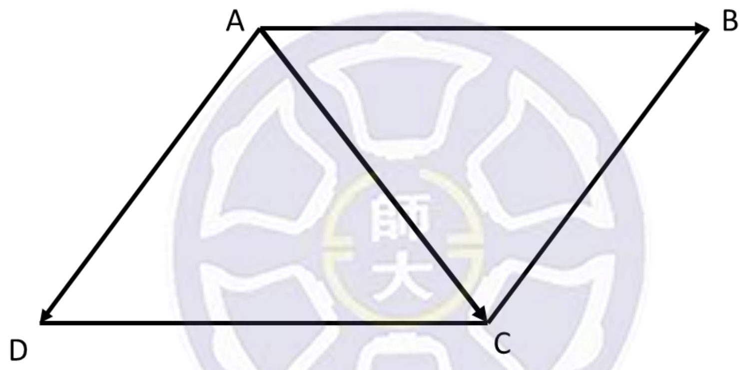



圖 5-16：假設一( Corollary 1.)示意圖。

因此在 [E] 部分慣性力$\overline{Bc}$與脈衝力$\overline{Bb}$相加，利用平行四邊形法可以得出合成力$\overline{BC}$，而力等於在單位時間下力所造成的位移量，也是線段的大小可以表示力的大小，以及位移的大小：

**[E] Parallel** to the same **BS**, let **cC be extended**, meeting BC at C, and when the second interval of time is finished, the body will be found at C. ( Brackenridge, 1996, p, 83)

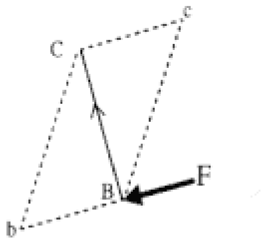



圖 5-17：平行四邊形法用於定理一( Theorm 1.)。(引自 Brackenridge, 1996, p, 83)

$\overline{cC}$與$\overline{Bb}$平行，也就是位移改變量要和向心力平行，這是運動定律的雛形，但可以發現，但牛頓並沒有說出$\overline{Cc}$就是速度或是動量變化，也並沒有清楚說出$\overline{Cc}$的方向性。

> **[F]** Join S and C and because of the parallels SB and Cc, the triangle SCB will be equal to the triangle SBc and hence also to the triangle SAB. ( Brackenridge, 1996, p, 84)


圖 5-18：ΔSAB 與ΔSBc 面積相等。(引自 Brackenridge, 1996, p, 84)

從[D]、[E]、[F]可以得知物體做圓周運動一定會符合面積定律，而路徑偏折後ΔSAC與ΔSAB面積相等，但在前面已知當物體作等速直線運動時三角形面積$\Delta SAB = \Delta SBc$，所以$\Delta SAC = \Delta SBc$，為了要讓兩三角形面積相等，$\overline{Cc}$必須與$\overline{BS}$平行。

另外向心力的大小可以做改變，如$\overline{Bb'}$、$\overline{Bb}$、$\overline{Bb''}$，並可找出對應的位移改變大小$\overline{cC'}$、$\overline{cC}$、$\overline{cC''}$，牛頓並沒有要限制$\overline{cC}$的長度，其只要能平行於$\overline{BS}$，就能符合面積定律。

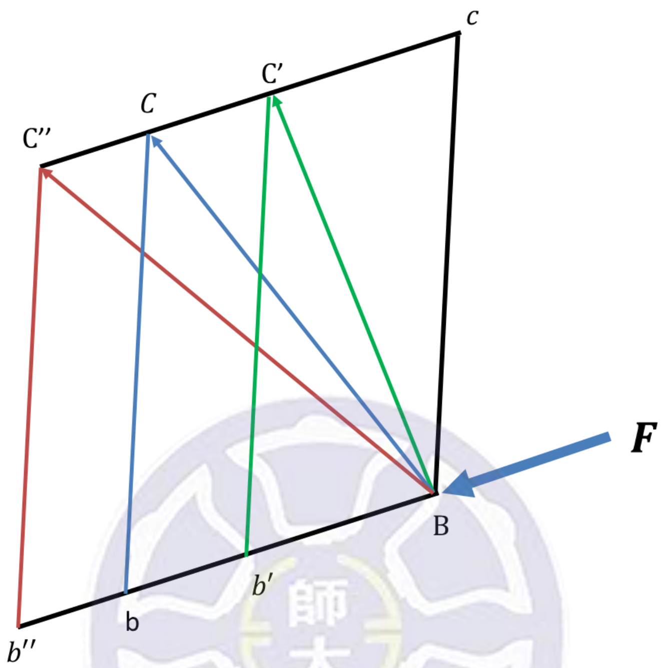



圖 5-19：只要能符合面積定律，在 B 點的向心脈衝力可以任意大小。

> **[G]** By a similar argument, if the **centripetal force** should act successively at C, D, E, etc., making the body in separate moments of time describe the separate straight lines CD, DE, EF, etc., the triangle SCD will be equal to the triangle SBC, SDE to SCD, SEF to SDE ( and so on). ( Brackenridge, 1996, p, 84)

要使物體從 c 點移動至 C 點，就必須與$\overline{Cc}$平行的力，也就是和$\overline{BS}$平行。在同樣的情況下三角形ΔSCD與ΔSBC、ΔSDE與ΔSCD、ΔSEF與ΔSDF的面積要相等，依照[A]至[D]方式，C、D、E 點接受到的力必須朝向 S 點，假如將多邊形的邊不對增加，極限之後將會是一個圓，而物體在任何一點所受的力皆指向圓心，也就是向心力。

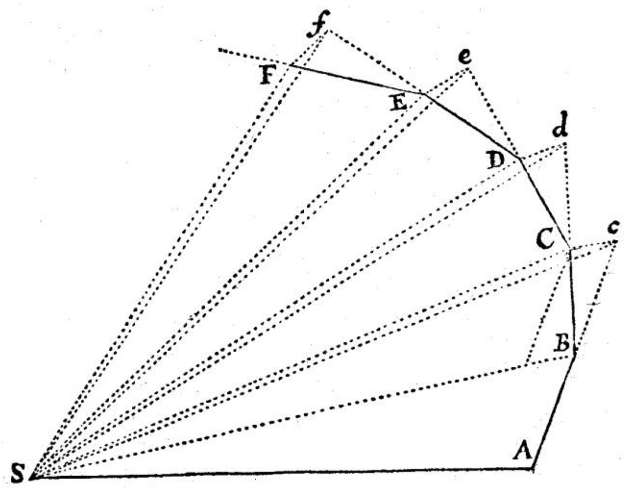



圖 5-20：透過面積定律可以找出圓周每一位置皆受到向心脈衝力的作用。 (引自 Brackenridge, 1996, p, 80)

在牛頓早期 *Waste Book* (1665)中探討圓周運動，只以碰撞與反彈的方式探討圓形軌跡，沒有考慮克卜勒的行星第二定律，並且只考慮向外的離心力。而在 1684 年，牛頓將圓周運動視為不平衡的運動，且是一個受到向心力的運動，如果能將此運動的數學關係建立在此定律之上，力學將會是全新的突破。

《論運動》利用合成力向量證明向心力會符合面積定律，但解釋的過程顯些複雜，此外牛頓沒有清楚說明$\overline{cC}$的物理意義為何，所以在兩年後所出版的《原理》有做出更清楚的解釋。可以確定的是，**向心力是建立在面積定律之上，沒有面積定律就找不出曲線運動速度的變化，更不會有牛頓第二運動定律**。

至於向心力的數學表示已在《論運動》有清楚的圖像證明：

物體 B 作(等速率)圓周運動時，所受到向心力作用的大小正比於速率平方除上圓半徑。《論運動》(1684)

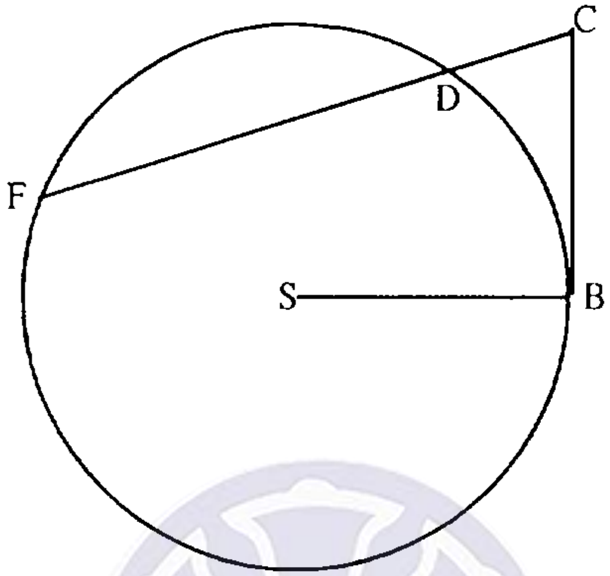



圖 5-21：利用 5-3 節證明結果，$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{BC}}^2/\overline{\mathrm{CF}}$，得到$F \propto v^2/R$。

落體運動、等速圓周運動和橢圓運動皆受向心力作用的影響。但假如物體不受力作用影響，將會如何運動？牛頓《論運動》的假設二清楚說明：

**假設 2（Hypothesis 2）**

除了受到外界干擾( impede)，每個物體藉著原來的固有力( innate force)，將繼續沿著直線以等速度運動( uniformly)下去，直到無限遠處。

**Hypothesis 2.**

Every body by its innate force alone progresses uniformly along a straight line to infinity unless something impedes it from outside. ( Brackenridge, 1996, p, 75)

此外，比較虎克於 1670 年演講中的假設二：

無論什麼物體，只要它進入一種筆直且單純的運動狀態，它就會繼續沿此直線前行，直至被其他某些外來的原因所改變，從而被迫進入一種划出正圓、橢圓或者其他更加複雜曲線的運動中。( Koyre, 1964/ 2003, p, 275)

虎克和牛頓的想法頗為相似，差別在於將物體本身持續運動的性質稱之為固有力，比虎克更加嚴謹，並且可以利用數學的形式將外力結合。所以牛頓的假設三如下：

**假設 3（Hypothesis 3）**

在給定時間下，物體受到兩力後，將被移至由各力在相同時間下，接續被移至的位置。

**Hypothesis 3.**

A body, in a given time, with forces having been conjoined, is carried to the place where it is carried by separated forces in successively equal times. ( Brackenridge, 1996, p, 75)

這「兩力」就慣性與向心力，另外牛頓提及向心力有關的重要定理：

**定理 2**

做等速率圓周運動的物體，其向心力等於在某一時間劃出

之弧長平方，除以半徑。

**Theorem 2.**

For bodies orbiting uniformly on the circumferences of circles, the centripetal forces are as the squares of the arcs described in the same time divided by the radii of the circles. ( Brackenridge, 1996, p, 72)

**定理 2　推論 5**

若作等速率圓周運動的物體，其週期平方與半徑立方成正比，則此物體的向心力正比於半徑平方。

**Theorem 2. Corollary 5.**

If the squares of the periodic times are as the cubes of the radii, [then] the centripetal forces are reciprocally as the squares of the radii, and conversely. ( Brackenridge, 1996, p, 90)

**定理 4**

若物體所受之向心力與至焦點之平方成反比，則做橢圓運動的此物體其週期平方與軸長立方成正比。

**Theorem 4.**

Supposing that the centripetal force is reciprocally proportional to the square of the distance from the center, the squares of the periodic times in ellipses are as the cubes of their transverse axes. ( Brackenridge, 1996, p, 73)

此外，在《原理》一書中八個基本定義如下——質量、運動量、固有力(慣性力、內力)、外力、向心力、向心力的絕對量(力源)、向心力的加速度量(加速度)、向心力的運動量(力) ——其中向心力就占四個，可見其重要性，**找出向心力是完成「力」的第一關鍵**。

## 第六節　向心力與離心力之差別

為何離心力卻困擾了十七世紀的物理學家？我們手甩繩子不是會感受到力，它錯在哪裡？

在圓周運動的探討，笛卡兒以木棍上會滑動的螞蟻做解釋，當螞蟻與棍棒做圓周運動螞蟻都往棍外移動。這現象確實正確，離心力一直存在著——我們手持棍子將鐵環串於底部，當手去旋轉棍子時，鐵環會被往外帶出，如圖 5-20 的 figII 中，棍棒做圓周運動時，螞蟻會從原本的 *B*、*F* 點，分別移動至 *C*、*G* 點，並且 *A*、*C*、*G* 在同條直線上。

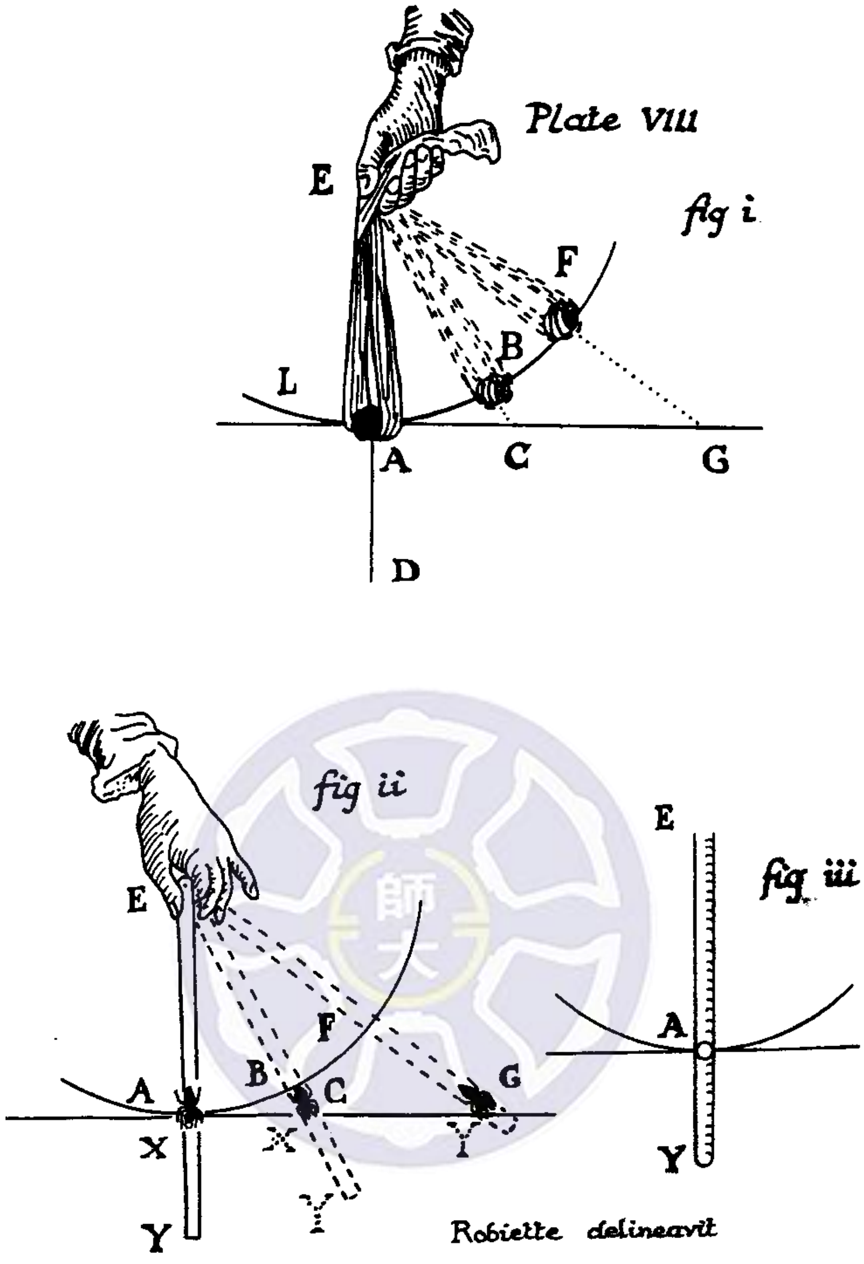



圖 5-22：笛卡兒離心力圖示。(引自 Descartes, R. 1644，末頁附錄)

其實是觀察者與所處的座標有關，探討螞蟻在旋轉的木棍上所受到的作用，笛卡兒是從木棍的角度去思考，也就是在旋轉座標中去看一隻螞蟻運動的狀況，木棍上可以見到螞蟻被往外甩出；但從慣性座標來看，以觀察者的角度看到木棍在做圓周運動，而螞蟻被水平帶動而做直線運動。

笛卡兒是從木棍上的旋轉座標思考運動問題，認為螞蟻遠離木棍是因為其繞圓產生離心力的影響，螞蟻要維持在圓軌跡上必須要有繩線或者渦旋來抵抗離心力。

至今如此，普羅大眾常認為旋轉的物體會受到離心力作用，我們可以利用生活中常見的現象來說明：當汽車高速過彎，車裡的人感覺被甩出去，假如沒有門的阻隔，將會被拋出車外，而這股感覺上的推力是向外的，所以離心力比向心力更具直觀性。

但離心力的想法是否有誤？其實這是正確的，在車內的人是以車上的座標，也就是在一個旋轉的座標上去思考運動的物體，這座標本身就是一個向心加速度的非慣性座標。從車外人慣性座標看車裡的人是做等速直線運動，但對於車內向心加速度的座標中，原本做等速直線運動的物體卻是坐向外加速度的運動。

有別於離心力的概念，以慣性座標(旁觀者)的角度思考，確切地說是從**圓心點座標去思考旋轉的物體。**

虎克清楚且自信地認為物體做圓周運動只受到吸引的作用，使物體有朝向中心的趨勢，並不是一個平衡的狀態，這提醒了牛頓並改變既有的思考方式，並且整合了圓周運動和直線加速度運動這兩個結果，從靜止座標探討曲線運動。另外牛頓以第三運動定律作用力與反作用力，說明手提供物體拉力相對物體也會反作用於手提供拉力，解決了為何手感受到物體向外的拉力。

在牛頓的《論運動》中，將向心力放在定義一，此外《原理》的八個基本定義有四個和向心力有關，也就是尋找中心的力是個關鍵。

從向心力的想法出發，但要怎樣得出力與數學的關係呢？第六章將會清楚探討。

# 第六章　　運動定律的建立及意義——牛頓在力學上的第二個創見

## 第一節　第一運動定律——慣性定律於 1686 年提出

慣性運動最早的概念不是伽利略的小球實驗，伽利略認為假如將另一端斜面無限平緩地讓小球繼續滾動，小球則會沿著地球表面繞行一圈，最後回到原點，但這並不是慣性力，只認為這是動量大小的守恆，**伽利略對於慣性力是一無所知的**。

真正有**慣性力**的想法首先來自**笛卡兒**，認為運動中的物體會持續地以等速直線的方式運動下去，其大小可以用體積和速度的乘積來表示，而慣性力是接觸力以外唯一可以接受的力，牛頓接受了笛卡兒的觀點，並在《原理》中將慣性力定義如下：

**定義三**

慣性力( vis instia)，或物質固有的力，是一種抵抗作用的效果，它存在於每一物體當中，大小與該物體相當，並使之保持現有的狀態，或是靜止，或是勻速直線運動中。

這個力正比於物體，此力即為物體的力，它來自物體的不活動性，與我們的概念沒有什麼區別，在此按我們的想法來研究它。一個物體，由於其慣性，要改變其靜止或運動的狀態不是沒有困難的。由此看來，這個固有力可以用最恰當不過的名稱，慣性力或內在力稱呼它。但是，只有當有其他的

力作用於物體，或者要改變它的狀態時，物體才會產生這種力。這種力的作用可以看做是抵抗力，也可以看做是推斥力(脈衝)。當物體維持現有的狀態、反抗外來力的時候，這種力就表現為抵抗力；當物體不向外來力屈服並要改變另外一個物體的狀態時，這種力表現為推斥力。抵抗力通常屬於靜止的物體，推斥力通常屬於運動的物體。不過正如通常所說的那樣，運動與靜止只能做相對的區分，一般認為靜止的物體，並不總是真的靜止。( Newton, 1687/ 2005 , p.24)

**DEFINITION III.**

The vis insita, or innate force of matter, is a power of resisting, by which every body, as much as in it lies, endeavours to persevere in its present stale, whether it be of rest, or of moving uniformly forward in a right line.

This force is ever proportional to the body whose force it is ; and differs nothing from the inactivity of the mass, but in our manner of conceiving it. A body, from the inactivity of matter, is not without difficulty put out of its state of rest or motion. Upon which account, this vis insita, may, by a most significant name, be called vis inertia, or force of inactivity. But a body exerts this force only, when another force, impressed upon it, endeavours to change its condition; and the exercise of this force may be considered both as resistance and impulse; it is resistance, in so far as the body, for maintaining its present state, withstands the force impressed; it is impulse, in so far as the body, by not easily giving way to the impressed force of another, endeavours to change the state of that other. Resistance is usually ascribed to bodies at rest,

> and impulse to those in motion; but motion and rest, as commonly conceived, are only relatively distin guished; nor are those bodies always truly at rest, which commonly are taken to be so. ( Newton, 1687, p, 73-74)

將 2005 年定義三中的文譯版潤飾，可以發現牛頓只談論**慣性力** ( **vis insita**)並沒有提到慣性，只是後人加以擴述「慣性」此名詞。

Harmam 的論文中將慣性力等同於慣性，並引用 Euler 的想法，將力視為改變運動狀態的原因，而慣性是使物體保持物體運動或靜止的狀態，且認為慣性與慣性力視為一致的概念顯得模糊不清儘管兩者是等同關係。( Harman, 1982, p, 13- 17)

「質量的不活動性」( inactivity of the mass)並不表示慣性力就是質量，對於運動中的物體的慣性力，牛頓承襲了笛卡兒動量的想法，也就是慣性力與**質量和速度的乘積**成正比，而此時物體對其他物體產生脈衝並使之改變運動，因此可以將它稱之為推斥力或脈衝 ( impuse)。假如兩個相同質量的物體帶著不同的速度，A 物體速度比 B 物體速度還要大，當這兩物體受到相同的力，因此在相同的時間產生相同的速度變化量；但由於 A 物體速度大於 B 物體，所以速度改變比率( $\Delta v/_{v}$) A 物體小於 B 物體，也就是說 A 物體的慣性力大於 B 物體的慣性力。另外，對於相同速度，不同質量的兩物體，可以知道質量越大的物體速度變化量越少，即其慣性力越大。

總而言之，**慣性力對於運動中的物體就是動量；對於靜止的物體慣性力並無意義，只能以質量代表慣性力**，靜止的物體無法給其

他物體脈衝而讓其他物體產生運動，而是讓運動中的物體速度減少，牛頓將它又稱作抵抗力( resistance)。但牛頓所說的靜止只是相對座標下比較的結果，並**無所謂真正得靜止物體**。

在中學教育裡，$F = ma$中的$m$稱為質量，或者稱作是慣性；但當時牛頓並沒有此定義等式，只用幾何方式解決力與運動的問題。**質量是無法在時間的座標中表示位置的關係**，為了要能在**平面上軌跡作圖，必須使用動量**，其速度包含了空間與時間的因子，而我們可以再透過速度隨時間變化得到加速度。**慣性力就是物體的動量**，改變物體動量的大小就是外力，就是質量成以速度變化量。因此，**慣性力比慣性更能代表向量幾何意義**。

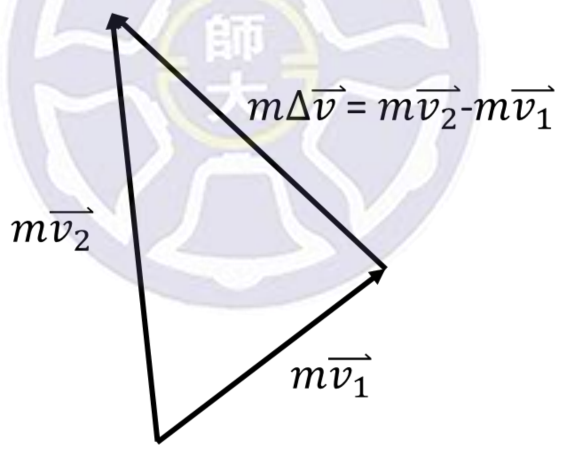



圖 6-1：慣性力也就是動量，可以和外力一樣表示於向量空間上。

此外，牛頓將外力與慣性力分開，並作為定義四：

**定義四**

外力是一種對物體的推動作用，使其改變靜止或勻速直線

運動的狀態。( Newton, 1685/ 2005, p, 24)

**DEFINITION IV.**

An impressed force is an action exerted upon a body, in order to change its state, either of rest, or of moving uniformly forward in a right line.

This force consists in the action only; and remains no longer in the body, when the action is over. For a body maintains every new state it acquires, by its vis inertice only. Impressed forces are of differe.it origins as from percussion, from pressure, from centripetal force. ( Newton, 1687, p, 74)

雖然慣性力的改變與外力有相關，甚至慣性力傳遞出去就是外力，但牛頓卻刻意將之分做定義三及定義四，更明確指出外力就是改變運動狀態，而慣性力即是抵抗外力所造成的改變。

外力不再是名詞上的接觸與碰撞，而是代表改變物體靜止或勻速直線運動的狀態，也就是運動上的改變。

有別於離心力的概念，認為圓周運動的物體只受到向中心吸引的作用，使物體有朝向中心的趨勢——這並不是一個平衡的狀態，而真正平的狀態是靜止或是等速度直線運動，這提醒了牛頓並改變既有的思考方式，曲線運動一定受是到外界干擾或影響，而我們可以將運動的改變稱為力。

牛頓將機械論所說的阻礙、制止、干擾稱為「力」，而**外力概**

**念首次從牛頓出來**，除了定義四外，在運動定律一也說明：

**定律一**

每個物體都保持其靜止或勻速直線運動的狀態，除非有外力作用於它迫使他改變那個狀態。( Newton, 1685/ 2005, p, 33)

**Law I.**

Hvery body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon. ( Newton, 1687, p, 83)

牛頓第一運動定律並非是第二運動定律的延伸，慣性力必須要存在才能探討物體受到外力下的速度變化，或是由初始慣性力及後來動量得知外力的大小。有了第一運動定律，第二運動定律才能建立。

## 第二節　第二運動定律的提出

如果提出想法而無數學位現象佐證，只能淪為假說。向心力一定要和數學結合，並且能運用在其他的自然現象中才算是成功。牛頓深知這點，而常見的三種運動——落體運動、等速圓周運動、橢圓運動，皆都受到向心力的作用影響，將它們以量化是個關鍵，尤其是**曲線運動中的圓周運動**。

牛頓不再是以慣性力去思考力，取而代之的是外力和向心力，並且提出第二運動定律：

> **定律二**
>
> 運動的變化正比於外力，變化的方向沿外力作用的直線方向。( Newton, 1685/ 2005 , p, 34)
>
> **Law II.**
>
> A change in motion is proportional to the motive force impressed, and takes place along a straight line on which that force is impressed. ( Newton, 1687, p, 83)

突然間自然與自然律隱藏在黑夜裡開啟了一道曙光，讓牛頓誕生，**牛頓成為史上第一位給予「力」全新意義的科學家**，開啟嶄新的思考世界。

**運動量的變化與外力是牛頓第二運動定律的兩大關鍵**。在牛頓之前五個重要的科學家不知道何謂「運動變化量」，伽利略認為是

落體動的直線加速度；克卜勒從來不知道運動變化，只知道行星在橢圓軌道上的速率快慢；笛卡兒只探討直線碰撞前後動量的變化；惠更斯認為是圓周運動中自軌道回到切線的強度；而虎克只說出朝向中心的運動。

至於「外力」，伽利略只知道物體向下墜落內在本質；克卜勒認為是太陽發出的磁或光驅動星體；笛卡兒只承認物體碰撞時產生的接觸力；惠更斯只探討離心力，並且將之視為造成重性的原因；虎克避免超距力只說出朝向中心的強勢。

所有的科學家中，只有牛頓全新定義「運動變化量」與「外力」，並且成為運動定律的關鍵元素。

在 1689 哲學家洛克( John Locke 1632~ 1704)請教牛頓如何以簡單的方式說明第二運動定律。牛頓畫了圖，說明假如物體不受力會沿著直線走，單位時間所走的線段為$\overline{Aa}$，假如受到外力則沿著AB弧線走，則由$a$指向B的線段及運動量的變化大小(末速度減去初速度)，其效用就等於物體在 A 處所受到的脈衝力，與運動變化量平行且同方向。

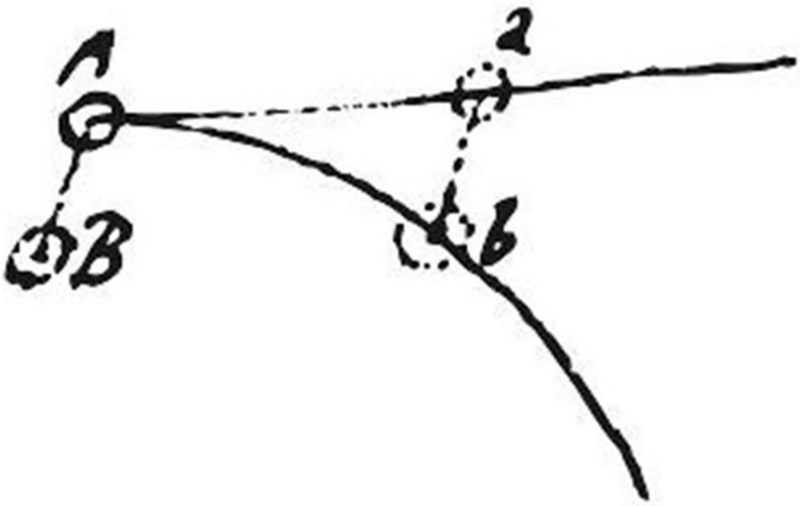



圖 6-2：運動量變化$\overrightarrow{ab}$就等於物體在 A 處所受到的外力，並且兩者是同方向且等比例關係。(引自 Pourciau, 2011, p, 1018)

了解**平面運動的軌跡**，關鍵在於掌握**速度的變化**，因此《原理》前十七個命題中，皆是解決二維的運動軌跡與加速度的關係。

在牛頓的正反命題中指出指向力運動的物體一定遵守面積定律：

**命題 1　定理 1**

做環繞運動的物體，其指向力的不動中心的半徑所掠過的面積位於同一不動的平面上，而且正比於畫出該面積所用的時間。(田芷綾、姚珩, 2010, p, 31)

**PROPOSITION I. THEOREM 1.**

The areas which revolving bodies describe by radii drawn to an immoveable centre of force, lie in the same immoveable planes, and are proportional to the times in which they are describe.

( Newton, 1687, p, 103)

面積定律等價於向心力在《論運動》中已出現過，並且說明假如物體受到向心力，必定符合面積定律；但當時牛頓並未提出第二運動定律，解釋不清楚且方法繁瑣。《原理》命題 2 定理 2 補足在《論運動》的不足：

**命題 2 定理 2**

沿平面上任意曲線運動的物體，其半徑指向靜止的或作等速直線運動的點，且關於該點掠過的面積正比於時間，則該物體受到指向該點的向心力的作用。(田芷綾、姚珩, 2010, p, 31)

**PROPOSITION II. THEOREM 2.**

Every body that moves in any curve line described in a plane, and by a radius, drawn to a point either immovable, or moving forward with an uniform rectilinear motion, describes about that point areas proportional to the times, is urged by a centripetal force directed to that point. ( Newton, 1687, p, 103)

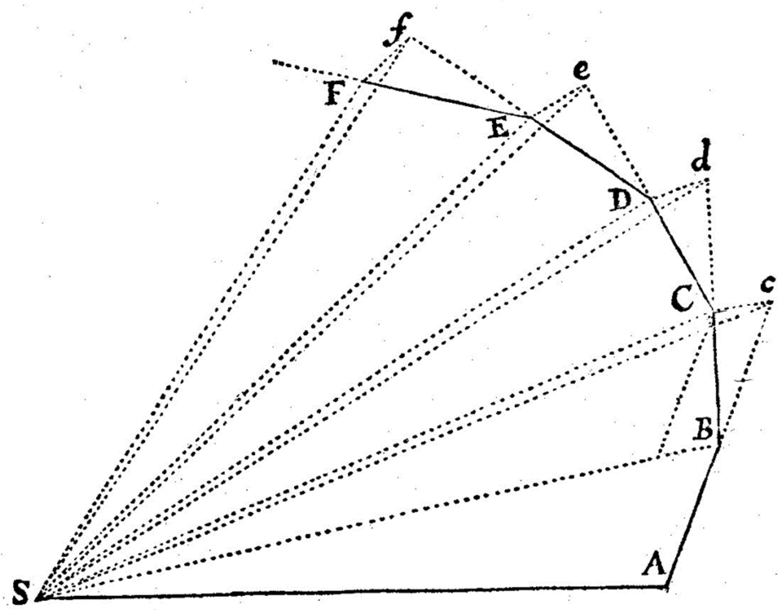



圖 6-3：此力作用在點 B 並沿著與 cC 平行的直線上 (由第二定律)。

(Such a force) acts at position B along a line parallel to cC( by Law 2).

(引自 Brackenridge, 1996, p, 80)

已知要符合面積定律$\overline{cC}$必須要和$\overline{BS}$平行，而 $\overline{cC}$是運動變化量，利用第二運動定律，在$B$點所受的力必需要和運動量變化$\overline{cC}$平行，如此就證明出面積定律與向心力等價。

至於要求出力與速度和半徑的關係，牛頓在命題 4 定理 4 已寫道：

**命題 4　定理 4**

沿不同圓周等速運動的若干物體之向心力，指向各自圓周的中心，它們之間的比，正比於等時間裡掠過弧長的平方除以圓周的半徑。(田芷綾、姚珩, 2010, p, 31)

**PROPOSITION IV. THEOREM 4.**

The centripetal forces of bodies, which by equable motions describe different circles, tend to the centres of the same circles; and are one to the other as the squares of the arcs described in equal times applied to the radii of the circles. ( Newton, 1687, p, 104)

$F \propto {v^2}/{R}$之關係在《論運動》已有清楚的圖像證明，一樣出現在牛頓的《原理》：

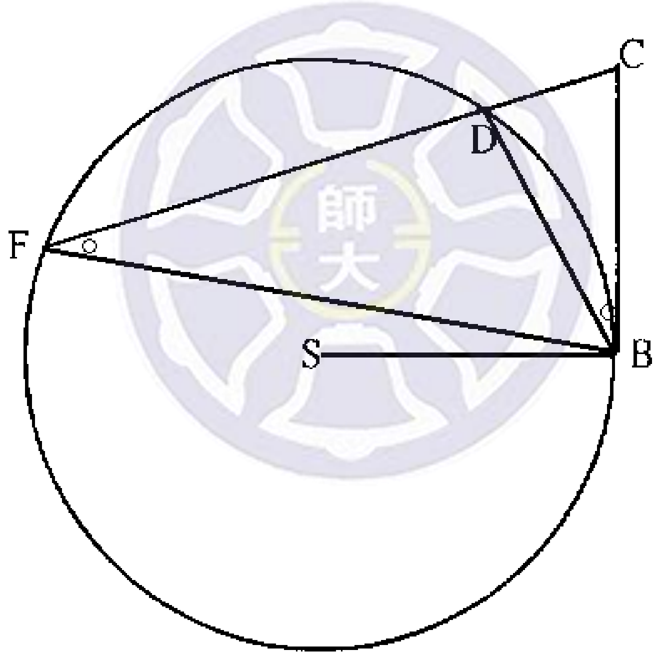



圖 6-4：利用兩相似三角形ΔBCF與ΔDCB可以得到向心力 $\overline{\mathrm{DC}} = {\overline{\mathrm{BC}}^2}/{\overline{\mathrm{CF}}}$。

在這裡我們已知$\overrightarrow{CD}$為向心力的大小，其中ΔFCB~ΔBCD，所以 $\overline{\mathrm{CD}} = {\overline{\mathrm{BC}}^2}/{\overline{\mathrm{CF}}}$，在極短的時間下，$\overline{\mathrm{CF}} \approx R$，$\overline{\mathrm{BC}} = v$，而$\overline{\mathrm{CD}}$可以表

示為 $F$，最後得到$F \propto {v^2}/{R}$。

惠更斯是第一位首次將機械論與數學觀結合，成為力學開拓的先驅者，牛頓也深受其影響，在二十年前，牛頓是以類似的方式證明出此數學關係，但當時其只知道離心力；在虎克的提示後，牛頓才將離心力概念改為向心力。**一個物理定律的發展，其概念的形成難於數學**，而力的發展是經過千年漫長的累積，才有今天的第二運動定律。

另外我們可以利用克卜勒的週期律${R^3}/{T^2} = \mathrm{K}$，得到$v^2 = ({2\pi R}/{T})^2 = {4\pi^2 K}/{R^2}$，將命題 4 定理 4 的結果代入$F \propto {v^2}/{R} \propto {1}/{R^2}$，所以牛頓在命題 4 推論 6 寫道：

**命題 4 推論 6**

如果週期正比於半徑的 3/2 次方，則向心力反比於半徑的平方；反之亦然。(姚珩、田芷綾 , 2010, p, 4)

牛頓得出虎克當年提出的平方反比定律，只是虎克只透過球面波的傳遞憑感覺得出，並未將之數學化，反而牛頓清楚寫出週期正比於半徑的 3/2 次方，則向心力正比於半徑平方的倒數之關係。

在牛頓前十七個命題中，命題一、二為面積律與向心力的關係，命題四由面積律得出距離平方反比力，命題六、十一、十七都是橢圓律與平方反比力之關係(命題證明見附錄三)，命題六與命題十一

探討橢圓的平方反比力指向其中一交點：

**命題 6 定理 5**

物體沿橢圓運動，指向橢圓焦點的向心力反比於其到橢圓焦點距離的平方。

**PROPOSITION VI. THEOREM 5.**

In a space void of resistance, if a body revolves in any orbit about an immovable centre, and in the least time describes any arc just then, nascent ; and the versed sine of that arc is supposed to be drawn bisecting the chord, and produced passing through the centre of force: the centripetal force in the middle of the arc will be as the versed sine directly and the square of the time inversely. (Newton, 1687, p, 110)

**命題 11 問題 6**

如果一個物體做橢圓運動，它必滿足向心定律於橢圓任一焦點上。(姚珩、田芷綾 , 2010, p, 6)

**PROPOSITION XI. PROBLEM 6.**

If a body revolves in an ellipsis ; it is required to find the law of the centripetal force tending to the focus of the ellipsis. ( Newton, 1687, p, 116)

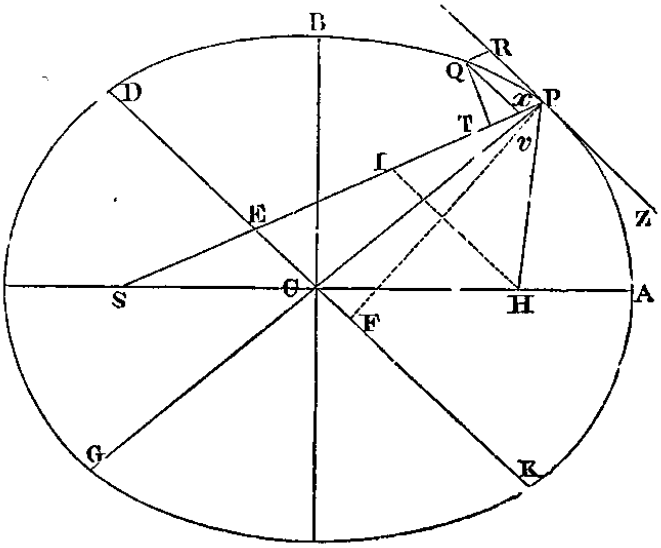



圖 6-5：在給定的時間，微小 QRPT 上的 QR 即為向心力(由第二定律)。In QRPT the line segment QR is, given the time, as the centripetal force (by Law 2). (引自 Newton, 1687, p, 116)

藉由第二運動定律解決橢圓面積定律與向心力的問題，命題十一在附錄會有詳細證明。

此外牛頓在明題十七提出假如向心力與距離平方成反比會畫出怎樣的曲線：

**命題 17**

假如向心力與物體中心的距離平方成反比，而且力的絕對大小已知，在特定的軌跡的路徑會找到相對的切線速度大小。

**PROPOSITION XVII. PROBLEM IX.**

Supposing the centripetal force to be reciprocally proportional to the squares of the distances of places from the centre, and that the absolute quantity of that force is known ; it is required to determine the line which a body will describe that is let go from a given place with a given velocity in the direction of a given right line. ( Newton, 1687, p, 123)

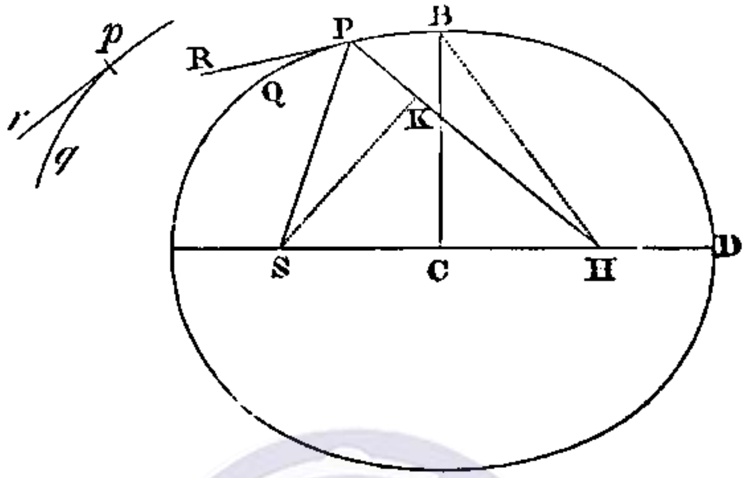



圖 6-6：命題 17 示意圖。(引自 Newton, 1687, p, 123)

先前虎克嘗試要找出平方反比的吸關係會形成哪些曲線，牛頓成功地將此問題解答，並且說出此運動軌跡不必是橢圓，而可以形成各種圓錐曲線：

**命題 17 問題 9**

設向心力反比於物體處所到中心距離的平方，且該力的大小已知，若速率使得半正焦弦長小於 2SP+2KP，則圖形將是橢圓；若速率較大，使得半正焦弦長等於 2SP+2KP，則圖形將是拋物線；若速率更大，則圖形將是雙曲線。(姚珩、田芷綾 , 2010, p, 6)

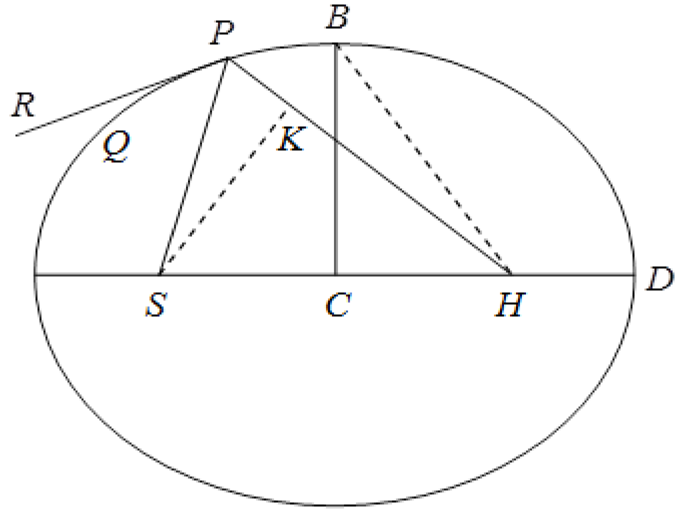



圖 6-7：距離平方反比力可以形成橢圓、拋物線或雙曲線等運動軌跡。(引自姚珩、田芷綾 , 2010, p, 6)

圓弧線上每一點都是非慣性的運動狀態，而非不受干擾的均衡狀態(不是攜帶著不變的動量大小)，牛頓以初速及末速的大小與方向性找出動量的變化，並且以此定律找出天體與地表共同存在的向心力，而非純粹以向心力的想法參猜想出圓周或是橢圓運動。**向心力的概念卻近一步使牛頓得到第二運動定律**。

《原理》前十七個命題中，牛頓只探討速度變化量，為何求出速度變化量為何如此重要，其意義又是如何呢？其實求**加速度**最重要的就是要找出一個為體的**運動軌跡**，並且可以精準預測物體的下一個速度及位置，天體的向心加速度精準預測星體將來的運動趨勢，這種數學化的形式也促使科學快速進步，許多的理論也必須遵守牛頓的運動定律。總而言之，**找出運動加速度是為了獲得物體的運動軌跡以及預測未來位置**。

不同於十七世紀的機械觀，牛頓拒絕了衝力的觀點而強調慣性力的概念，即強調力與速度變化的方向性。在先前笛卡兒提出物體不受干擾會永遠地直線運動下去，絕大部分的科學家都只探討直線上的運動狀況，很少深入了解曲線運動的問題，可惜笛卡兒並沒有將慣性運動推廣至此。只要能了解平面上的曲線運動，就能了解宇宙的奧秘，牛頓確實掌握了這點。

## 第三節　力是否為必須？

在十七世紀初，笛卡兒和伽利略都沒有把力當作落體運動的原因，而當時的機械論強調——如果有人回答是一種力造成，且這種力是一種引力，那麼神祕的幽靈就會再度抬起它醜陋的頭。

但牛頓為何要使用力，力是定義還是定律，且在當時牛頓《原理》一出版就引起許多物理學家的反彈，而五十年後才慢慢受大眾接受，開始探討力是什麼——Euler 認為力是速度的微分(deviation)；Lagrange 與 Hertz 將力視為造成運動的原因，甚至是說某種影響；Lazare Carnot 巧妙地避開力與加速度的因果關係。Kirchhoff 表示力只是理論性的概念，而 Mach 卻認為力是運動的結果(Coelho, 2009, p, 92-105)。

此外，學者也提出了看法：

> 力為造成運動與靜止的原因，外力是使物體增加、減少物體或改變的運動量；慣性力則是物體存在物體內部並使之靜止或維持運動。( Westfall, 1972, p, 187)

> 牛頓毫無疑問地將力視為造成運動改變的原因。( Herivel, 1960, p, 549)

力到底是改變運動的原因，還是運動改變後的結果，或只是數學式子而已，許多的物理學家選擇前者，從牛頓的定義三以及定律一可以看出力是因運動改變為果。

牛頓聲稱：

任何物體都存在著力，並永遠呈等速直線運運動，除非受到外部的干擾。(Westfall, 1972, p, 187)

但在牛頓的《原理》中除了定義與定律有交代力以外，命題卻沒有談到力，只有計算圓與橢圓的加速度，也就是速度變化的探討。似乎只要了解加速度就能解決一切運動問題，而物理為何要有力？難道力(Force)只是個抽象名詞？

在 $\vec{F} = m\vec{a}$中，$\vec{F}$並不只是加速度乘上質量，並非如質量等於密度成以體積的簡單定義關係。另外，力是造成加有速度的原因，或者是加速度來決定力，此兩個解釋都可以接受；但這並不是牛頓的所強調的，牛頓強調的是加速度。

我們不難發現牛頓在十七個命題都在算物體加速度，而牛頓真正的意義及貢獻就是算出加速度——它不是離心趨勢而也不是向心趨勢，不是初速度減末速度，也不是指向慣性的趨勢。每個科學家只思考下一個切線運動指回去原初的切線運動的問題，而牛頓清楚地跳脫當時物理思想的大迷霧裡。

而只有牛頓說出是末速度減初速，從直線切線指向下一個切線的速度。在直線運動的加速度求出並不難，可是圓周運動的加速度則困難許多，牛頓在此做出偉大的貢獻。

其實牛頓不需用到「力」這個名詞，並且將向心力改為向心加速度或是朝向中心的運動量改變。但在描述運動情形中，月亮的加速度朝向地球，地球的加速度朝向月亮說明過於冗長，為了以後方便起見，提出力的概念，將之稱為月亮被地球吸引，地球被月亮吸引，所以**力可以簡化繁瑣的論述**。

再來，機械論使用「力」的觀點，此外，惠更斯也使用了離心力，牛頓使用向心力**承襲笛卡兒與惠更斯**的想法，並且遵照當時最重要偉人的智慧結晶，使用力的概念，牛頓站在巨人的肩膀上，並向他們致敬和尊重。

最後，在當時牛頓要解決兩個重要的問題——地表上的落體運動以及天體的圓周運動，牛頓試著將兩者結合一致。

首先，**地表上運動**的問題，假如蘋果受到地球的每一個小部分的吸引，並且這吸引指向地球每一個部分，其最後所受到的總吸引會指向何方？

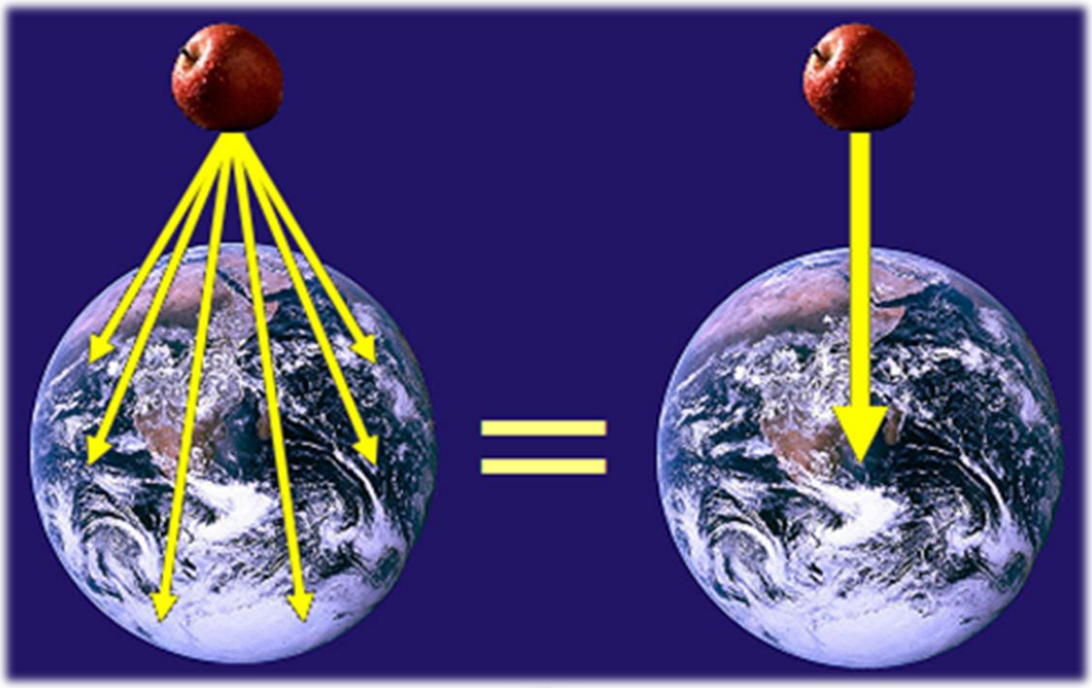


圖 6-8：蘋果所受地球每一個部分，不同大小與方向的吸引，其總吸引會朝向地心。

另一個是**天體運動**的問題，在《原理》的十一章命題 57，定理 20 說明雙星互繞的現象，探討巨大星體彼此影響的情況，其個自的加速度朝向何方：

**命題 57 定理 20**

兩個相互吸引的物體，圍繞他們的公共重心，也相互圍繞對方，描述出相似圖形。

**PROPOSITION LVII. THEOREM 20.**

Two bodies attracting each other mutually describe similar figures about their common centre of gravity, and about each other mutually. (Newton, 1687, p,194)

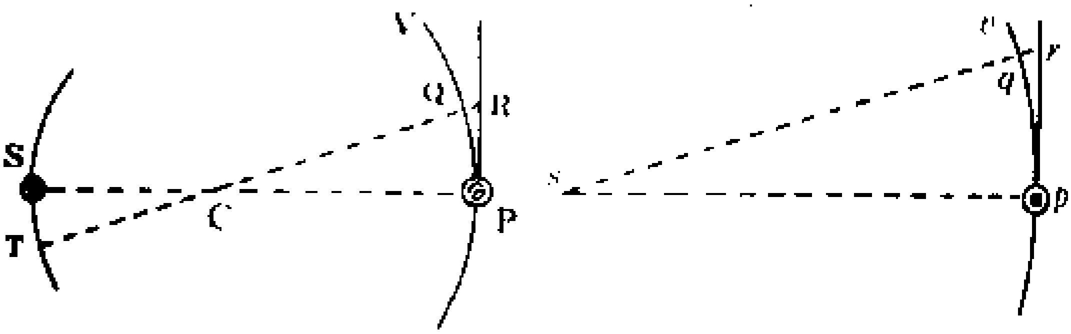



圖 6-9：兩有質量巨大物體會繞著共同中心作圓周運動。(引自 Newton, 1687, p, 195)

並且在的十二章討論球體的吸引力，這也是「力」建立的關鍵：

**命題 76 定理 36**

如果各球…上每一點所生的吸引力( attractive force) 與至被吸引球上任一點的距離平方成反比；我說，其中一球對另一球的全部吸引力將與此二球心距離的平方成反比。

**PROPOSITION LXXVI. THEOREM 36.**

If spheres be however dissimilar ( as to density of matter and attractive force) in the same ratio onward from the centrc to the circumference ; but every where similar, at every given distance from the centre, on all sides round about ; and the attractive force of every point decreases in the duplicate ratio of the distance of the body attracted ; I say, that the whole force with which one of these spheres attracts the other will be reciprocally proportional to the square of the distance of the centres. (Newton, 1687, p,222 )

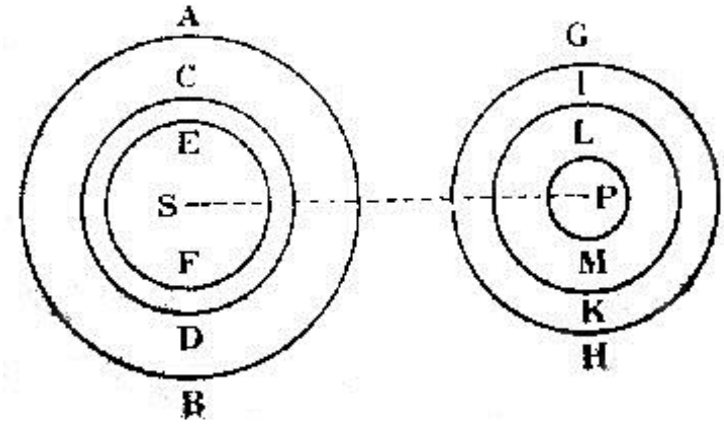


圖 6-10：《原理》命題 76 示意圖。(引自 Newton, 1687, p, 222)

在《原理》前十七個命題中，牛頓解釋探討**軌跡與加速度**的關係，要求出物體加速度時，需要知道物體初始的速度與後來速度之差才能求得，或是時間過程中的路徑。計算**加速度**時物體在**動態**的情況下，**空間與時間**兩條件都必須要有，否則就無法利用加速度求解。

但在蘋果相吸與兩巨大星體的運動問題，所探討的是**靜止**時刻下的位置，不能以加速度解決問題，因此牛頓提出第二運動定律將物體運動完整地解決——力與加速度的結合，從每個時刻的受力大小得知對應的加速度，只要知道力就可知道加速度，並從加速度找到物體的運動軌跡。另外要解決巨大星體每部分所受的影響，牛頓發展一套**積分**，但是每個部份的加速度運動並不能以數學的方式疊加，而**力**才可以將之做合成。

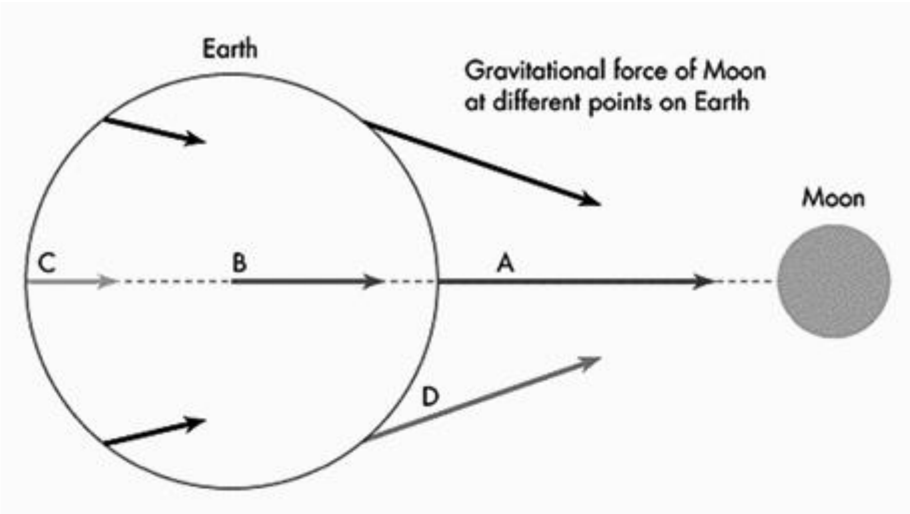



圖 6-11：總加速度不能以每個部分的加速度做疊加，只有力才可以做加減，得到合成力。

**速度變化並不能解釋積分，此外也必須在軌跡下才能使用加速度**。因此要利用力的概念，即每個質點受力的加總。 計算物體的向心力須如靜力平衡般，**探討兩物體靜止瞬間**的距離大小，而力不需要考慮時間的因素，只要靜止兩物體在固定的時刻的距離，就可以知道彼此相吸大小。

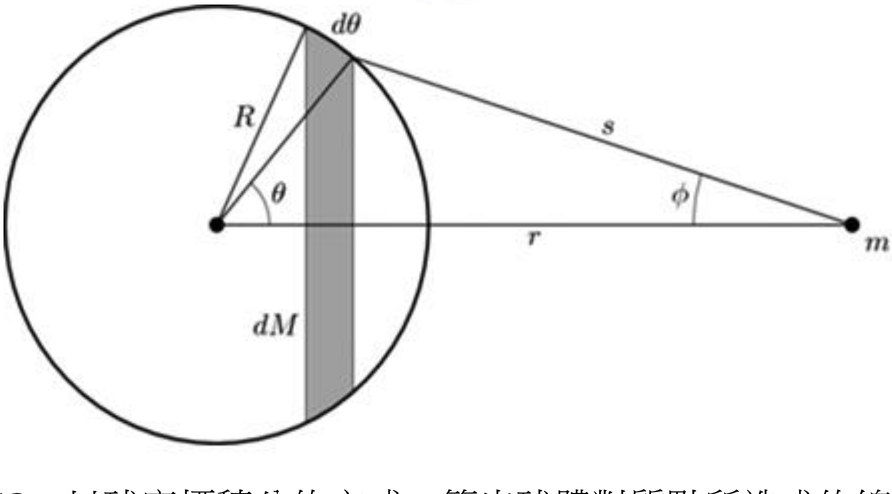



圖 6-12：以球座標積分的方式，算出球體對質點所造成的總吸引力。

首先要認為星體每一個部分相互吸引著對方，以每點吸引作積分——在甲星上找出球體上的一點，並且此點受乙星吸引，乙星則以剝洋蔥的方式積分總吸引力，每一層受力的結果都集中於圓心，最後可以只考慮乙星的質心吸引；反之，也可以得出甲星的質心吸引。最後可只考慮兩點的質心距離來算出萬有引力的大小。

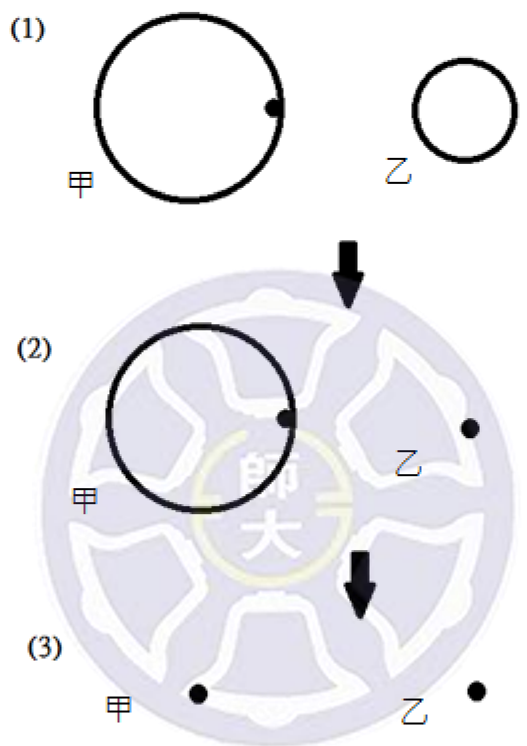



圖 6-13：將甲與乙分別以積分的方式求得彼此的吸引力，最後可以以質心方式思考萬有引力。

使用**力**的概念做出**積分**，並且找出物體的**質心**，將星體的運動以質點的方式去解決運動問題，並與之距離平方反比力和加速度做結合，質點與運動定律的結合，是機械論與數學觀的整合與突破。

牛頓認為物體每一個部分都會受到吸引或者吸引著他人，地球吸引著月球，太陽吸引著地球及行星為佐證，直接說出宇宙物體接

存在著萬有引力。在《原理》第三冊命題 69 和命題 70 以剝洋蔥的方式得出星體的引力指向幾何中心，也就是圓心。以其對稱性證明星體的引力都指向球心，這足以解釋任何物質都有吸引的性質。此外牛頓以數學證明出蘋果落地與月球落入地球是受同一種引力影響。

所以在〈世界體系〉裡，提出了萬有引力定律：

**命題 7 定理 7**

對於一切物體存在著一種引力，它正比於各物體所含之物質的量。

**Proposition VII. Theorem VII.**

That there is a power of gravity tending to all bodies, proportional to the several quantities of matter which they contain. (Newton, 1687, p, 397 )

按照命題 7，萬有引力 $F \propto 1/r^2$，假如甲星、乙星的質量別是 $m_{甲}$、$m_{乙}$，且引力大小與物體本身質量有關：

$$F_{甲乙} \propto m_{甲}/r^2;$$

$$F_{乙甲} \propto m_{乙}/r^2$$

運用牛頓第三運動定律，甲星、乙星彼此所受的吸引會是一樣，透過上式的關係，得到的結果如下：

$$F_{甲乙}=F_{乙甲}=F \propto m_{甲}m_{乙}/r^2 \cdots\cdots(6.1)$$

我們在算圓周運動的加速度，我們可以表示成三個等式如下：

$$ma = m\,{}^{v^2}\!/_{R} \qquad \cdots\cdots(6.2)$$

$$= {}^{K}\!/_{R^2} \qquad \cdots\cdots(6.3)$$

$$= G\,{}^{Mm}\!/_{R^2} \cdots\cdots(6.4)$$

(6.2)式和(6.3)式可經由前面命題一、二、四得出此結果，利用一般向心加速度的概念；但在(6.4)式就必須用到力的概念，才能將之與加速度連接，也就是：

$$ma = F = G\,{}^{Mm}\!/_{R^2}$$

如此才能將兩個式子畫上等號，這也是為何第二運動定律之所以成為定律而非定義。

力可以簡化論述並且引導思考的最好的運動表示方式；此外，透過力的方式，物體瞬間位置下積分每個粒子受到的吸引，並以數學找出物體的質心吸引。透過第二運動定律得到物體加速度與運動軌跡，以此推廣至宇宙間的遵循的自然現象，證實了萬有引力。虎克並不知道距離平方反比力的意義，這也是牛頓勝之的地方。

## 第四節　力是否真正存在？

從直線運動到封閉曲線運動，牛頓將此整合，並且將力視為一個完美的數學形式，改變後人的物理觀。它是一個不能用數學推倒也不能用實驗歸納，完全是一個牛頓的心智創建，而六個物理學家都沒有此想法，也沒有牛頓如此的創造力。

隨然牛頓將超巨的吸引現象稱之為力，遭受機械論的質疑，但其實力就存在於我們的生活之中，就是潮汐現象，這可以從經驗觀察得到 ，當月球、太陽、地球成一直線(如農曆初一、十五)，此時海水受到引力是最大的，因此會有大潮的現象發生；如果太陽、地球、月亮成垂直(農曆初七、初八及廿二、廿三)，則會產生小潮。而此現象就只能用力解釋且我們可感受的到的，透過經驗力是真正存在。

# 第七章　　牛頓力學對古典物理的貢獻及在教學上的啟示

當時牛頓完成《自然哲學與數學原理》時，並沒有受到大眾的接受，甚至反駁牛頓的理論，像是萊布尼茲依舊使用活力或是接觸力等機械論觀點解釋物體運動現象，但在五十年後慢慢被物理學家接受，並從運動定律發展出各種數學形式。

十七世紀對力的等價用語非常多種，如 Action 作用 、Effort 效果、Endeavor 趨勢、Influence 影響、Intensity 強度、Power 強勢、Tendency 傾向，並在機械論的主宰下，對力的描述過於謹慎保守；而牛頓成功地整合這些名詞，並將天體與地表力學統合，今天已無人再懷疑力的存在。

牛頓將機械論和數學觀長期以來的衝突獲得了解答，質點與運動的量化，由面積定律得出向心力，將行星的橢圓軌道與距離平方反比力結合，而之後的物理學家不再將力視為接觸的看法，接受了超距力的概念，視之為完美的數學結構，並且按照牛頓的運動定律找尋與外力概念的擴充，如達朗伯特的約束力、接觸力；庫侖的摩擦力；歐拉的剛體、彈性體、流體。

而動能、位能、力學能、能量守恆律，甚至是力線、場、重力場方程式、交互作用都是從牛頓定律發展而來，今天幾乎所有的物理學家與工作者，都在使用與模仿牛頓的思考方式與學說理論，沒有其他選擇拋棄此定律，就連近代物理和相對論，也必須遵守第二

運動定律。

> 自牛頓起，沒有基本的新原理被寫下。自其後，所有在力學理所完成的形式皆是奠定在牛頓定律上。馬赫 (Mach, 1919)

牛頓是史上第一位給予一種全新意義的科學家，使他得以開啟嶄新的思考世界，從牛頓之後物理學快速地發展，後人必須學習牛頓的思考方式，並且奠定在永恆不變的公理上。

> 近 1500 年裡，人類心中所面臨必須克服的一切智力障礙中，依我所見，最令人驚訝與最非凡的影響領域，就是有關運動的問題。——科學史家 Butterfield (1957)

除了物體運動的突破，在牛頓之後所有的物理學家必須依照牛頓的思考方式，將物理**數學化**外，和數學家最大的差別，牛頓指引物理學家「**概念**」的建立，將現象賦予了意義。至今所有科學家仍就遵照牛頓的思考方式。此外，牛頓也將敵對的數學和物理整合，即質點和運動與數學的結合。

在中學的物理教學現場，可以讓學生從現象著手，再進一步引導出概念，從最基本的物理定義在反推到許多的宇宙現象，並且以數學表示自然的關係。給學生多點體會，了解物理的根本，比解題來得重要且快樂許多。

# 第八章　　結論

力的關鍵係要從地表碰撞運動移至天體運動的探討，再來就是第二運動定律的提出。

笛卡兒的機械論論，認為所有的力需要接觸才有意義，但唯一可以接受的力是物體運動本身的慣性力，另外笛卡兒將所有的物理現象以質點和運動來表示，這可是科學上的突破。

惠更斯承襲了笛卡兒的渦旋理論，首先以數學表達離心力，也是第一位將機械論與數學觀的結合者。在十七個命題中準確指出離心力與速度、半徑、角速度、週期等關係。並且解釋以太因地球自轉向外離心，迫使地表物體產向下性質，因而產生重性。其具有邏輯性的解釋影響著十七世紀的物理學家，離心力概念成為思考主流，甚至影響年輕時的牛頓。

相對於渦旋理論，歐洲大陸發展出一套磁性理論解釋星體運動，羅貝瓦爾支持吸引想法卻不敢打破當時機械論的權威，因而此學說並未受到重視。直至虎克突破性地將圓周運動視為向心趨勢的結果，並且於 1679 及 1680 年書信，點醒牛頓必須以向心的形式思考天體運動。儘管虎克試圖以光的發散解釋向心趨勢成距離平方的反比，但由於虎克缺乏數學功底，無法支持其直覺與想像力，成為最早發現象卻不能提供論證的悲劇人物。

在早期機械論以衝力的概念探討力，將圓周運動視為不受力的

狀態，宇宙間的以太渦旋與離心力的平衡，使星體能穩定於軌道上。必須要有接觸與碰撞才會有力的產生，年輕時候的牛頓以物體碰撞邊緣得出離心力，並解釋地表蘋果的重性與月球的離心力的關係；但重性與離心力的概念是否相同，且重性是否為力牛頓卻是含糊不清。

各物理學家對於運動量的變化，伽利略探討落體之直線加速度運動，克卜勒以面積定律得出行星速率，笛卡兒則是直線碰撞前後動量變化；之後探討星體模型，惠更斯解釋為自軌道回到切線的運動，而虎克認為朝向中心的運動。

此外，對於力的看法，伽利略將之視為向下墜落內在本質，克卜勒則是太陽發出的磁或光，笛卡兒認為只有在物體碰撞時產生力，惠更斯將離心力視為圓周運動的原因，虎克則說是朝向中心的強勢。

之後牛頓受到虎克的啟發，先有向心的概念，再進一步思考圓周運動的問題，從原本以旋轉座標物作為觀察，改為以圓心座標觀察圓周運動中的物體；把圓周到直線上的離心運動的想法，轉變為從原本的直線運動到圓上的向心運動。

向心力比離心力更能正確簡單地將地表與天體的物理現象結合，也說明物理的概念難於數學。有了向心力的想法，第二個關鍵是第二運動定律的提出，擺脫衝力，以慣性力為思考主軸，物體不受外力則永遠靜止或做等速直線運動，此外考慮了速度的方向性，提出了第二運動定律，末速度與初速度的向量差與力同方向。曲線運動即使速率不變，但因方向不同而有力的作用存在，這也糾正了長期

將圓周運動是為平衡的運動的觀念，並以運動定律證明出律克卜勒的面積律與向心力等價。

另外，加速度的重要性在於預測物體運動的軌跡，在《原理》前十七個命題理都在探討運動變化與路徑的關係。

力定律的提出為牛頓的心智創建，且不能推導和證明，其沿襲了笛卡兒的「力」與惠更斯的「離心力」想法，遵循當前的巨人。在時間與軌跡的線索可以利用加速度解決問題，但探討物體間靜止時刻的運動狀況就必須引入「力」，透過蘋果落地以及星體間的相吸，牛頓發展一套積分算法，將運動中的物體以照片的方式探討引力，證實了萬有引力，最後可以將兩球體視為的質心化簡繁瑣的積分問題。「力」概念簡化加速度的論述，幫助後人對運動的引導，最重的是唯有「力」才能做積分並且透過運動定律預測瞬間時刻之後的運動情形。

從行星向心運動現象，提出運動定律及力的概念，再來量化得出萬有引力，最後形成原理推展廣至所有自然現象。牛頓將現象與量化結合，使力成為公理，之後所有的物理學家都必須依循牛頓的想法解釋所有的運動現象，對長期停滯於物理名詞的解釋有了重大的突破。

物理先於數學，先有向心力才有向量的減法，再來為了解釋引力指向物體的幾何中心而後有積分的誕生，而物理始終無法擺脫數學，牛頓打破傳統機界論認為數學和物理必須要分開的觀點，獎質點運動與數學的結合。牛頓與數學家不同的是，物理學家除了要會

數學外，還要提出概念，牛頓之後的物理發展無不依照此思考方式解決宇宙現象。

力的核心在於探討曲線運動的問題，而最基本的曲線運動就是圓周運動，而第二運動定律的加速度為牛頓最大的貢獻，按照力與動量改變有正比關係來解釋所有的運動現象，將機械論所認為的自然運動及受迫運動歸於同個原因。的確，牛頓是第一個發現力者，之後的近代物理學也因此誕生，所有的物理學家都必須遵守運動定律。

# 參考資料


1. 田芷綾、姚珩 (2010)，「引力理論建立的關鍵 — 向心力概念的形成」，科學教育月刊，330，23-34 頁。
2. 卡約里( Cajori, F. 2002)：物理通史。桂林：廣西師範學出版社。
3. 伽利略( Galileo [1632], 2006)，「關於托勒密和哥白尼兩大世界體系的對話」，北京：北京大學出版社。
4. 柯瓦雷( Koyré A. [1964], 2003)，牛頓研究。北京：北京大學。
5. 項武義、張海朝、姚珩(2010)，「千古之謎」，台灣：台灣商務印書股份有限公司。
6. 張海潮(2009)，「一個困擾牛頓的積分問題」，數學傳播 33 卷 1 期，49-56 頁。
7. 姚珩、田芷綾 (2010)，「萬有引力平方反比律來自於橢圓律還是週期律」，科學教育月刊，332，2-16 頁。
8. 姚珩 (2011)，「古典力學的奠定 — 數學觀與機械論的統合」，科學教育月刊 ，340，11-21 頁。
9. 姚珩、李秉書 (2015)，「牛頓運動定律 F=ma 何時正式出現 」，科學教育月刊 ，378，22-26 頁。
10. 吳以義(2009)，從哥白尼到牛頓：日新學說的確立。上海：上海人民出版社。
11. 韋斯特福爾 ( Westfall, S. 2000)，近代科學 的建構─機械論與力學。上海：復旦大學出版社。
12. Andrew Janiak (2008). *Newton as Philosopher*. New York: Cambridge University Press.
13. Barbour J. B.(2001). *The Discovery of Dynamics: A Study From a*

*Machian Point of View of the Discovery and the Structure of Dynamical Theories*. Oxford: Oxford University.

14. Boudri J. C.(2002). *What was Mechanical About Mechanics*. Berlin: Springer.
15. Brackenridge J. B.(1996). *The Key to Newton's Dynamics: The Kepler Problem and the Principi*a. Berkeley: The Regents of California Press.
16. Buchdahl G. (1951). *Science and Logic: Some Thoughts on Newton's Second Law of Motion in Classical Mechanics*. The British Society for the Philosophy of Science, 2 (7) , 217-235.
17. Coelho R. L. (2009). *On the Concept of Force: How Understanding its History can Improve Physics Teaching*. Springer Science+Business Media B. V.
18. Cohen, I. (1980). *The Newtonian Revolution*. New York: Cambridge Univ. Press.
19. Cohen I. B. & Smith G. E. (2002). *The Cambridge Companion to Newton*. London: Cambridge. New Jersey: Princeton University
20. Cohen I. B. (1967). *Newton's Use of Force, or, Cajori Versus Newton: A Note on Translations of the Principia*. ISIS, 58 (2), 226-230.
21. Descartes, R. 1644. *Principle of Philosophy.*
22. François De Gandt (1995). *Force and Geometry in Newton's Principia*. Princeton: Princeton University Press.
23. Harman P. M. (1982). *Metaphysics and Natural Philosophy*. Bailrigg: Lancaster University.
24. Herivel J. W. (1960). *Newton's Discovery of the Law of Centrifugal force*. ISIS, 51 (4), 546-553.
25. Huygens C.( [2015],1659). *De vi centrifuga*. In Oeuvres Complètes, 16, 255-301.

26. Knudsun O. (1963- 4). *A Note on Newton's Concept of Force*.

27. Contarus, 9, 226-271. B. H. (2010). *Calculus*. Cengage Learning.

28. Larson R. & Edward Newton I. ( [2005], 1687). *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. 台北：大塊文化。

29. Newton I. (1687). *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*.

30. Pourciau B. (2011). *Is Newton's second law really Newton's?* America Association of Physics Teachers, DOI: 10,1119/1.307443.

31. Westfall R. S. (1971). *Force in Newton's Physics: the science of dynamics in the seventeenth century*. London: Macdonald.

32. Westfall R. S. (1972). *Circular Motion in Seventeenth Century Mechanics*. ISIS, 63 (2), 184-189.

33. Whidside D. T. (1970). *Before the Principia: the maturing of Newton's thoughts on dynamical Astronomy, 1664-1684*. Journal for the History of Astronomy, 1, 5-19.

34. Nobumichi ARIGA (2013). *The emergence of the dynamique in the Paris academy of sciences: From a science of force to a science of motion*.『百科全書』・啓蒙研究論集 第 2 号。 Tokyo: インフォテック。

35. Olivier Massin (2008). *Forces and Causation.* Swiss Philosophical Preprint Series, #3.

36. François De Gandt([1947], 1995). *Force and Geometry in Newton's "Principia"* . New Jersey: Princeton University.

# 附 錄

## 一、1679 至 1680 年間虎克與牛頓之間書信

一般人認為牛頓在二十多歲發現了萬有引力，甚至牛頓也宣稱這項發現早在 1666 年已做出分析，只是計算值與觀測值並不一致，為了求精準而未將此發表：

> 牛頓宣稱他在 1666 年就分析過行星運動，只是在 20 年後才寫在《原理》上…。並且在 1660 年代中期，他就認為力是相互作用的：月球拉地球的力與從地球延伸到月球的力一樣大，行星也可能會拉著太陽，這兩種力是相同種類的。
> （ Cohen, 1980, p, 232）

雖然力距離平方反比的結果與實際吻合，但在我們已知道當時牛頓所提出的天體概念並不正確。此外還有與虎克的書信，足以證明虎克為平方反比律吵得不可開交，而牛頓為了詆毀虎克杜撰自己早已發現向心力。

在 **1679 年至 1680** 年間，**羅伯特・虎克與伊薩克・牛頓之間進行一系列的書信，這些書信對牛頓的思想發展有著重要的決定性**，它們被鮑爾( W. W. R, Ball) 於三一學院圖書館中發現，並於他的《論牛頓的〈原理〉》( *Essay on Newton's Principia*) 中發表。不幸的是，三一學院收藏得不完整，七封中只保留五封，虎克 1679 年 12 月 9 日致牛頓的信，及 1679 年 12 月 13 日牛頓的回信則不知去向。

後一封信出現於 1904 年 6 月 29 日索斯比的拍賣上，後被大英博物館收藏，並且在 1929 年發表；前一封在 1918 年 4 月的索斯比的拍賣上，被斯德哥爾摩的沃勒博士擁有，最終由紐黑文耶魯大學圖書館所獲得。

牛頓與虎克曾發生過三次衝突，第一次發生於 1672 年，虎克在其《光和顏色的新理論》( *New Theory about Light and Colors*) 倉促地做出尖銳的批評，並且說在他的《顯微術》( *Micrographia*)已提出相似的理論，受到這種不禮貌口氣，心思敏感的牛頓為此忿忿不平；在第三次衝突後，緊隨著《原理》的出版，兩人關係達到水火不相容的地步，牛頓在虎克在世時不肯發表《光學》，耐心底等到對手消失並於 1704 年出版此著作。

至於第二次衝突則發生在 1679 年至 1680 年之間，從七封的書信往來中，雖然是兩者討論行星模型的原因，但不免有較勁和猜疑。在 1679 年 11 月 24 日，負責掌管皇家學會內部與國外科學家通訊的虎克，邀請牛頓與學會的關係繼續下去，並進行科學交流。在虎克的第一封書信中，除了問候外，最重要的是向心吸引的概念提出：

…如果您樂於通過書信交流，指出對我的觀點不滿之處，特別是能讓我明白您對：**沿著切線的直線運動，和一種朝向中心的吸引運動**，所合成的行星運動的想法…

您忠實的僕人

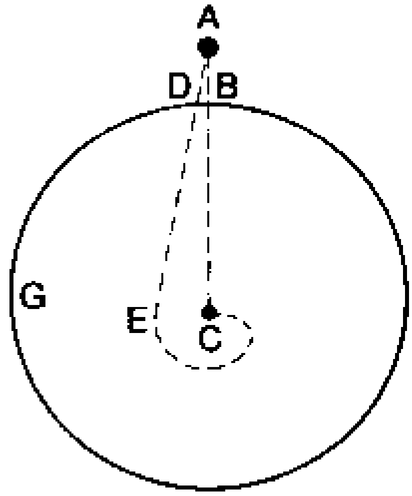
R. H.

格雷欣學院，1679 年 11 月 24 日

( Koyre, 1964/ 2003, p, 272- 273)

已二十年沒有再碰過天文運動的牛頓，專心於煉金術，停留在離心力的想法，從沒聽過圓周運動是一種朝向中心的運動，於是在11 月 28 日回了虎克，並提出一個物體從空中直線掉落會因為地球自轉而不會直接通過地心：

> 在此之前，我已經從哲學轉到其他領域的研究…在收到您的信以前，我完全沒聽說過您關於：用沿曲線切向的直線運動合成的行星運動的假說…
>
> 假定 BDG 為地球，地球每天按照 BGD 的順序，繞著中心 C 自向東旋轉；A 是一個懸在空中並與地球一起運動的重物，因此它將永遠位於地球上同一點 B 的上方。這時想像讓 A 落下，則此時除了保持原有的自西向東的運動不變以外，物體的重力將給它一種朝向地心的運動。由於在其落下以前，它的位置要比下落過程中所要到達的部分距地心更遠，於是，此物體自西向東運動，要比所有那些在下落過程中所達到的部分運動更多；因此，他不會沿著 AC 線下落，而會落向其東邊，最終划出一條螺旋線 ADEC…




圖附一：牛頓在第二封書信所畫的示意圖。(引自 Koyre, 1964/ 2003, p, 279)

聽候您使喚的忠實僕人

伊・牛頓

( Koyre, 1964/ 2003, p, 278- 280)

從牛頓的信可以知道物體有向下掉落的特性，因為自轉現象當物體掉落到地面會以原對應正下方的點像東偏移，假如地球中空，會像圓盤物體以螺旋方式朝向中心，牛頓將重性視為自然性質，並且最終回到中心的趨勢。物體從高空落下到地面會向東偏移受到虎克大力稱讚，並希望能付諸實驗，但虎克認為物體雖受到向心的趨勢，但並不會墜入中心：

…就其下落曲線而言，您似乎認為(雖然沒有得到討論)他將是一條螺旋線，並且在旋轉幾圈之後最終落在地球的中心。根據我圓周運動理論，情況將很不同，它將不類似於一螺旋線，而是一種 elliptoid。至少，如果假設下落物體位於赤道面上，並將地球分為兩半球，並分為兩個半球，將兩邊分開一

些距離，以使物體能落入地球內部，再假設朝向以前中心位置的引力不變，而且地球仍然繞軸做著周日運動，則我認為此下落物體運動時所划出的應該類似於一個**橢圓**…我能補充許多其他的考慮，那是與我的由**一直向運動和一吸向中心的運動和成圓周運動**的理論相協調的…

您非常謙卑的僕人

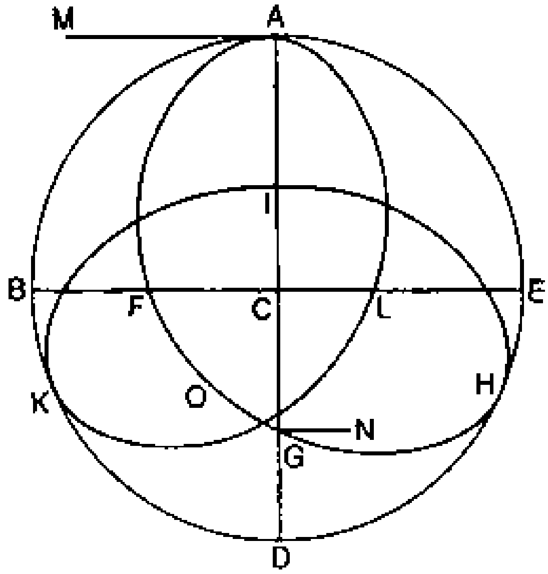
羅•虎克

格雷欣學院，1679 年 12 月 9 日

( Koyre, 1964/ 2003, p, 285- 287)

虎克再次提到向心運動和直線運動的協調會造成橢圓運動，但在地球裡卻是類似橢圓曲線的運動，假如受到其他空氣或介質的阻力則會以螺旋的方式墜入圓心。虎克的信看起來和顏悅色，但受到如此糾正並且將此信公布給皇家學院，令牛頓大為光火，並在 1679 年 12 月 13 日回覆虎克，以乾巴簡短的信糾正虎克的錯誤：

我同意您的意見…如果他的重力是均勻的話，它將不是一條沿螺旋線朝地心下落，而會通過其**離心力與重性的交替平衡**，如圖…




圖附二：牛頓在第四封書信所畫的示意圖。(引自 Koyre, 1964/ 2003, p, 288- 289)

您非常忠實的僕人

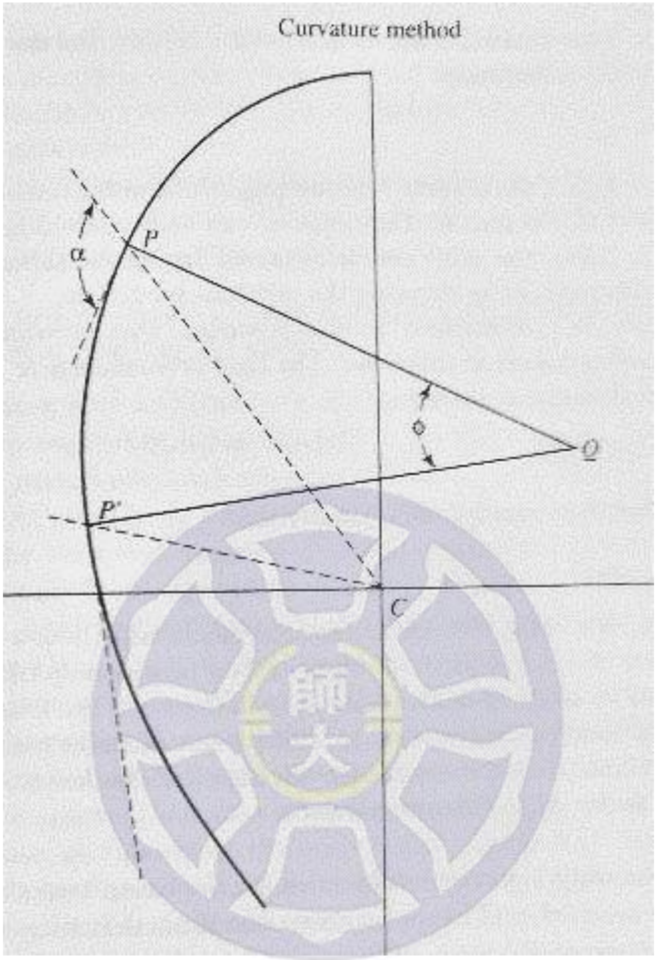
伊・牛頓

( Koyre, 1964/ 2003, p, 288- 289)

顯然牛頓運用了離心力和重性的交替平衡解釋物體的落入地球的狀況，但他處理的物理非常複雜，並且沒有多做解釋，只是畫出像花瓣的圖片，可能當時還沒掌握此數學的方法。另外，牛頓把重性當作衡定的，這也被虎克做出了糾正，並且說牛頓誤解他的意思了。

但 Brackenridge 和 Huenberg 卻認為此圖極具有價值(Cohen & Smith, 2002, p, 95- 106)，並且提到牛頓運用曲率的概念畫出此圖。在先前月球試驗中得出離心力的大小正比於速率平方乘上距離的倒數( $f = {v^2}/{\rho}$)，其離心力的大小並不是以物體至曲線中心為距離，

而是以此圓弧找出對應的曲率半徑為距離，如圖中 *PP'*弧線所找出其圓心，而圓心到弧的中心就是曲率半徑。

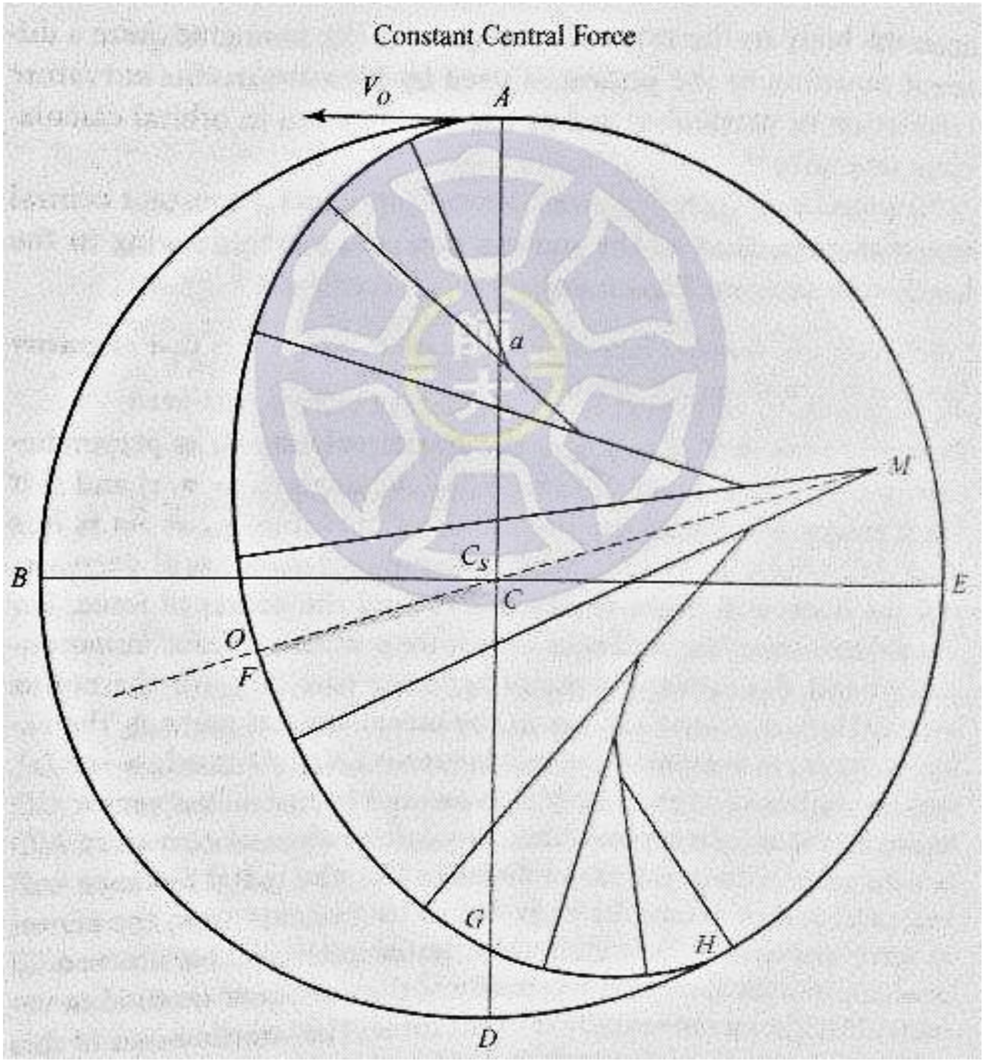



圖附三：我們可以利用曲率半徑得知弧線上所對應的半徑與圓心點皆不一樣。(引自 Cohen & Smith, 2002, p, 101)

對於物體剛進入地表內，其曲率最大(半徑最小)，但由於速率小，離心力不足以克服重性，所以被朝向中心的趨勢所吸引進去。我們可以在微小的弧上中心找出其對應半徑，再由此半徑再向下畫出新的圓弧，並以此整個圓弧中心找出其半徑，再由此半徑再向下畫出圓弧……依此類推下去，所以在 *F* 點所對應出的曲率半徑並不是 *C* 點，而是 *M* 點。重性始終朝向 *C* 點中心，物體在第二象限不

斷加速，在二三象限之間速率雖然大，但由於曲率半徑大，離心力始終無法克服重性將物體甩出，到了第三象限又慢慢減速，之後又周而復始運動，最後畫出花瓣的圖樣。

但如果真要嚴謹的數學探討，此圖型確實有問題，可能是憑感覺畫出曲線，或是只考慮曲率半徑而並不考慮物體在地球內部各位置的速度，且我們不能否認的是，牛頓對力的概念尚未完全清楚。




圖附四：假設地球內部重性固定，離心力會隨著切線速度與曲率半徑的不同而改變，重性與離心力之間的拔河而畫出花瓣圖型。(引自 Cohen & Smith, 2002, p, 104)

牛頓還**尚未真正了解面積定律的意義**。但牛頓或許知道**曲率概念**，這可以說明其圓幾何概念比他人再清楚不過，或者這是牛頓一種特別的直觀而畫出花瓣圖型。

所以虎克在 1680 年 1 月 6 日寫道：

> 您讓一個**物體在到中心的所有距離上都被相等的力吸引**，並用這種方法離計算物體所划出的曲線，就像對一個的**凹拱中滾動球**的計算是正確的，並且兩個拱點將不是由大約三分之一圓周所接合的。但我的假設是，吸引強度總是與到中心的距離平方成反比的。( Koyre, 1964/ 2003, p, 289)

前面的幾封信虎克並沒有告訴牛頓引力和空間的關係為何，直到牛頓地球吸引是均勻的概念，虎克才說是距離平方成反比，對於虎克突如其來地指出錯誤，牛頓並沒向虎克回信，也看得出兩人一直有相互競爭心態。而虎克又在 1680 年 1 月 17 日再次寫信給牛頓，也是最後一封信：

> 此**中心之吸引**(central attraction power)與距離的平方成反比。毫無疑問，以您傑出的方法，您可輕易地找出這會是何種曲線，且提供造成此比例的物理原因。( Koyre, 1964/ 2003, p, 294- 295)

虎克看似占上風，告訴牛頓星體的運動只受吸引的影響，這也讓牛頓重新思考星體模型架構如何，力的概念又是如何。但可以明

顯的發現，**虎克並沒有說出向心力，只說出吸引強度**( central attraction power)，對於機械論對非接觸力的排斥，虎克很巧妙地避開「力」(Force)這名詞。

1685 年以前牛頓一直認為平方反比律只是個近似值，直至 1686 年 5 月 27 日，虎克與牛頓關於平方反比定律做出激烈的爭吵，並且在 1686 年 6 月 20 致哈雷的信提到：

> 為了主持公道，我忍不住再告訴你一件事，他以他的名義發表伯雷利的假說。**博雷利曾斷言，一個被吸向太陽，並且沿切向運動的行星將不會落入太陽中去**，而是會繞著它旋轉，並畫出一個橢圓，但甚至是他都沒有斷言，一個在地球上的重物也將以同樣方式運動。( Koyre, 1964/ 2003, p, 304)

此外，牛頓也不認為進入地表的引力並非是不斷地增加。但**伯雷利在當時所提出的是離心力與物體的重量平衡或消長而形成橢圓運動**，**60**，儘管有受其理論的影響，**虎克卻將行星運動出於的自身引力，取代「自然本性」的恆定性**，將它轉換成距離的函數：

> 虎克於 1666 年 5 月 23 日在皇家學會宣讀中，伯雷利的影響是清楚的，**虎克的優勢是非常明顯，把伯雷利的行星朝向太陽(或衛星朝向行星)的「趨勢」或「自然本性」，替換成中心物體把行星(或衛星)拉向自身的一中吸引**，使虎克得以邁出決定性的一步，即不把吸引強度當成恆定——就像伯雷利的「趨勢」或「自然本性」那樣——而是**當成距離的某個函數**。( Koyre, 1964/ 2003, p, 274)

Herivel 提到離心力是科學史中重大的問題，而我們知道惠更斯數學的量化比物理上的概念更為重要，當時年輕的牛頓指深受其影響。而牛頓「向心力」概念是在虎克 1679 年的提醒而發展而成 ( Herivel, 1960, p, 546)，並且正確將之數學化，而「向心力」的物理概念更是科學史上重大突破。因此回歸孔恩的一段論述：

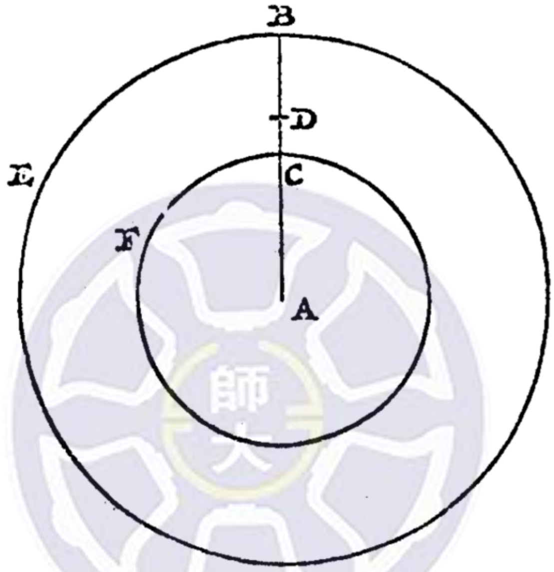
> **在 1660 年代，牛頓還是受到笛卡兒的影響，尚未建立行星沿曲線運動是受到「向心力」而非「離心力」的概念，直到 1679 年跟虎克通信後，才被提醒要考慮朝向中心加速的運動與慣性運動的合成，而 這就是「向心力」提出的關鍵。**天體重力延伸至月球，且是向著中心，這就是為何行星跟月球受到向心力，而持續不斷地偏離他們各自的慣性運動路徑。（ Cohen, 1980, p, 231）

儘管虎克無法找出運動定律，但他也間接影響了牛頓，如果沒有虎克的臨門一腳的功勞，物理的發展可能還要停滯許久，牛頓在物理學界上也將不會如此閃耀。

## 二、惠更斯離心力命題補充

**假設四**

兩相等的物體繞行不同圓周具有相同的離心力，大圓的週期時間會比小圓的週期時間還要長。( Huygens, 1659/ 2015, p, 262)




圖附五：假設四示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 262)

雖然惠更斯並沒有寫出在同樣的離心力狀況下，半徑與週期真正的關係為多少(他應該知道)，只說半徑越大週期越長，但從我們現在看圓周運動向心力的其中一個公式$F = {4\pi^2 R}/{T^2}$，確實與惠更斯的假設是正確的。

**假設六**

在特定的高度物體掉落在特定的時間內，物體從靜止狀態垂直掉落的第一秒內，並且在週期為一秒的圓周運動中，找出圓的直徑與物體從靜止狀況時掉落一秒之長度的關係，其物體離心力等同於其重量。( Huygens, 1659/ 2015, p, 263- 264)


圖附六：假設六示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 264)

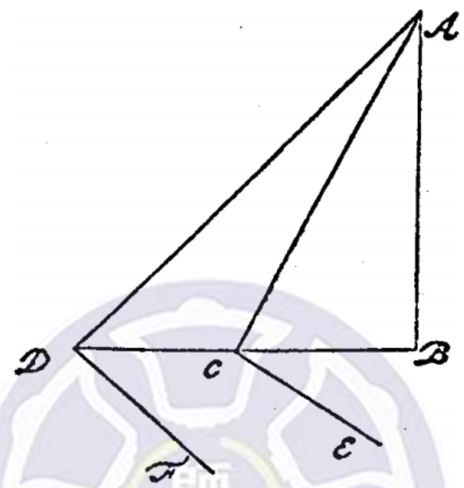
此命題是利用命題四來解決此題問題，惠更斯說線段$\overline{AB}$為物體一秒掉落的長度，線段 $C$ 為圓$\overline{FG}$周長，線段 $D$ 為其圓直徑，而

這三線段以${1}/{\pi}$等比方式遞減，要使週期為一秒的圓周運動離心力等於重力，其直徑為物體一秒掉落長度的${1}/{\pi^2}$。

以現在中學的方式解此命題：令重力加速度為 g，物體降落一秒的距離為${1}/{2}\,g1^2 = {1}/{2}\,g = \mathrm{AB}$，而週期為 1 秒離心力與半徑的關係為$\mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot {4\pi^2 R}/{1^2} = m \cdot 4\pi^2 R = mg$，所以直徑$\mathrm{D} = 2\mathrm{R} = {g}/{2\pi^2} = {AB}/{\pi^2}$，由此方式驗證惠更斯是正確的。

**假設八**

將兩個不同長度的繩弦旋轉著，而它們所繞行的圓平行於水平面，並且是在相同軸和相同的水平面上，如果兩離心力為其底半徑之比例，兩個物體所行走的週期將會是一樣。( Huygens, 1659/ 2015, p, 266)



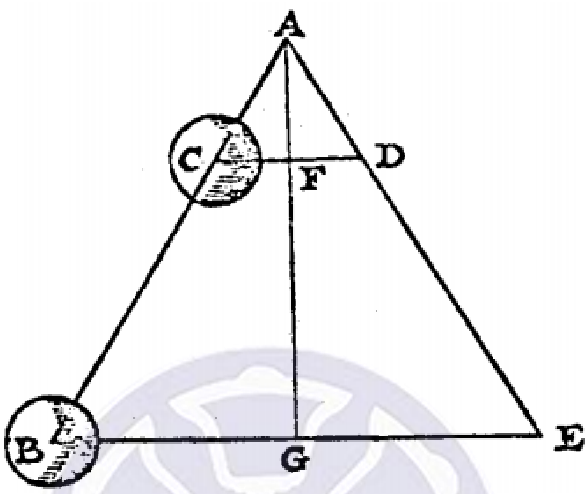

圖附七：假設八示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 267)

此為假設一的反命題，惠更斯說明在相同週期下 $D$ 點與 $c$ 點的離心力比為 $tan(DAB)$比上 $tan(cAB)$，也就是$\overline{BD}$線段與$\overline{Bc}$線段之比，並不是$\overline{AD}$及$\overline{Ac}$長度比，而離心力沿著$\overline{DB}$線段向外的方向。

**假設九**

在相同週期的情況下，並且以角 *CAD* 旋繞著，而離心力正比於繩弦長度，即兩相同物體離心力比為 *AC* 比 *AB*。

( Huygens, 1659/ 2015, p, 267)

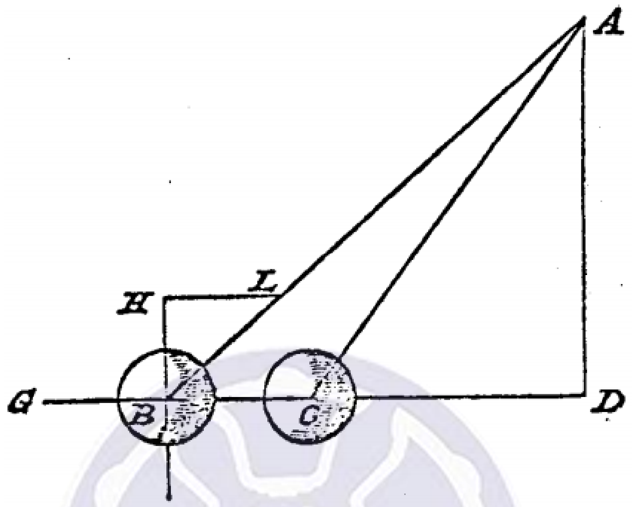



圖附八：假設九示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 267)

從假設八推廣，這次考慮相同角度下，相同週期不同繩長圓的錐擺對離心力所造成的影響，而離心力的大小與底圓半徑長成正比，所以量物體離心力比為$\overline{FC}$：$\overline{GB}$，而$\overline{FC}$=$\overline{AC}$*sin*(*CAF*)，$\overline{GB}$=$\overline{Ba}$*sin*(*CAF*)，所以兩物體離心力比就是$\overline{AC}$：$\overline{AB}$，及繩長之比。

**假設十五**

兩個相同重量但不同繩長的錐擺做旋轉運動，而這兩錐體在相同高度上，兩繩子的張力比為其繩長之比。( Huygens, 1659/ 2015, p, 270)

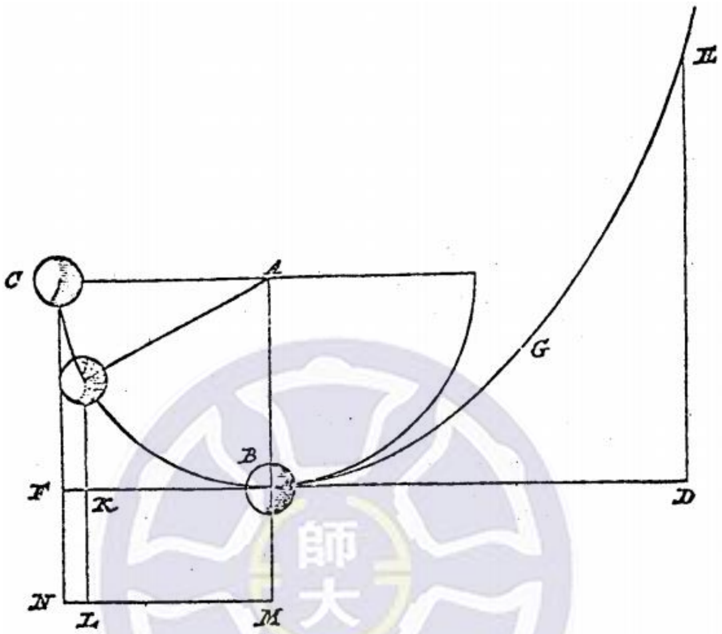



圖附九：假設十五示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 271)

惠更斯認為繩子抵抗離心力和重力，在同個的平面上旋轉，透過三力平衡，由封閉三角形知道兩繩子張力比為其繩長比，即$\overline{AB}$：$\overline{AC}$。在這裡可以將圓周運動視為平衡狀態，如同靜力般穩定不動，當然，以現在的思維圓周運動並不是平衡狀態，它始終受到向心力的影響。

**假設十六**

假如一個單擺做最大的側面來回運動，假如向下四分之一個圓，也就是到達圓周的最低點，而繩線將會承受三倍的張力當物體靜止懸掛物體。( Huygens, 1659/ 2015, p, 271)

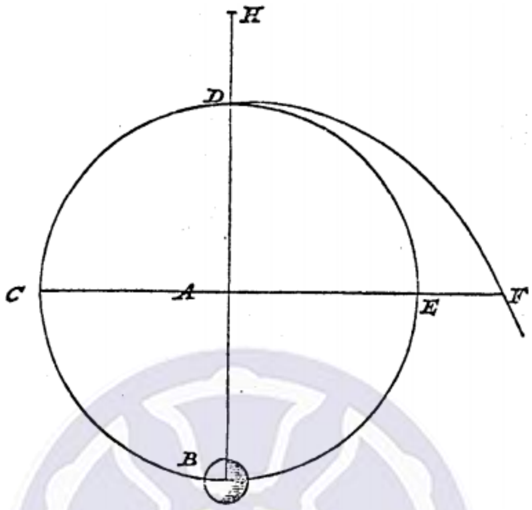



圖附十：假設十六示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 272)

雖然無法得知惠更斯用何種方法得出此結論，但他似乎已知道功能的概念。圓半徑為$\overline{AB} = R$，靜止物體從 $C$ 點繞圓弧至 $B$ 點，目前以動能和位能守恆的方式求得：${}^{1}/_{2}\, mv^2 = mgR \rightarrow v^2 = 2gR$。而此時最低點的離心力為$F = m\, {}^{v^2}/_{R} = m\, {}^{2gR}/_{R} = 2mg$；繩張力為$T = F + W = F + mg = 3mg$，也就是繩子靜掛物體時三倍的張力。

**假設十七**

一個被繩線繫住的球體無法完成一個垂直的圓周運動除非繩線在球體最低點的張力為物重的六倍。( Huygens, 1659/ 2015, p, 272)




圖附十一：假設十七示意圖。(引自 Huygens, 1659/ 2015, p, 273)

這題也是可以用功能定理求出，但和上一題比起來這題較為困難，使球體能到達最高點，離心力要等於重性大小，而繩線的張力要恰巧等於零，也就是$m\, {}^{v_o^2}/_R = mgR$，得出$v_o^2 = gR$。利用功能定理：${}^1/_2\, mv^2 = {}^1/_2\, mv_o^2 + 2mgR = {}^1/_2\, mgRmgR = {}^5/_2\, mgR$，得出$v^2 = 5gR$；所以最低點的離心力為$F = m\, {}^{v^2}/_R = 5mgR$，繩張力為$T = F + W = F + mg = 6mg$，所以要使物體剛好穩定旋轉，其在最低點時的繩張力要為物重的六倍。

## 三、惠更斯離心力命題原文

**PROPOSITION I**

If two equal moving bodies traverse unequal circumferences in equal times, the centrifugal force in the greater circumference will be to that in the smaller as these circumferences, or their diameters, are to each other. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 260)

**PROPOSITION II**

If equal moving bodies revolve in the same or equal circles or wheels at unequal speeds, but both with a uniform motion, the force of recession of the faster body from the center will be to the force of recession of the slower [body] in the duplicate ratio of the speeds. That is, if the strings by which they are restrained are drawn downward through the center of the wheel and support weights by which the centrifugal force of the moving bodies is held in check and exactly counterbalanced [adaequetur], these weights will be to one another as the squares of the velocities.
( Huygens, 1659/ 2015, p, 260)

**PROPOSITION III**

If two equal moving bodies are moved at equal velocities in unequal circles, their centrifugal forces will be in the inverse ratio of the diameters, so that the said force is greater in the smaller circumference. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 261)

**PROPOSITION IV**

If two equal moving bodies carried around in unequal circumferences have equal centrifugal force, the time of revolution in the greater circumference will be to the time of revolution in the smaller in the subduplicate ratio of the diameters. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 262)

**PROPOSITION V**

If a body is moved in the circumference of a circle at the speed that it acquires by falling from a height equal to the fourth part of the diameter, it will have a tendency to recede from the center equal to its weight, i.e. it will pull the string by which it is restrained with equal strength as when it is suspended from it. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 262)

**PROPOSITION VI**

Given the height that a moving body traverses in a certain time, say a second, in falling perpendicularly from rest, to find the circle in the circumference of which a body moving around horizontally and completing its revolution also in a second has a centrifugal force equal to its weight. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 263- 264)

**PROPOSITION VIII**

If two moving bodies suspended from unequal strings are revolved, such that they raverse circumferences parallel to the horizon while the other end of the string is held fast, and tile axes or altitudes of the cones whose surfaces are described by the strings in this motion are equal, tile times in which each body completes its circle will also be equal. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 266)

**PROPOSITION IX**

The times of revolution along horizontal circles CD, BE, given the same angle of gyration CAD, are in the subduplicate ratio of the lengths of the strings, AC to AB. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 267)

**PROPOSITION XV**

If two pendulums of equal weight but of unequal length of strings are revolved in a conical motion, and the altitudes of the cones are equal, the forces by which they stretch their strings will be in the same ratio as that of the lengths of the strings. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 270)

**PROPOSITION XVI**

If a simple pendulum is set in motion with the maximum lateral oscillation, i.e. if it descends through the whole quadrant of the circle, when it reaches the lowest point of the circumference it will pull its string with a force three times as great as if it were simply suspended from it. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 271)

**PROPOSITION XVII**

A globe hung on a string from the center of a circle perpendicular to the horizon cannot be revolved around the circumference of this circle unless the string can support six times the weight hung [on it]. ( Huygens, 1659/ 2015, p, 272)

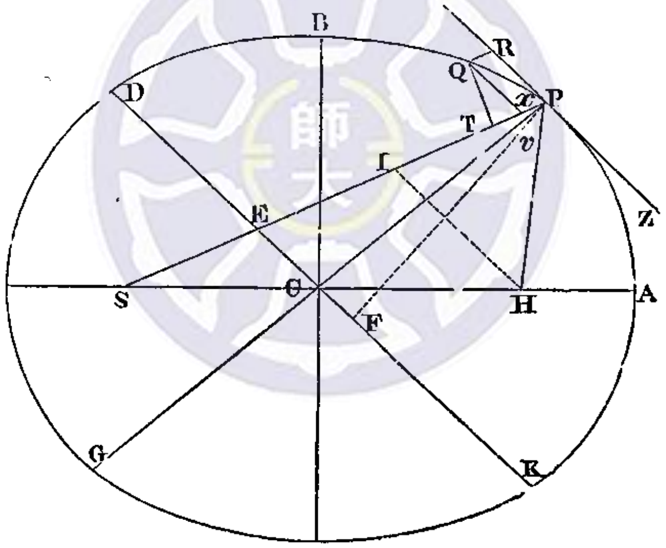
# 四、《自然哲學與數學原理》命題證明

**命題 11　問題 6**

如果一個物體做橢圓運動，它必滿足向心定律於橢圓任一焦點上。(姚珩、田芷綾 , 2010, p, 6)

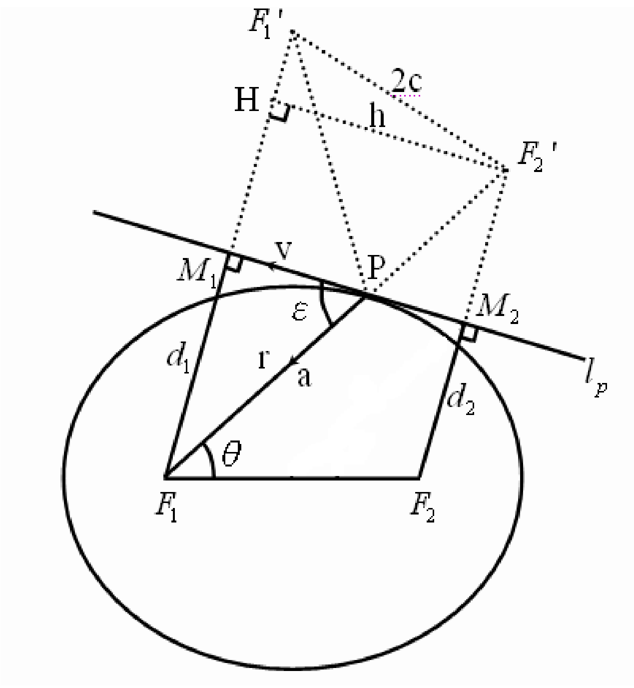
**PROPOSITION XI. PROBLEM 6.**

If a body revolves in an ellipsis ; it is required to find the law of the centripetal force tending to the focus of the ellipsis. (Newton, 1687, p, 116)




圖附十二：命題 11 示意圖。(引自 Newton, 1687, p, 116)

$F_1$與$F_2$橢圓的兩焦點，假如太陽落在$F_1$焦點上，行星 P 在橢圓軌道上的任何一點，$l_p$為過 P 點的橢圓切線，並且為$\overline{F_1F_2}$的對稱軸，得出對稱線段$\overline{F_1'F_2'}$；$d_1$與$d_2$分別是$F_1$與$F_2$至$l_p$線段的距離。




圖附十三：項武義教授《原理》命題 11 證明圖。

$2a$為橢圓長軸距離，也就是 P 點至兩焦點的距離合，利用對稱關係我們可以得到：

$$(2a)^2 == \overline{F_1 F_2'}^2 = (d_1 + d_2)^2 + \overline{F_2' H}^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

$2c$則是橢圓中心點至兩焦點的距離合，也就是：

$$(2c)^2 = \overline{F_1' F_2'}^2 = (d_1 - d_2)^2 + \overline{F_2' H}^2 \quad \cdots\cdots (2)$$

結合(1)、(2)式，得到：

$$d_1 d_2 = b^2 \quad \cdots\cdots (3)$$

$r$為行星(P 點)到太陽($F_1$點)的距離，此時 P 點切線速度為$v$，

由面積律：

$$r^2\dot{\theta} = rv = d_1 v = 2\pi ab / T \quad \cdots\cdots (4)$$

經過整理：

$$v = 2\pi ab / Td_1 = (2\pi ab / T)d_2 / b^2 = (\pi a / bT)\overline{F_2F_2'} \quad \cdots\cdots (5)$$

利用向量關係，我們可以得到$\overrightarrow{F_1F_1'}$：

$$\overrightarrow{F_1F_1'} = \overrightarrow{F_2F_1} + \overrightarrow{F_1F_2'} = \begin{pmatrix} -2c \\ 0 \end{pmatrix} + 2a\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

因為$\overrightarrow{F_1F_1'}$與$\vec{v}$相互垂直，並且利用(5)式，得出$\vec{v}$的向量形式：

$$\vec{v} = \frac{\pi a}{bT}\begin{pmatrix} 0 \\ -2c \end{pmatrix} + \frac{2\pi a^2}{bT}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (7)$$

時間對速度的微分得出加速度的向量：

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{2\pi a^2}{bT}\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = -\frac{2\pi a^2}{bT}\frac{2\pi ab}{T}\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= -4\pi^2\frac{a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (8)$$

在先前證明圓周運動的向心力與距離平方成反比，是先從半徑

分之速度平方($^{v^2}/_{R}$)代換成半徑除以週期平方($^{4\pi^2 R}/_{T^2}$)後，最後由克卜勒週期定律($^{R^3}/_{T^2}$=定值)代入得到結果。

但此題命題可不需要運用克卜勒的第三運動定律，因為在同一的橢圓軌道運行，其半長軸 $a$ 與週期 $T$ 皆是定值，直接得出向心力與距離平方成反比關係，證實命題 11 如果一個物體做橢圓運動，它必滿足向心定律於橢圓任一焦點上：

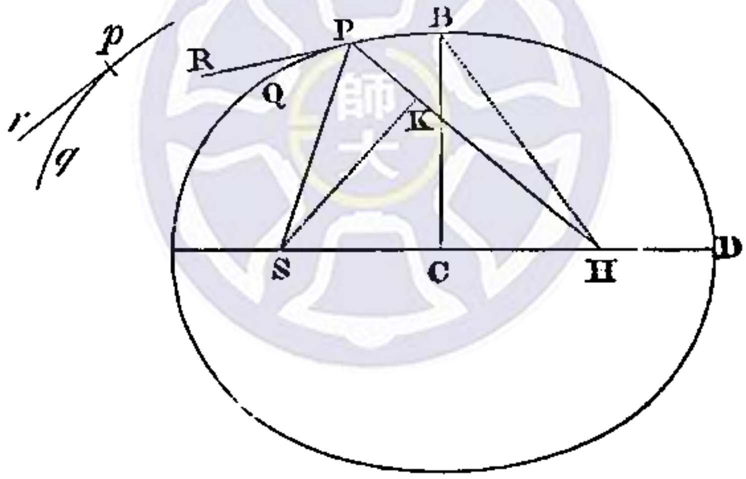
$$F \propto a \propto 1/r^2 \quad \cdots\cdots (9)$$

**命題 17**

假如向心力與物體中心的距離平方成反比，而且力的絕對大小已知，在特定的軌跡的路徑會找到相對的切線速度大小。

**PROPOSITION XVII.**

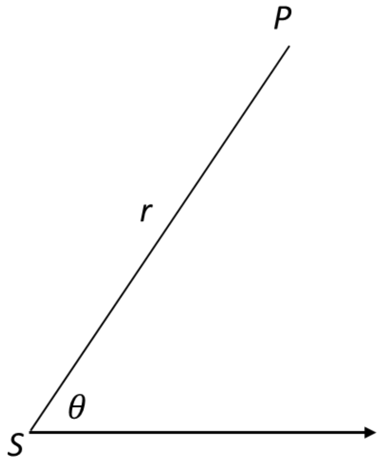
Supposing the centripetal force to be reciprocally proportional to the squares of the distances of places from the centre, and that the absolute quantity of that force is known ; it is required to determine the line which a body will describe that is let go from a given place with a given velocity in the direction of a given right line. ( Newton, 1687, p, 123)




圖附十四：命題 17 示意圖。(引自 Newton, 1687, p, 123)

此題為平方反比力與橢圓或圓錐曲線軌道的命題，在平面運動上，太陽 S 對行星 P 吸引大小與彼此間的距離的平方成反比。設行星 P 的向心加速度$\vec{a}$滿足：

$$\vec{a} = \frac{B}{r^2}(-\cos\theta, -\sin\theta), \quad \mathrm{B} > 0$$




圖附十五：P 位置與原點 S 距離為 $r$。(引自項武義、張海朝、姚珩，2010, p, 180)

透過克卜勒行星第二運動定律，向心力必符合面積定律，而常數 D (或面積速率$\Delta A/\Delta t$)為徑向向量 $r$ 與在 P 點之速度向量$\vec{v}$所圍成的三角形面積。

利用加速度的定義得知$d\vec{v}/dt$：

$$d\vec{v}/dt = \vec{a} = B(-\cos\theta, -\sin\theta)/r^2 \cdots\cdots (10)$$

此外我們可以根據連鎖律：

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = (d\vec{v}/d\theta)\dot{\theta} \ \cdots\cdots (11)$$

因此

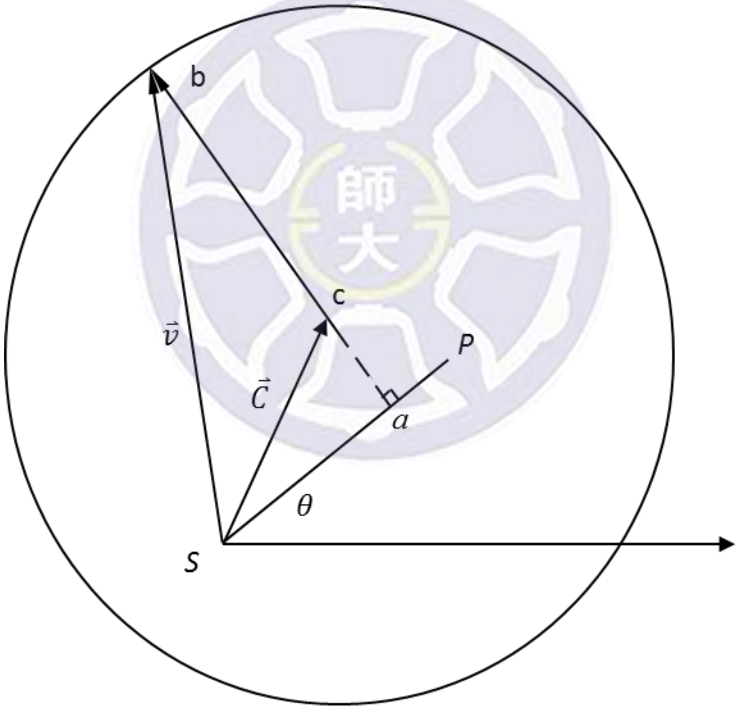
$$(d\vec{v}/d\theta) = \vec{a}/\dot{\theta} \ = B(-\cos\theta, -\sin\theta)/r^2\dot{\theta} =$$

$$B(-\cos\theta\,,-\sin\theta)/2D \cdots\cdots (12)$$

從上式$\theta$對$\vec{v}$的微分向量判斷，$\vec{v}$必須是下列形式：

$$\vec{v} = \vec{C} + B(-\sin\theta\,,\cos\theta\,)/2D$$

$\vec{C}$為常數向量。我們可以將所有的向量圖形關係置入座標，已知 S 為原點，P 點座標$(r\cos\theta\,, r\sin\theta)$，$\vec{v}$的端點座標為$\vec{C} + B(-\sin\theta\,,\cos\theta\,)/2D$；$\vec{C}$的端點為圓心 c，圓半徑為$B/2A$。




圖附十六：P 點位置的與速度圖解。(引自項武義、張海朝、姚珩，2010, p, 181)

向量$B(-\sin\theta\,,\cos\theta\,)/2D$為圓心 $c$ 指至 $b$ 點的向量$\overrightarrow{cb}$，且與$\overline{SP}$垂直。而高$\overline{ab}$之值即為$\vec{v}$與$(-\sin\theta\,,\cos\theta\,)$的內積，也就是：

$$\overline{ab} = \vec{v} \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)$$
$$= \left[\vec{C} + B(-\sin\theta, \cos\theta)/2D\right] \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)$$
$$= B/2D + \vec{C} \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) \cdots\cdots (13)$$

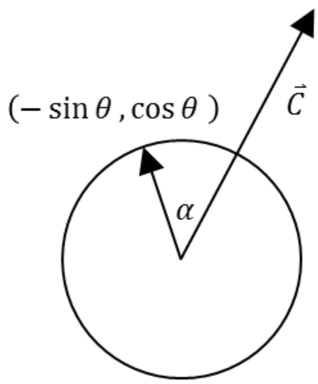
向量$\vec{v}$與$\overline{SP}$所圍成的三角形$\Delta SPb$之面積 $= \overline{SP} \times \overline{ab}$，而徑向向量 $r$ 與在 P 點之速度向量$\vec{v}$所圍成的三角形面積 $\Delta SPb' = D = \Delta SPb$，

$$(r/2)\left[B/2D + \vec{C} \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\right] = \mathrm{D} \cdots\cdots (14)$$

經過整理可得：

$$r = (4D^2/B)/[1 + (2D/B)\vec{C} \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)] \cdots\cdots (15)$$

而$(2D/B)\vec{C} \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)$是$(2D/B)\vec{C}$與單位變動向量$e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$的內積，也就是$e_\theta$在$(2D/B)\vec{C}$的投影量，並可表示成$(2\mathrm{D}/\mathrm{B})\left|\vec{C}\right|\cos\alpha$，其中$0 \le \alpha \le 2\pi$。




圖附十七：單位變動向量$e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$在$\vec{C}$上做內積投影。

與圓錐曲線極座標方程式比較

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \alpha} \cdots\cdots (16)$$

可知式(15)離心率為

$$(2D/B)\left|\vec{C}\right| = e$$

之圓錐曲線，其中常數$d = 2A/\left|\vec{C}\right|$。

離心率$e$就是某一點至焦點距離與其至準線距離的比值，不同的比值會描繪出不同的圓錐曲線，當：

$e = 0$→直線；

$0 < e < 1$→橢圓；

$e = 1$→拋物線；

$e > 1$→雙曲線

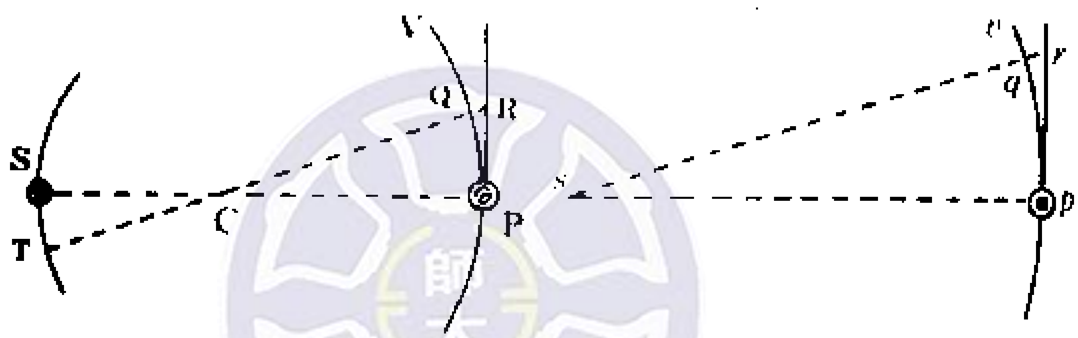
所以星體在距離平方成反比的向心力作用下，並不是只是單純的圓或橢圓，它會是拋物線、雙曲線等其他圓錐曲線的形式，解答了虎克、哈雷、雷恩想要以與距離平方成反比的向心趨勢找出各種星體軌道。

**命題 57 定理 21**

兩個相互吸引的物體，圍繞他們的公共重心，也相互圍繞對方，描述出相似圖形。

**PROPOSITION LVII. THEOREM 20.**

Two bodies attracting each other mutually describe similar figures about their common centre of gravity, and about each other mutually. (Newton, 1687, p, 194)




圖附十八：兩有質量巨大物體互繞情形。(引自 Newton, 1687, p, 195)

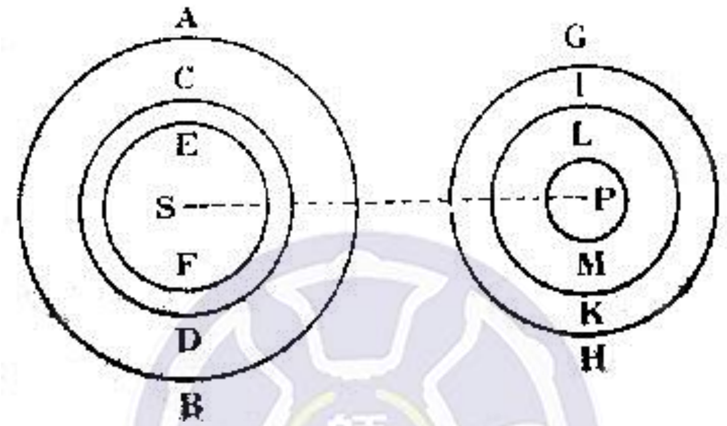
並且在的十二章討論球體的吸引力，這也是「力」建立的關鍵：

**命題 76 定理 36**

如果各球…上每一點所生的吸引力( attractive force) 與至被吸引球上任一點的距離平方成反比；我說，其中一球對另一球的全部吸引力將與此二球心距離的平方成反比。

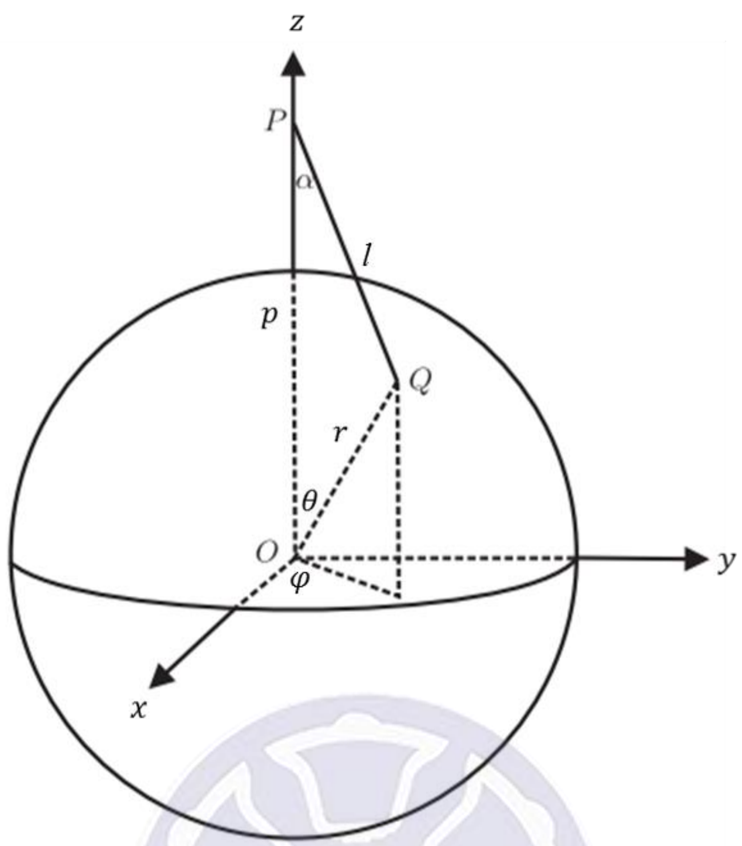
**PROPOSITION LXXVI. THEOREM 36.**

If spheres be however dissimilar (as to density of matter and attractive force) in the same ratio onward from the centrc to the circumference ; but every where similar, at every given distance from the centre, on all sides round about ; and the attractive force of every point decreases in the duplicate ratio of the distance of the body attracted ; I say, that the whole force with which one of these spheres attracts the other will be reciprocally proportional to the square of the distance of the centres. ( Newton, 1687, p,222)




圖附十九：《原理》命題 76 示意圖。(引自 Newton, 1687, p, 222)

在第陸之三節以提到牛頓比需透過「力」的概念命題 57 以及命題 76 的積分問題。牛頓是利用球殼積分做疊加，得出兩物體連心線$\overline{SP}$距離的平方反比就是物體彼此所受的吸引力。




圖附二十：球座標形式。

圖中$r$、θ、φ為球座標，$0 \leq \theta \leq \pi$，$0 \leq \emptyset \leq 2\pi$，$\overline{OP} = p$，$\overline{OQ} = r$，$\overline{QP} = l$。

我們先只考慮求單層殼積分的情形，球外一點 P 的質量為$m$；
令ρ為球體質量密度，在球殼上的某位置上的一點質量$dM$可表示為：

$$dM = \rho r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \cdots\cdots (17)$$

利用萬有引力公式($G$為萬有引力常數)，P 點所受的力引力大
小為：

$$Gm \cdot dM/l^2 = dM = Gm\rho r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \,/l^2 \cdots\cdots (18)$$

在 $r$ 與$\theta$固定不變的情況下，轉動φ做環型積分，$x$、y方向的引力會被抵消，只保留z軸上朝向球體的力，所以我們將引力乘上$\cos\alpha$，並做環型積分，其中φ與$r$、$l$、$\sin\theta$ 、$\cos\alpha$獨立：

$$(Gm\rho r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \,/l^2) \cos\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi =$$
$$(2\pi Gm\rho r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \,/l^2)\cos\alpha \cdots\cdots (19)$$

每一圈環型疊加形成的球殼，以固定半徑$r$對$\theta$做積分：

$$2\pi Gm\rho r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \cos\alpha \,/l^2 \, d\theta \cdots\cdots (20)$$

$\cos\alpha$會受$\theta$改變而變動，利用餘弦定理，視固定的$r$為常數，以一層球殼積分算出對 P 點所產生的引力大小：

$$\cos\alpha = (p^2 + l^2 - r^2)/2pl \cdots\cdots (21)$$

為了要將$\sin\theta \, d\theta$代換，利用餘弦定理代換$\cos\theta$：

$$\cos\theta = (r^2 + p^2 - l^2)/2rp \cdots\cdots (22)$$

並將$\cos\theta$以$l$作微分：

$$\sin\theta \, d\theta = ldl \,/rp \cdots\cdots (23)$$

將(21)、(23)帶入積分式子：

$$2\pi G m \rho r^2 dr \int_0^{\pi} \cos\alpha \sin\theta \,/l^2 d\theta$$

$$= 2\pi G m \rho r^2 dr/2rp^2 \int_{p-r}^{p+r} (p^2 + l^2 - r^2)/l^2 \, dl$$

$$= \pi G m \rho r dr/p^2 \left(l - \frac{p^2 - r^2}{l}\right) \Big|_{p-r}^{p+r}$$

$$= 4\pi G m \rho r^2 dr/p^2 \cdots\cdots (24)$$

從球殼積分可以知道 P 點所受的萬有引力與球心距離平方成反比，只要知道球心位置，就可以將球殼視為質點，以質點距離計算萬有引力。

進一步將球殼一層一層累加，從球心積分至整個球體半徑 R：

$$4\pi G m \rho/p^2 \int_0^R r^2 dr = 4\pi G m \rho R^3/3p^2 = \ GmM/p^2 \cdots\cdots (25)$$

其中球體質量 M 為球體體積乘上密度$4\pi\rho R^3/3$，結果與現今的萬有引力公式吻合，計算萬有引力只要考慮兩點質心距離就可以簡化繁瑣的積分。