第 4 章　《數學論》的內容分析（二）

承續第三章的分析，本章討論的內容依序爲卷四少廣章的立體幾何問題，卷三粟布章與衰分章的比例分配問題及卷五的商功章、均輸章、盈朒章、方程章的問題。

4.1.　少廣章內容分析

《數學論》卷四爲少廣章，所討論的內容爲立體幾何問題。其題型包括今日中學數學課程內容裡的柱體、錐體、球、橢球等以周、邊、徑求立體體積或以立體體積反求周、邊、徑的問題，及平堆、高堆以邊、濶求積或以積反求邊、濶的堆垛問題。與《九章算術》與《算法統宗》相較，此卷的問題應屬其商功章及少廣章之內容。

本卷共有題目 49 題，含求積問題 39 題，原屬商功章，反求周、邊、徑問題 10 題，原屬少廣章。並於卷首設凡例 7 則，主要介紹有關「面」、「底」、「平積」、「長」、「廣」、「高」、「立方」、「方體」、「直體」、「塹堵」、「芻蕘」、…等本卷所需用到的圖形概念、定義及名詞。與前章所觀察的結果相同，杜知耕對相關圖形的文字「定義」並不十分準確，但皆有附圖。若以附圖爲主體，並將其文字「定義」當成說明，則可清楚的表示相關圖形的特性。

底下將 49 個題目分立體圖形以周、邊、徑求體積，立體圖形以體積反求周、邊、徑及堆垛問題三類分別介紹如下：

4.1.1.　立體圖形以周、邊、徑求體積

此類形題目共有 22 則，包含柱體求體積的題目 11 題，錐體求體積及其延伸的題目 5 題，錐臺求體積的題目 6 題。與前方田章、勾股章所觀察的結果相同，題目的編排順序符合數學的邏輯性，[148]且其思路之進程亦符合數學學習的次序，有利於學生學習基模之建立。茲分三類題型介紹如下：

一、柱體求體積

本卷 1~10 題屬此類柱體求體積的問題，其目分別爲立方求積、直體求積、

[148] 見附錄 5，第四卷少廣章目錄。

塹堵求積、芻蕘求積、三角體求積、六邊體求積、五邊體求積、圓體求積、橢圓體求積、弧矢體求積。作者並於第12題清楚寫出「**凡體先求底積，底屬直線，依一卷九則例，屬曲線及雜線，依二卷四十則例，裁之得底積，再以高乘之即得體積。**」[149]即「柱體體積＝底積×高」的公式作爲此類型題目概念之總結。此外從目錄可看出五邊體求積、橢圓體求積、弧矢體求積三題並非傳統中算題型，乃作者由方田章的題目概念推廣出來的題型。底下就第5題之「解」作術文與今解之對照分析：

原術文

解曰：五邊底依各角分之，成三角形五，欲求底積必先得三角積，欲求三角積必先得三角之中長(丙丁)，然上則六邊，邊為偶數，角與角相對，邊與邊相對，其全底之長即相對兩三角之中長，今五邊，邊為奇數，邊與角相對，其底長(己丁)小半為此三角之中線(丙丁)，大半為彼三角之腰線(己丙)，折半則得庚丁，不能得丙丁也。若欲得丙丁必先求己丙(于己丁底長減去己丙，餘即丁丙)，欲得己丙必先求外切圓形之己戊徑(己戊折半即己丙)，欲求己戊必先求外切圓徑大于底長之丁戊(底長加丁戊即己戊)，欲求丁戊則用弧矢，以弦及餘徑求矢法(二卷二十二則)，今邊廣，甲戊乙弧矢形之甲乙弦也，邊廣折半自乘，丁乙半弦上方形也，底長己丁餘徑也，以除半弦上方形所得者丁戊矢也，以矢減底長所餘者，倍三角中長之辛丁也，故半之為三角之中長，又五因邊廣折半者，取五三角底之半也。

若無底長之度，則取邊廣折半為勾(丁乙)，另置邊廣以一一七五五八除之得一七零一二八八為弦(丙乙)，各自乘相減平方開之得股

今解

【法1】

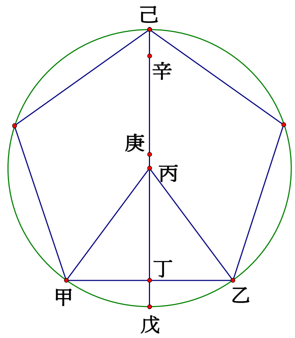


圖 4－1－1

證明：

如圖4－1－1

邊廣（甲乙弦）

＝20

丁戊(矢)

$$=\frac{\text{半弦}^2}{\text{餘徑}}=\frac{(\frac{1}{2}\text{邊廣})^2}{\text{丁己}}$$

又∵ 己丁－丁戊＝辛丁＝2×丙丁

$$\therefore\ \text{丙丁}=（\text{己丁}-\text{丁戊}）\times\frac{1}{2}$$

$$=（\text{中長}-\frac{(\frac{1}{2}\text{邊廣})^2}{\text{中長}})\times\frac{1}{2}$$

底積＝五邊形面積

＝五△底之半 × 丙丁

$$=[(\text{邊廣}\times 5)\times\frac{1}{2}]\times[(\text{中長}-\frac{(\frac{1}{2}\text{邊廣})^2}{\text{中長}})\times\frac{1}{2}]$$

五邊體（即今五角柱）積＝底積×高

【法2】如圖4－1－1

乙丙（弦）＝腰線（即半徑）

[149] 引自杜知耕，《數學鑰》卷四，頁2959。

丙丁即三角形之中長六卷二則。一一七五五八乃七十二度弧之通弦，七十二度為三百六十度五之一，故以之除五邊之一，即得外切圓形之半徑丙乙，為三角形之腰線也。

設九邊底，每邊廣二十尺，求三角分形之中長？

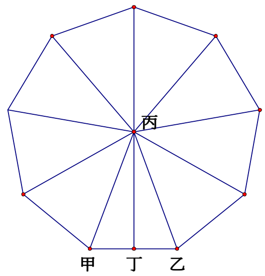
則以二十尺折半為勾丁乙，另置二十尺，以六八四零四除之，得二九二三八為弦丙乙，各自乘相減平方開之得股丙丁即三角形之中長。六八四零四乃四十度弧之通弦，四十度為三百六十度九之一，故以之除九邊之一，即得三角形之腰線也。[150]

$$=\frac{\text{邊廣}^2}{72^\circ\text{弧之通弦}}=\frac{20}{1.17558}=17.01288$$

中長＝丙丁（股）

$$=\sqrt{\text{乙丙}^2-\text{乙丁}^2}=\sqrt{17.01288^2-10^2}$$

圖 4－1－2



【法 3】如圖 4－1－2

乙丙（弦）

＝腰線（即半徑）

$$=\frac{\text{邊廣}^2}{40^\circ\text{弧之通弦}}=\frac{20}{0.68404}=29.238$$

中長＝丙丁（股）＝

$$\sqrt{\text{乙丙}^2-\text{乙丁}^2}=\sqrt{29.238^2-10^2}$$

顯然的此題的公式完全正確，且由此題的「解」可看出其證明除引用方田章的概念，並引用西方傳入之通弦概念及數據，以求圓內接正五邊形及正九邊形的面積。此外，第 4 題「六邊體求積」亦以此法求圓內接正六邊形、八邊形及十二邊形的面積。

二、錐體求體積

本卷第 11 題、13~16 題、33~36 題等屬錐體求體積及其概念延伸的題目，其核心概念即爲第 11 題錐體求積公式。觀察本題的「解」，可看出作者首先將方體依面分割成六個與方體同底半高的方錐，然後，利用方體體積等於六個方錐體積的關係，導出方錐體積＝底面積×高×$\frac{1}{3}$。並進而利用長、寬、高不等之直體，推出長、寬不等之四角錐體積。茲引述該題「解」之術文及附圖如下：

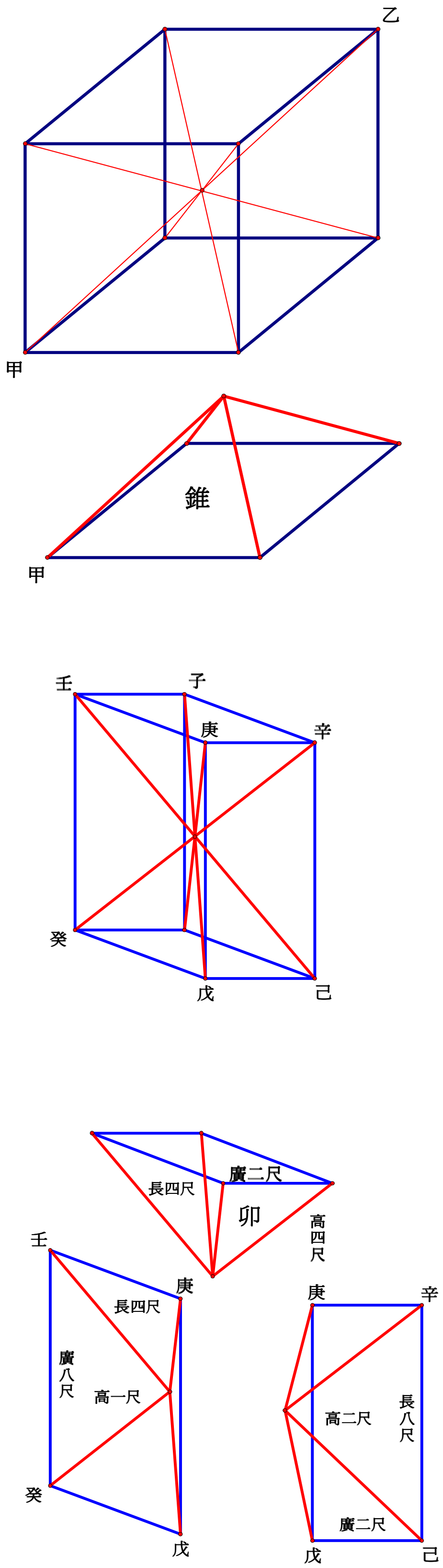
[150] 同上，頁 2956~2957。

原術文

解曰：方邊自乘，再以高乘之，方體也。方錐居方體三之一，故三歸得積也，何以知方錐居體三之一也，試作立方如甲乙，自心至各稜分之必成錐體六，俱以方面為底，方邊之半為高，更作一方體與錐體同底等高如丙丁，丙丁方體既與錐體同底，必亦與甲乙立方同底，既與錐體等高，必以甲乙方邊之半為高，兩方體既同底，則兩體之比例若高與高，丙丁體必為甲乙立方二之一矣。錐體既為甲乙立方六之一，不為等高同底丙丁方體三之一乎。

再作直體廣二尺，長四尺，高八尺如癸辛，亦自心至各稜分之，亦成錐體六，底等戊庚辛己，高等辛子之半，如丑者二；底等癸壬庚戊，高等庚辛之半，如寅者二；底等庚壬子辛，高等辛己之半，如卯者二，六錐體形勢雖殊而俱等，何也？丑與寅同長，丑之高倍于寅，而寅之廣倍于丑，折寅之廣準丑之高，則丑、寅二體等矣。又丑與卯同廣，丑之長倍于卯，而卯之高倍于丑，折丑之長準卯之高，則丑、卯二體亦等矣。夫寅等于丑，丑等于卯，是六錐俱等矣，今癸辛一直體能分為相等之六錐體，則一錐體不為癸辛直體六之一乎。錐體既為同底倍高直體六之一，必為同底等高三之一無疑矣。從此推之，不論方、圓、多邊、弧矢，凡屬錐體者，皆為同底等高體三之一。[151]

圖4－2



[151] 同上，頁2959。

與劉徽的證法相較，此題的證明與之並不盡相同。劉徽是利用出入相補原理將正立方體切割成 2 個塹堵，再組合成 3 個與正立方體同底等高的陽馬（即同底等高方錐），從而導出方錐體積＝底面積×高×$\frac{1}{3}$＝方邊×方邊×高×$\frac{1}{3}$的公式。就數學知識面來看，劉徽的證明似乎較為精彩有深度。但就數學教育面來看，杜知耕巧妙的將正立方體切割成 6 個同底半高方錐的手法，顯然較為淺顯易懂而利於學生學習。

其次 13~16 題的條目分別為渾圓求積、渾橢圓求積、銳脊體求積及鼈臑求積，皆為錐體求積的公式概念延伸題型。可從渾圓求積的「解」明顯看出，底下就第 13 題之「解」作術文與今解之對照分析：

原術文

解曰：置徑自乘，再以十一乘十四除者，渾圓中丙子乙丑平圓積也，以四因之者渾圓面積當平圓積四也，何也？渾圓面任割一分如甲丁己戊，欲求面分之容，則取自甲頂至戊界之度甲戊線為半徑作平圓如辛癸平圓，辛壬與甲戊等，其容即等。若自乙丙平割渾圓之半，取甲頂至乙界之度為半徑作平圓，其容必與渾圓半面等，今丙子乙丑平圓，半徑為乙庚，乙庚與甲庚等，乙庚、甲庚兩線偕甲乙線則成一勾股形，甲乙為弦，乙庚、甲庚一為勾，一為股也，以弦為半徑之平圓必倍大于或勾或股為半徑之平圓，渾圓半面既等于以甲乙弦為半徑之平圓，不倍大于以乙庚勾為半徑之丙子乙丑平圓乎？半面既倍大于丙子乙丑平圓，全面不四倍大于丙子乙丑平圓乎？法以半徑乘之，以三歸之又何也？平圓求積同于以圓周為底，以半徑為高之三角形二卷四則，故渾圓求積同于以全面為底，以半徑為高之錐體，以高乘底，以三歸之者，錐體求積之法也本卷十二則。

今解

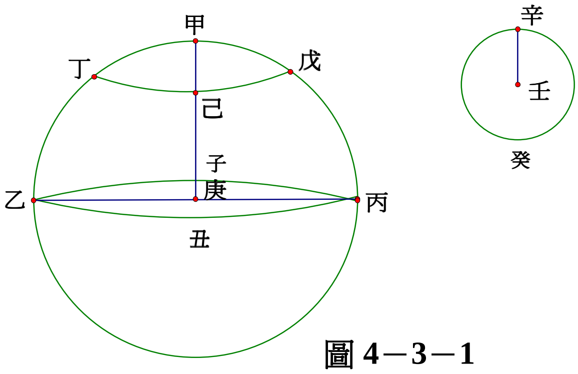


圖 4－3－1

【法 1】證明：如附圖 4－3－1

令甲庚＝乙庚＝r

∴甲乙＝$\sqrt{甲庚^2+乙庚^2}$

$=\sqrt{r^2+r^2}=\sqrt{2}r=\sqrt{2}$甲庚

∴半渾圓（即半球體）表面積

＝2×丙子乙丑平圓積

∴渾圓（即球體）表面積

＝4×丙子乙丑平圓積

渾圓（即球體）體積＝錐體體積（以渾圓表面積為底積，半徑為高）

＝渾圓表面積×半徑×$\frac{1}{3}$

又法置徑自乘，再以徑乘之得一千尺，以十一乘二十一除，得數同。

解曰：圓體與方體等高，則兩體之比例若兩底之比例，是方體與圓體若十四與十一也，又圓體與渾圓等高，今圓體之底同渾圓中心之平圓，則圓體之容必等于以平圓為底，以渾圓半徑為高渾圓半徑即圓體高度之半也之錐體六本卷十一則，渾圓之面既四倍于中心平圓，而渾圓求積之法又同錐體，則渾圓之容必等于以平圓為底，半逕為高之錐體四，夫以相等之錐體，圓體得六而渾圓得四，是圓體與渾圓若六之與四，六之與四即三之與二也，又以三因十四得四十二，以二因十一得二十二，各以二約之為二十一與十一，則二十一與十一即等高立方渾圓之比例也，法置徑自乘、再乘，立方也，十一乘二十一除，取立方二十一之十一為渾圓也。[152]

$=4\times$丙子乙丑平圓積$\times$半徑$\times\dfrac{1}{3}$

$=$（徑$\times$徑$\times\dfrac{11}{14}\times4$）$\times$半徑$\times\dfrac{1}{3}$

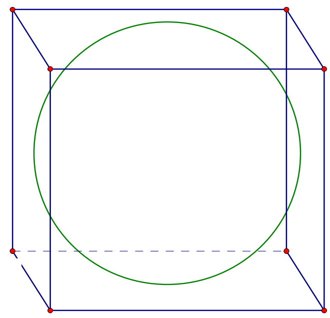


圖 4－3－2

【法 2】證明：如圖 4－3－2

∵（等高）方體積：圓體積＝14：11

∴圓體積＝方體積$\times\dfrac{11}{14}$

∵圓體積＝6×錐體積（以半徑爲高，丙子乙丑平圓爲底）

渾圓積＝4×錐體積（以半徑爲高，丙子乙丑平圓爲底）

∴渾圓積＝$\dfrac{4}{6}\times$圓體積＝$\dfrac{4}{6}\times$方體積$\times\dfrac{11}{14}$

$=\dfrac{11}{21}\times$方體積＝徑$\times$徑$\times$徑$\times\dfrac{11}{21}$

三、錐臺求體積

本卷 17~22 題屬此類錐臺求體積的問題，其目分別爲等廣銳面體求積、銳面方體求積、銳面直體求積、銳面圓體求積、銳面橢圓體求積、諸銳面邊體求積。其中 18、19、20 三題爲《算法統宗》上既有之傳統中算題型，而第 21 題公式顯是杜知耕仿 18 題推導 20 題的概念及手法，利用 19 題銳面直體體積公式：

體積＝（面長×面廣＋底長×底廣＋面廣×底長）×高$\times\dfrac{1}{3}$

[152] 同上，頁 2960~2961。

推導而來。茲就第 21 題作術文與今解之對照分析：

原術文

第二十一則、銳面橢圓體求積

設銳面橢圓體，面大徑四尺，小徑二尺，底大徑八尺，小徑六尺，高一十二尺，求積？

法曰：倍面大徑加底大徑，以面小徑乘之得三十二尺，另倍底大徑加面大徑，以底小徑乘之得一百二十尺，兩數並共一百五十二尺，以高乘之得一千八百二十四尺，再十一乘八十四除得二百三十八尺八寸五分有奇即所求。

解曰：此與銳面直體法同，元當用六歸得銳面直體積，再十一乘十四除為本積，今以八十四除者，以六因十四得八十四，以八十四除猶六歸又十四除也。[153]

今解

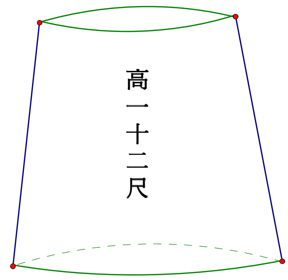


圖 4－4

銳面橢圓體積

$=[(面大徑\times 2+底大徑)\times 面小徑$

$+(底大徑\times 2+面大徑)\times 底小徑]\times 高\times \dfrac{11}{84}$

$=[(4\times 2+8)\times 2+(8\times 2+4)\times 6]\times 12\times \dfrac{11}{84}$

$=238.8571429\cdots$

證明：

$銳面橢圓體積=銳面直體積\times \dfrac{11}{14}$

$=[(面大徑\times 2+底大徑)\times 面小徑$

$+(底大徑\times 2+面大徑)\times 底小徑]\times 高\times \dfrac{11}{84}$

4.1.2. 立體圖形以體積反求周、邊、徑

本卷 24~32 題屬此類以體積反求周、邊、徑的題型，主要介紹開立方法、帶縱開立方法及渾圓、渾橢圓以積求徑問題。其中開立方法有二題，分別為二商及三商之立方以積求邊一、二法。經比對，其開立方法與《算法統宗》上的商除開立方法相同，所用的數據亦同。且觀察其證明所附之圖形亦與《算法統宗》上的「開立方廉隅圖」相同。[154]

[153] 同上，頁 2965。

[154] 圖 4－5 為筆者仿原文本 24 題立方求積附圖所畫，參見杜知耕，《數學論》第四卷，頁 2966。「開立方廉隅圖」參見梅榮照，李兆華，《《算法統宗》校釋》上卷，頁 523。

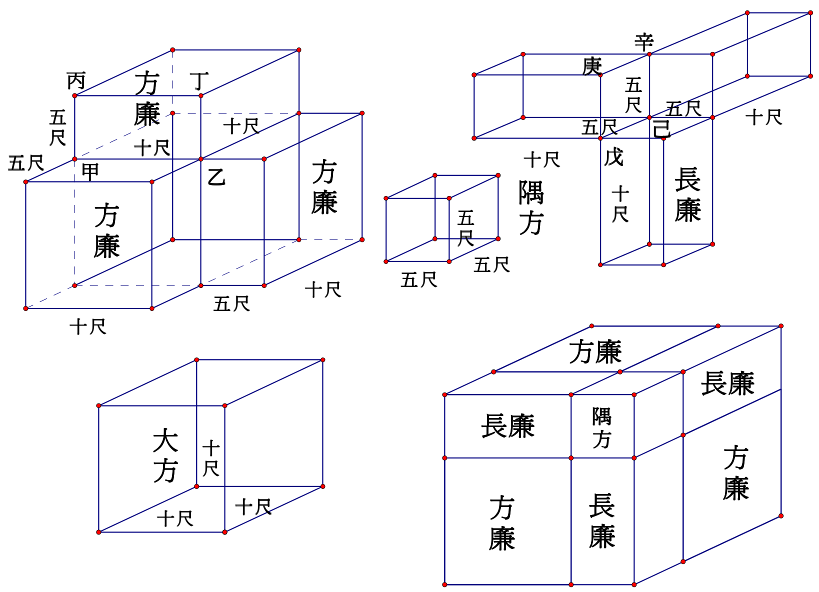


圖 4－5「立方求積」附圖

其次 26、27、29 三題分別爲方體、直體以積求邊，作者所用爲帶縱開立方法，並於該題目錄註記爲「增」。經筆者比對此帶縱開立方法與《算法統宗》不同，應爲杜知耕利用 24、25 題的開立方法修改而來，底下就第 27 題的帶縱開立方法作術文與今解對照如下：

步驟	左	中	右	原術文[155]
1		4275		置積于中為實。
2	10 （初商）	4275－10x10x14 ＝4275－1400 ＝2875		初商十尺自乘，又以多四尺並十尺共十四尺乘之，除實。
3		2875	2x14＋10＝38 （方廉法）	倍十四尺加初商十尺為方廉法。
4		2875	2x10＋14＝34 （長廉法）	倍初商十尺加十四尺為長廉法。
5	5 （次商）	2875		次商五尺置于初商之次。
6		10x38＋5x34＝550 2875－5x550＝125		以初商十尺乘方廉法，以次商五尺乘長廉法，兩數並，以次商五尺乘之，除實。
7		125	5x5x5＝125 （隅法）	次商五尺自乘、再乘為隅法。
8		125－125＝0		除實恰盡。

[155] 參見杜知耕，《數學鑰》卷四，頁 2969。

9	10＋5＝15（方邊）			合初商、次商共得一十五尺即底方之度。
10	15＋4＝19（高）			加高多四尺共一十九尺即高度。

而後 30、31 二題則是以開立方法及帶縱開立方法爲基礎，並利用渾圓、渾橢圓分別與立方體、方體的體積比，以其體積反求徑長的問題。底下就第 31 題作原術文與今解對照分析：

原術文

第三十一則、渾橢圓以積求徑

設渾橢圓積二千二百三十九尺二寸八分五釐有奇，大徑多小徑四尺，求兩徑？

法曰：置積，二十一乘十一除得四千二百七十五尺，以帶縱立方開之得一十五尺即小徑，加多四尺得一十九尺即大徑。

解曰：渾橢圓與方體之比例亦若渾圓與立方，故二十一乘十一除，帶縱立方開之得方體之廣及高，即渾橢圓之兩徑也。[156]

今解

方體積＝渾橢圓（即橄欖球）積$\times\frac{21}{11}$

$＝2239.285\cdots\times\frac{21}{11}＝4275$

小徑＝4275 開帶縱立方＝15

大徑＝小徑＋4＝19

證明：

渾橢圓積 $\times\ \frac{21}{11}$＝方體積

（長＝大徑；廣＝高＝小徑）

小徑＝廣＝高＝方體積開帶縱立方

＝（渾橢圓積$\times\frac{21}{11}$）開帶縱立方

大徑＝長＝小徑＋4

4.1.3. 堆垛問題

堆垛問題，亦稱垛積問題，主要內容是計算按一定規律堆放的物體總數及由物體總數反求堆放層數。即今中學數學之求級數和，及以級數和反求項數的問題。本卷 37~49 題的平堆求積、求濶及高堆、銳面堆求積共 13 題則屬此類題型，而其中的 9 題在《算法統宗》都能找到類似的題目，其所用的公式相同而題目數據及敘述則不盡相同。然《算法統宗》上並無相關公式之證明，而《數學論》則每題均有附圖的證明或簡略說明。且可發現平堆、高堆及銳面堆的分類方式恰可與柱體、錐體及錐臺相互映照，底下分別介紹。

156 同上，頁 2970。

一、平堆求積及反求邊潤

平堆求積及反求邊潤相當於高（層數）爲 1 單位的柱體求體積及反求邊潤，即求柱體的底面積問題。本卷 37~43 題屬此類題型，其題目順序的安排分別是方平堆、三角平堆、梯形平堆、六邊平堆，由易而難、由簡而繁，且求積（即求級數和）與求邊潤（即反求項數）交錯排列。此排列方式顯然利於概念之延伸及引用，並符合數學學習之思考進程。底下就 42、43 二題作術文與今解之對照分析：

原術文

第四十二則、六邊平堆以邊求積

設六邊平堆，每邊六，求積？

法曰：置六減一餘五為實，以一邊折半得三為法乘之得一十五，以邊數六因之得九十，加一得九十一即所求。

解曰：六邊堆當三角堆六而多一枚也，故先求三角積，六因之加一即得全積也。于每邊六減一者，每角各重一枚也。另取一邊折半者，即底五並頂一折半也本卷三十九則。若以周三十求積，則置周為實，另置周六歸之得五，加一、折半為法，乘之得九十，加一與前數同。[157]

今解

六邊平堆積

$$=[（邊闊-1）\times\frac{邊闊}{2}]\times 邊數+1$$

$$=[（6-1）\times\frac{6}{2}]\times 6+1=91$$

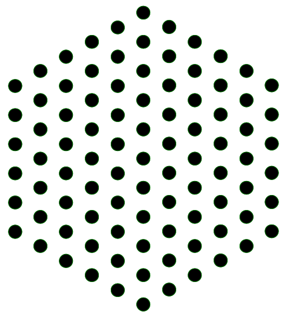


圖 4－6

證明：如圖 4－6

六邊平堆積

$$=三角平堆積\times 邊數+1$$

$$=梯形積\times 邊數+1$$

$$=[（上底+下底）\times\frac{1}{2}\times 層數]\times 邊數+1$$

$$=[\frac{邊闊}{2}\times（邊闊-1）]\times 邊數+1$$

原術文

第四十三則、六邊平堆以積求邊

設六邊平堆，積九十一，求邊潤？

今解

邊闊

[157] 同上，頁 2973。

法曰：置積減一，三歸之（得三十），以一為縱方，平方帶縱開之（得五），加一得六即所求。 解曰：積內減一即六邊堆多于六六三角堆之一枚也，三角堆本六邊堆六之一，法用三歸者，取三角堆之倍積也。餘同前解。若求周，以六因五即得。此即舊所謂圓堆也，不知堆不能成圓，凡圓皆六邊也。[158]	$=\{\sqrt{[(\text{六邊平堆積}-1)\times\frac{1}{3}]\times4+1^2}+1\}\times\frac{1}{2}$ $=\{\sqrt{[(91-1)\times\frac{1}{3}]\times4+1^2}+1\}\times\frac{1}{2}=6$ 證明：如圖 4－6 三角平堆積＝(六邊平堆積－1)$\times\frac{1}{6}$ 直形積【長、濶差一】＝三角平堆積 × 2 ＝(六邊平堆積－1) × $\frac{1}{3}$ 則依帶縱開平方法 邊闊＝$\{\sqrt{\text{直形積}\times4+\text{長闊差}^2}+1\}\times\frac{1}{2}$ $=\{\sqrt{[(\text{六邊平堆積}-1)\times\frac{1}{3}]\times4+1^2}+1\}\times\frac{1}{2}$

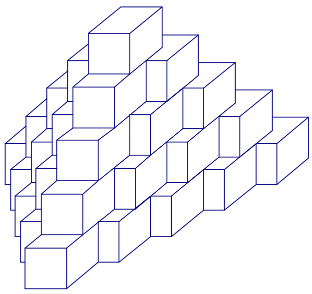
二、高堆求積

高堆求積相當於錐體求體積問題。本卷 44~47 題屬此類題型，其條目分別是塹堵高堆求積、方底高堆求積、三角高堆求積與直底高堆求積。而從此 4 題的「解」可觀察出作者證明之方式是以原塹堵體、方錐體等等求體積公式爲基礎，再以圖形顯示高堆與體二者所差之部份而加以修正、增加，從而推導出該公式。茲就 46、47 二題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第四十六則、三角高堆求積 設三角高堆，底濶五，求積？ 法曰：置五為實，另以五加一（得六）乘之（得三十），再以五加二（得七）乘之（得二百一十），六歸之得三十五即所求。 解曰：將三角堆六倍之與同濶之立方較，多甲乙丙丁二面及戊己庚辛一面，若減去此三面即為三角堆同濶之立方，反之于同濶立方增出三面六歸之，則得三角高堆之積。法加	三角高堆積 ＝底闊 × 底闊＋1）×（底闊＋2）$\times\frac{1}{6}$ ＝5 ×（5＋1）×（5＋2）$\times\frac{1}{6}$＝35 證明：如下圖 4－7 三角高堆積 × 6 ＝立方積＋甲乙丙丁面×2＋戊己庚辛面×1 ＝底闊 ^{3}＋底闊×（底闊＋1）× 2＋底闊 ^{2}× 1 ＝底闊 ×（底闊＋1）×（底闊＋2） ∴三角高堆積

[158] 同上，頁 2974。
[159] 同上。

一、加二者即增此三面之法也。[159]	$=$底闊$\times$（底闊$+1$）$\times$（底闊$+2$）$\times\frac{1}{6}$



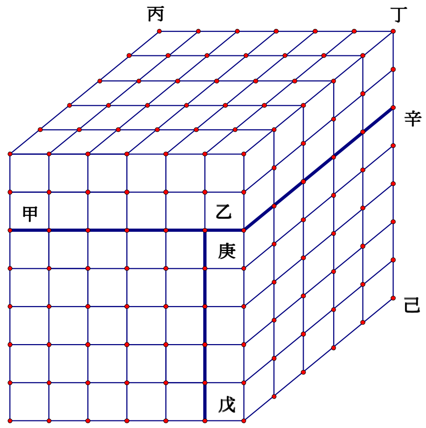


圖 4—7

此題即今中學數學題目求$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)$，$n=5$，試推導如下：

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)=\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\ldots+\frac{n\times(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\times(k+1)=\frac{1}{2}\times\frac{n\times(n+1)\times(n+2)}{3}=\frac{n\times(n+1)\times(n+2)}{6}$$

由上推導結果，顯見此公式正確無誤，而其附圖倒提供了此運算式一個幾何圖形的表徵與證明。

原術文	今解
第四十七則、直底高堆求積 設直底高堆，底長七，濶五，項長三，求積？	
法曰：倍底長加項長共一十七，以濶乘之得八十五。另置八十五以高乘之濶即高。得四百二十五，兩數並共五百一十，六歸之得八十五即所求。	直底高堆積 $=[(2\times$底長$+$項長$)\times$闊$]\times($高$+1)\times\frac{1}{6}$ $=[(2\times7+3)\times5]\times(5+1)\times\frac{1}{6}=85$
解曰：倍底長加脊長，以濶乘，再以高乘而六歸之，銳脊體求積之法也本卷十五則，又加入八十五者，乃整齊之體與不齊之堆相差之數也。如無脊長，則以底濶減底長加一即得。	證明：如圖 4—8 直底高堆積 $=$銳脊體積$+$（不齊之堆$-$整齊之體）

[160]	$=[（2\times底長+脊長）\times闊]\times高\times\frac{1}{6}$ $+[（2\times底長+脊長）\times闊]\times\frac{1}{6}$ $=[（2\times底長+項長）\times闊]\times（高+1）\times\frac{1}{6}$

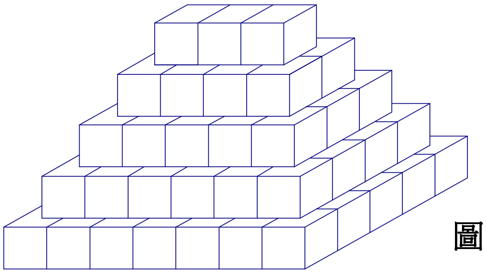


圖 4－8

此題即今中學數學題目求$1\times3+2\times4+3\times5+...+n\times(n+2)$，$n=5$，由底下推導可知公式亦正確無誤。

$$1\times3+2\times4+3\times5+...+n\times(n+2)=\sum_{k=1}^{n}k\times(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}2k$$
$$=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}+2\times\frac{n\times(n+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{6}[n\times(n+1)\times(2n+1+6)]$$
$$=[2(n+2)+3]\times n\times(n+1)\times\frac{1}{6}$$

三、銳面堆求積

銳面堆求積相當於錐臺求體積問題。本卷 48、49 二題的直底銳面堆求積及三角銳面堆求積屬此類題型，同樣從此 2 題的「解」可觀察出作者證明之方式是以原銳面直體、銳面三角體求體積公式爲基礎，再就銳面堆與銳面體二者所差之部份而加以修正，從而推導出公式，且二題的公式均正確無誤。茲就 48 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第四十八則、直底銳面堆求積 方底銳面堆同	
設直底銳面堆，面長四、濶二，底長七、濶五，求積？	如圖 4－9 直底銳面堆積

160 同上。

法曰：倍面長加底長共一十五，以面濶乘之得三十。另倍底長加面長共一十八，以底濶乘之得九十，又以面長減底長餘三，三數並共一百二十三，以高乘之面濶減一，以減底濶，餘四即高。得四百九十二，六歸之得八十二即所求。

解曰：此用銳面直體求積之法本卷十九則，以面長減底長並入者，亦補不齊之堆所多出之數也。如無面長，則以面濶與底濶相減餘三，以減底長即得；如無面濶，則以面長與底長相減餘三，以減底濶即得。[161]

＝[（2×面長＋底長）×面闊＋（2×底長＋面長）×底闊＋（底長－面長）]×高×$\frac{1}{6}$

＝[（2×4＋7）× 2＋（2×7＋4）×5＋（7－4）]×[7－（4－1）]×$\frac{1}{6}$

＝ 82

證明：如圖 4－9

直底銳面堆積

＝銳面直體積＋（不齊之堆－整齊之體）

＝[（2×面長＋底長）×面闊＋（2×底長＋面長）×底闊]×高×$\frac{1}{6}$＋（底長－面長）×高×$\frac{1}{6}$

＝[（2×面長＋底長）×面闊＋（2×底長＋面長）×底闊＋（底長－面長）]×高×$\frac{1}{6}$

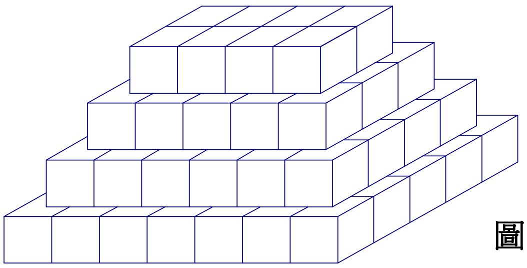


圖 4－9

此題即今中學數學題目求 $m\times(m+2)+(m+1)\times(m+3)+\ldots+n\times(n+2)$，$m=2,n=5$，由底下推導可知公式亦正確無誤。

$$m\times(m+2)+(m+1)\times(m+3)+\ldots+n\times(n+2)$$

$$=\sum_{k=m}^{n}k\times(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k\times(k+2)-\sum_{k=1}^{m-1}k\times(k+2)$$

$$=\frac{n\times(n+1)\times(2n+7)}{6}-\frac{(m-1)\times m\times(2m+5)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3+9n^2+7n-2m^3-3m^2+5m)$$

$$=[2n^2+2m^2+2mn+7n+5m]\times(n-m+1)\times\frac{1}{6}$$

$$=[(2m+n+6)\times m+(2n+m+6)\times n+(n-m)]\times(n-m+1)\times\frac{1}{6}$$

[161] 同上。

$$=[(2\times(m+2)+(n+2))\times m+(2\times(n+2)+(m+2))\times n+((n+2)-(m+2))]\times(n-m+1)\times\frac{1}{6}$$

$$=[(2\times 面長+底長)\times 面闊+(2\times 底長+面長)\times 底闊+(底長-面長)]\times 高\times\frac{1}{6}$$

4.1.4. 少廣章小結

經由上述題型分析，可發現《數學論》卷四的少廣章有幾個特色，茲簡述如下：

（1） 經比對少廣章題型及所用之概念、公式，與《算法統宗》相同的有 27 題，[162]分別從其卷四粟布章、卷六少廣章及卷八商功章而來。題型及所用之概念雖同，但數據、敘述則不盡相同。且比較其題目的敘述，可發現《數學論》的題目敘述與現今之教科書類似，以條件、所求爲敘述主體，整題敘述簡單扼要，清楚而明顯，大部份並無參酌情意成份在內。除此之外，觀察所載題目的數據組，亦可看出所用之數據及答案是經過「設計」的，與《算法統宗》上的數據組並不相同。顯然只是作者用來顯示該題數學概念與公式所借用之「傀儡」而已。

（2） 本章的題型分類大抵爲柱體、錐體、錐臺及堆垛問題。而且堆垛問題的平堆、高堆及銳面堆的分類方式恰可與柱體、錐體及錐臺相互映照，且所用之公式亦爲柱體、錐體、錐臺的概念與公式所引申推導，再以圖形顯示堆與體二者所差之部份而于以修正，從而推導出該公式。除此之外，從其演繹式邏輯推理的方法及部份立體圖形名稱，皆可看出其受西學影響頗深。

（3） 方田章的開平方法證明所附之圖形及少廣章之開立方法證明所附之圖形，分別與《算法統宗》上的「一方四廉兩隅演段圖」及「開立方廉隅圖」相似。顯見杜知耕對開平方法及開立方法之證法與精神皆符合《九章算術》劉徽注的原意。此外，也可看出杜知耕非常重視以圖形解題、證明。且所用之方法及圖形，兼采中算、西算之所長，並不獨忠於任一方。從這裡，或可看出其會通中西，並設法普及傳統中算及西算的努力。

[162] 見附錄 5。

4.2. 粟布章、衰分章內容分析

《數學鑰》第三卷分上、下二部份，所討論的內容分別爲《算法統宗》粟布章與衰分章的比例計算及比例分配問題。與前面各卷相同，卷首設有凡例 6 則，簡單的介紹有關「同乘異除」、「異乘同除」、「異乘同乘」、「異除同除」、「異乘異除」、「同乘同除」、「遞乘」、「維乘」、「互乘」、「遍乘」、「母」、「子」…等本卷所需用到的名詞概念及運算規則。底下就凡例第一則術文分析：

> 設一數與甲、乙兩率為同名，與丙、丁兩率為異名，置所設之數為實，以甲乘丙除曰「同乘異除」，以丙乘甲除曰「異乘同除」，以丙乘甲得數乘實曰「異乘同乘」與以丙乘復以甲乘同，以丙乘甲得數除實曰「異除同除」與以丙除復以甲除同，以丙乘丁除曰「異乘異除」，以甲乘乙除曰「同乘同除」。[163]

此則凡例術文所介紹之六法均屬今之比例算法，其中五法於《算法統宗》皆有介紹且附有例題，分別爲：「同乘異除」即今之反比例，《同文算指》謂之「三率變測法」。[164]「異乘同除」，《九章算術》稱爲「今有術」，《同文算指》又易名爲「三率法」。[165]「異乘同乘」、「異除同除」均屬今之復比例，《同文算指》謂之「三率重準測法」。[166]而「同乘同除」即今之連比例，劉徽稱之爲「重今有術」，在秦九韶《書數九章》發展爲「雁翅算法」。[167]

以凡例的名詞概念及運算規則爲基礎，第三卷上、下二卷粟布章與衰分章則各有題目 28 題及 18 題，並於後附分法 5 則，討論命分、約分、乘分、課分、通分等分數運算問題。底下分別介紹。

4.2.1. 粟布章內容分析

粟布，《九章算術》作粟米，《丁巨算法》和《詳明算法》等書已改稱粟布，《九章算法比類大全》仍作粟米。[168]《算法統宗》對「粟布」的定義爲「粟，是米也；布，是錢也。以粟稻等率求米之精粗，以斛斗求糧之多寡，以丈尺求布帛之長短，以斤兩求物之輕重，以御變易。」[169]本書於此章有 28 題，經比對大部

[163] 引自杜知耕，《數學鑰》卷三凡例，頁 2927。
[164] 參見梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 222。
[165] 同上。
[166] 同上，頁 223。
[167] 同上。
[168] 參見郭世榮，《《算法統宗》導讀》，頁 210。
[169] 同上，頁 195。

份皆爲《算法統宗》卷二及卷四的題型，但題目的敘述、情境及所用之數據則不盡相同。底下分類介紹：

一、「糴糶法」

「糴」：音ㄉㄧˊ，買入穀物；「糶」：音ㄊㄧㄠˋ，出售穀物。「糴糶法」乃介紹米糧、稻穀的買賣進出，物、價交易折算之法。本書此類題型共 8 題，經比對前 3 題所用公式與《算法統宗》卷二相同，屬粟數、單價、總價三數之互求。而另有 2 題的概念與其卷四相同，用到「異乘同除」的概念求解。茲舉第 5 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第五則、糴糶五法 設原有粟二石六斗，賣銀六錢五分，今有粟三十五石，求值銀？ 法曰：置今粟為實，以原價乘之得二十二兩七錢五分，以原粟除之，得八兩七錢五分即所求。 解曰：此異乘同除也，銀與粟異名，以原銀乘今粟，故謂異乘。粟與粟同名，以原粟除今粟，故謂同除。若以原粟除原價得每石價，以乘今粟，或先以原粟除今粟，再以原價乘之，俱未嘗不合。但先用歸除恐遇奇零不盡之數，難用乘法，故變為先乘後除也。[170]	值銀數（即今價） ＝(今粟數 × 原價) ÷ 原粟數 ＝$35\times0.65\div2.6=8.75$ 證明： $\frac{\text{原粟數}}{\text{原價}}=\frac{\text{今粟數}}{\text{值銀(今價)}}$ ∴值銀數 ＝(今粟數 × 原價) ÷ 原粟數

二、「撞換法」

「撞換法」共 3 題，說明不同種類或不同質量糧食間等價交換之折算方法，此處並無用到《算法統宗》中的「諸數率數」，而需用到凡例一、二則「異乘同除」與「同乘同除」的數學概念。茲舉第 10 題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第十則、撞換二法 設每菽三斗換黍二斗，每黍四斗換稷三斗，每稷五斗換稻四斗，每稻六斗換麥五斗，今	菽數

170 引自杜知耕，《數學鑰》卷三上，頁 2932。

有麥七斗換菽，求菽數？

法曰：以今麥七斗乘每稻六斗得四石二斗，再以每稷五斗乘之得二十一石，再以每黍四斗乘之得八十四石，再以每菽三斗乘之得二百五十二石為實，以換黍二斗乘換稷三斗得六斗，再以換稻四斗乘之得二石四斗，再以換麥五斗乘之得一十二石為法，除之得二石一斗即所求。

解曰：若置麥七斗為實，以換麥五斗除之，以每稻六斗乘之得八斗四升，為麥七斗應換之稻，再以八斗四升為實，以換稻四斗除之，以每稷五斗乘之得一石零五升，為麥七斗應換之稷，再以一石零五升為實，以換稷三斗除之，以每黍四斗乘之得一石四斗，為麥七斗應換之黍，再以一石四斗為實，以換黍二斗除之，以每菽三斗乘之得二石一斗，為麥七斗應換之菽，凡四除四乘方得菽數，今遞乘為實，遞乘為法，一次歸除即得所求，非徒省力，亦免遇畸零之數難於布算耳。[171]

$$=\frac{\text{今麥}\times\text{每稻}\times\text{每稷}\times\text{每黍}\times\text{每菽}}{\text{換黍}\times\text{換稷}\times\text{換稻}\times\text{換麥}}$$

$$=\frac{7\times6\times5\times4\times3}{5\times4\times3\times2}=21$$

證明：

$$\text{今稻}=\text{今麥}\times\frac{\text{每稻}}{\text{換麥}}=7\times\frac{6}{5}=8.4$$

$$\text{今稷}=\text{今稻}\times\frac{\text{每稷}}{\text{換稻}}=8.4\times\frac{5}{4}=10.5$$

$$\text{今黍}=\text{今稷}\times\frac{\text{每黍}}{\text{換稷}}=10.5\times\frac{4}{3}=14$$

$$\text{菽數}=\text{今菽}=\text{今黍}\times\frac{\text{每菽}}{\text{換黍}}=14\times\frac{3}{2}=21$$

$$\text{菽數}=\text{今麥}\times\frac{\text{每稻}}{\text{換麥}}\times\frac{\text{每稷}}{\text{換稻}}\times\frac{\text{每黍}}{\text{換稷}}\times\frac{\text{每菽}}{\text{換黍}}$$

$$=\frac{\text{今麥}\times\text{每稻}\times\text{每稷}\times\text{每黍}\times\text{每菽}}{\text{換黍}\times\text{換稷}\times\text{換稻}\times\text{換麥}}$$

此題用到凡例二則的連比例及四則的「遞乘」概念，杜知耕並說明先將「實」、「法」遞乘而後一次歸除的原因並非爲了省力，而是免於遇到畸零之數難於計算。

三、「銀色法」

本卷 14~19 六題爲「銀色法」，與《算法統宗》「傾煎論色」的題數、題型、排序皆同，傾煎論色即熔鑄金銀計算成色。[172]底下按其原本題目之排序作二者術文之比較：

[171] 同上，頁 2932~2933。
[172] 參見梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 223。

《數學論》之「銀色法」[173]	《算法統宗》之「傾煎論色」[174]
第十四則、銀色一法 設九三色銀一兩二錢，傾銷足色，求銀數？ 法曰：置銀一兩二錢為實，以銀色九三乘之，得一兩一錢一分六釐即所求。	假如今有九二成色銀七兩四錢八分，傾銷足色，問該若干？ 答曰：六兩八錢八分一釐六毫。 法曰：置銀為實，以九二色為法乘之合問。
第十五則、銀色二法 設足色銀一兩一錢一分六釐，改傾九三色，求銀數？ 法曰：置銀一兩一錢一分六釐為實，以九三除之，得一兩二錢即所求。	假如今有足色紋銀一十五兩二錢換九五色銀，問該成色銀若干？ 答曰：該九五色銀一十六兩。 法曰：置紋銀一十五兩二錢為實，以九五色為法除之即得。
第十六則、銀色三法 設八五色銀五兩六錢，改傾九五色銀，求銀數？ 法曰：置銀五兩六錢為實，以八五乘之得四兩七錢六分，再以九五除之，得五兩零一分零五毫即所求。	假如今有八五色銀五兩六錢換九五色銀，問該若干？ 答曰：五兩零一分零五毫。 法曰：置銀五兩六錢，以八五乘之得四兩七錢六分為實，以九五為法除之合問。
第十七則、銀色四法 設足色銀七兩六錢五分，傾成九兩，求銀色？ 法曰：置銀七兩六錢五分為實，以九兩除之，得八五即所求。	假如今有足色銀七兩六錢五分，傾出成色銀九兩，問色幾何？ 答曰：八五色。 法曰：置紋銀為實，以傾出色銀九兩為法歸之合問。
第十八則、銀色五法 設足色銀三十五兩二錢，改傾八八色銀，求加銅數？ 法曰：置銀三十五兩二錢為實，以八八除之得四十兩，與原銀相減，餘四兩八錢即所求。	假如今有足色銀三十五兩二錢，欲傾八八色銀，問用銅若干？ 答曰：銅四兩八錢。 法曰：置紋銀為實，以八八色為法除之得色銀四十兩，內減原銀餘四兩八錢是銅數也，合問。
第十九則、銀色六法 設傾八八色銀，用銅四兩八錢，求用銀數？	假如有銅七錢五分，今煎作八八色銀，問用紋銀若干？ 答曰：紋銀五兩五錢。

[173] 參見杜知耕，《數學論》卷三上，頁 2934~2935。
[174] 參見梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 212~214。

法曰：置銅四兩八錢為實，以八八與一兩相減，餘一錢二分為法，除之得四十兩，與銅數相減餘三十五兩二錢即所求。	法曰：置銅為實，以每兩用銅一錢二分為法除之得八八色銀六兩二錢五分，於內減原銅七錢五分，餘得紋銀，合問。

由上表可看出二者除題數、題型、排序皆同外，所用之公式皆相同，題目敘述也十分類似。且其中 17、18 二題除公式相同外，所用數據亦同。

四、「斤兩法」

「斤兩法」共 6 題，介紹斤、兩互換，斤價、兩價互換的方法，與《算法統宗》中「衡法斤秤歌」所述之概念相同。茲舉一題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第二十三則、斤兩四法 設物每斤價二錢五分，今銀一十六兩三錢一分二釐五毫，求值物重？ 法曰：置今銀為實，以價為法除之，得六十五斤二五，取斤下二五，以斤法十六乘之得四兩，共六十五斤四兩即所求。[175]	物重（斤數） ＝今價（銀數）÷ 每斤價 $=16.3125\div 0.25$ $=65.25=\ 65+0.25$ $=(65+\frac{16\times 0.25}{16})=(65+\frac{4}{16})$

五、「權重法」

「權重法」3 題，介紹物重真數、秤所量得物重與秤錘重三者力矩平衡的計算方法。其中 26、27 二題爲與《算法統宗》上的題型類似，即《數度衍》上所謂「較秤式」與「較錘式」題型。[176]而第 28 題則屬作者新增題目，茲舉 26、28 二題作術文與今解之對照分析：

原術文	今解
第二十六則、權重一法 設秤原錘重二十六兩，遇重物不能勝，另取一物，重四十六兩八錢作錘，秤之得一千零七十二兩，求物重真數？ 法曰：置物重一千零七十二兩為實，以借用	物重真數 ＝(所量得物重×借用之錘重) ÷ 原錘重 $=\frac{1072\times 46.8}{26}=1929.6$

175 引自杜知耕，《數學論》卷三上，頁 2935。

176 參見楊玉星，《清代算學家方中通及其算學研究》，頁 140。

作錘之四十六兩八錢乘之得五萬零一百六十九兩六錢，再以原錘二十六兩除之，得一千九百二十九兩六錢即所求。

解曰：借用之錘重于原錘若干倍，則借用之錘所秤之物重亦重于原錘所秤之物重若干倍，以原錘除借用之錘得一.八，是借用之錘重於原錘十分之八也，則于借用之錘所秤之一千零七十二兩，以十分之八加之，必得一千九百二十九兩六錢，為原錘所秤之重，法先乘後除者，亦異乘同除也本卷五則。[177]

說明：

$$\frac{\text{借用之錘重}}{\text{原錘重}}=\frac{46.8}{26}=1.8$$

$$\text{借用之錘重}-\text{原錘重}=\frac{8}{10}\times\text{原錘重}$$

∴物重真數（以原錘所秤之重）

$$=\text{借用之錘所秤之物重}\times\left(1+\frac{8}{10}\right)$$

$$=1072\times\left(1+\frac{8}{10}\right)=1929.6$$

原術文	今解

第二十八則、權重三法

設秤失其錘，有輕、重二物不知斤兩，輕者作錘秤，重者得五十二兩，以重者作錘秤，輕者得一十三兩，求原錘重？

法曰：置兩數相乘得六百七十六兩，平方開之得二十六兩即所求。

解曰：兩數之中率即原錘之重，兩數相乘平方開之求中率之法也二卷十六則。又法以等重二物，一作錘、一作物，秤之所得之數即原錘之重。按以上三法用之，于平星提索同居一位之秤，雖有微差，尚可得近似之數。至于平星提索不同一位，相去愈遠，其差愈多，甚至與真數懸絕，留心此道者，不可不知

原錘重

$$=\sqrt{\text{所量得之輕物重}\times\text{所量得之重物重}}$$

$$=\sqrt{52\times 13}=26$$

說明：

重物重 $\times\ x$ ＝ 輕物重 $\times$ 52 ----（1）

輕物重 $\times\ x$ ＝ 重物重 $\times$ 13 ----（2）

由（1）、（2）

$$\frac{x}{13}=\frac{52}{x}\Rightarrow x^2=13\times 52\Rightarrow x=\sqrt{13\times 52}$$

又 $1\times x$ ＝原錘重 $\times\ 1$

∴原錘重 ＝ x

[177] 引自杜知耕，《數學論》卷三上，頁 2936。

[178] 同上。

也。[178]	$=\sqrt{\text{所量得之輕物重}\times\text{所量得之重物重}}$

顯見此二題皆需使用「原錘重 × 物重真數 ＝借用之錘重 × 所量得物重」力矩守恆的概念。但杜知耕於「解」中並無詳細說明。

4.2.2. 衰分章內容分析

「衰」者按比例也，「分」者分配也。「衰分」意指按其爵位之大小、能力之優劣、物之貴賤、或多或寡，所應得的比例分配之意也。算法大部份是用「三率法」，即「異乘同除」的概念。[179]本書於此章有 18 題，經比對其條目發現，全部爲《算法統宗》卷五的題型，所用之算法幾乎相同，題目的敘述、情境及所用之數據則略有不同。但其中有 8 題可說是完全相同。[180]

《九章算術》衰分術曰：「各置列衰，副併為法，以所分乘未併者，各自為實，實如法而一。」此術所對應的問題即爲：

已知有物總數：N，按比例 $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ 分配之，求各數 N_i，$i=1,2,3,...,n$。其中 $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ 稱爲列衰，諸 a_i 稱爲未併者，N 爲所分。

由此可知 $N_i=\dfrac{a_i\times N}{\sum a_i}$，（$i=1,2,3,...,n$）。

《算法統宗》所列衰分公式亦與此相同。[181]底下以此公式爲基礎分類介紹。

一、合率差分

即已知 N 及 a_i 求 N_i，茲作此題術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第一則、合率差分 設有銀一百二十一兩一錢七分五釐，買稻、麥、菽三等糧，買稻一分，每斗價九分二釐，麥二分，每斗價八分五釐，菽三分，每斗價三分六釐，求三色糧各若干？	

179 參見楊玉星，《清代算學家方中通及其算學研究》，頁 117。
180 見附錄 7。
181 參見郭世榮，《《算法統宗》導讀》，頁 231。

法曰：置共銀為實，另二因麥價得一錢七分，三因菽價得一錢零八釐，與稻價並共三錢七分為法，除實得三十二石七斗五升為稻數，二因稻數，得六十五石五斗為麥數，三因稻數，得九十八石二斗五升為菽數。 解曰：稻一、麥二、菽三共六衰，而稻為六分之一，麥為六分之二，菽為六分之三，二因麥價者，令麥二倍于稻也，三因菽價者，令菽三倍于稻也，合二與三得五，是麥、菽得五而稻得一，則稻為六分之一矣，故並價除實即得稻數也，麥原二倍于稻，故二因稻數得麥數，菽原三倍于稻，故三因稻數得菽數。如求各銀數，則以各價乘各數即得。[182]	稻一斗、麥二斗、菽三斗共價 $=$稻價 $\times 1+$麥價 $\times 2+$菽價 $\times 3$ $=0.092+0.085\times 2+0.036\times 3=0.37$ 稻數$=\dfrac{\text{所有銀}}{\text{共價}}=\dfrac{121.175}{0.37}=327.5$（斗） $=32$ 石 7 斗 5 升 麥數＝稻數 $\times 2$ $=32$ 石 7 斗 5 升 $\times 2$ $=65$ 石 5 斗 菽數＝稻數 $\times 3$ $=32$ 石 7 斗 5 升 $\times 3$ $=98$ 石 2 斗 5 升

二、兩分差分

即已知各衰中相鄰兩衰之比的比例分配問題，其條目分別爲「折半差分」、「四六差分」、「三七差分」與「二八差分」。而其各衰中相鄰兩衰之比則分別爲 2:1，4:6，2:8，3:7，茲作 3、4 二題術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第三則、四六差分 設銀八百一十二兩五錢，令甲、乙、丙、丁四等人，四六納之，求各應納銀數？ 法曰：置共銀數為實，先定丁為四衰，以一五乘四得六為丙衰，再以一五乘六得九為乙衰，再以一五	即：令丁應納銀數＝ $4a$， ∴丙應納銀數＝ $4a\times1.5=6a$ 乙應納銀數＝ $6a\times1.5=9a$ 甲應納銀數＝ $9a\times1.5=13.5a$ ∴四人共納銀數

182 引自杜知耕，《數學論》卷三下，頁 2937。

乘九得十三衰五分為甲衰，並之共三十二衰五分為法，除實得二十五兩為一衰之數，四因二十五兩，得一百兩為丁數，六因二十五兩，得一百五十兩為丙數，九因二十五兩，得二百二十五兩為乙數，以十三衰五分乘二十五兩，得三百三十七兩五錢為甲數。

解曰：定衰之法當六乘四除，今用一.五乘，何也？蓋四之于六若一與一.五也，以一.五乘四得六，乘六得九，乘九得十三.五，而十三.五之與九，九之與六皆若六之與四也，並四數共得三十二衰半，除實所得銀數即原銀三十二分五釐之一，而丁應納者則三十二分五釐之四，故四因一衰之數得丁數也，餘同前解。[183]

$= 4a+6a+9a+13.5a = 32.5a$

∴一衰之數（a）

$= \dfrac{\text{共納銀數}}{\text{共衰}} = \dfrac{812.5}{32.5} = 25$

丁應納銀數

＝25 × 4 ＝ 100（兩）

丙應納銀數

＝25 × 6 ＝ 150（兩）

乙應納銀數

＝25 × 9 ＝ 225（兩）

甲應納銀數

＝25 × 13.5 ＝ 337.5（兩）。

原術文	今解

第四則、三七差分

設銀一千九百七十五兩，令甲、乙、丙三等人，三七納之，求各應納銀數？

法曰：置共銀數為實，先定丙為九衰，七因三歸得二十一為乙衰，再七因三歸得四十九為甲衰，並之共七十九衰為法，除實得二十五兩為一衰之數，九因之得二百二十五兩為丙數，以二十一乘之得五百二十五兩為乙數，以四十九乘之得一千二百二十五兩為甲數。

解曰：不以三為丙衰，而以九為丙衰者，以三為丙衰，則不能得甲衰也，何也？試定三為丙衰，七為

令丙應納銀數＝$9a$

∴乙應納銀數＝$9a \times \dfrac{7}{3} = 21a$，

甲應納銀數＝$21a \times \dfrac{7}{3} = 49a$

∴三人共納銀數

$= 9a+21a+49a = 79a$

∴一衰之數（a）

$= \dfrac{\text{共納銀數}}{\text{共衰}} = \dfrac{1975}{79} = 25$

丙應納銀數

＝25 × 9 ＝ 225（兩）

乙應納銀數

[183] 同上，頁 2938。

[184] 同上。

乙衰，七因三歸則得一六三三不盡，定九為丙衰，正為甲衰地也，若甲、乙、丙、丁四位，則九又不可為丁衰，必三倍之二十七為丁衰，若五位，又三倍二十七得八十一為戊衰，位多者倣此。[184]	＝25 × 21 ＝ 525（兩）； 甲應納銀數 ＝25 × 49 ＝ 1225（兩）。

此類型各題均附有「解」以簡單說明定衰之法，且由「三七差分」題的「解」可看出，作者爲了避免出現畸零之數，並保證各衰均爲整數，定衰時是有所設計的。

三、遞減差分

遞減差分即各衰成等差數列之衰分問題或超位加減差分問題。其條目分別爲「遞減差分一法」、「遞減差分二法」、「遞減差分三法」、「互和遞減差分一法」與「互和遞減差分一法」。經比對此五題與《算法統宗》之「遞減挨次差分」與「互和減半差分」中的題目幾乎完全相同，唯題目敘述略有不同。茲作 7、12 二題術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第七則、遞減差分二法 設有米二百四十石，令甲、乙、丙、丁、戊五人納之，定甲、乙兩人納數與丙、丁、戊三人納數等，求各應納米數？ 法曰：置共米為實，先以一為戊衰，二為丁衰，三為丙衰，四為乙衰，五為甲衰，次並戊一、丁二、丙三得六，並乙四、甲五得九，以六減九餘三，于每人衰數各增三，戊得四衰，丁得五衰，丙得六衰，乙得七衰，甲得八衰，並之共三十衰為法，除實得八石為一衰之數，四因之得三十二石為戊數，五因之得四十石為丁數，六因之得四十八石為丙數，七因之得五十六石為乙數，八因之	先令甲、乙、丙、丁、戊應納米數分別爲 $(x+5a)$、$(x+4a)$、$(x+3a)$、$(x+2a)$、$(x+a)$ $\therefore (x+5a)+(x+4a)$ $=(x+3a)+(x+2a)+(x+a)$ $\therefore x=3a$ ∴令甲、乙、丙、丁、戊應納米數分別爲 $8a$、$7a$、$6a$、$5a$、$4a$ 五人共納米數 $=4a+5a+6a+7a+8a=30a$ 則一衰之數（a） $=\dfrac{\text{共納米數}}{\text{共衰}}=\dfrac{240}{30}=8$ 戊應納米數＝8 × 4 ＝ 32 丁應納米數＝8 × 5 ＝ 40 丙應納米數＝8 × 6 ＝ 48 乙應納米數＝8 × 7 ＝ 56 甲應納米數＝8 × 8 ＝ 64。

[185] 同上，頁 2939~2940。原術文畫線部份的四人衰數應校爲五人衰數。

得六十四石為甲數。

解曰：若六位，令丙、丁、戊、己四人與甲、乙二人納數等，則並己一、戊二、丁三、丙四共十，並乙五、甲六共十一，兩數相減餘一為實，另以甲、乙兩人與丙、丁、戊、己四人相減餘二人為法，歸之得五，各加入每人衰數，己得一五，戊得二五，丁得三五，丙得四五，乙得五五，甲得六五。

若七位，令丙、丁、戊、己、庚五人與甲、乙二人納數等，則並庚一、己二、戊三、丁四、丙五共十五，並乙六、甲七共十三，是<u>四人衰數</u>反多于二人衰數，前法不行矣。則置各衰自乘，庚得一，己得四，戊得九，丁得十六，丙得二十五，並之共五十五，乙得三十六，甲得四十九，並之共八十五，兩數相減餘三十為實，另以甲、乙兩人與丙、丁、戊、己、庚五人相減餘三人為法，歸之得十，各加入每人衰數，庚得十一，己得十四，戊得十九，丁得二十六，丙得三十五，乙得四十六，甲得五十九，餘倣此。[185]

說明：

若甲、乙、丙、丁、戊、己六位，丙、丁、戊、己四人與甲、乙二人納數等

先令甲、乙、丙、丁、戊、己應納米數分別爲$(x+6a)$、$(x+5a)$、$(x+4a)$、$(x+3a)$、$(x+2a)$、$(x+a)$

$\therefore (x+6a)+(x+5a)$

$=(x+4a)+(x+3a)+(x+2a)+(x+a)$

$\therefore x=\dfrac{a}{2}$

則令甲、乙、丙、丁、戊、己應納米數分別爲$6.5a$、$5.5a$、$4.5a$、$3.5a$、$2.5a$、$1.5a$。

若甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七位，丙、丁、戊、己、庚五人與甲、乙二人納數等

先令甲、乙、丙、丁、戊、己、庚應納米數分別爲$(x+7a)$、$(x+6a)$、$(x+5a)$、$(x+4a)$、$(x+3a)$、$(x+2a)$、$(x+a)$

$\therefore (x+7a)+(x+6a)$

$=(x+5a)+(x+4a)+(x+3a)+(x+2a)+(x+a)$

$\therefore 2x+13a=5x+15a \Rightarrow x=\dfrac{-2a}{3}$(不合)

再令甲、乙、丙、丁、戊、己、庚應納米數分別爲$(x+49a)$、$(x+36a)$、$(x+25a)$、$(x+16a)$、$(x+9a)$、$(x+4a)$、$(x+a)$

$\therefore (x+49a)+(x+36a)=$

$(x+25a)+(x+16a)+(x+9a)+(x+4a)+(x+a)$

$\therefore 2x+85a=5x+55a \Rightarrow x=10a$

則令甲、乙、丙、丁、戊、己、庚應納米數分別爲$59a$、$46a$、$35a$、$26a$、$19a$、$14a$、$11a$

此題「解曰」部份六人與七人之情形並不見《算法統宗》，爲作者所增，且七人的情況，甲、乙、丙、丁、戊、己、庚應納米數比爲$59:46:35:26:19:14:11$，顯然各人衰數並不成等差數列，應屬超位加減差分問題。

原術文	今解
第十二則、互和遞減差分二法 設令甲、乙、丙、丁四人遞減納銀，定甲納六十九兩，丁納五十一兩，求乙、丙應納數及共銀數？ 法曰：以丁數減甲數餘一十八兩，三歸之得六兩，加丁數得五十七兩為丙數，加丙數得六十三兩為乙數，並之共二百四十兩為共銀數。 解曰：甲多于乙，乙多于丙，丙多于丁，三數並與甲多于丁數等，故三歸得每率遞差之數，凡四位以上皆取首尾兩數相減，五位則四歸之，六位則五歸之，七位則六歸之，即得每率遞差之數，餘同前。[186]	丙納銀數 ＝丁納銀數＋(甲納銀數－丁納銀數)÷3 ＝51＋(69－51)÷3＝57 乙納銀數 ＝丙納銀數＋(甲納銀數－丁納銀數)÷3 ＝57＋(69－51)÷3＝63 共納銀數＝69＋63＋57＋51＝240

此題即項數爲四項之等差數列，已知首項與末項求其餘各項，杜知耕並於「解」中將項數推廣至五、六、七項。且從其說法可看出其嘗試將公式一般化之想法及概念。

四、帶分子母差分

帶分子母差分即各衰中有分數出現之差分問題。經比對本書之二題與《算法統宗》之同類型題目幾乎完全相同，唯題目敘述略有不同。且杜知耕於此二題皆附有圖像，利用其所附之圖像之概念似乎能讓人更加易於理解其算法。茲作第 10 題術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第十則、帶分子母差分二法 設布一十二萬四千四百八十五疋給散軍士，每三名給襖布七疋，每四名給褲布五疋，求軍數？	

[186] 同上，頁 2942。

法曰：列三名、七疋于右，四名、五疋于左，右上互乘左下得十五，左上互乘右下得二十八，並之共四十三為法，另以左上、右上相乘得一十二，以乘共布得一百四十九萬三千八百二十十疋，以法除之得三萬四千七百四十名，即所求。

解曰：十二為三名者四，當給襖布二十八疋；為四名者三，當給褌布一十五疋，是每軍士十二名給布四十三疋也。反之，每給布四十三疋，得軍士一十二名也，故十二乘、四十三除得軍數也。[187]

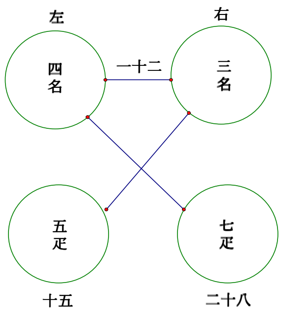


圖 4－10

如下圖 4－10

軍數

$$=\frac{(\text{左上}\times\text{右上})\times\text{共布}}{(\text{左上}\times\text{右下}+\text{右上}\times\text{左下})}$$

$$=\frac{(4\times3)\times124485}{(4\times7+3\times5)}=\frac{12\times124485}{43}=4740$$

說明：令軍數＝x

$$\frac{7}{3}x+\frac{5}{4}x=124485$$

$$\Rightarrow\frac{4\times7}{4\times3}x+\frac{3\times5}{3\times4}x=124485$$

$$\Rightarrow\frac{28}{12}x+\frac{15}{12}x=124485$$

$$\Rightarrow\frac{43}{12}x=124485$$

$$\Rightarrow x=\frac{12\times124485}{43}=34740$$

五、匿價差分

已知物總價、貴物數、賤物數及二物價差，求各物價的問題。茲作第 13 題術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第十三則、匿價差分一法 設銀一百八十兩零二錢五分，買麥六十五石，菽二十五石，麥每石多菽價一兩零七分，求各價？	令元銀（總價）＝M，麥數＝A， 菽數＝B，麥、菽每石價差＝P

[187] 同上，頁 2941。
[188] 同上，頁 2942。

法曰：置麥，以麥多菽價乘之（得六十九兩五錢五分），以減元銀（餘一百一十兩零七錢），並麥、菽兩數除之，得一兩二錢三分即菽價，加麥多菽價得二兩三錢即麥價。

解曰：減去麥多菽價餘銀即菽九十石之共價，故以九十石歸之得菽價。[188]

菽價＝$\dfrac{M-A\times P}{(A+B)}$

$=\dfrac{180.25-65\times 1.07}{(65+25)}$ ＝1.23

麥價＝菽價＋(麥、菽每石價差)

＝1.23＋1.07＝2.3

六、貴賤和率差分

已知甲、乙二物單價，又知共價買共物若干，求甲、乙二物各幾何的問題。本章第 15 題「二色差分」與第 17 題「貴賤和率差分」屬此類題目。茲作第 17 題術文與今解之對照分析如下：

原術文

第十七則、貴賤和率差分

設銀一百二十七兩零五錢，共買稻、麥一百零八石，每稻三石價四兩，每麥四石價三兩五錢，求二色數及價各若干？

法曰：列稻三石、麥四石、共稻、麥一百零八石于右，次列稻價四兩、麥價三兩五錢、原銀一百二十七兩五錢于左，以右上互乘左中（得十兩零五錢），以左上互乘右中（得一十六兩），兩數相減餘五兩五錢為長法，次以右中互乘左下（得五百一十兩），以左中互乘右下（得三百七十八兩），兩數相減（餘一百三十二兩），以長法除之得二十四為短法。以稻三石乘短法得七十二石即稻數，以稻價乘短法得九十六兩即稻共價，以稻數減共稻、麥一百零八石，餘三十六石即

今解

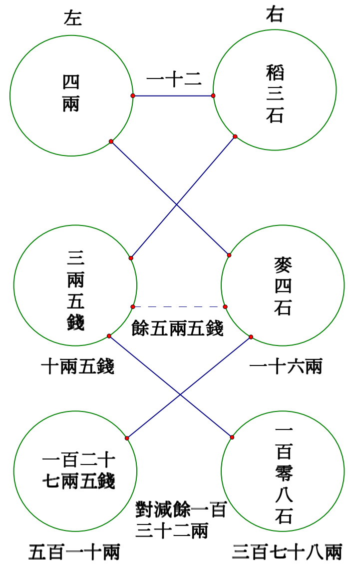


圖 4－11

如圖 4－11

長法＝（左上x右中）－（右上x左中）

＝4x4－3x3.5＝5.5

短法

＝[（右中x左下）－（左中x右下）]÷長法

＝（4x127.5－3.5x108）÷5.5＝24

稻數＝稻三石x短法＝3x24＝72

麥數，以稻共價減原銀一百二十七兩五錢，餘三十一兩五錢即麥共價。[189]	稻共價＝稻價×短法＝4×24＝96 麥數＝共糧－稻數＝108－72＝36 麥共價＝共價×稻共價＝127.5－96＝31.5

七、三色差分

已知甲、乙、丙三物單價，又知共價買共物若干，求甲、乙、丙三物各幾何的問題。此類問題是貴賤和率差分問題的推廣。本章第 16 題即爲此類題目。茲作術文與今解之對照分析如下：

原術文	今解
第十六則、三色差分四色、五色、六色附	
設銀十兩零五錢，共買稻、麥、菽一十八石，稻每石價八錢，麥每石價六錢，菽每石價三錢，求三色各若干？	麥數＝共糧÷3＝18÷3＝6 麥共價＝麥每石價×麥數＝0.6×6＝3.6 稻、菽共糧數＝共糧－麥數＝18－6＝12
法曰：置共糧，以三歸之得六石為麥數，以麥價因之得三兩六錢為麥共價，另以麥數減共糧餘一十二石，以菽價因之得三兩六錢，另以麥共價減原銀餘六兩九錢，兩數相減餘三兩三錢為實，稻、菽兩價相減餘五錢為法，除之得六石六斗為稻數，以稻、麥兩數減共糧餘五石四斗為菽數。[190]	稻、菽共價＝共銀－麥共價＝10.5－3.6＝6.9 稻數＝(稻、菽共價－菽價 × 稻、菽共糧數) ÷（稻每石價－菽每石價） ＝(6.9－0.3 × 12) ÷（0. 8－0. 3）＝ 6.6 菽數＝共糧數－稻數－麥數 ＝18－6.6－6＝ 5.4

八、首尾和率差分

已知一數列成等差，並知此數列之前 n 項和、後 m 項和，求此數列各項值。此題型類似《算法統宗》卷十四難題衰分三之「竹筒容米歌」題，解法亦同。唯題目敘述與情境不相同。茲作術文與今解之對照分析如下：

---

[189] 同上，頁 2944。
[190] 同上，頁 2943。

原術文

第十八則、首尾和率差分

設十人挨次遞減納銀，甲、乙、丙三人共納一十三兩八錢，庚、辛、壬、癸四人共納<u>一十三兩</u>，[191]求各應納銀數？

法曰：列三人于右上，定甲九衰、乙八衰、丙七衰共二十四衰列于右中，三人納數列于右下，次列四人于左上，定庚三衰、辛二衰、壬一衰共六衰列于左中，四人納數列于左下，先以右上便遍左行中得一十八衰，下得三十九兩六錢，次以左上便遍右行中得九十六衰，下得五十五兩二錢，以兩下對減餘一十五兩六錢為實，兩中對減餘七十八衰為法，除之得二錢為十人挨次遞減之數，另以右上歸右下得四兩六錢為乙數，加乙二錢得四兩八錢為甲數，減乙二錢得四兩四錢為丙數，減丙二錢得四兩二錢為丁數，以下各遞減二錢得應納銀數。[192]

今解

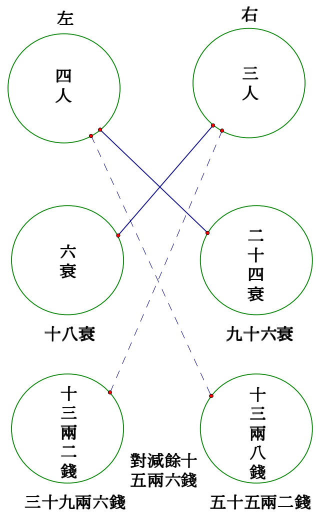


圖 4－12

令甲、乙、丙分別爲 $(x+9d)$、$(x+8d)$、$(x+7d)$

庚、辛、壬、癸分別爲 $(x+3d)$、$(x+2d)$、$(x+d)$、x

$$\begin{cases}3x+24d=13.8\\4x+6d=13.2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12x+96d=55.2\\12x+18d=39.6\end{cases}$$

$$\Rightarrow(96-18)d=(55.2-39.6)$$

$$\Rightarrow 78d=15.6\Rightarrow d=0.2$$

乙＝右下÷右上＝13.8÷3=4.6

甲＝乙＋0.2=4.8；丙＝乙－0.2=4.6；

丁＝丙－0.2=4.4；…………

4. 2. 3.　「分法」內容分析

《數學論》於卷三後附「分法」五則，介紹分數的運算規則，此內容原本屬《九章算術》方田章，而《算法統宗》將其置於卷二的基本算法中。試將《數學論》與《算法統宗》有關分數的運算規則製表比對如下：

[191] 畫線部份應校爲<u>一十三兩二錢</u>。
[192] 同上，頁 2946。

名稱	《數學論》之「分法」[193]	《算法統宗》之分數運算[194]
命分	第一則、命分 設銀四十兩，三人分之，求每人應分銀數？ 法曰：置銀為實，以人數除之，得一十三兩，餘一不盡則以法為分母，以不盡之一為分子，命為一十三兩又三分兩之一。 解曰：三分兩之一即三錢三分三三不盡。	無
約分	第二則、約分 設以九十八為法，除實不盡者四十二，求約若干？ 法曰：以子四十二減母九十八(餘五十六)，再減之餘一十四，復以母十四減子四十二(餘二十八)，再減之亦餘一十四，謂之子母相同，即以十四為法除母九十八得七，除子四十二得三，即命為七分之三。 解曰：母數九十八是七箇十四，子數四十二是三箇十四，九十八之與四十二若七之與三也，故命為七分之三。遇不可約之數，直以本數命之，如母九十七，子四十二，此數不可約者也，直命為九十七之四十二。	約分 假如今有物九十八除了四十二，問約得若干？ 法曰：(數多為母數少為子)置母九十八內減去二個四十二餘一十四，另置子四十二減去二個一十四亦餘一十四，為之子母相同，就以十四為法除母九十八是七箇一十四，另以法除子四十二是三箇一十四，故曰七分中除三，餘倣此。
乘分	第三則、乘分 設一十八人分銀，每人分得三百七十六兩又九分兩之六，求共銀？ 法曰：置三百七十六兩為實，以母九因之(得三千三百八十四兩)，加入子六(共三千三百九十兩)，以人數乘之(得六萬一千零二十兩)，再以母九歸之得六千七百八十兩即所求。 解曰：不以母因實，則不能加入子數，故因實以就子也。	乘分 假如今有一百九十人支銀一兩一十九分兩之一，問該銀若干？ 法曰：置銀一兩以分母十九通之加分子一共得二十，又以人一百九十乘得三千八百為實，卻以支銀一兩以分母十九通之得十九兩為法除之合問。

193 同上，頁 2946~2947。
194 轉引自梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 185~199。

課分	第四則、課分 設有布二疋又九分疋之五，用過一疋又六分疋之一，求餘布？ 法曰：置用過布一疋，以母六因之仍得六，加入子一共七，又以原布母九因之得六十三，另置原布二疋，以母九因之得一十八，加入子五共二十三，又以用過布母六因之得一百三十八，兩數相減餘七十五為實，以兩母謂九與六相乘得五十四為法，除之得一疋零二十一，以約分法約之得十八之七，即命為餘布一疋又十八分疋之七。 解曰：兩數各帶子母，不得不兩因之，兩因之不得不兩歸之，法以兩母相乘除實者與兩歸得數同也。	課分 假如今有布二疋九分疋之五，用過一疋六分疋之一，問尚餘若干？ 法曰：置用過布一疋，以分母六通之加分子一共得七，又以原布分母九通之得六十三。另置原布二疋，以分母九通之加分子五共得二十三，又以用過布分母六通之得一百三十八，內減去前六十三餘七十五為實，以二分母九六相乘得五十四為法，除之得一疋，餘實二十一，法實皆三約之合問。
通分	第五則、通分 設粟四十五石，每七分石之五值銀八分兩之六，求共銀？ 法曰:置粟為實,以粟母七乘銀子六得四十二為法,乘實得一千八百九十,另以銀母八乘粟子五得四十為法,除之得四十七兩二錢五分即所求。 解曰：原當置粟為實，以粟母七乘之，粟子五除之，求得共粟七分之五，再以銀子六乘之，銀母八除之即得銀數。然既以粟母七乘之，又以銀子六乘之，不如以粟母七乘銀子六，以乘之也，既以粟子五除之，又以銀母八除之，不如以銀母八乘粟子五，以除之也。	通分 假如今有布四十五疋，每疋價三分兩之二，問共該銀若干？ 法曰：置布四十五疋，以分子之二因之得九十兩為實，卻以分母三為法歸之合問。

由上表可知「約分」、「乘分」、「課分」、「通分」與《算法統宗》上的運算方式相同，甚而「約分」與「課分」二題的題目數據及情境也都相同。幾乎可斷定杜知耕于此「分法」應有參考《算法統宗》。至於「命分」之目雖不見於《算法

統宗》，然其部份概念亦可由通分法的規則找到。

4.2.3. 粟布章、衰分章小結

經由上述分析，可發現《數學論》第三卷的粟布章、衰分章有幾個特色，茲簡述如下：

（1） 經比對粟布章、衰分章及附「分法」之題型及所用之概念、公式，與《算法統宗》相同的分別有 20 題、17 題及 3 題，約占卷三所有題目的 80%。題型及所用之概念雖同，但數據、敘述則不盡相同。而題目所使用之數據亦同則分別有 2 題、8 題及 2 題。[195]顯見於此二單元，《數學論》與《算法統宗》同質性很高。可看出杜知耕於此二單元應以《算法統宗》爲主要參考依據。

（2） 以數學概念與公式爲中心：就知識內容的安排來看，題目強調的是數學概念與公式本身的傳達，而非該題之答案或情境。

（3） 此外觀察前面各節已論述之題型可看出，杜知耕對於題目的所用之數據是經過設計的，且可發現其數據大部份爲整數，而非原《九章算術》或《算法統宗》上的分數數據。筆者猜測其原因是因其並未像《九章算術》一般，於方田章就介紹分數的運算規則，因此爲了顧及數學概念推導與引用之邏輯性，所以盡可能使題目數據爲整數。而於衰分章之後，以分配不盡的情形作爲引子，定義分數，進而介紹分數之運算規則。此排列方式十分符合數學教育之引導推理模式。

[195] 見附錄 6、7。

4.3. 商功章、均輸章、盈朒章、方程章內容分析

《數學論》卷五卷首亦設有凡例 5 則，簡單的介紹「正與正、負與負為同名，正與負為異名。」的同名與異名的概念，[196]即今同號與異號的概念。及「同名相減猶異名相加，故異名相加者必同名相減，同名相加猶異名相減，故異名相減者必同名相加。」[197]含正、負數的加減運算規則。其下則分上卷之上、上卷之下、下卷之上、下卷之下四部份，其目分別爲商功、均輸、盈朒與方程。各有題目 8 題、7 題、8 題與 9 題共 32 題。底下按商功、均輸、盈朒與方程分別介紹如下：

4.3.1. 商功章內容分析

《算法統宗》於卷八商功章指出：「商，度也，商量用力之法也。此章以堅壤之率，求穿地之實。以廣、濶、高、深，求城塹溝渠之積。以車担往來，求程途負載之功。」[198]雖章名同爲商功，但本書作者大概只將此章討論重點置於商量用力之法，即計算勞動力人數的問題。至於求城塹溝渠之體積的問題則已於少廣章介紹，本章只收錄 1 題。而以車担往來，求程途負載之功的問題則於另置於均輸章介紹。全章共有 8 題，經筆者比對題目所用之數學概念、公式與《算法統宗》同的有 5 題。但同樣的，題目的敘述、情境及所用數據皆不相同。[199]底下就第 7 題作術文與今解之對照分析，並列《算法統宗》的「三女納錦題」比較：

原術文

第七則、遲疾求齊二法

設一臺，甲約五日築完，乙約七日築完，丙約九日築完，令甲、乙、丙同築，求幾日完？

法曰：以七乘五得三十五日，再以九乘之得三百一十五日為實，另以七乘五得三十五，以五乘九得四十五，以九乘七得六十三，三數並共一百四十三為法，除之得二日又一百四十三日之二十九即所求。

今解

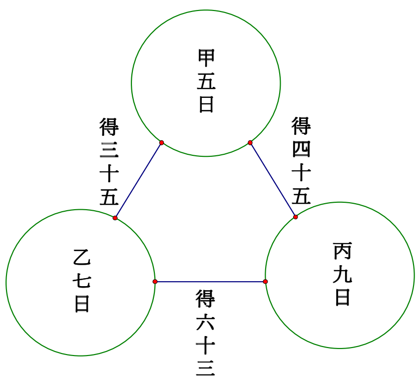


圖 4－13

[196] 引自杜知耕，《數學論》卷五上之上，頁 2978。
[197] 同上。
[198] 參見梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 593。
[199] 見附錄 8。

解曰：以乙乘甲又以丙乘之者，求三率之齊數也三百一十五日是六十三箇五日，四十五箇七日，三十五箇九日也，甲五日築一臺，則三百一十五日必能築六十三臺，乙七日築一臺，則三百一十五日必能築四十五臺，丙九日築一臺，則三百一十五日必能築三十五臺，是三人三百一十五日共築一百四十三臺也，故以一百四十三臺除三百一十五日得三人共築一臺之日數。[200]

如圖 4－13

完成日數

$$=\frac{7\times5\times9}{7\times5+5\times9+9\times7}=\frac{315}{143}=2\frac{29}{143}$$

說明：如附圖 4－13

三率之齊數＝7×5×9＝315（日）
則 315 日
甲可築 7×9＝63 臺
乙可築 5×9＝45 臺
丙可築 7×5＝35 臺
三人共可築 143 臺
則三人共築一臺之日數＝$\frac{315}{143}=2\frac{29}{143}$

「三女納錦題」術文

原有三女各納錦一方，長女五日完，中女七日完，小女九日完。今令三女共納錦一方，何日可畢。

答曰：二日一百四十三分日之二十九

法曰：以日為分母，方為分子。以三母相乘，先以五日乘七日得三十五日，又以九日乘之得三百一十五日為實。以母互乘子法長女五日　中女七日　小女九日。先以五日乘七日得三十五日，又以七日乘九日得六十三日，次以九日乘五日得四十五，併之得一百四十三日為法，除實得二日不盡二十九以法命之。[201]

顯見的此二題的所用之算法及所用之數據完全相同，唯題目之情境不同。但觀察此題「解」的說明，可看出杜知耕解釋問題清楚明白及詳實的風格。且其所另附之圖像亦對此概念及算式，提供了一個清楚、巧妙的圖像說明。

[200] 引自杜知耕，《數學鑰》卷五上之上，頁 2981。
[201] 轉引自梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 615~616。

4. 3. 2. 均輸章內容分析

均輸爲古代算法，原爲《九章算術》卷六之名。《算法統宗》於卷九均輸章定義：「均，平也，輸送也。此章以户數多寡、道里遠近而求車數、粟數。以粟數高下而求僦值。以錢數多少而求傭錢。」[202]本書於此章所討論重點乃以田地之多寡、方物之貴賤、道里之遠近及任載之僦值爲參考依據，平均的分配各單位所應納之糧（或銀）數。

從其題目順序的編排「田地之多寡➔方物之貴賤➔道里之遠近➔任載之僦值➔合均田地多寡方物貴賤道里遠近」，亦可看出作者由簡而繁、由易而難逐項條件介紹、討論而後統合的編排體例。全章共有 7 題，經筆者比對題目所用之數學概念、公式與《算法統宗》同的有 6 題，而其中 3、4 二題爲原《算法統宗》商功章之題目，其餘 4 題則爲均輸章的題目。與前面的結果相同，題目的敘述、情境及所用數據不盡相同。[203]底下就 6、7 二題，與《算法統宗》的題目相似度最高的題目來作術文並列比較：

《數學論》術文[204]	《算法統宗》術文[205]
第六則、任載之重輕二法 設重車日行五十里，輕車日行七十里，今載米至倉，五日三返，求至倉里數？ 法曰：置輕、重車日行里數相乘得三百五十里，又以五日乘之得一千七百五十里為實，另並輕、重車日行里數，以三返乘之得三百六十為法，除之得四十八里又三十六分里之二十二即所求。 解曰：兩車日行里數相乘得三百五十里是兩車行之齊數也三百五十里是七箇五十里亦五箇七十里，乃輕車五日、重車七日所行之里數。並兩車日行里數除之，即得	今有空車日行七十里，重車日行五十里，今載穀至倉，五日三返，問路遠若干？ 答曰：四十八里三十六分之二十二 法曰：置空車、重車日行里數相乘得三百五十里，又以五日乘之得一千七百五十里為實，另併空車、重車日行里數，以三返乘之得三百六十為法，除之不盡二十二以法命之。

202 同上，頁 643。
203 見附錄 8。
204 引自杜知耕，《數學論》卷五上之下，頁 2983~2984。
205 轉引自梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 654。

一日重往輕來之里數，再以五日乘之，三返除之，即得至倉之里數。法變用五日乘實，三返乘法者，亦同乘同除也。	

此題本《九章算術》均輸章第九題，數據、答案全同，題目敘述略有更動。然比較《數學論》與《算法統宗》之算法可看出其完全相同。尤以其一開始的算式「置輕、重車日行里數相乘得三百五十里」與「置空車、重車日行里數相乘得三百五十里」顯然犯了同樣的錯誤。[206]雖此錯誤並無影響最後的計算結果。此外，經筆者比對，此算式與《九章算術》所載亦不相同。此或可當成杜知耕《數學論》一書參考《算法統宗》的一個充份的證明。

《數學論》術文[207]	《算法統宗》術文[208]
第七則、合均田地多寡方物貴賤道里遠近	
設甲、乙、丙、丁、戊五處，定粟二千石，以田地之多寡、道里之遠近、粟價之貴賤均輸之，甲地二萬零五百二十畝，粟價每石二兩，自輸本處。乙地一萬二千三百一十二畝，粟價每石一兩，至輸所二百里。丙地七千一百八十二畝，粟價每石一兩二錢，至輸所一百五十里。丁地一萬三千三百三十八畝，粟價每石一兩七錢，至輸所二百五十里。戊地五千一百三十畝，粟價每石一兩三錢，至輸所一百五十里。每石、每里僦車銀四釐，求各應輸數？	今有五縣輸粟二萬石，照人戶多少、道里遠近、價值上下而均輸之，每車載二十五石銜一里與僦里鈔一錢。甲縣二萬零五百二十戶，粟石價二兩。乙縣一萬二千三百一十二互，粟石價一兩，遠輸所二百里。丙縣七千一百八十二戶，粟石價一兩二錢，遠輸所一百五十里。丁縣一萬三千三百三十八戶，粟石價一兩七錢，遠輸所二百五十里。戊縣五千一百三十戶，粟石價一兩三錢，遠輸所一百五十里。問各輸粟若干？僦音就，賃也。
法曰：先置甲地為實，以粟價二兩為法除之，得一千零二十六衰，次置乙地為實，以僦銀四釐因至輸所二百里得八錢，並入粟價一兩共一兩八錢為法，除實得六百八十四衰，次置丙地為實，以僦銀四釐因至輸所一百五	答曰： 甲：七千一百四十二石三斗五升九合九勺 乙：四千七百六十一石五斗七升三合三勺 該僦里鈔二十兩。 丙：二千七百七十七石五斗八升四合 該鈔一十五兩。

206 三百五十里當校爲三千五百里。
207 引自《數學論》卷五上之下，頁 2984~2985。
208 轉引自梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 648~650。

十里得六錢，並入粟價一兩二錢共一兩八錢為法，除實得三百九十九衰，又次置丁地為實，以僦銀四釐因至輸所二百五十里得一兩，並入粟價一兩七錢共二兩七錢為法，除實得四百九十四衰，末置戊地為實，以僦銀四釐因至輸所一百五十里得六錢，並入粟價一兩三錢共一兩九錢為法，除實得二百七十衰，合五數共二千八百七十三衰為總衰，置定粟二千石，以甲衰乘之得二百零五萬二千石，以總衰除之得七百一十四石二斗三升五合九勺九秒為甲數。置二千石以乙衰乘之得一百三十六萬八千石，以總衰除之得四百七十六石一斗五升七合三勺三秒為乙數。置二千石以丙衰乘之得七十九萬八千石，以總衰除之得二百七十七石七斗五升八合四勺四秒為丙數。置二千石以丁衰乘之得九十八萬八千石，以總衰除之得三百四十三石八斗九升一合四勺為丁數。置二千石以戊衰乘之得五十四萬石，以總衰除之得一百八十七石九斗五升六合八勺四秒為戊數。	丁：三千四百三十八石九斗一升四合 該鈔二十五兩。 戊：一千八百七十九石五斗六升八合四勺 該鈔一十五兩。 解曰：甲縣乃自輸本縣而無僦里，惟乙、丙、丁、戊四邑有之，各照里數遠近以僦鈔一錢因之各得僦里鈔也。 法曰：置甲縣戶數為實，以粟價二兩為法除之得一千令二十六衰，乙縣行道二百里，以每車載二十五石除之得八錢併粟價一兩共一兩八錢，除戶數得六百八十四衰，丙縣行道一百五十里，以每載二十五石除之得六錢併粟價一兩共一兩八錢，除戶得三百九十九衰，丁縣行道二百五十里，亦以二十五石除之得一兩併粟價共二兩七錢，除戶得四百九十四衰，戊縣行道一百五十里，亦以二十五石除之得六錢併粟價共一兩九錢，除戶得二百七十衰，就以五衰列置五縣再併五衰共二千八百七十三衰為法，另以賦粟二萬石以乘五縣各衰為實，以法除之合問。

此題亦原《九章算術》均輸章第三題題目，數據、答案略異，《九章算術》原五縣共輸一萬斛，而《數學論》與《算法統宗》則分別爲二千石與二萬石。題目敘述亦略有更動。然比較《數學論》與《算法統宗》之算法可看出其完全相同。皆是利用正比例、反比例及加權比例分配之概念。惟《算法統宗》丙縣答案有錯誤，應爲二千七百七十七石五斗八升四合四勺。而《數學論》顯已更正此錯誤。

4.3.3. 盈朒章內容分析

「盈」，多也。「朒」，少也。「盈朒」即盈不足，乃過多與過少之意也。本章內容主要是討論以有餘、不足者求隱雜之數，即在非負數範圍內用雙假設法解線性方程的問題。所用之方法爲《九章算術》中盈不足術，即《同文算指》中的疊借互徵法。本章收錄題目共 8 題，其目分別爲「盈適足」、「朒適足」、「兩盈」、「兩朒」、「一盈一朒」、「帶分子母盈適足」、「帶分子母兩盈」、「帶分子母一盈一朒」。底下分別介紹。

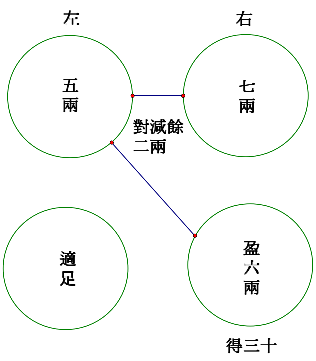
一、盈適足

設有人共買物，每人出a_1錢，盈b_1錢，每人出a_2錢，適足，則物價＝$\dfrac{a_2 \times b_1}{a_1 - a_2}$，人數＝$\dfrac{b_1}{a_1 - a_2}$，原題如下：

原術文	今解
第一則、盈適足 設和買一物，每人出銀七兩，盈六兩。每人出銀五兩，適足。求物價、人數？ 法曰：列七兩、盈六兩于右，列五兩于左，以左上乘右得三十兩為物實，右下六兩為人實，另以左上、右上對減餘二兩為法，以法除物實得一十五兩為物價，以法除人實得三為人數。	如下圖 4－14－1 物價 $=\dfrac{物實}{法}=\dfrac{左上\times右下}{右上-左上}=\dfrac{5\times6}{7-5}=15$（兩） 人數 $=\dfrac{人實}{法}=\dfrac{右下}{右上-左上}=\dfrac{6}{7-5}=3$（人）
解曰：甲為七兩、乙為五兩、丙為五兩、七兩對減之二兩，各三倍之為丁、戊、己，己既出七兩所盈之六兩，己與戊或與丁之比例必若丙與乙或與甲也。丁與甲、戊與乙之比例必皆若己與丙也。法以五兩乘盈六兩，以對減所餘之二兩除之者，借丙與己之比例，因乙以求戊也，戊即物價，倍數則人數也。[209]	說明：如下圖 4－14－2 令丙爲五兩、七兩對減之二兩， 己爲所盈之六兩 則甲：乙：丙＝丁：戊：己 物價＝戊＝乙$\times\dfrac{己}{丙}=5\times\dfrac{6}{2}=15$ 人數＝$\dfrac{己}{丙}=\dfrac{6}{2}=3$

[209] 引自杜知耕，《數學論》卷五下之上，頁 2985。

圖 4－14－1



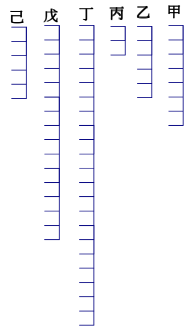


圖 4－14－2

二、朒適足

設以固定銀數買貴、賤二物，貴物單價a_1錢，不足b_1錢，賤物單價a_2錢，適足，則共銀數＝$\dfrac{a_2\times b_1}{a_1-a_2}$，買物數＝$\dfrac{b_1}{a_1-a_2}$，算法與「盈適足」題一樣，原題如下：

原術文	今解
第二則、朒適足 設貴賤二物，貴價七兩、賤價五兩，以銀買貴物，朒六兩。買賤物，適足。求物數、銀數？	如下圖 4－15－1 銀數 $=\dfrac{銀實}{法}=\dfrac{左上\times 右下}{右上-左上}=\dfrac{5\times 6}{7-5}=15$（兩）
法曰：列貴價七兩、朒六兩于右，列賤價五兩于左，以左上乘右下得三十兩為銀實，右下六兩為物實，另以左上、右上對減餘二兩為法，以法除銀實得一十五兩為銀數，以法除物實得三為物數。	物數 $=\dfrac{物實}{法}=\dfrac{右下}{右上-左上}=\dfrac{6}{7-5}=3$ 說明：如下圖 4－15－2 令丙爲五兩、七兩對減之二兩， 己爲所朒之六兩
解曰：甲為賤價，乙為貴價，丙為兩價之較，丁為賤物之共價，即銀數也。戊為貴物之共價，己則兩共價之較也。丁與甲、戊與乙之比例必皆若己與丙。此借丙與己之比例，因甲以求丁也，既得丁，而戊不待言矣。[210]	則甲：乙：丙＝丁：戊：己 銀數＝丁＝甲$\times\dfrac{己}{丙}=5\times\dfrac{6}{2}=15$ 物數＝$\dfrac{己}{丙}=\dfrac{6}{2}=3$

[210] 同上，頁 2986。

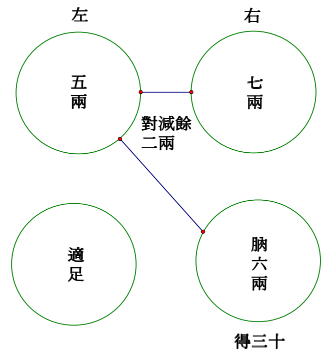


圖 4—15—1

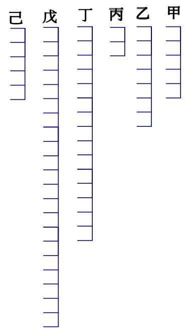


圖 4—15—2

顯然此二題所用之公式相同。且從其「解」之附圖可看出此處公式之導出所用爲「異乘同除」之比例概念而非劉徽之齊同術。

三、兩盈

設以固定銀數分給數人，分給 a_1 人，盈餘 b_1 錢，分給 a_2 人，盈餘 b_2 錢，則共銀數＝$\dfrac{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1}{a_1 - a_2}$，分銀數＝$\dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$，原題如下：

原術文

第三則、兩盈

設有銀，七人分之盈二兩，五人分之盈八兩，求共銀及分銀數？

法曰：列七人、盈二兩于右，列五人、盈八兩于左，先以右上乘左下得五十六兩，次以左上乘右下得十兩，兩數對減餘四十六兩為共銀實，又以左下、右下對減餘六兩為分銀實，另以左上、右上對減餘二為法，以法除共銀實得二十三兩為共銀數，以法除分銀實得三兩為每人分銀數。

解曰：七人分之盈二兩是七倍三兩朒于共銀之數，以五人乘之，則是三十五倍三兩朒于五倍共銀之數也，又五人分之盈八兩是五倍三兩朒于共銀之數，以七人乘之，則是三十五倍三兩朒于七倍共銀之數也，今以三十五倍三兩朒于五倍共銀之數即一十兩，減三十五倍三兩朒于七倍共銀之數

今解

如下圖 4－16

共銀數

$$=\frac{\text{共銀實}}{\text{法}}=\frac{\text{右上}\times\text{左下}-\text{左上}\times\text{右下}}{\text{右上}-\text{左上}}$$

$$=\frac{7\times8-5\times2}{7-5}=23\text{（兩）}$$

每人分銀數

$$=\frac{\text{分銀實}}{\text{法}}=\frac{\text{左下}-\text{右下}}{\text{右上}-\text{左上}}$$

$$=\frac{8-2}{7-5}=3\text{（兩）}$$

說明：

$$\begin{cases}7\times\text{分銀數}+2=\text{共銀數}\\5\times\text{分銀數}+8=\text{共銀數}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}35\times\text{分銀數}+5\times2=5\times\text{共銀數}\\35\times\text{分銀數}+7\times8=7\times\text{共銀數}\end{cases}$$

（7－5）共銀數＝（7×8－5×2）

$$\text{共銀數}=\frac{7\times8-5\times2}{7-5}=23\text{（兩）}$$

（7－5）分銀數＝（8－2）

即五十六兩，所餘必二倍共銀之數矣。故以五、七對減之二為法，除之即得共銀也。以法除分銀實得分銀數，與前二則除人實、物實得人數、物數同。[211]

分銀數

$$=\frac{8-2}{7-5}=3\text{（兩）}$$

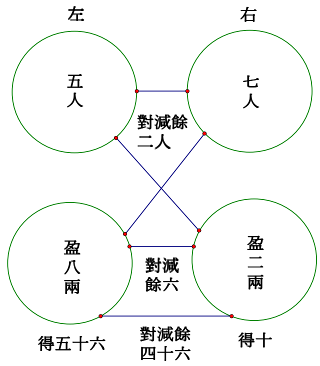


圖 4－16

四、兩朒

設以固定銀數分給數人，分給a_1人，不足b_1錢，分給a_2人，不足b_2錢，則共銀數＝$\dfrac{a_1\times b_2-a_2\times b_1}{a_1-a_2}$，分銀數＝$\dfrac{b_2-b_1}{a_1-a_2}$，原題如下：

原術文	今解
第四則、兩朒 設有銀，每人分七兩，朒八兩。每人分五兩，朒二兩。求人及銀數？ 法曰：列分七兩、朒八兩于右，列分五兩、朒二兩于左，先以右上乘左下得十四兩，次以左上乘右下得四十兩，兩數相減餘二十六兩為銀實，又以左下、右下對減餘六兩為人實，另以左上、右上對減餘二兩為法，以法除銀實得一十三兩為銀數，以法除人實得三為人數。 解曰：以五兩乘朒八兩得四十兩是三十五倍三兩盈于五倍共銀之數，以七兩乘朒二兩得一十四兩是三十五倍三兩盈于七倍共銀之數，相減之餘必為二倍共銀之數。故以法除之得銀數。餘同前解。[212]	如下圖 4－17 銀數 $=\dfrac{\text{銀實}}{\text{法}}=\dfrac{\text{右上}\times\text{左下}-\text{左上}\times\text{右下}}{\text{右上}-\text{左上}}$ $=\dfrac{7\times(-2)-5\times(-8)}{7-5}=13$（兩） 人數 $=\dfrac{\text{人實}}{\text{法}}=\dfrac{\text{左下}-\text{右下}}{\text{右上}-\text{左上}}$ $=\dfrac{(-2)-(-8)}{7-5}=3$（兩） 說明： $\begin{cases}7\times\text{人數}+(-8)=\text{銀數}\\5\times\text{人數}+(-2)=\text{銀數}\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}35\times\text{人數}+5\times(-8)=5\times\text{銀數}\\35\times\text{人數}+7\times(-2)=7\times\text{銀數}\end{cases}$ （7－5）銀數＝（7×(－2)－5×(－8)） 銀數＝$\dfrac{7\times(-2)-5\times(-8)}{7-5}=13$（兩）

[211] 同上，頁 2986~2987。

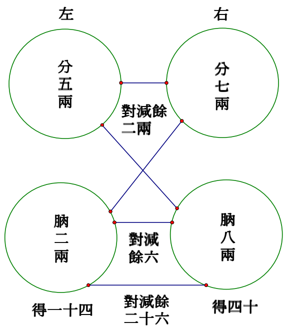


圖 4－17

（7－5）人數＝（(－2)－(－8)）

$$\text{人數}=\frac{(-2)-(-8)}{7-5}=3$$

五、一盈一朒

設以繩索測木，索 a_1 摺比之木，木不足 b_1 尺，索 a_2 摺比之木，木盈 b_2 尺，則共銀數＝$\dfrac{a_1\times b_2-a_2\times b_1}{a_2-a_1}$，分銀數＝$\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$，原題如下：

原術文

第五則、一盈一朒

設木不知高，以索五摺比之，木朒二尺；七摺比之，木盈三尺。求木高及索長？

法曰：以五摺因朒二尺得十尺，以七摺因盈三尺得二十一尺，列五摺朒十尺于右，列七摺盈二十一尺于左，先以右上乘左下得一百零五尺，次以左上乘右下得七十尺，兩數並共一百七十五尺為索實，又並左下、右下共三十一尺為木實，另以左上、右上對減餘二摺為法，以法除索實得八十七尺五寸為索長，以法除木實得一十五尺五寸為木高。

解曰：同此一索，或為七摺、或為五摺，必五摺長而七摺短也。雖不知每摺之度，而每五長摺之盈于五短摺者，必二短摺。每七短摺之朒于七長摺者，必二長摺。今長摺盈于木高二尺木朒于索是索盈于木也，五長摺盈于五倍木高必十尺，以七乘十尺則為三十五長

今解

如下圖 4－18

索長

$$=\frac{\text{索實}}{\text{法}}=\frac{\text{右上}\times\text{左下}-\text{左上}\times\text{右下}}{\text{左上}-\text{右上}}$$

$$=\frac{5\times21-7\times(-10)}{7-5}=\frac{5\times21+7\times10}{7-5}=87.5$$

木高

$$=\frac{\text{木實}}{\text{法}}=\frac{\text{左下}-\text{右下}}{\text{左上}-\text{右上}}$$

$$=\frac{21-(-10)}{7-5}=\frac{21+10}{7-5}=15.5$$

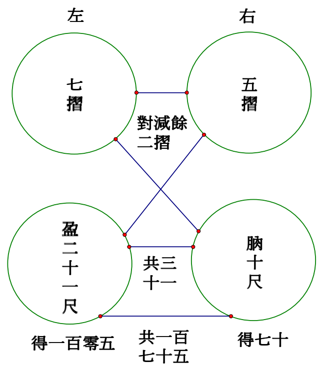


圖 4－18

[212] 同上，頁 2987。

<table>
<tr>
<td>

摺盈于三十五倍木高之度。短摺朒于木高三尺木盈于索是索朒于木也，七短摺朒于七倍木高必二十一尺，以五乘二十一尺則為三十五短摺朒于三十五倍木高之度。兩數並即一百七十五尺為索實者，則三十五長摺盈于三十五短摺之度矣。然三十五長摺盈于三十五短摺即七倍五長摺盈于七倍五短摺之度，亦即五倍七短摺朒于五倍七長摺之度也。五倍七短摺之朒于五倍七長摺者，十長摺之度也。七倍五長摺盈于七倍五短摺者，十四短摺之度也。十四短摺為索之倍長，十長摺亦索之倍長也，故以五七對減之二除之得索長。餘同前解。[213]

</td>
<td>

說明：

$\begin{cases} 7\times木高+(-21)=索長 \\ 5\times木高+10=索長 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 35\times木高+5\times(-21)=5\times索長 \\ 35\times木高+7\times10=7\times索長 \end{cases}$

$(7-5)索長 =(7\times10-5\times(-21))$

$=(7\times10+5\times21)$

$索長=\dfrac{5\times21+7\times10}{7-5}=87.5$（尺）

$(7-5)木高 =(10-(-21))$

$=(10+21)$

$木高=\dfrac{21+10}{7-5}=15.5$（尺）

</td>
</tr>
</table>

「一盈一朒」題與「兩盈」、「兩朒」二題所用之概念與公式看似不同。其實完全相同。只要將「一盈一朒」題的木不足 b_1 尺改爲 a_1 摺繩索比之盈 b_1 尺，木盈 b_2 尺改爲 a_2 摺繩索比之不足 b_2 尺即可看出。而此三題公式之推導顯然是用劉徽之齊同術的概念。

此外杜知耕雖將此處分成「盈適足」、「朒適足」、「兩盈」、「兩朒」、「一盈一朒」等五題，然若引入負數與零的概念，此五題其實可視爲同一概念、公式的不同表徵。

六、帶分子母盈朒法

本章 6、7、8 三題屬此類問題，爲前述問題數學概念之推廣及延伸。其目分別爲「帶分子母盈適足朒適足同」、「帶分子母兩盈兩朒同」、「帶分子母一盈一朒」。其題型大概是以總銀數的幾分之幾買物的盈朒情形，逕求總銀數與物價。所採用的方法即《算法統宗》所謂的「盈朒雙套」。《九章算術》盈不足術的「兩盈」、「兩不足」術皆有「有分者通之」一語，是爲雙套盈朒的先聲。[214]茲就第 8 題作術文與今解之對照分析：

---

[213] 同上，頁 2987~2988。
[214] 參見梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 706。

原術文

第八則、帶分子母一盈一朒

設物以銀十二分之七買之，盈二兩五錢。以銀六分之二買之，朒五兩。求物價、銀數？

法曰：列母十二、子七、盈二兩五錢于右，列母六、子二、朒五兩于左，先以右上乘左中得二十四兩，即以二十四兩乘右下得六十兩，次以左上乘右中得四十二兩，即以四十二兩乘左下得二百一十兩，兩數並共二百七十兩為物實，又以兩母相乘得七十二兩，以七十二兩乘左下得三百六十兩，以七十二兩乘右下得一百八十兩，兩數並共五百四十兩為銀實，另以左中、右中兩得數相減餘一十八兩為法，以法除物實，得一十五兩為物價，以法除銀實得三十兩為銀數。

解曰：七十二兩為兩母之齊數，二十四兩為七十二兩六分之二，四十二兩為七十二兩十二分之七，兩數相差十八兩。並盈朒兩數共七兩五錢一盈一朒相並猶兩盈兩朒相減也為元銀十二分之七與六分之二相差之數，是七十二兩與元銀之比例必若十八兩之與七兩五錢矣。以七十二兩乘兩下相並為銀實，以十八除之，亦借比例法也解同前，又求物實以四十二兩乘左下得二百一十兩為四十二倍六分之二朒于四十二倍物價之數，以二十四兩乘右下得六十兩為二十四倍十二分之七盈于二十四倍物價之數，然四十二倍六分之二實與二十四倍十二分之七等，今並六十兩與二百一十兩共兩百七十兩必四十二倍物價之盈于二十四倍物價者，即

今解

如下圖 4－19

$$物價=\frac{物實}{法}$$

$$=\frac{右上\times左中\times右下-左上\times右中\times左下}{左上\times右中-右上\times左中}$$

$$=\frac{12\times2\times2.5-6\times7\times(-5)}{6\times7-12\times2}$$

$$=\frac{12\times2\times2.5+6\times7\times5}{6\times7-12\times2}=15$$

$$銀數=\frac{銀實}{法}$$

$$=\frac{右上\times左上\times右下-右上\times左上\times左下}{左上\times右中-右上\times左中}$$

$$=\frac{(6\times12)\times2.5-(6\times12)\times(-5)}{6\times7-12\times2}$$

$$=\frac{(6\times12)\times2.5+(6\times12)\times5}{6\times7-12\times2}=30$$

說明：如圖 4－19

$$\begin{cases}\frac{7}{12}銀數-2.5=物價\\ \frac{2}{6}銀數+5=物價\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{6\times7}{72}銀數-7.5=物價\\ \frac{12\times2}{72}銀數+5=物價\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{24\times42}{72}銀數-24\times2.5=24\times物價\\ \frac{42\times24}{72}銀數+42\times5=42\times物價\end{cases}$$

（42－24）物價＝42x5－（－24x2.5）

$$物價=\frac{12\times2\times2.5+6\times7\times5}{6\times7-12\times2}=15$$

（18－16）銀數＝72x2.5－72x（－5）

十八倍物價，故以十八為法除之得物價。又法以左中得數二十四兩乘左下得數兩百一十兩得五千零四十兩，以右中得數四十二兩乘右下得數六十兩得二千五百二十兩，並兩數共七千五百六十兩，另以兩子二七相乘得一十四兩，除之得五百四十兩為銀實，以前法十八除之得數同。左下先以四十二乘之，又以二十四乘之，右下先以二十四乘之，又以四十二乘之，猶以二十四與四十二相乘得一千零八，以乘之也。以一千零八乘之，又以兩中相乘得一十四除之，猶以一十四除一千零八，得七十二以乘之也。前法元以兩母相乘得七十二，以乘兩下，得數相並為銀實。與後法無異，故得數同也。[215]

$$\text{銀數}=\frac{(6\times12)\times2.5+(6\times12)\times5}{6\times7-12\times2}=30$$

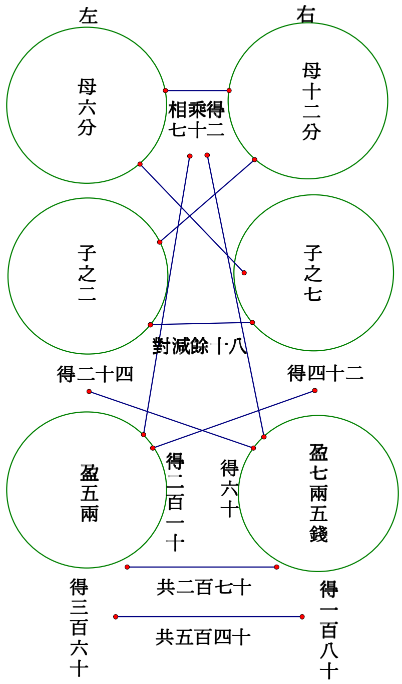


圖 4－19

此類題目的公式為：令以總銀數的 $\frac{a_1}{m}$ 買物，盈（不足）b_1 錢，以總銀數的 $\frac{a_2}{n}$ 買物，不足（盈）b_2 錢，則總銀數為 $\frac{m\times a_2\times b_1\pm n\times a_1\times b_2}{n\times a_1-m\times a_2}$，物價為 $\frac{m\times n\times(b_1\pm b_2)}{n\times a_1-m\times a_2}$，當 $b_1=0$ 或 $b_2=0$ 時為「帶分子母盈適足朒適足同」的題目。而當兩式分子取減號時則為「帶分子母兩盈兩朒同」的題目。而若兩式分子取加號時則為「帶分子母一盈一朒」的題目。

[215] 引自杜知耕，《數學論》卷五下之上，頁 2990。

4.3.4. 方程章內容分析

原爲《九章算術》卷八之名，內容是介紹線性方程組的一般解法，即今高斯（C.F Gauss，1777~1855 年）消去法。[216]方程謂按長方形排列之程數，即今之增廣矩陣，程大位謂「方，正也。程，數也。」此意頗得方程要領。[217]本書之方程章共有 9 個題目，分別爲「二色方程」1 題，「三色方程」2 題，「正負同異加減」5 題，及「四色方程」1 題。經比對大部份皆可從《算法統宗》找到相同概念的題目。底下分別介紹：

一、二色方程

二色方程即今之二元一次方程組，茲作術文與今解之對照分析如下：

原術文

第一則、二色方程

設稻三石，菽二石，共價銀八兩二錢四分，又稻四石，菽五石，共價銀一十二兩二錢，求二色價？

法曰：列稻三石，菽二石，價八兩二錢四分于右，列稻四石，菽五石，價一十二兩二錢于左，先以右稻徧乘左行菽得一十五石，價得三十六兩六錢，次以左稻徧乘右行菽得八石，價得三十二兩九錢六分，以兩價得數對減餘三兩六錢四分為實，以兩菽得數相減餘七石為法，除之得五錢二分為菽每石價，以右行菽二石因之或用左行菽五石亦可得一兩零四分為菽二石價，以減右共價餘七兩二錢為稻三石價，以稻三石歸之得二兩四錢為稻每石價。

解曰：欲得稻、菽二色價須先求菽一色價，欲求菽一色價須先減去稻數及稻價，欲減去稻數及稻價必先齊兩行稻數、稻價

今解

【法 1】先求菽價，如下圖 4－20－1

$$\begin{cases} 4\text{稻}+5\text{菽}=12.2 \\ 3\text{稻}+2\text{菽}=8.24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12\text{稻}+15\text{菽}=36.6 \\ 12\text{稻}+8\text{菽}=32.96 \end{cases}\text{兩式相減}$$

（15－8）菽＝36.6－32.96

菽（價）$=\dfrac{3.64}{7}=0.52$

稻（價）$=\dfrac{8.24-2\times 0.52}{3}=\dfrac{7.2}{3}=2.4$

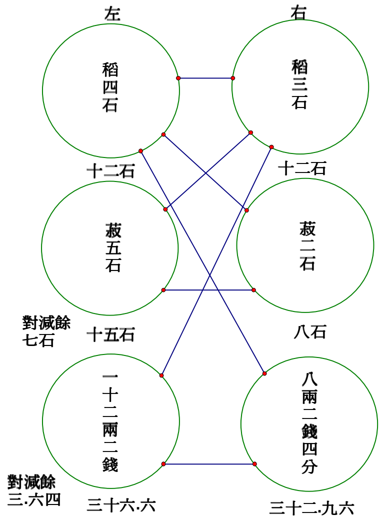


圖 4－20－1

216 參見楊玉星，《清代算學家方中通及其算學研究》，頁 134。

217 參見梅榮照、李兆華，《《算法統宗》校釋》，頁 731。

而使之等。今左價一十二兩二錢為稻四石、菽五石之共價，以右稻三石遍乘之，價得三十六兩六錢，是三倍元價矣。既三倍元價則必為三倍稻數十二石，三倍菽數十五石之共價。右價八兩二錢四分為稻三石、菽二石之共價，以左稻四石遍乘之，價得三十二兩九錢六分，是四倍元價矣。既四倍元價則必為四倍稻數十二石，四倍菽數八石之共價。兩行稻數既各十二石，是稻數齊矣。稻數齊而稻價因之亦齊矣。于稻十二石、菽十五石價內減去稻十二石、菽八石之價，所餘非菽七石之價而何？故以兩菽對減之七石除之得菽價，菽價既得，求稻價不須解矣。

如欲先得稻價，則列兩菽數于兩稻數之上，以右菽二石遍乘左行，以左菽五石遍乘右行，兩價得數相減餘十六兩八錢為實，兩稻得數對減餘七石為法，除之得稻價，此與前法同。前齊稻數，故先得菽價，此齊菽數，故先得稻價也。前稻數齊以十二石，後菽數齊以十石，法中不曾明言，十二石、十石乃暗用數也，後倣此。[218]

【法 2】先求稻價

如下圖 4－20－2

$$\begin{cases}5\text{菽}+4\text{稻}=12.2\\2\text{菽}+3\text{稻}=8.24\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}10\text{菽}+8\text{稻}=24.4\\10\text{菽}+15\text{稻}=42\end{cases}\text{兩式相減餘}$$

（15－8）稻＝42－24.4

$$\text{稻（價）}=\frac{16.8}{7}=2.4$$

$$\text{菽（價）}=\frac{8.24-3\times2.4}{2}=\frac{1.04}{2}=0.52$$

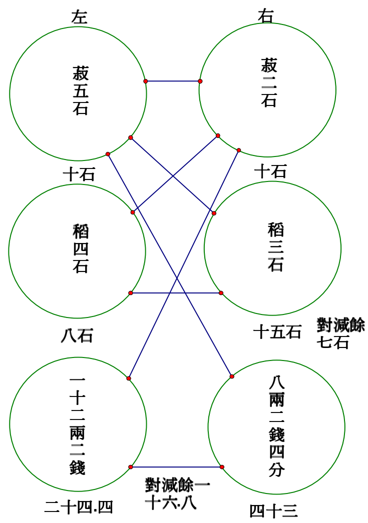


圖 4－20－2

此題杜知耕分別以先齊兩行稻數求菽價及先齊兩行菽數求稻價二種方法求稻價與菽價。二法所用之數學概念完全相同，筆者認爲杜知耕不厭其煩的分別列出，似乎有教學上的考量。此外分別先以十二石及十石爲「暗用數」齊稻數、菽數，再消去以求另一糧食之數。此即所謂「互乘相消法」解題，即今中學數學之「加減消元法」。

二、三色方程

三色方程相當於今之三元一次方程組。解題步驟是三行中先以兩行互乘相減

[218] 引自杜知耕，《數學鑰》卷五下之下，頁 2991~2992。

消去頭位，再以另兩行互乘相減消去頭位，兩次消得結果另構成一個二色方程，再依前述二色方程求解。本章 2、3 二題爲此類題目，茲作第 3 題術文與今解之對照分析如下：

原術文

第三則、三色方程二法

設稻五石、麥七石、菽四石，共價銀二十六兩六錢八分，又稻四石、麥二石、菽三石，共價銀一十四兩七錢六分，又麥五石、菽七石，共價銀一十二兩六錢四分，求三色價？

前法曰：列稻五石、麥七石、菽四石、價二十六兩六錢八分于右，列稻四石、麥二石、菽三石、價一十四兩七錢六分于左，先以右稻五石遍乘左行麥得十石，菽得一十五石，價得七十三兩八錢，次以左稻四石遍乘右行麥得二十八石，菽得一十六石，價得一百零六兩七錢二分，兩行對減，麥餘一十八石，菽餘一石，價餘三十二兩九錢二分。

解曰：麥五石、菽七石、價十二兩六錢四分，不與二行並列，何也？蓋前法元為減去稻價、稻數取麥、菽二色，今此率本無稻數、稻價，故直與餘麥、餘菽、餘價並列為後法也。

後法曰：列麥五石、菽七石、價一十二兩六錢四分于右，列餘麥一十八石、餘菽一石、餘價三十二兩九錢二分于左，先以右麥五石遍乘左行菽得五石，價得一百六十四兩六錢，次以左麥一十八石遍乘右行菽得一百二十六石，價得二百二十七兩五錢二分，以兩價得數相減餘六十二兩九錢二分為實，以兩菽得數對減

今解

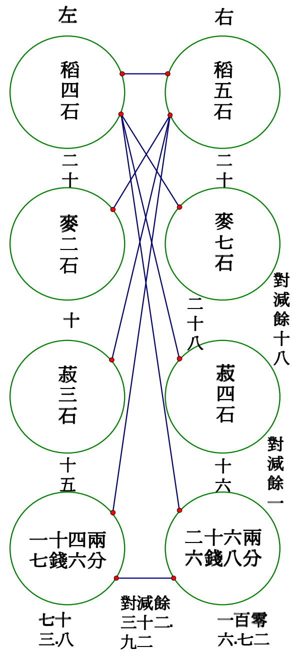


圖 4－21－1

如圖 4－21－1

$$\begin{cases}5\text{稻}+7\text{麥}+4\text{菽}=26.68\\4\text{稻}+2\text{麥}+3\text{菽}=14.76\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}20\text{稻}+28\text{麥}+16\text{菽}=106.72\\20\text{稻}+10\text{麥}+15\text{菽}=73.8\end{cases}\text{兩式相減}$$

$$\Rightarrow 18\text{麥}+1\text{菽}=32.92$$

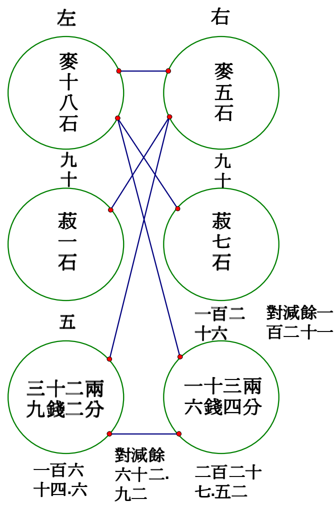


圖 4－21－2

<table>
<tr>
<td>餘一百二十一石為法，除之得五錢二分為菽價求麥價、稻價同前。[219]</td>
<td>如圖 4－21－2
$\begin{cases} 5麥+7菽=12.64 \\ 18麥+1菽=32.92 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} 90麥+126菽=227.52 \\ 90麥+5菽=164.6 \end{cases}$ 兩式相減
121 菽＝62.92
菽（價）＝0.52</td>
</tr>
</table>

此題即爲梅文鼎所謂之「三色有空法」，解題步驟爲先以兩行首位不空者對乘，再將兩行相減消去頭位，所得結果與另一首位空者之行構成一個二色方程，再依二色方程之法解之。此外第 2 題的解法如上所述，與《算法統宗》不同的地方在於前者以中行爲基準，分別與左、右二行互乘相減消去頭位成二色方程。而後者則以左行爲基準，分別與中、右二行互乘相減消去頭位成二色方程。

三、正負同異加減

前所討論之二色方程與三色方程的係數皆爲正數，此部份所介紹之題目即部份係數爲負數之二色方程與三色方程的解法，共有 5 題。底下列此五題之題目及由其「法」所闡述之解法、附圖以比較分析：

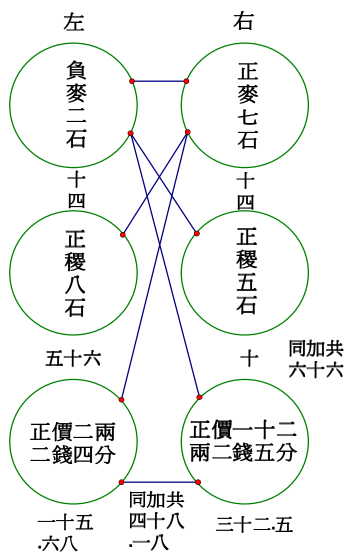
<table>
<tr>
<th>原題目術文及今解[220]</th>
<th>附圖</th>
</tr>
<tr>
<td>第四則、正負同異加減一法
設麥七石、稷五石共價銀一十六兩二錢五分，今以麥二石、增銀二兩二錢四分換稷八石，求二色價？
今解：如圖 4－22
$\begin{cases} 7麥+5稷=16.25 \\ -2麥+8稷=2.24 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} 14麥+10稷=32.5 \\ -14麥+56稷=15.68 \end{cases}$ 兩式相加
（10＋56）稷 ＝（32.5＋15.68）
66 稷＝48.18
稷（價）＝0.73</td>
<td>

圖 4－22</td>
</tr>
</table>

[219] 同上，頁 2992~2993。
[220] 同上，頁 2993~2999。

第五則、正負同異加減二法

設稻四石、黍七石共價銀一十五兩五錢五分，今以黍三石、增銀九兩四錢五分換稻五石，求二色價？

今解：如圖 4－23

$$\begin{cases} 4稻+7黍=15.55 \\ 5稻+(-3)黍=9.45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 20稻+35黍=77.75 \\ 20稻+(-12)黍=37.8 \end{cases}\text{兩式相加}$$

（35＋12）黍＝（77.75－37.8）

47 黍＝39.95

黍（價）＝0.85

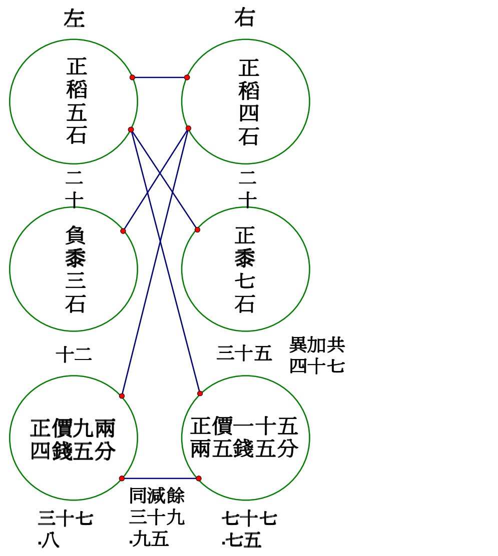


圖 4－23

第六則、正負同異加減三法

設麥五石、稷八石共價銀一十四兩八錢四分，又麥四石、黍二石共價銀八兩九錢，又黍五石、稷三石共價銀六兩四錢四分，求三色價？

今解：如圖 4－24－1

前法：

$$\begin{cases} 5麥+8稷=14.84 \\ 4麥+2黍=44.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 20麥+0黍+32稷=59.36 \\ 20麥+10黍+0稷=44.5 \end{cases}\text{兩式相減}$$

$$\Rightarrow -10黍+32稷=14.86$$

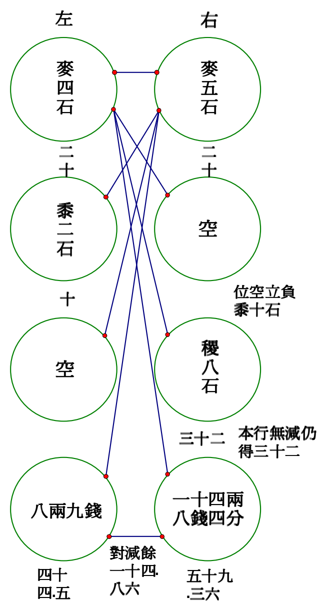


圖 4－24－1

後法：如圖 4－24－2

$$\begin{cases} 5黍+3稷=6.44 \\ (-10)黍+32稷=14.86 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 50黍+30稷=64.4 \\ (-50)黍+160稷=74.3 \end{cases}\text{兩式相加}$$

（30＋160）稷＝（64.4＋74.3）

190 稷＝138.7

稷（價）＝0.73

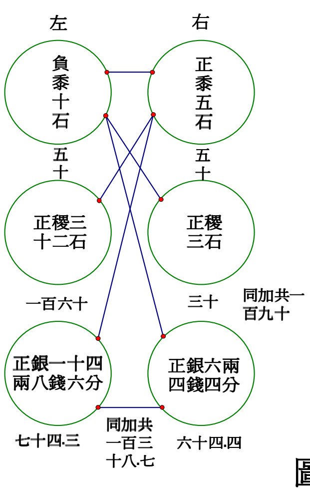


圖 4－24－2

第七則、正負同異加減四法

設麥四石、黍五石價銀一十一兩四錢五分，又麥五石、稷二石價銀一十兩零四錢六分，又黍四石、稷七石價銀八兩五錢一分，求三色價？

今解：

前法：如圖 4－25－1

$$\begin{cases}4\text{麥}+5\text{黍}=11.45\\5\text{麥}+2\text{稷}=10.46\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}20\text{麥}+25\text{黍}+0\text{稷}=57.25\\20\text{麥}+0\text{黍}+8\text{稷}=41.84\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow 25\text{黍}+(-8)\text{稷}=15.41$$

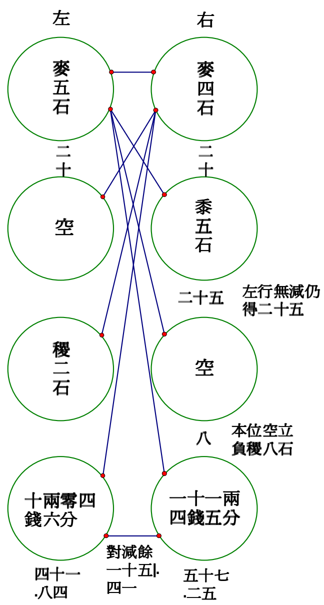


圖 4－25－1

後法：如圖 4－25－2

$$\begin{cases}4\text{黍}+7\text{稷}=8.51\\25\text{黍}+(-8)\text{稷}=15.41\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}100\text{黍}+175\text{稷}=212.75\\100\text{黍}+(-32)\text{稷}=61.64\end{cases}\text{兩式相減}$$

（175＋32）稷＝（212.75－61.64）

207 稷＝151.11

稷（價）＝0.73

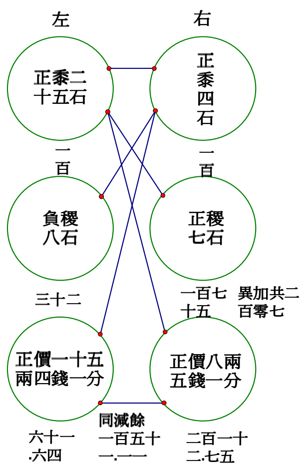


圖 4－25－2

第八則、正負同異加減五法

設以稷七石、增銀四兩零七分換麥二石、粟九石，又以麥三石換稷四石、粟四石適平。又以麥一石、稷一石、增銀四兩九錢一分換粟一十二石，求三色價？

今解：

前法：如圖 4－26－1

$$\begin{cases}2\text{麥}+(-7)\text{稷}+9\text{粟}=4.07\\(-3)\text{麥}+4\text{稷}+4\text{粟}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(-6)\text{麥}+21\text{稷}+(-27)\text{粟}=-12.21\\(-6)\text{麥}+8\text{稷}+8\text{粟}=0\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow (8-21)\text{稷}+(27+8)\text{粟}=12.21$$

$$\Rightarrow (-13)\text{稷}+35\text{粟}=12.21$$

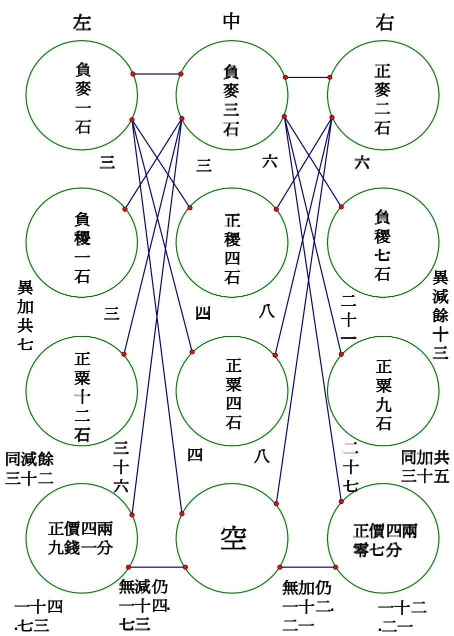


圖 4－26－1

$$\begin{cases}(-3)麥+4稷+4粟=0\\(-1)麥+(-1)稷+12粟=4.91\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(-3)麥+4稷+4粟=0\\(-3)麥+(-3)稷+36粟=14.73\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow -(4+3)稷+(36-4)粟=14.73$$

$$\Rightarrow (-7)稷+32粟=14.73$$

後法：如圖 4－26－2

$$\begin{cases}(-13)稷+35粟=12.21\\(-7)稷+32粟=14.73\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}91稷+(-245)粟=(-85.47)\\91稷+(-416)粟=(-191.49)\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow [(-245)-(-416)]粟=(-85.47)-(191.49)$$

$$\Rightarrow 171粟=106.62 \Rightarrow 粟(價)=0.62$$

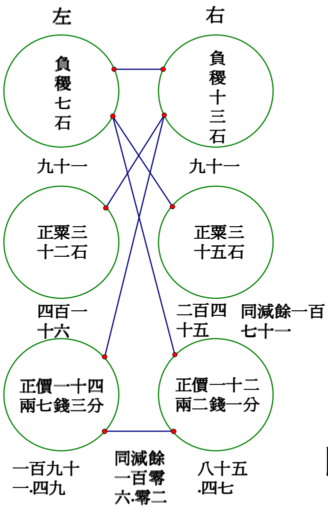


圖 4－26－2

由其解法及附圖，可看出杜知耕將此類含負數係數的題目分為二色方程與三色方程二類。其中，二色方程又分為負數係數在頭位與在第二位兩種情形。而三色方程的前二法與前述第 3 題類似，屬「三色有空法」的題目，然其化簡後亦分別為負數係數在頭位與在第二位的二色方程。至於第 8 題則為含負數係數之三色方程的一般化題目。

此外於算式中可看出，當兩行互乘後以相減消去頭位時，其他未知數的係數如為同名（號），則直接「同名相減」求餘數。若異名（號），則採「異名相加」，即取其係數絕對值相加，再冠上被減數符號。而當兩行互乘後以相加消去頭位時，其它未知數的係數如為同名（號），則直接「同名相加」求係數和。若異名（號），則採「異名相減」，即先取其係數絕對值，並以大減小，再冠上兩係數絕對值較大者的符號。

四、四色方程

四色方程相當於今之四元一次方程組，題目只有一題。其解題步驟為先依題意將條件列成四行，而後由右至左，按（右行、右次行），（右次行、左次行），（左次行、左行）作互乘相減消去頭位，三次消得結果另構成一個三色方程，再依前

述三色方程求解。茲作術文與今解之對照分析如下：

原術文

第九則、四色方程

設稻一石、麥五石、黍三石、稷七石，共價銀一十九兩零六分，又稻八石、麥四石、黍七石、稷六石，共價銀三十六兩七錢三分，又稻三石、麥二石、黍五石、稷七石，共價銀二十兩零一錢六分，又稻四石、麥二石、黍六石、稷四石，共價銀二十一兩二錢二分，求四色價？

前法曰：列稻一石、麥五石、黍三石、稷七石、價一十九兩零六分于右，列稻八石、麥四石、黍七石、稷六石、價三十六兩七錢三分于次右，列稻三石、麥二石、黍五石、稷七石、價二十兩零一錢六分于次左，列稻四石、麥二石、黍六石、稷四石、價二十一兩二錢二分于左，先以右稻一石遍乘次右行仍得元數，以次右稻八石遍乘右行麥得四十石，黍得二十四石，稷得五十六石，價得一百五十二兩四錢八分，兩行對減，麥餘三十六石，黍餘一十七石，稷餘五十石，價餘一百一十五兩七錢五分。次以次右稻八石遍乘次左行麥得十六石，黍得四十石，稷得五十六石，價得一百六十一兩二錢八分，以次左稻三石遍乘次右行麥得十二石，黍得二十一石，稷得十八石，價得一百一十兩零一錢九分，兩行對減，麥餘四石，黍餘一十九石，稷餘三十八石，價餘五十一兩零九分。末以次左稻三石遍乘左行麥得六石，黍得一十八石，稷得一十二石，價得六十三兩六錢六分，以左稻四石遍乘次左行麥得八石，黍得二十石，稷得二十八石，價得八十兩零六錢四分，兩行對減，麥餘二石，黍餘二石，稷餘一十六石，價餘一十六兩九錢八分。

解曰：前法減稻一色，餘麥、黍、稷三色。

今解

前法：

右行、右次行互乘相消：

$$\begin{cases}1\text{稻}+5\text{麥}+3\text{黍}+7\text{稷}=19.06\\ 8\text{稻}+4\text{麥}+7\text{黍}+6\text{稷}=36.73\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8\text{稻}+40\text{麥}+24\text{黍}+56\text{稷}=152.48\\ 8\text{稻}+4\text{麥}+7\text{黍}+6\text{稷}=36.73\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow 36\text{麥}+17\text{黍}+50\text{稷}=115.75$$

右次行、左次行互乘相消：

$$\begin{cases}8\text{稻}+4\text{麥}+7\text{黍}+6\text{稷}=36.73\\ 3\text{稻}+2\text{麥}+5\text{黍}+7\text{稷}=20.16\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}24\text{稻}+12\text{麥}+21\text{黍}+18\text{稷}=110.19\\ 24\text{稻}+16\text{麥}+40\text{黍}+56\text{稷}=161.28\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow 4\text{麥}+19\text{黍}+38\text{稷}=51.09$$

右次行、左次行互乘相消：

$$\begin{cases}3\text{稻}+2\text{麥}+5\text{黍}+7\text{稷}=20.16\\ 4\text{稻}+2\text{麥}+6\text{黍}+4\text{稷}=21.22\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12\text{稻}+8\text{麥}+20\text{黍}+28\text{稷}=80.64\\ 12\text{稻}+6\text{麥}+18\text{黍}+12\text{稷}=63.66\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow 2\text{麥}+2\text{黍}+16\text{稷}=16.98$$

則

$$\begin{cases}36\text{麥}+17\text{黍}+50\text{稷}=115.75\\ 4\text{麥}+19\text{黍}+38\text{稷}=51.09\\ 2\text{麥}+2\text{黍}+16\text{稷}=16.98\end{cases}$$

次法：

右行、中行互乘相消：

[221] 同上，頁 2999~3000。

次法曰：列餘麥三十六石、餘黍一十七石、餘稷五十石、餘價一百一十五兩七錢五分于右，列餘麥四石、餘黍一十九石、餘稷三十八石、餘價五十一兩零九分于中，列餘麥二石、餘黍二石、餘稷一十六石、餘價一十六兩九錢八分于左，先以右麥三十六石遍乘中行黍得六百八十四石，稷得一千三百六十八石，價得一千八百三十九兩二錢四分，以中麥四石遍乘右行黍得六十八石，稷得二百石，價得四百六十三兩，兩行對減，黍餘六百一十六石，稷餘一千一百六十八石，價餘一千三百七十六兩二錢四分。次以中麥四石遍乘左行黍得八石，稷得六十四石，價得六十七兩九錢二分，以左麥二石遍乘中行黍得三十八石，稷得七十六石，價得一百零二兩一錢八分，兩行對減，黍餘三十石，稷餘一十二石，價餘三十四兩二錢六分。

解曰：次法減麥一色，餘黍、稷二色。

後法曰：列餘黍六百一十六石、餘稷一千一百六十八石、餘價一千三百七十六兩二錢四分于右，列餘黍三十石、餘稷一十二石、餘價三十四兩二錢六分于左，以右黍六百一十六石遍乘左行稷得七千三百九十二石，價得二萬一千一零四兩一錢六分，以左黍三十石遍乘右行稷得三萬五千零四十石，價得四萬一千二百八十七兩二錢，兩價得數對減餘二萬零一百八十三兩零四分為實，兩稷得數對減餘二萬七千六百四十八石為法，除之得七錢三分為稷價求黍、麥、稻價同二則。

解曰：後法同二色方程，五色、六色以上倣此。按方程之要在加減，加減之關鍵在首位謂第一橫　行，首位同名則異名相加、同名相減；首位異名則同名相加、異名相減，然大略如是，亦有不盡然者，有應減者無可減而反加之，有應加者無可加而反減之，變化無窮存乎人之自悟耳。[221]

$$\begin{cases}36\text{麥}+17\text{黍}+50\text{稷}=115.75\\4\text{麥}+19\text{黍}+38\text{稷}=51.09\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}144\text{麥}+68\text{黍}+200\text{稷}=463\\144\text{麥}+684\text{黍}+1368\text{稷}=1839.24\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow 616\text{黍}+1168\text{稷}=1376.24$$

中行、左行互乘相消：

$$\begin{cases}4\text{麥}+19\text{黍}+38\text{稷}=51.09\\2\text{麥}+2\text{黍}+16\text{稷}=16.98\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8\text{麥}+38\text{黍}+76\text{稷}=102.18\\8\text{麥}+8\text{黍}+64\text{稷}=67.92\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow 30\text{黍}+12\text{稷}=34.26$$

則

$$\begin{cases}616\text{黍}+1168\text{稷}=1376.24\\30\text{黍}+12\text{稷}=34.26\end{cases}$$

後法：

$$\begin{cases}616\text{黍}+1168\text{稷}=1376.24\\30\text{黍}+12\text{稷}=34.26\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}18480\text{黍}+35040\text{稷}=41287.2\\18480\text{黍}+7392\text{稷}=21104.16\end{cases}$$

兩式相減

$$\Rightarrow 27648\text{稷}=21083.04$$

$$\Rightarrow \text{稷(價)}=0.73$$

經比對，《數學論》方程章的題型與解題步驟與《算法統宗》大致相同，不同的地方除題目的敘述、情境及數據外，《算法統宗》以左行爲基準與其它行作兩行互乘相消去頭位，即今中學數學課程中的高斯消去法。而本書則是以相鄰兩行作此互乘相消的動作。

此外雖《數學論》與《算法統宗》一樣，只討論到四色方程，但杜知耕在「四色方程」題最後「解」中明白的指出「五色、六色以上倣此」。且又說：「按方程之要在加減，加減之關鍵在首位謂第一橫行，首位同名則異名相加、同名相減；首位異名則同名相加、異名相減，然大略如是，亦有不盡然者，有應減者無可減而反加之，有應加者無可加而反減之，變化無窮存乎人之自悟耳。」此敘述顯然已清楚闡釋了今日中學數學之「加減消元法」的概念。