教育科學研究期刊　第六十一卷第一期
2016 年，61（1），1-41
doi:10.6209/JORIES.2016.61(1).01

# 圓形複合圖形面積解題學習軌道之教學實驗研究

陳嘉皇
國立臺中教育大學
數學教育學系

吳碧智
臺中市力行國民小學

## 摘要

本研究利用學習軌道設計圓形複合圖形面積課程進行教學實驗，檢視學生學習情形及解題表現，瞭解學生在各教學環節產生的迷思概念及困難，教師透過教學省思檢討自身教學及思索如何進行有效教學，幫助學生建立完整及系統性的圓形概念，順利解題。研究樣本為臺灣中部地區某公立小學一班六年級學生及其導師。課程內容以現行九年一貫課程綱要—六年級數學科的圓形複合圖形面積概念為主，參考數學任務及教學指引自行設計。蒐集和分析的資料包含：一、師生課室互動；二、學生數學學習單之表現；三、課後訪談紀錄。以學生作答內容統計答題正確率驗證教學效果，並以質性方式分析學生錯誤及迷思概念。研究發現：一、依據學習軌道設計圓形複合圖形面積任務，包含「認識圓形的基本組成要素」、「理解圓面積公式的由來」、「運用分割和移補的技巧來計算面積」、「理解分配律，學習用符號標記面積」和「『填補』和『其他策略』」；二、學業成就表現高、低分組的學生於「圓形複合圖形面積任務」的表現有所差異，其反應促使教師省思與修正調整學習軌道中任務的設計安排；三、經由教學實驗回溯省思後，教師對於學生概念的理解、教學方法及課程設計等方面的信念產生改變。

關鍵字：面積、圓形、複合圖形、學習軌道

通訊作者：陳嘉皇，E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw
收稿日期：2014/08/12；修正日期：2014/12/19、2015/03/08；接受日期：2015/03/17。

# 壹、緒論

圓面積的計算是平面幾何課程的重點（教育部，2008），而複合圖形面積的學習對國小學生來說是一項考驗！學生除要理解構成圓形圖形要素間的關係、熟悉圖形面積公式、運用「切割」、「填補」等策略，使複合圖形變成能使用公式計算，並以合宜的運算策略簡化算式以利正確解答產出。倘若學生對圓形複合圖形面積解題的先備知識不足、概念錯誤、欠缺運算能力或討厭計算，則容易失敗受到挫折，影響日後數學學習的意願及對數學議題的理解和探討。

學生幾何能力的發展，隨著年級有不同的重點，但彼此互為影響，依據「九年一貫課程綱要」能力指標說明（教育部，2008；陳嘉皇，2004，2013），學生在低年級階段強調幾何形體的認識、探索和操作，建立「面積」的概念。中年級階段，學生學習運用幾何形體的構成要素（如：角、邊、面）及其數量性質（角度、邊長、面積）敘述幾何形體，透過操作，將簡單圖形切割、重組成另一個已知的簡單圖形，推理並利用幾何圖形之面積公式（正方形、長方形）。高年級則認識生活中的平面圖形（三角形、四邊形、多邊形、圓形、扇形），理解幾何圖形的基本定義並熟練定義的相關操作，應用全等、相似性質於幾何圖形問題的解題上。

由上述圓形概念相關能力指標的說明得知，學生若要成功解圓形複合圖形面積問題，需同時考量圓形圖形構成的要素及其特質，推理和運用面積公式，轉換「等積異形」概念，整合複合圖形成符合解題基模之圖式，才能順利解題（侯雪卿，2004；陳嘉皇，2004；Nguyen, 2010）。然觀察教學現場，面對圖形面積問題時，學生常被要求直接採用公式計算，忽略如何提取和應用相關數學知識，鼓勵觀察和引導聰慧策略化約問題進行運算。這些缺失易造成學生解題時流於計算，忽略處理圖形問題時的思維，難建立穩固的數學概念（Confrey et al., 2012）。對於圓形概念發展和教學的研究，焦點大多集中在教學方法的探究（王建興，2003）及學生迷思概念的產出（沈佩芳，2002；侯雪卿，2004），鮮少針對圓形教學單元做一完整規劃和課程設計之探討。多數國小教師教學時，依照教科書的課程架構、伴隨課表分配時間實行，然對這些設計的材料能否滿足學生需求甚少探究；另方面，由於學生學習進程不同，按照既定課程設計實施教學，或多或少會產生學習困難，所以教師在教學歷程應不斷省思，視學生學習情形調整目標、教學內容，應用合適的步驟和策略，促進學生數學理解。

Simon（1995）在其「假設性學習軌道」（Hypothetical Learning Trajectories, HLTs）概念中，認為教師可根據學習目標、學習任務及大腦思考等預期路徑構築一個 HLTs，教師實施的教學過程，可提供發現學生實際的表現和 HLTs 之間的符合程度。HLTs 特別強調三個元素：一、明確和可辨識的目標。先前的學習理論主要在於：（一）應用相同的理論和步驟至所有的領域，忽略不同學科的性質；（二）要求課程透過既有的標準而接受目標。HLTs 的目標同時以數學家的專業和學生對數學學習的思考兩者作為基礎，因此，數學領域和學生學習及思考的研究，

對決定數學的目標扮演基礎的角色。二、HLTs 的發展是以思考層次的進展作為基礎，當概念和技巧進行網絡的內在連結時，可反映出知識的認知科學觀點（Clements & Sarama, 2004）。對物件的行動是學生操作、明白和學習的主要方法，藉由先前的理論和實徵性研究，利用臨床晤談的方式檢驗學生數學知識，包括概念、策略、直觀和用來解題的形成性評量方式。三、HLTs 的教學任務（tasks）不僅包含可學習的內、外在表徵模式，還可調整產生在物件上的行動，建構學生所需的思考層次。HLTs 包含學生獨特的思考結構，是種連續、詳細且同時對目標、任務、教學、學生的思考和學習加以整合的一種模式（Clements & Battista, 2000）。根據這些瞭解，教師可將修正過的 HLTs 作為後續課程進行的基礎，亦可從學生的表現考量課程設計及教學順序的安排，改善學習環境，以利學生學習。

綜合上述研究動機說明，本研究旨在利用 HLTs 設計圓形複合圖形面積任務，進行教學實驗，檢視學生學習情形及解題表現，瞭解學生在圓形複合圖形面積解題教學環節產生的迷思概念及困難，透過教師教學省思，檢討及思索如何進行有效教學，以幫助學生建立統整的圓形概念，順利解圓形複合圖形面積問題。本研究目的如下：

一、利用 HLTs 設計適合學生學習的圓形複合圖形面積之任務。

二、瞭解六年級學生在 HLTs 設計之圓形複合圖形面積的數學解題表現。

三、探討教師實施圓形複合圖形面積教學後，產生的教學省思為何。

# 貳、文獻探討

## 一、HLTs 之定義和內涵

HLTs 係指教師在相關的數學領域，透過任務設計，產出學生學習心智運作的步驟或執行行動的推測路徑，說明學生如何進行思考和進展，創造成就的動力，協助導向較高層次的數學目標。Simon（1995）認為 HLTs 應用於任務設計和學習時包含下列內涵：

### （一）目標的設定

學習目標的設定可透過對學生非正式概念的發展、建構主義的理論、正式數學教育等層面的研究，深入描述學生學習所需達成的標準。目標是否達成可採取一些相關假設、教育實驗，針對教學進展進行評估，以發現材料和教學間的關聯（Clements & Sarama, 2004; Gravemeijer, 1999; Simon, 1995）。

### （二）學習任務

課程理論和實務相互發展並應用是 HLTs 的精髓。HLTs 強調教學進行時任務的評估，例如課室的教學實驗，進而修正順序，以引導產出合適的任務。

## （三）學習歷程的假設

Simon（1995）認為，當教師設計的任務能符應學習目標時，學生會創造心智記錄，進行樣式辨識和概念的抽離，將經驗和單元任務連結的效果加以迭代。教師根據學生的學習情形，可修正 HLTs 作為後續課程進行的基礎。

HLTs 應用於教學和專業發展，首要功能在於督促教師需對學生學習進程的目標做詳實的分析和調整，以配合學生經驗和認知需求；其次，HLTs 可協助安排和設計合宜的學習路徑與任務，臆測學生對學習任務可能產出的策略和思考，掌握班級教學流程和互動；再者，HLTs 執行歷程強調的迭代和評估方式，可明確得知學生學習的表現，驗證任務設計之良窳。因此，有效利用 HLTs 理論進行圓形複合圖形面積單元任務的設計，不僅可彌補教科書運用的限制，更可透過學習歷程學生表現的臆測，掌握和導正學習的進展，促進學生數學成就表現。HLTs 的設計分為三個階段：

### 1. 教學實驗前的準備

教師須先思考和教學工作有關的學習類型，設計引導的任務，這項基礎預想常受到實施教學時各種突發狀況的影響，無法完全依原先的設計執行，能夠真正用到的事前準備部分，是可實際被執行的學生任務內容。

### 2. 進行教學實驗

此階段需考量教室裡所建構的教學任務、教師角色、教室文化等，能在一系列精細的循環歷程中加以修正和改進。

### 3. 資料回溯分析

透過師生課堂互動及學生任務的回饋內容，分析教學成效及需修正的部分，建構良好順序的教學範例，目的是對教室情境產生的 HLTs 發展做更普遍的說明，支持學習順序，並對理論內容及實證資料兩者加以思考和調整。

## （四）評量的要點

HLTs 詳述有意義的學習歷程之發展及遷移，因此評量學生任務發展的案例，是以小團體的任務為主。依據 HLTs 的進程和要素分析，教學實務和評量需遵循下列要點（Clements & Sarama, 2004; Gravemeijer, 1999; Simon, 1995）：

1.達成解題歷程的教學目標需用到多種策略和能力。

2.學生所使用的策略可和他人的軌道交錯或重疊。

3.可促進概念溝通和連結。

4.軌道判斷可透過學生對特殊數學領域學習的模式加以劃分。

5.進步狀況可透過理論或實務發展出的模式加以辨識。

6.辨識的特徵包含聰慧的程度、抽象、複雜性。

上述 HLTs 的要點說明學生具有不同的認知發展層次、多元策略和知識，教師需安排系統和結構完善的任務和情境，以滿足學生學習的需求；教師可據以診斷學習層次和困難之處，透過回饋作為重新選擇材料及教學順序安排的參考，讓學生能循序漸進獲得最完備的數學概念。本研究之個案教師即以 HLTs 的要義為基礎，透過對圓形複合圖形面積單元的教科書、能力指標進行教材與學生學習認知的分析，設計學習任務，進行教學實驗，從師生互動歷程探索學生表現，作為理解學生數學思考的依據，配合省思回饋，最後整合調整原學習路徑，建立適合其課室實務之教學模式。

## 二、HLTs 之相關研究

Clements 和 Sarama（2004）認為 HLTs 包含數學目標、學生在特殊數學議題的進程及符合這些進展的任務。Clements 和 Sarama 描述數學目標和發展之間的關係，是種跨越幾個數學性質，建構逐漸聰慧、複雜、抽象和歸納之不同層次目標，設計和排序重要的任務，以支持學生在進程裡某概念或目標的理解。另有學者將 HLTs 定義為：學生從非正式的概念開始，經由表徵精煉、釐清和省思，逐漸朝向研究者的臆測及面對教學（如：任務、工具、交互作用的形式和評量的方法）順序所架構之實證性支持（Confrey et al., 2012）。HLTs 一詞有眾多的定義，然而都有一共同之處：從淺層的認識到深層的瞭解，知識的發展是有關聯且可預測的。HLTs 根據學生學習狀況的預期，提供良好學習路徑之選擇，從而促進數學學習和鞏固概念。

Corcoran、Mosher 和 Rogat（2009）認為 HLTs 具有下列五點要素：

（一）學習的終點可藉由學科之核心概念和議題而加以定義。

（二）進展的變數可從知識的維度辨識，並隨時間發展。

（三）進展的層次可以大多數學生獲得能力的發展加以說明。

（四）學習表現為學生在進展的位置提供評量和任務發展的條件。

（五）評量是指測驗學生隨著時間演變之概念知識的發展。

HLTs 可視為是教師使用工具以形成重要的教學任務，例如：計畫、教學和評量，辨識和描述可觀察到的重要項目、結構和行為，從這可探索 HLTs 調整學生思考能力的範圍。陳嘉皇（2008）發現：融合 HLTs 創發及設計的任務能有效激發學生數學概念的應用和表達。從觀察實作歷程和紀錄來看，學生能依據目標的要求，參照本身經驗和認知能力分別透過不同的任務建構解題的知識和技巧，達到概念發展極致的目標。例如經 HLTs 設計電腦化任務教學實驗之學生面積解題表現，明顯優於使用一般教科書作為學習任務的學生，主要原因在於研究者設計採用的 HLTs，係參考學者研究提出之面積學習相關的路徑和內涵加以安排，包含圖形要素辨識、面積分割移補策略之應用、等積異形概念理解和複合圖形解題等任務，配合有關學生學習能力發展和認知層次進展的順序，因為設計的任務具有精煉學習目標、依據任務特質

和認知發展順序、結合社會文化結構等有關理論和實務的特徵，所以掌握學生面積概念發展的要點，提供面積解題的知識和技巧，因此提升學生在圖形面積解題上的表現。

Clements 和 Sarama（2004）強調 HLTs 的焦點在於數學目標、要求發展進程的認知模式、提供學生經由發展層次進展之任務。其中，「任務」的重要性已被指出扮演基本的角色，Stein、Grover 和 Henningsen（1996）檢驗教學的任務，提議一組模式（見圖 1）以呈現任務如何轉換之過程。在此歷程上，影響學生數學學習結果有關任務安排的因素，包含了教師的目標、學科知識和對學生的理解，此因素屬教師層面；另一則是學生學習時產出的因素，包含規範、任務條件及師生互動的情況。現行國小數學課室採行的任務仍以教科書和所附的習作為主，教學目標的設定、任務的順序及課程材料的編擬，是由書商之編輯群設立，皆已固定且一體適用，是否能符應課程綱要能力指標之要求，滿足學生需求，值得教師教學時檢視和瞭解學生學習困難及概念不足的部分，並視學生的回饋給予課程材料的調整，修正教學方式，使學生獲得最好的學習效果。而有效地應用 HLTs 進行數學教學，正可協助教師提升上述之專業能力，解決課程設計、教學實施和學生成就評量等實務問題（Clements & Sarama, 2004; Gravemeijer, 1999; Simon, 1995）。

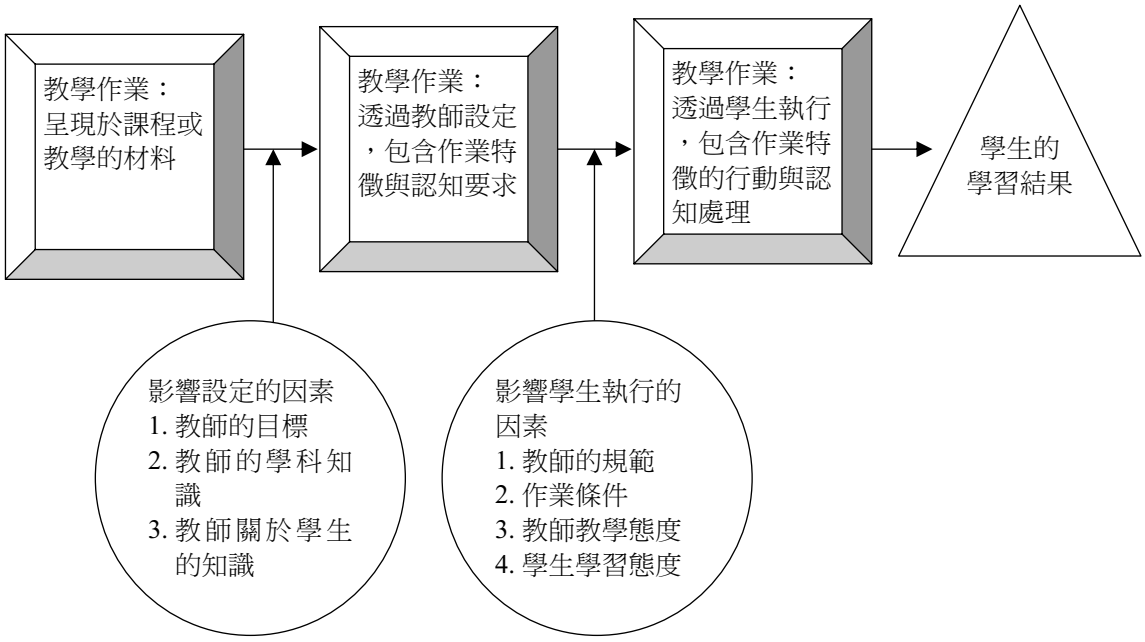



圖1. 任務執行和轉換的歷程。引自“Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms,” by M. K. Stein, B. W. Grover, and M. Henningsen, 1996, *American Educational Research Journal, 33*(2), p. 459。

## 三、學生圓形概念之研究

有關圓形概念的研究可分為幾何和圓形迷思概念之探討，類型包括「透過視覺而產生的迷思」及「對圓形組成要素概念不足產生的迷思」。王建興（2003）發現實施圓周率教學時，下列情形會造成學生的學習困難：

### （一）學生先備知識不足

1.對於圓心、直徑、半徑及圓周長相關概念的知識不足。

2.缺少曲線長度測量的能力，不會測量圓周長。

### （二）教師的教學技能

1.引入圓周率概念的方法。

2.圓周率意義的介紹及圓周率名詞的引入。

沈佩芳（2002）和譚寧君（1994）也發現國小高年級學生對圓形會產生以下的迷思概念：

### （一）視覺的迷思

1.半圓形是圓形的一半，所以也叫圓形。

2.橢圓雖然不是正的，但它沒有任何直線或是角，所以是圓形的一種。

### （二）組成要素的迷思

1.圓面積就是半徑×半徑×3.14，而半徑就是圓的一半，顯示學生把面積公式和圓形的辨識混在一起。

2.關於半徑的長度，有的知道半徑一樣長，但說不出原因。有的認為圓有的不圓，所以半徑不一樣長。

侯雪卿（2004）將圓的迷思概念加以整理，包含圓形組成的要素與關係、圓周率概念、圓面積概念等內容，發現學生迷思概念之產生，部分原因是教師教學時忽略具體操作，無法讓學生透過「觀察」、「比較」、「測量」、「組合」等行為強化幾何概念，只記住「幾何圖形」的印象，對幾何圖形的組成要素、幾何性質、面積公式的由來，缺乏深入探究的機會。

綜合上述研究發現，可提供本研究兩項啟示：一是這些研究發現可提供作為改善與設計圓形概念教學任務的重點依據；另一則是學生要學好圓面積公式解題，其進程是有脈絡可循的，即應讓學生具備圓形構成要素的理解→圓周率概念的引入→面積公式的應用，若要進一步處理複合圖形面積，則應納入分合移補策略的啟發，如此學習到的數學概念才較完整（Confrey et al., 2012）。現行教科書的內容雖有學生先備知識的提示，卻非常簡略；任務內容的設計偏向於公式之計算，對於學生數學推理能力的啟發較少著墨，因此，研究者擬藉由對教科書運用的省思，整合學生圓形複合圖形面積解題的路徑設計相關任務，進行教學實驗，以尋找學生學習之最佳軌道。

## 四、圓形複合圖形面積任務分析

分析現行圓形複合圖形面積任務，有關學生先備知識、學習要點及任務優點和缺失等層面的啟發，如表 1 所示。

表 1

分析現行教科書內容所得之啟發

| | |
|---|---|
| **先備經驗** | 1.「認識圓的圓心、圓周、半徑和直徑」，瞭解圓形的組成要素之基本內容。<br>2.「瞭解直徑是半徑的兩倍」，瞭解圓形的組成要素之基本性質。 |
| **學習要點** | 1. 認識圓周率<br>學生能透過實作方式，實際測量出圓周的長度及圓形的直徑長度，並運算兩者之間的比值，瞭解其近似值為 3.14，稱為「圓周率」。從不同長度的圓形直徑做圓周率的計算，理解不論圓的大小如何，圓周長和直徑的比值不變，圓周長大約是直徑的 3.14 倍。<br>2. 利用圓周率求出圓周長或直徑<br>學生能理解「圓周長÷直徑＝圓周率」，並利用此公式，由已知圓的直徑（或半徑）求出圓周長，或由已知圓周長求出圓的直徑（或半徑）。<br>3. 認識圓面積公式<br>學生能透過具體操作，理解圓的面積比以此圓半徑為邊長的正方形面積之四倍還小，但比兩倍還大；能用點算方格的方法來估測圓形的面積；能將圓切割成若干（偶數）等分的扇形，拼成近似平行四邊形或長方形的形狀，再藉由平行四邊形或長方形的面積公式，推出圓面積公式：半徑×半徑×圓周率。<br>4. 利用圓的直徑或半徑求出圓面積<br>學生能利用已知圓的直徑（或半徑）求出圓面積，亦能利用已知的圓面積求出圓形的直徑（或半徑）；能計算圓面積的文字應用題及幾何圖形試題。 |
| **教材優點** | 1. 圓周率<br>(1) 具體操作圓形的直徑與周長之測量，並做圓周率之計算。<br>(2) 計算各種不同直徑長度之圓形的圓周率，瞭解圓周率之近似值為 3.14，且其值是固定的，不會因為圓的大小而有所改變。<br>(3) 教導有關圓周率的三個公式，並做相關的試題練習：<br>A.圓周長÷直徑＝圓周率<br>B.直徑×圓周率＝圓周長<br>C.圓周長÷圓周率＝直徑<br>2. 圓面積<br>(1) 教導學童發現一圓面積、以此圓直徑為邊長的正方形（即圓的外切正方形）、以此圓直徑為對角線的正方形（即圓的內接正方形），三者之間的面積大小關係。<br>(2) 教導學童用點算方格的方法來估測圓面積。<br>(3) 教導學童透過觀察不同等分圓之重組圖，來瞭解圓面積公式的演變由來。<br>(4) 教導圓面積公式（半徑×半徑×3.14），並做相關的試題練習，包括文字題與圖解題。 |

（續）

表 1
分析現行教科書內容所得之啟發（續）

| | |
|---|---|
| 缺少部分 | 1. 圓周率<br>(1) 缺乏檢驗學生先備經驗是否完整之內容（如：圓心、直徑、半徑、弧長、圓周長、圓心角、扇形）。<br>(2) 圓周率公式以三種不同形式來教導學生，缺乏教導學生「推導」的能力，易使低階程度及部分中階程度的學生須多記兩種公式，增加其學習負擔及產生概念混淆之情形。<br>2. 圓面積<br>(1) 圓面積公式的演變以圖形觀察為主，缺乏具體操作的部分，使學生的觀念不易被強化。<br>(2) 缺乏圓面積公式的推導過程，學生無法理解為何「圓周長的一半×半徑」會變成「半徑×半徑×3.14」之內容。<br>(3) 圖形試題過少，有一部分的試題被歸類在該冊的第六單元（扇形面積）裡，且計算部分缺乏策略性教學（如：運用分割、移補、填補等技巧）及系統化運算（如：文字與代號的標記、分配律的應用）來簡化繁雜的計算。 |

從表 1 資料得知，學生要獲得完整之圓形複合圖形面積解題的知識，透過教科書內容的指導是不完整的，再加上現場教師：（一）本身對數學的專業精進能力不夠，無法滿足不同程度學生之需求而改變既定的教學課程內容；（二）外在因素壓力，包括學校要求的教學進度、同儕教師的課程討論及學生家長對於教學內容的質疑；（三）教學內容異動不大，難以產生刺激推動教師做教學改變（Corcoran et al., 2009）。因此，需有合宜的機制協助解決上述缺失，HLTs 的應用適足以改善上述教師專業發展的問題，提供教師設計課程、精進教學和適時評量技巧正向改變的動能，提升對數學內容和教學知識的理解，促進知識運用，激發自我變成具有「數學眼睛和耳朵」優質教師之期許（Corcoran et al., 2009）。

## 參、研究方法和步驟

本研究利用 HLTs 設計學習任務進行教學實驗，探討六年級學生在圓形複合圖形面積的表現，另探討教師實施課程的教學省思，研究架構如圖 2 所示。教學實驗前，先進行教科書內容分析，瞭解教學目標、學習要點及學生的先備經驗。再者，設計學習內容，任務以「圓周率」和「圓面積」內容為主，希望學生能計算出「圓周長」、「圓面積」及「圓形複合圖形面積」，其他則包含學生先備經驗的提取（如：圓心、直徑、半徑、弧長、圓周長、圓心角等圓形之組成要素）、教導學生「公式推導」的過程（如：圓面積公式為何會從「圓周長的一半×

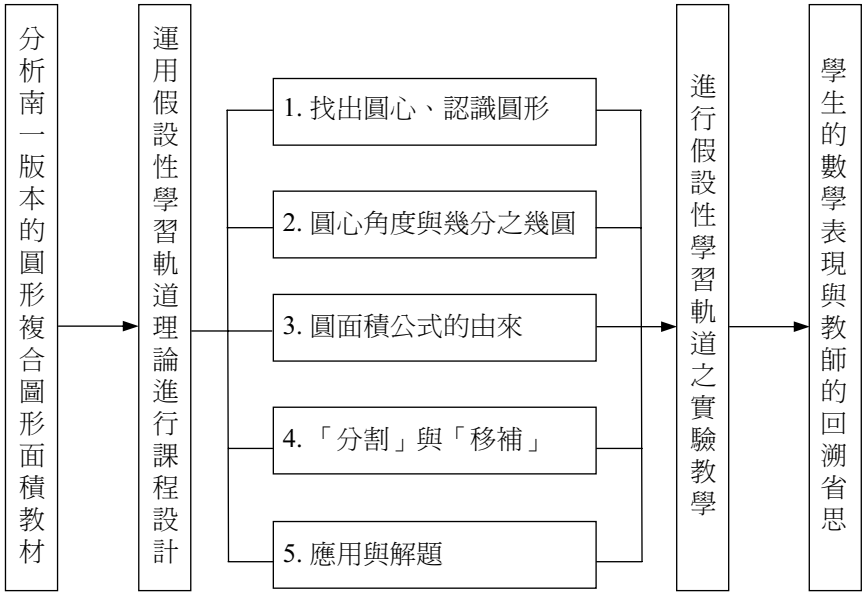



圖2. 本研究架構

半徑」演變成「半徑×半徑×3.14」之內容）、解題策略的教學（如：運用分割、移補、填補等技巧）及以有效方法（如：文字和代號的標記、分配律的應用）簡化繁雜的計算。任務分五節教學：一、找圓心、認識圓形；二、圓心角度和幾分之幾圓；三、圓面積公式的由來；四、「分割」和「移補」；五、應用和解題。前兩節任務是補充原教科書內容不足部分，其性質屬於「診斷和強化學生數學的先備經驗」，從中瞭解學生對圓形幾何要素關聯的知識，透過操作方式提升學習動機；第三節和原教科書內涵相似，重點為「操作和理解」，希冀學生透過具體操作及比較觀察，理解圓形經過愈細膩的等分割後，重組的圖形狀會愈趨近長方形，並瞭解長方形的「長」和「寬」與圓形的關係；最後兩節的任務則為陳嘉皇自行設計命題，其內涵包含半圓、四分之一圓等圓形複合圖形，讓學生進行分合移補等策略的思考和運用，屬於「面積策略應用和簡化計算過程」，利用「分割」、「移補」和「填補」化整圓形複合圖形，使之成為可計算的簡單幾何圖形，並利用計算策略如分配律簡化複雜的運算，提升學生作答信心和正確率。在任務進行階段，教師針對學生的表現採取幾項措施：一、鼓勵運用多種策略與方法作答；二、進行形成性評量並適時的回饋；三、透過同儕鷹架協助，監控作答歷程；四、針對學習困難學生提供解釋、練習機會。上述作法希冀學生在學習歷程產生困難時，即能適時地予以協助，另一方面提供教師省思動力，思索如何因應學生反應以提升教學互動產出之成效。

學習單問題力求具體且簡單明瞭，教師引導學生對概念進行思考、辯詰，透過學生的表現理解其數學概念；教學實驗後，彙整學習單，逐題檢視，統計作答的正確率，並從錯誤答案分析學生欠缺的概念或能力為何，從教學影帶檢視師生互動情形，回溯省思及需修正之處。

## 一、研究對象

本研究對象為臺灣中部某公立國小一個六年級班級，包含 25 名學生及其導師。該校規模為 56 班，全校人數約為 1,600 人，六年級共有 11 個班。學校依學生前一學年的平均學業成績，以 S 形方式進行常態編班，學生素質多屬中上程度。家長職業以工、商業為主，部分為軍、公、教人員，多數擁有高中（職）以上的學歷。家長對學生的課業普遍表示關心，但和教師的互動少，大都以電話溝通為主。該班導師大學教育系畢業，教學年資 10 年，長期擔任國小高年級教師，教學熱忱、極富愛心，現就讀於教育大學數學教育研究所，攻讀碩士學位，積極參與教師專業發展活動，對班級數學教學採討論式方法實施，鼓勵學生探索發表。

本研究教學實驗由另一研究者（該班級導師）執行，一天一節課、計五節課，利用學校的晨光時間（早上 7 點 50 分至 8 點 30 分）進行；教學實驗後，檢視教學錄影中師生互動情形，配合學習單內容進行學生訪談，分析答題概念及解題策略。

## 二、課程內容設計

任務設計以教育部（2008）九年一貫課程綱要之能力指標為依據。正式教學實驗前，先經由學者專家（包含教育大學兩位教授和兩位數學科輔導員）做教學內容的檢核及學習單問題之修正，例如作答說明、表徵的清晰度、題目數字大小、圖形複雜性、解題程序之難易等加以檢視，經確認無誤後實施。任務內容包含：（一）找出圓心、認識圓形；（二）圓心角度與幾分之幾圓；（三）圓面積公式的由來；（四）圓圖形面積的分割與移補；（五）圓面積公式之應用與解題。圓形複合圖形面積學習軌道任務的設計具有三項特徵：（一）它是結合學生對圓形概念發展相關研究文獻探討，與學習目標的分析獲得之結果所研發之內容，掌握學生學習歷程可能產出之學習困難（王建興，2003；沈佩芳，2002；侯雪卿，2004），故可協助學生順暢學習；（二）學習的歷程按照速率任務之特徵配合學生學習經驗進展，合乎學生學習法則（教育部，2008）；（三）明確學習目標和教學流程、臆測學生可能產出之反應，提升教師對教學內容之理解和對學生反應之適時地回饋（Clements & Sarama, 2004）。另外，任務內容和現行教科書不同之處，在於強調學生先備經驗的提取、教導學生「面積公式推導」的過程、解題策略的教學及以有效方法簡化繁雜的計算。

教學時，教師先將問題呈現於黑板上、提供學生學習單，要求小組針對問題進行討論，並將討論結果記錄於學習單上；接著進行班級討論，師生共同檢討修正各組學生之解題思考、策略和表現。

## 三、資料蒐集和處理

除探究師生互動情形外，並配合學生學習單的表現加以資料分析。學習單計五份，總題數 19 題，統計各題的正確率、錯誤及迷思概念。錯誤作答類型分為三類：基本概念錯誤（如

對圓相關要素的描述）、解題方法錯誤（如解題策略與方法誤用）、計算內容錯誤（運算程序與答案不正確）；迷思概念分為：基本概念錯誤、解題方法錯誤。依據學生答對的題數分為高分組（答對 17 題以上）、中分組（答對 11 至 16 題）及低分組（答對 10 題以下），以隨機方式從三組學生中各挑選兩名進行訪談。將訪談對象之組別及座號予以編碼，如「L25」之「L」表示低分組、「M」表示中分組、「H」表示高分組；第二碼「25」表示該生之座號。教師並做省思，檢視自身教學和學生學習表現。資料分析過程中，為避免研究者主觀偏見，和專家、學校同事進行討論，以取得研究結果一定的效度。

# 肆、研究結果和討論

## 一、找圓心、認識圓形表現分析

### （一）師生課室互動

T：什麼方法可找出圓形的圓心？

S01：將圓形圖紙對折兩次，尖尖的點就是圓心。

S02：在圓內畫兩條直徑，交會的那一點便是圓心。

S03：S01 的作法是正確的，因為將圓對折兩次後，會出現兩條線，這兩條線都將圓平分成兩半，因此一定是直徑，圓裡面兩條直徑交會的那一點是圓心。

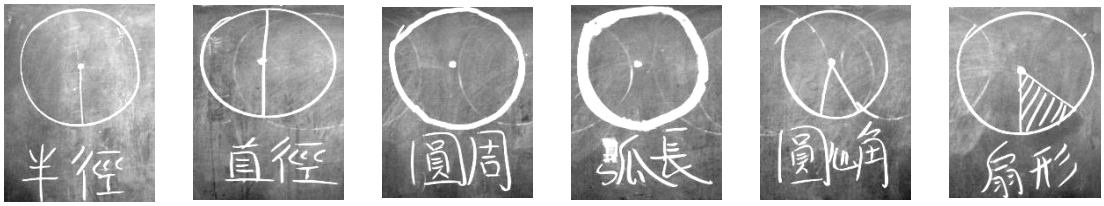
S04：我認為 S02 的作法是錯的，因為用這種方法畫出來的點，每次都在不一樣的位置。

S05：拿圓規實際畫一次，看看所標記的點，以它為圓心所畫出來的圓，是否和原來的圓一樣大。

T：黑板上是同學對圓形組成要素所做的圖（見圖 3），哪一個圖是錯誤的？

S10：圖 D 畫的內容和圓周長是一樣的，他不是弧長。

S10：嗯～～～弧長要有兩個點及兩條半徑。




A B C D E F

圖3. 學生圓形組成要素所做的繪圖

## （二）學習單之表現

### 1. 各題作答的正確率

從表 2 學生作答正確率與學習單的表現發現，學生對於圓形要素「圓心」的尋找產生困擾，一些學生認為圓心是圓中間的一點，但無法藉由和直徑的關係，經由將圓圖形對折方式解題，此現象和侯雪卿（2004）的研究發現一致，學生若無尋找圓心的經驗，那麼對於圓心相關要素的連結則可能產生困難，例如弧長的概念。透過活動，研究者理解大多數的六年級學生對於圓心和直徑間的關係並無連結，獲得的圓形要素概念並不完整，建議未來進行此議題的教學時，可安排此活動提供學生操作的機會，檢測和激發學生解題的基本能力。

表 2

找圓心、認識圓形作答資料分析

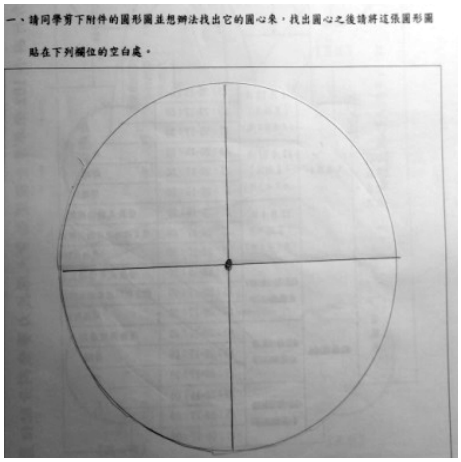
- 剪下附件的圓形圖並想辦法找出它的圓心來，找出圓心之後將這張圓形圖貼在下列欄位的空白處（見圖 4）。

答對人數12人　　作答正確率48%

答錯人數13人　　作答錯誤率52%

錯誤類型1：放棄作答（4人）

錯誤類型2：方式錯誤（9人）



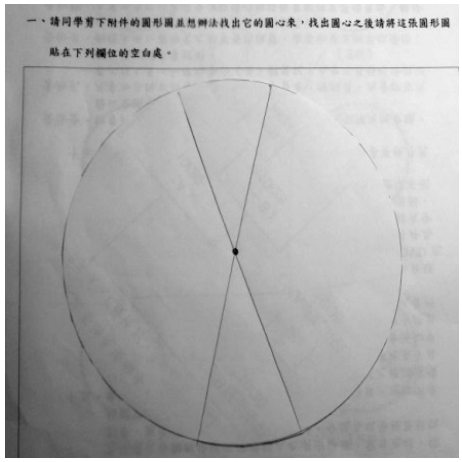




圖4.　學生正確的作法（對折兩次）

- 下列圓形圖，就圓形組成要素，用鉛筆或螢光筆將它標示出來（見圖5）。

答對人數22人　　作答正確率88%

答錯人數 3人　　作答錯誤率12%

（續）

表 2

找圓心、認識圓形作答資料分析（續）

錯誤類型：概念錯誤（3人）

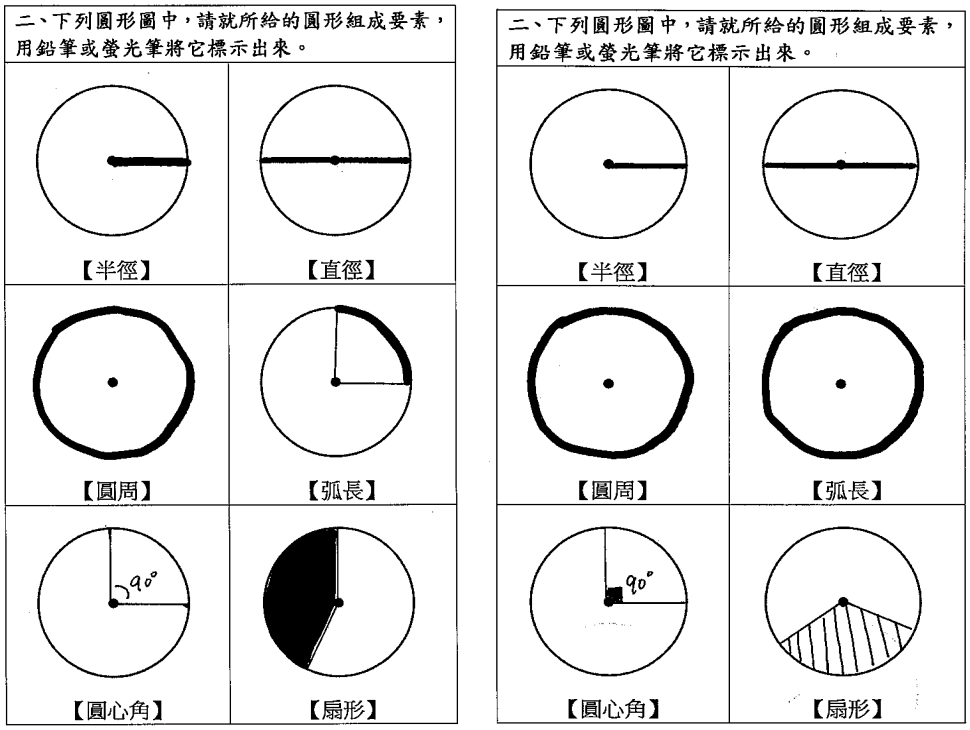



圖5. 學生對圓形幾何要素的表現

## （三）課後訪談紀錄

L13：圓心是圓的對稱中心，一個圓只有一個圓心，不知道利用對折兩次的方式來找出圓心。

L16：圓心是圓的對稱中心，一個圓只有一個圓心，不知道利用對折兩次的方式來找出圓心。

【教師對學生反應的分析】

低分組學生的錯誤概念為「直接在圓形最中間的位置點上一點，便是圓心」，採取所謂的「視覺法」來找圓心，缺乏檢驗能力。

M24：圓心是圓的對稱中心，一個圓只有一個圓心，知道要利用對折兩次的方式來找出圓心；但不知道此法的真正意義所在。

M26：圓心是圓的對稱中心，一個圓只有一個圓心，不知道要利用對折兩次的方式來找出圓心。

【教師對學生反應的分析】

中分組學生的錯誤概念為「使用十字畫法來找圓心」，認為用十字畫法可以將圓平分成四塊，卻不知如何證明這四塊扇形的面積一樣大；即利用「視覺法」來製圖，缺乏邏輯的思考和檢驗的能力。

## （四）教師自我省思

### 1. 學習目標

多數學生不知道利用「對折兩次」的方式找出圓心，教導學生時，可用選項式的方式引導低分組及部分中分組的學生，讓其知道利用對折兩次的方式找出圓心，避免因想不到方法而放棄作答。「理解背後意義」的部分，可先讓學生思考「錯誤的方法為何無法找出圓心」之問題，訓練學生邏輯思考和推論辯證，再讓其去想「為何對折兩次的方式可找出圓心」之問題，引導其理解「什麼條件先成立，何種情形才能被檢驗和證明」，藉此建立數學的邏輯思維。對於圓形中的幾何構成要素之定義內容，部分低分組學生對圓形的某些基本構成要素不熟悉，可利用課後時間做一對一的基本概念補強。

### 2. 課程設計

根據學習單的作答來看，使用正確方法因而找出圓心的人數僅有 12 人，正確率為 48%，多數學生對圓形基本組成要素之瞭解仍不夠熟悉。建議將「找圓心」的任務列為「圓形的基本組成要素」之任務內容，強調「圓形基本組成要素」之定義，除原本設計的圖示表達之外，再加上「口頭敘述」藉以訓練口語表達能力及澄清數學基本概念。

從上述分析資料得知，不少學生對於圓心、直徑之間的關係仍有疑惑之處，認為在圓內任何兩條直線相交之點即為圓心，此學生的錯誤若採用原先的教學是無法發現的，因為教科書內涵的編排注重計算，學生為快速獲得正確答案常以公式解題，強調程序性知識，忽略圓圖形構成要素間關係之概念性知識，無法獲得完整的圓概念和要素之間的關聯。正如 Corcoran 等（2009）強調的，良好的 HLTs 設計需能協助教師對學生學習歷程混淆的影響因素加以釐清，增進學習任務所產生的效果，學生在此任務產生的困難，可提供額外的路徑和資源，本項任務除可診斷學生對圓圖形要素概念之理解外，亦提供圓面積解題歷程教師可補充學生學習的內涵，擴充學生相關解題經驗。

## 二、圓心角度和幾分之幾圓

### （一）師生課室互動

T：一個圓平分成兩塊，每一塊稱為二分之一個圓。那麼這半圓形的圓心角是幾度？用什麼方法求出圓心角的度數？

S01：拿量角器實際測量，測得的角度為 180 度。

S02：圓的圓心角為 360 度，將它平分成兩半的話，圓心角的度數也除以 2，是 180 度。

S05：圖 7 的答案有錯，八分之一圓的圓心角是 45 度才對。

T：可以推論出「圓心角度數」和「幾分之幾圓」之間的數學算式關係嗎？

S06：一個完整圓，圓心角為 360 度；二分之一圓，圓心角為 180 度；四分之一圓，圓心角為 90 度；八分之一圓，圓心角為 45 度。已知幾分之幾圓，可由算式「幾分之幾乘以 360 度」來求出圓心角度數。

S07：從圓心角度數，倒推回幾分之幾圓，算式為「圓心角度數除以 360 度」，如此一來亦可求出其為幾分之幾圓。

圖7. 八分之一圓的錯誤圓心角

### （二）學習單之表現

#### 1. 各題的作答正確率

從表 3 學生作答正確率與學習單的表現發現，學生錯誤答案產出的原因在於分數乘法的運算，大部分的學生明白圓心角和圓之間的關係，能做互逆推演，只是少部分學生計算能力尚待加強，因此在運算過程，教師可強調後設認知像是自我監控、自我檢核等能力的配合，以提升其作答正確率。

表 3

圓心角度和幾分之幾圓之作答資料分析

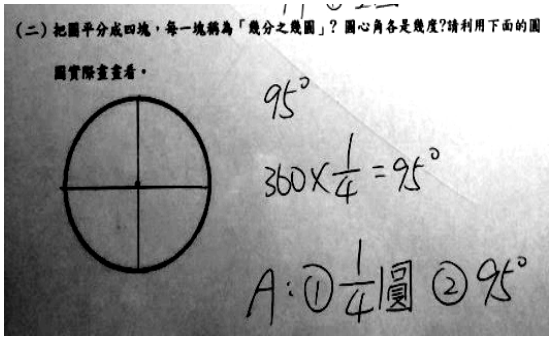
- 把圓平分成四塊，每一塊稱為「幾分之幾圓」？圓心角各是幾度？請利用下面的圓圖實際畫畫看（見圖8）。

答對人數21人　　作答正確率84%

答錯人數4人　　作答錯誤率16%

錯誤類型1：放棄作答（2人）

錯誤類型2：計算錯誤（2人）



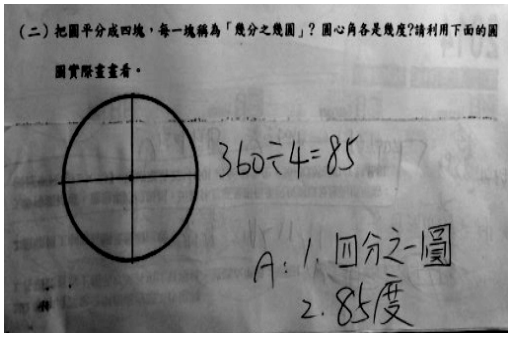




圖8.　學生圓心角度和幾分之幾圓錯誤的答案

- 圓心角為 150 度的扇形，屬於「幾分之幾圓」？（見圖 9）

答對人數21人　　作答正確率84%

答錯人數4人　　作答錯誤率16%

錯誤類型1：放棄作答（2人）

錯誤類型2：計算錯誤（2人）

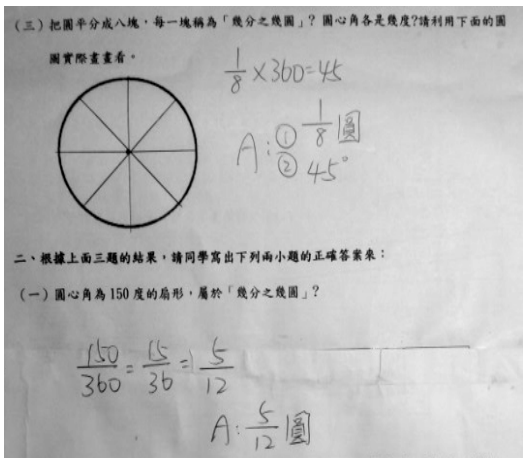



圖9.　學生「幾分之幾圓」正確的答案

## （三）課後訪談紀錄

L13：理解「幾分之幾圓」的切割畫法，能操作量角器製圖，亦能算出每個扇形之圓心角度數。理解同一圓形中，圓心角度數愈大的扇形，其面積愈大；但若無圖片、單純只有文字敘述的題目時，不太確定兩者倍數關係之運算方式。

M24：理解「幾分之幾圓」的切割畫法，能操作量角器製圖，亦能算出每個扇形之圓心角度數。理解同一圓形中，圓心角度數愈大的扇形，其面積愈大；若無圖片、單純只有文字敘述的題目時，亦能瞭解兩者的倍數關係之運算方式，但不明白其中的道理所在。

H19：「幾分之幾圓」的切割畫法，能操作量角器製圖，亦能算出每一扇形之圓心角度數。同一圓形中，圓心角度數愈大的扇形，其面積愈大；若無圖片、單純只有文字敘述的題目時，亦能瞭解兩者的倍數關係之運算方式，以及背後的道理所在。

【教師對學生反應的分析】

學生對扇形面積大小之比較和倍數關係之計算，習慣用視覺判斷；倘若遇到只有文字敘述的題目時，對於兩者的倍數關係之計算顯得沒有把握。關於此點，在教導學生計算時，不能只用簡單的兩個數字來做除法運算，應將該扇形視為整個圓的幾分之幾來做說明，透過算式的化簡，才能用兩者的圓心角度數來計算，使計算能更穩固，瞭解此方法的用意。

## （四）教師自我省思

### 1. 學習目標

多數學生能透過圖形及算式的引導推論兩者間的數學關係；惟在計算方面，仍有部分學生因粗心而計算錯誤，故應強化其後設認知能力，以求計算正確。對於不同圓心角度數的扇形面積之比較，大多數學生均能透過視覺加以判斷，但若只提供文字敘述而無圖示時，多數低分組和中分組學生解題產生困難，即便知道算法，並不瞭解背後的涵義。針對這些現象，教師可將一個圓形視為整體的方式配合文字的描述做說明，再用兩者的圓心角度數來做比較，使學生知曉其意義。

### 2. 課程設計

部分學生在「分數乘以整數」及「分數的約分」仍會有計算錯誤的情形，可強化其分數乘除的概念和技巧，俟能力穩固後解題之正確率應可提升。

上述任務除少數學生計算錯誤及放棄作答外，大部分學生作答皆正確，顯示在扇形、圓心角和幾分之幾之間任務的概念轉換較無困難，此任務將有關圓面積相關要素整合提供學生應用解題，提供面積圖形「分割」技巧和「部分－整體」之間關係等重要知識，對往後任務

所需解題能力提供重要基礎。圓形複合圖形之組合，問題中包含了半圓、四分之一圓或其他圖式，學生對原教科書的命題常採取視覺方式進行移補組合成簡單圖式，以便利用公式計算。Corcoran 等（2009）主張良好的 HLTs 任務設計可擴充學生認知圖像的要素，增進以認知為主的評量效果。本任務在於提升學生數學概念，透過幾何相關概念，如角度、扇形之整合，明白和比對之間的關係，建立分數的概念，以利圓面積計算。理解圓心和直徑、半徑關係，並能進行扇形和圓心角之間關係的轉換，對圖形分割以組合成類似長方形圖形，進而推理圓面積公式，是學生必要的基礎能力和技巧，本任務提供了學生練習機會，強化學生推理面積公式所需概念。

## 三、圓面積公式的由來

### （一）師生課室互動

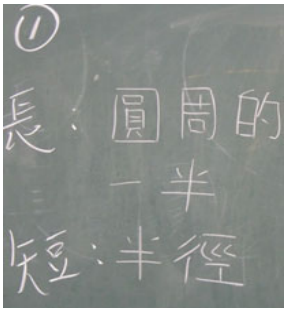
T：想想看由六十四等分的扇形圖形上下顛倒交互組合的圖形像什麼？

S06：從這組合圖來看，等分數量愈多的圓形圖，它的組合圖較短的一邊接近垂直現象，我認為是長方形。

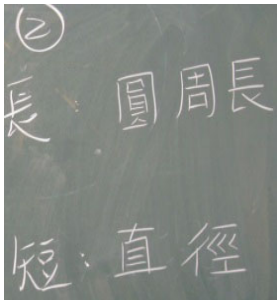
T：這塊由十六等分的組合圓可以將他想成類似長方形，若以長方形面積公式來看的話，較長的一邊應為圓的什麼？較短的一邊應為圓的什麼？

S07：（如圖 10(A)）長＝圓周的一半、短＝圓形的半徑。

S08：（如圖 10(B)）長＝圓周長、短＝圓形的直徑。




(A)




(B)

圖10.　組合圓之公式和長方形面積要素之關係解釋

T：圓面積的公式是什麼？

S12：圓面積＝一半周長×半徑。

T：怎麼知道「圓面積＝一半周長×半徑」？

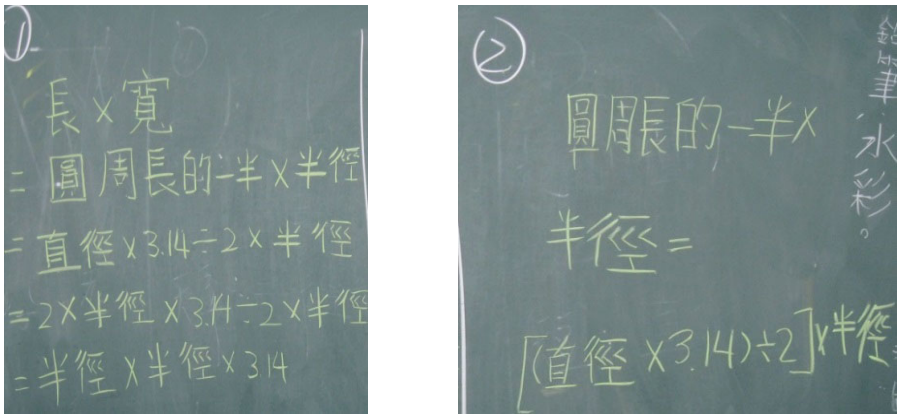
T：S14 同學的答案並沒有完全化簡（圖11(A)），還可以繼續再化簡下去；S13 同學的答案是完整的化簡過程（圖 11(B)）：

圓面積＝一半周長×半徑

＝〔（直徑×3.14）÷2〕×半徑

＝〔（半徑×2×3.14）÷2〕×半徑

＝半徑×半徑×3.14




(A) (B)

圖11. 學生圓面積公式說明

## （二）學習單之表現

### 1. 各題的作答正確率

從表 4 學生作答正確率與學習單的表現發現，有 5 位程度較差的學生因：(1)操弄技巧或排列組合方式不合宜，無法將扇形上下顛倒連接，或扇形的邊與邊連結角度不精細，致使連接的圖形失真；(2)學習動機意願低落、躲避挑戰，不想參與活動；(3)數學概念表達能力不佳等問題，例如無法說明操作步驟或變數之間的關係，影響其對組合圖式有關長寬和圓面積公式半徑和周長關係的推理。顯示這些低能力學生在圓面積計算解題之前，對於圓面積公式之由來相關操作和關係的連結已產生困難，因此可提供教師進一步學習教學需強化的重點（侯雪卿，2004）。

表 4

圓面積公式的由來之作答資料分析

| ● 請同學利用附件的四等分圓、八等分圓以及十六等分圓，各自重新拼裝成一個四邊形，並塗上不同的顏色，以做區分（見圖 12）。 |
|---|

（續）

表4
圓面積公式的由來之作答資料分析（續）

答對人數20人　　作答正確率80%
答錯人數 5人　　作答錯誤率20%

錯誤類型1：放棄做排列（2人）
錯誤類型2：排列不工整（1人）
錯誤類型 3：排列未完成（2 人）

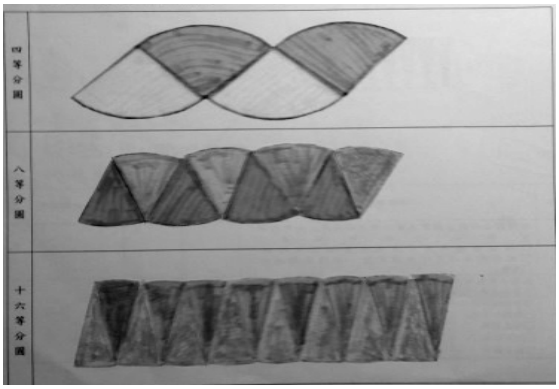



圖12.　學生將圓等分割組合成平行四邊形正確作法

- 根據上題，若有一圓形被平分成六十四塊，依照上面幾題的排列方式，則所排出來的圖形比較接近什麼圖形？（見圖 13）

答對人數20人　　作答正確率80%
答錯人數 5人　　作答錯誤率20%

錯誤類型1：放棄作答（2人）
錯誤類型2：概念錯誤（3人）

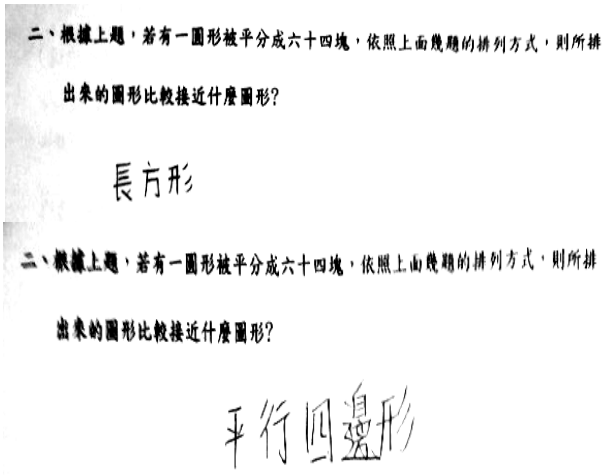



圖13.　學生的正確答案

（續）

表 4

圓面積公式的由來之作答資料分析（續）

- 看看下面的圖示，請同學仔細思考：圖示裡組合而成的新圖形，較長的邊是怎麼來的？較短的邊又是怎麼來的？請寫下你的答案（見圖 14）。

答對人數21人　　作答正確率84%

答錯人數 4人　　作答錯誤率16%

錯誤類型：放棄作答（4人）

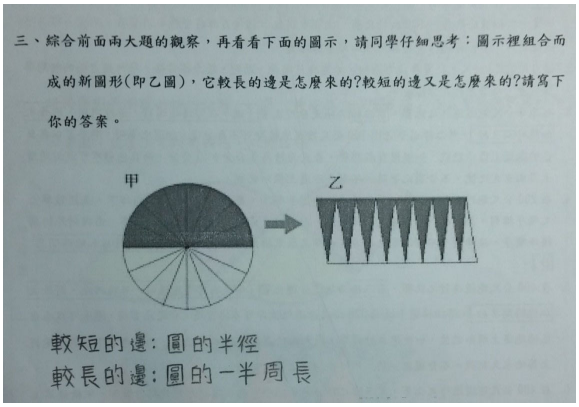



圖14. 學生的正確答案

- 根據上題，請寫出圓形的面積公式（見圖15）。

答對人數20人　　作答正確率80%

答錯人數 5人　　作答錯誤率20%

錯誤類型：放棄作答（5人）

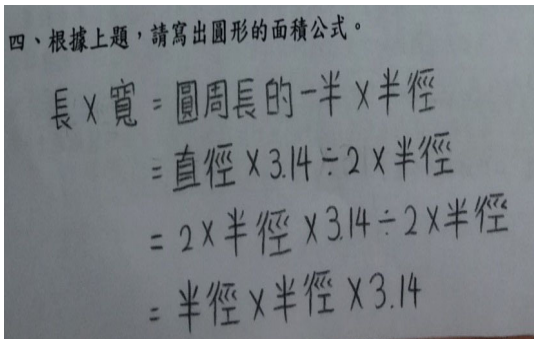



圖15. 學生的正確答案

## （三）課後訪談紀錄

L13： 因為第一題並未完成，無法從等分數量愈多的等分圓重組圖去推測新組成的圖形是接近何種幾何圖形。

L16：因為第一題的重組圖，其黏貼並不工整，無法從等分數量愈多的等分圓之重組圖去推測新組合而成的圖形是接近何種形狀。

【教師對學生反應的分析】

由於課本習作附件中的 16 等分圓不夠大，學生在剪貼時確實有一定的難度。教師應先實際演練一次，或找學生來試做一番，從中瞭解可行性，避免弄巧成拙，妨礙學生的學習意願。學生在動手操作任務時，應提醒其遵循正確的步驟及保持平面的工整，以供事後做比較用，或從中檢視是否有規律性存在。

M24：第一大題有完成且圖形排列工整，可以從等分數量愈多的等分圓之重組圖去猜測新組合而成的圖形是接近何種幾何圖形。不瞭解題目意思，不懂透過圖形觀察方式判斷圓形重組圖之長邊和短邊各代表圓形的何種要素，但知道圓面積公式內容。

【教師分析】

關於需比較兩圖形才能得知結果的試題，應做詳細的說明，使學生明白題目的意義。教學時，可用不同顏色的粉筆來標記圓形組合圖的長和寬，引導學生做圖形的比較，藉此瞭解圓形組合圖的長和寬是屬於圓形的何種要素。圓面積公式的由來，少了文字說明及算式的化簡，部分學生無法從圖形的演變過程中獲得足夠理解，只能強記圓面積公式。

### （四）教師自我省思

#### 1. 學習目標

大部分學生能藉由對圓形的切割和重組，察覺圓和長方形面積的關係，理解圓形的面積公式各元素所代表的意義及演變，正確寫出公式內容；能從類似長方形的組合圖形理解較短的一邊即為圓形的半徑長、較長的一邊即為一半圓周長；部分學生因未完成等分圓之重組圖，無法從圖形的演變做推論，原因是「附件圖形不夠大」，導致在裁剪和拼裝時有難度。教師可將附件的圖形放大，降低裁剪和拼裝的難度；另外，部分學生雖完成等分圓之重組圖，卻因拼裝不夠工整，無法觀察重組圖的形狀接近於長方形，關於此部分，應先提醒保持平面的工整，以能做圖形演變之觀察。低能力及部分中分組學生不瞭解題意，不會透過觀察判斷圓形重組圖之長邊和短邊各代表圓形的何種要素，不瞭解圓面積公式各元素代表的意義及演變由來，但知道圓面積公式之正確內容。經訪問學生，得知其是直接背誦數學課本裡的圓面積公式，教師應做詳細的步驟說明及算式的化簡，務使學生充分理解，避免流於死背硬記之學習方式。

2. 課程設計

提供算式化簡的練習，讓學生嘗試做附有文字之數學算式的化簡練習，以理解圓面積公式的演變由來，並建立「代數」的基本概念。

Corcoran 等（2009）主張良好的 HLTs 任務設計可容納多樣複雜的概念，協助學生進行統整連貫的學習，獲得更加完備的知識。本任務透過操作，強化學生對圓面積公式推理能力，由於先前有關圓形要素和圓心角任務之導引，除少數認知程度較低的學生於組合和推理上表現不佳，大多數學生在任務的指引，學習和推理圓面積公式的由來，利用學習軌道理論安排任務順序，整合學生學習經驗，協助學生理解圓面積概念。另外，透過本任務設計，理解到表現不佳學生學習困難之處，像是圖形組合的技巧、要素比對推理的轉換等，皆可提供教師作為進一步輔導學生解決困難的要點，讓教師掌握學生的學習進程，提供有效學習的策略。本任務雖和原教科書設計之內容相似，但透過教師對學習目標的檢視、操作順序安排和要素之推理比對，促進大多數學生成功學習，驗證此任務對學生公式理解的重要性，教師執行此任務時清楚地掌握任務的目標，要求學生推理明白圓面積公式的意義進而解題，充分理解數學概念，而非只是熟記公式運算獲得答案而已。

## 四、「分割」和「移補」

### （一）師生課室互動

S4：圖 16 的答案是錯誤的，計算過程是對的，但最後的計算答案不對。

S5：圖 17 的算法是計算三個完整圓形，而非三個半圓形。

T：這是「分割」的題目，要將半圓或四分之一圓從圖形中切割出來，重新組合成一個完整圓，題目不難理解，計算時要小心注意。

S8：圖 18 答案是錯誤的，應該是 307.72 平方公尺！

S9：圖 19 將斜線的四分之一圓填到白色半圓的地方，斜線部分的面積就是全部的一半，所以 12×6＝72。

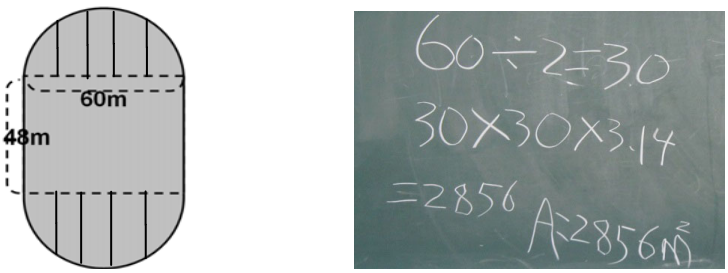
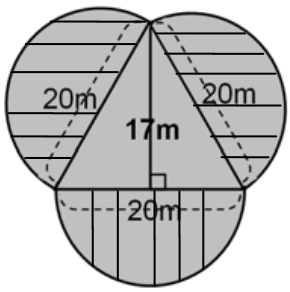



圖16. 運動場之複合圖形表現



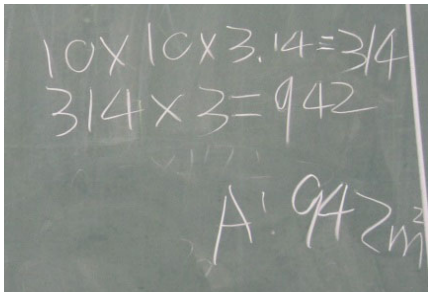
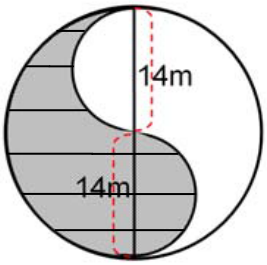




圖17.　三個半圓之複合圖形表現



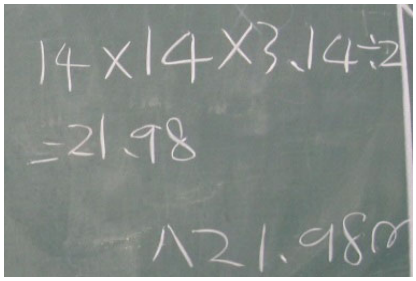
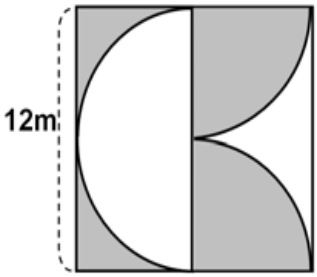




圖18.　太極圖形之複合圖形表現



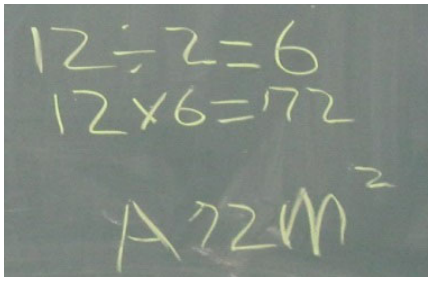




圖19.　花朵之複合圖形表現

## （二）學習單之表現

### 1. 各題的作答正確率

從表 5 學生作答正確率與學習單的表現發現，學生在第三和第四題的作答錯誤比例較高（約有 20%），尤其對低分組學生而言是種挑戰，學生作答錯誤的原因分為兩種，一是對數字運算錯誤，導致答案錯誤；另一是忽略圖形的變化，會將二分之一的圓形視為是完整的圓形而帶入公式運算，此發現與沈佩芳（2002）和譚寧君（1994）的研究結果相似。分析此現象的原因牽涉到學生對圓面積公式應用的理解，以及部分圓形圖形和整體圖形之間關係的辨識，因此教師在教導學生解複合圖形題目時，除對圖形分合移補技巧的傳授外，對於操作後圖形部分和整體之間關係的詮釋亦是重點，如此結合技術和概念，才能讓複合圖形面積解題

成功。

表 5

「分割」和「移補」之作答分析

下列複合圖形，請計算它們的斜線部分面積（見圖20～24）。

第一題 答對人數24人 作答正確率96%

答錯人數 1人 作答錯誤率 4%

錯誤類型：放棄作答（1人）

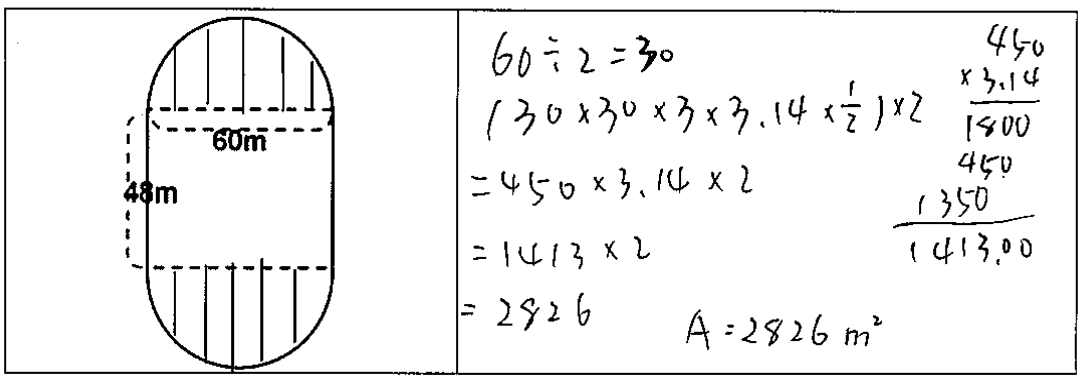



圖20. 學生的正確答案

第二題 答對人數24人 作答正確率96%

答錯人數 1人 作答錯誤率 4%

錯誤類型：放棄作答（1人）

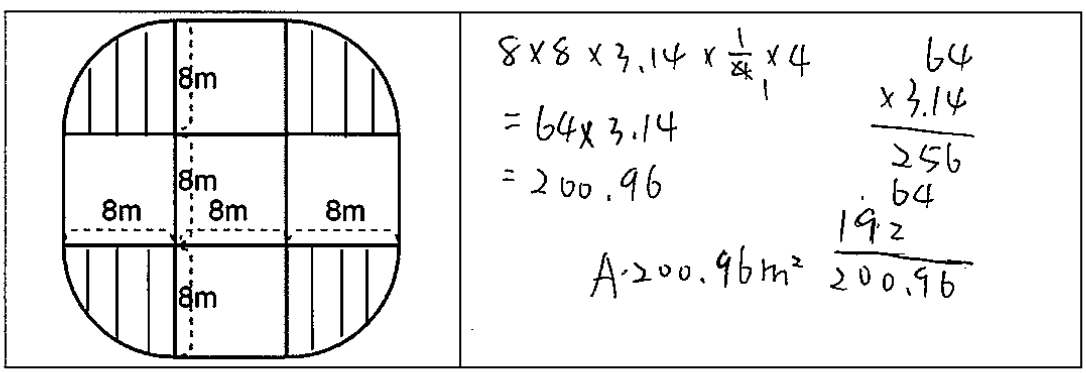



圖21. 學生的正確答案

（續）

表 5

「分割」和「移補」之作答分析（續）

| | | |
|---|---|---|
| 第三題 | 答對人數19人 | 作答正確率76% |
| | 答錯人數 6人 | 作答錯誤率24% |
| | 錯誤類型1：放棄作答（1人） | |
| | 錯誤類型2：概念錯誤（2人） | |
| | 錯誤類型3：計算錯誤（3人） | |

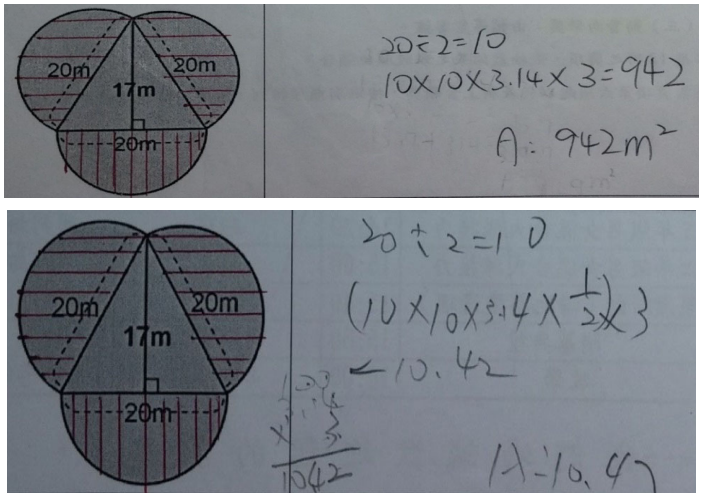



圖22.　學生的錯誤答案

| | | |
|---|---|---|
| 第四題 | 答對人數20人 | 作答正確率80% |
| | 答錯人數 5人 | 作答錯誤率20% |
| | 錯誤類型1：放棄作答（1人） | |
| | 錯誤類型2：計算錯誤（4人） | |

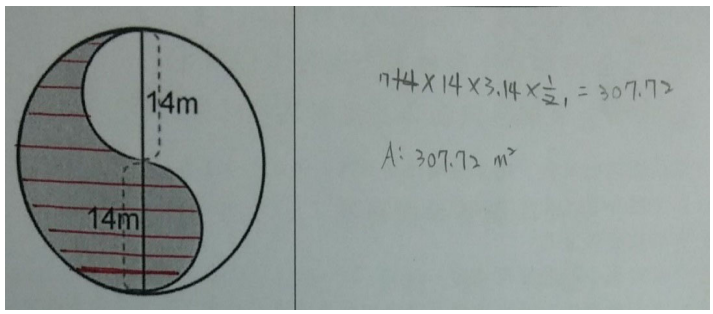



圖23.　學生的正確答案

（續）

表 5

「分割」和「移補」之作答分析（續）

| | | |
|---|---|---|
| 第五題 | 答對人數23人 | 作答正確率92% |
| | 答錯人數 2人 | 作答錯誤率8% |
| | 錯誤類型1：放棄作答（1人） | |
| | 錯誤類型2：概念錯誤（1人） | |

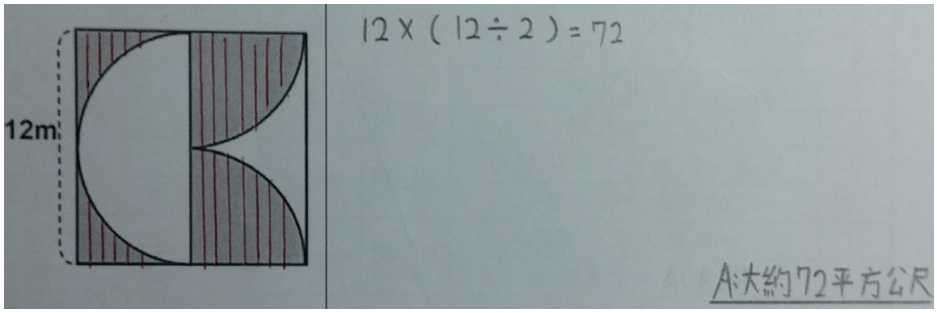



圖24. 學生的正確答案

## （三）課後訪談紀錄

L13：瞭解「分割後再重組」及「分割後再填補」之使用時機，但在計算時仍有粗心大意的情形發生。

【教師對學生反應的分析】

學生能運用「分割」和「移補」之面積運算技巧，將複合圖形組合成可以運算的簡單幾何圖形，多數學生會用視覺觀察來判斷「分割」和「移補」之使用時機。

## （四）教師自我省思

### 1. 學習目標

大多數學生能運用「分割」和「移補」的技巧，將複合圖形切割組成可運算的簡單幾何圖形，判斷「分割」和「移補」後公式使用的時機。但少部分低分組學生會忽略圖形部分和整體之間的關係，影響應用公式計算的正確性。教師應提醒學生，利用觀察判斷時，要注意圖和圖之間的「相容性」，避免過早定論而忽略數學思考，造成誤判之結果。另部分低分及中分組的學生會因粗心大意而計算錯誤，教師應提供足夠的練習機會，讓其能多加練習，以臻熟練。

2. 課程設計

提供課後的練習試題，讓學生多做練習，以達「熟能生巧」之境地。

Corcoran 等（2009）認為面對新的數學任務時，對學生應具備的必要能力或精熟度需做深入理解。本任務發現學生可判斷「分割」和「移補」後公式使用的時機，但少部分低分組學生會忽略圖形部分和整體之間的關係與計算技巧的熟練和精確性，影響應用公式計算的正確性，因此，教師在學生運算歷程間有關圖形和面積公式的連結，可在教學歷程予以強化說明，並在計算上予以熟練的機會，提升解題正確率。

## 五、應用和解題

### （一）師生課室互動

S4：圖 25 的答案是錯誤的，把斜線面積當成一個大半圓來計算，但大半圓下面的那個中半圓不能移補到空白的小半圓去，因為它們的直徑沒有一樣長。

S5：圖 26 的答案也不對，算法是將半徑 14 公尺和半徑 22 公尺的兩圓面積相加，可是他沒有扣除裡面那兩塊白色的面積及重複計算的部分，這樣一來，計算答案會比正確答案還來得大。

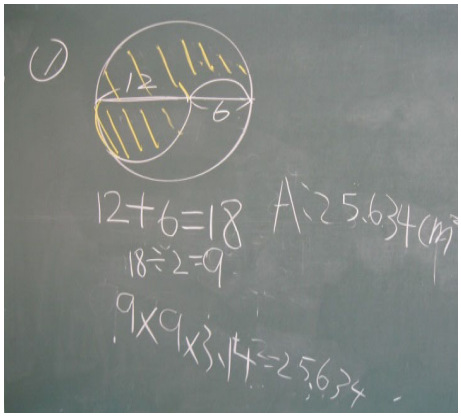



圖25.　太極複合圖形錯誤之表現

圖26.　標靶型複合圖形錯誤之表現

### （二）學習單之表現

1. 各題的作答正確率

從表 6 學生作答正確率與學習單的表現發現，可從上述圓形複合圖形解題表現得知，不少低分和中分組學生在這些需進行多次分解和組合的圖形作答錯誤（約 20%～40%的學生），呈現的錯誤反應包含無法掌握圖形部分和整體之間的關係（例如沒有扣除白色不必要的部分面積）、運算錯誤（誤用公式或計算不正確）、學習動機低落（不想接受挑戰）等問題。針對

這些反應，教師在圖形的分割移補教導時，宜針對圖形的特性，提供學生辨識、說明和論證的機會，鼓勵其先行嘗試運用聰慧的策略將圖形的結構釐清，再者運用公式解題，以掌握圖形轉換後的部分和整體關係。對於計算錯誤和學習動機低落部分，教師需強調後設認知策略和技巧，為圓面積計算常見的模組題目熟記答案，以減少繁雜運算帶來的負向心理反應，提升作答正確率，增強學生解題信心。

表 6

「填補」和「其他策略」之作答資料分析

● 下列複合圖形，請計算它們的灰色部分面積（見圖 27～29）。

| | | |
|---|---|---|
| 第一題 | 答對人數19人 | 作答正確率76% |
| | 答錯人數 6人 | 作答錯誤率24% |
| | 錯誤類型1：放棄作答（1人） | |
| | 錯誤類型2：概念錯誤（2人） | |
| | 錯誤類型3：計算錯誤（2人） | |
| | 錯誤類型4：計算不全（1人） | |

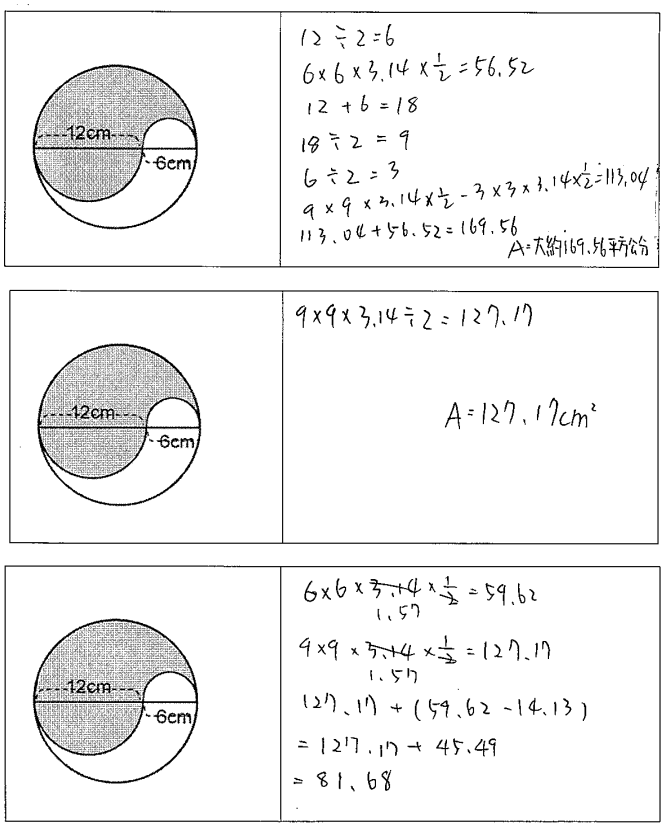



圖27. 學生在太極複合圖形的正確答案

（續）

表 6

「填補」和「其他策略」之作答資料分析（續）

| | | |
|---|---|---|
| 第二題 | 答對人數20人 | 作答正確率80% |
| | 答錯人數 5人 | 作答錯誤率20% |
| | 錯誤類型1：放棄作答（1人） | |
| | 錯誤類型2：計算錯誤（3人） | |
| | 錯誤類型3：計算不全（1人） | |

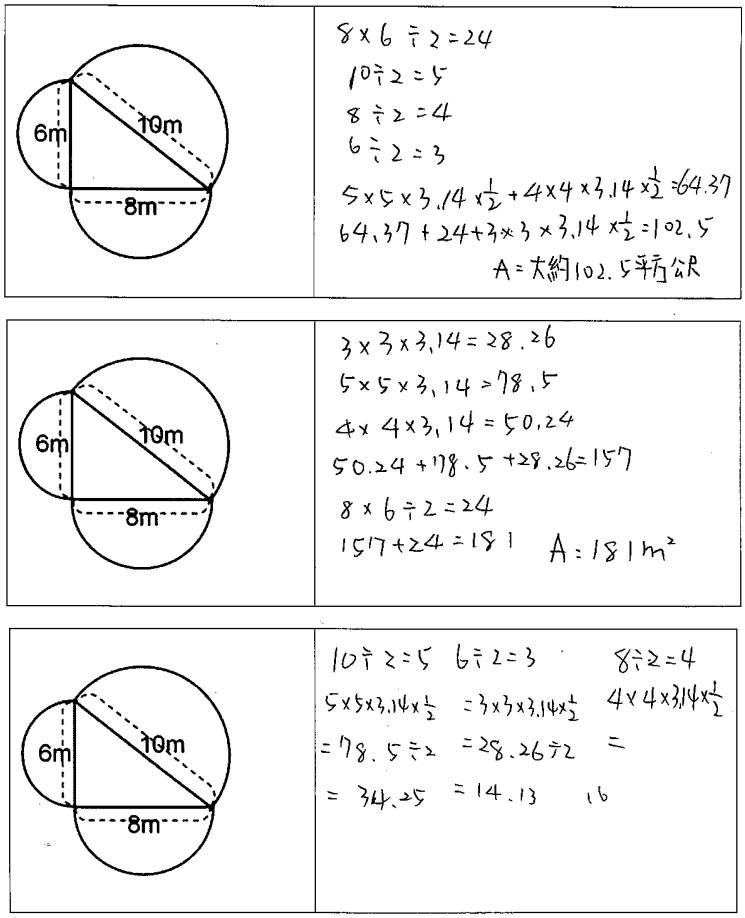



圖28.　學生的正確答案

| | | |
|---|---|---|
| 第三題 | 答對人數15人 | 作答正確率60% |
| | 答錯人數10人 | 作答錯誤率40% |
| | 錯誤類型1：放棄作答（4人） | |
| | 錯誤類型2：概念錯誤（3人） | |
| | 錯誤類型3：計算不全（3人） | |

（續）

表 6

「填補」和「其他策略」之作答資料分析（續）

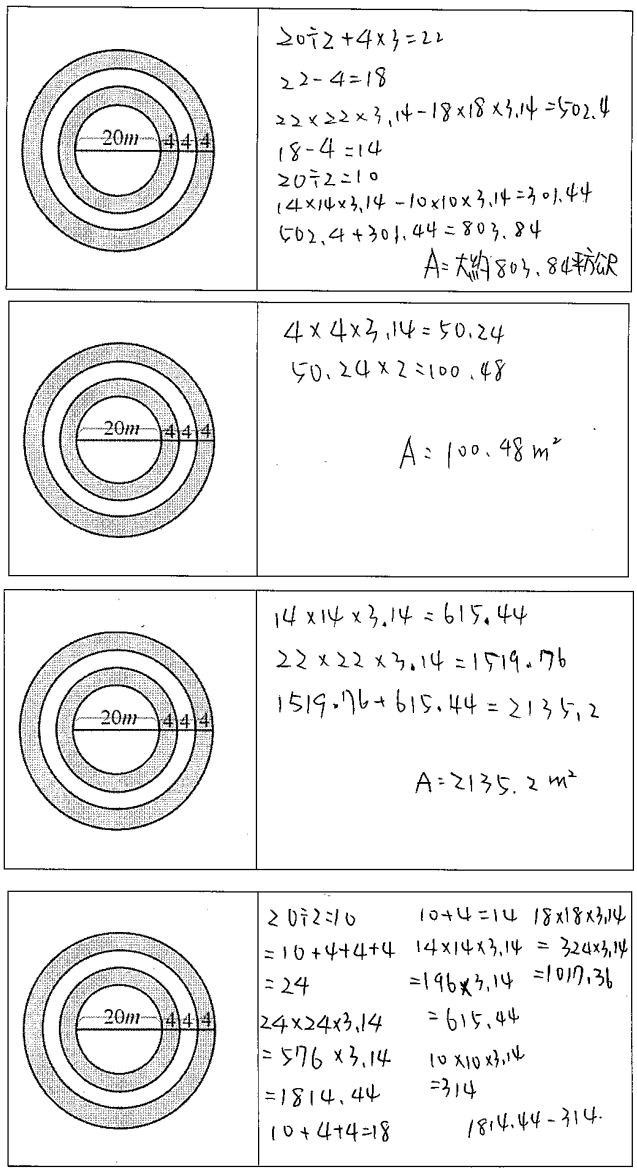



圖29. 學生在標靶型複合圖形錯誤的答案

## （三）教師自我省思

### 1. 學習目標

大多數學生能觀察和理解如何運用「填補」技巧將無法直接計算的複合圖形化成可計算的簡單圖形，並運用「文字或符號」和「分配律」來簡化計算過程，正確計算答案；低分組

和部分中分組學生對於「標靶型」試題因受到視覺干擾影響，不知該如何計算。教師應教導學生運用「兩階段形式」及「文字或符號的標記」之解題技巧，分別求出內圈及外圈的環形面積。部分學生對繁雜算式易感厭倦而放棄作答，教師應先提醒學生採用橫式計算，把要求的面積當成數個區塊之總和，做答時依照區塊數量來列式，並用括弧區分，使學生能聯想到運用分配律來化簡計算過程。

2. 課程設計

多數的學生不知運用「文字或符號」及「分配律」簡化數學的計算過程。教師應先提供算式練習，教導學生「分配律」的使用，使其熟悉分配律的使用時機，再教導如何在複合圖形面積求解上使用分配律化簡計算過程，可用的教學方法為「面積區塊之標記」任務，讓學生練習使用「文字或符號」來標記欲求解面積之區塊，一方面幫助養成良好的計算習慣，另方面可教導其「代數」的基本概念。

本研究利用 HLTs 設計圓形複合圖形面積任務進行教學實驗，由於先行參酌學習目標、進行教學任務設計，並於互動歷程檢核學生的數學思考反應，從中發現學生解題錯誤的重要原因。從教學實驗歷程發現學生對於圓形複合圖形面積問題最感困擾的是：(1)當圖形太複雜時，影響解題線索的判斷。檢視原因，在於學生太過注意「斜線」或「陰影」需要計算的面積部分，忽略運用「填補」之技巧，此類型題目可以「標靶型面積」為代表；(2)繁複計算過程造成錯誤，檢視原因，在計算複合圖形時，最感麻煩的在於「3.14 之計算要算好幾次」，只要有一處計算產生問題，答案就會錯誤。前者的困難受限於學生解題前的辨識和線索解析能力，後者則在於計算技巧的精熟。上述發現雖與一些學者對學生圖形面積解題的發現有相似之處（侯雪卿，2004；陳嘉皇，2004；譚寧君，1994；Nguyen, 2010），但在本研究複合圖形解題部分，辨識圖形要素與結構之間的關係這些能力似乎對正確解題所需的計算技巧影響更重；另檢視學生作答內容，多數直式計算紛亂，可要求計算時先以「文字或符號」註明欲求面積之組成部分，再依組成要素列出橫式計算，運算式子若有共同的數字，則使用「分配律」做簡化，使計算過程清楚，事後更容易檢查答案。

Corcoran 等（2009）認為執行 HLTs 要能成功可藉由數學之核心概念和議題進行任務設計，從學生在任務進展中呈現的表現辨識、說明學生數學概念的發展，並在軌道執行歷程進行形成性評量，以判斷學習和任務發展的條件，進而隨著概念知識的演變發展建構教師的教學模式。本研究以學生圓形複合圖形面積之解題作為軌道任務的教學設計，遵循目標分析、作業順序安排實施、臆測學生解題表現、針對表現予以解析和回饋，理解學生在此議題數學概念和能力的發展，最後獲得一系統性和解構性、結合教學理論與實務、課程與教學之完整性的知識，提升了教師專業能力。綜合學生表現分析，發現原設計的任務對學生圓面積解題概念的發展未臻完善，需加以修正調整，軌道任務設計前、後之比較，如圖 30 和 31 所示，說明如下：

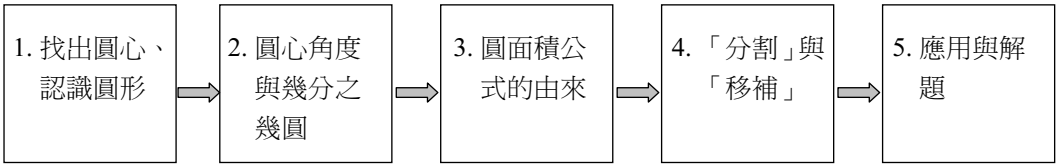



圖30. 修正前的「假設性學習軌道」任務

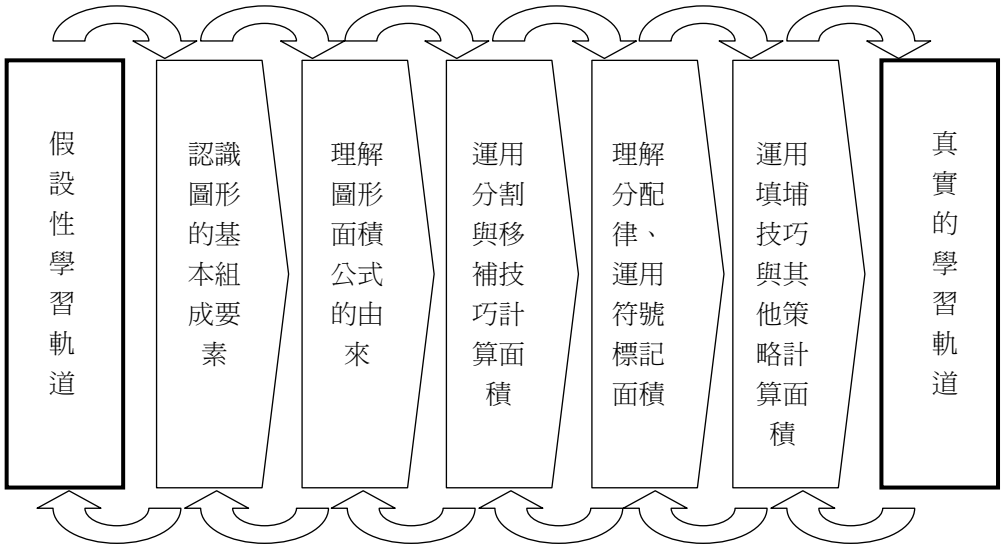



圖31. 修正後的「假設性學習軌道」任務

### 1. 軌道任務一

原任務為「找出圓心並認識圓形的基本組成要素」，修正為「認識圓形的基本組成要素」，原因係因學生在「找圓心」任務中，多數低分組和中分組學生不曉得利用對折兩次的方式找出圓心；而多數學生對於圓形的基本要素辨識和操作表現佳，且參與情形踴躍，學習動機高，故修正原先的任務，先強調「認識圓形的基本組成要素」，再進行「找圓心」的任務，以提高參與解題和學習興趣及作答正確率，降低「放棄作答念頭」之消極情形。

### 2. 軌道任務二

原任務為「瞭解圓心角度和幾分之幾圓的關係」，修正為「理解圓面積公式由來」，係因「瞭解圓心角度和幾分之幾圓的關係」任務時，試題中有關「圓形」的幾何圖形，多為半圓或四分之一圓，學生可用視覺辨識，無須用到「圓心角度和幾分之幾圓」的換算關係式。故直接跳到「具體操作圓面積公式的由來」任務，至於原任務建議放在「扇形複合圖形面積」的教學任務裡，因為扇形面積計算需用到「圓心角度和幾分之幾圓」的換算關係式，對解題時較有助益。

3. 軌道任務三

原任務為「理解圓面積公式的由來」，修正為「運用分割和移補的技巧來計算面積」，係因「運用分割和移補的技巧來計算面積」任務在「理解圓面積公式的由來」任務之後，屬於「基本的圓形複合圖形面積試題」練習任務，逕自編排在「理解圓面積公式的由來」任務之後。

4. 軌道任務四

原任務為「運用分割和移補技巧來計算面積」，修正為「理解分配律，學習用符號標記面積」，係因在計算較難的圓形複合圖形面積時，運用直式計算過程凌亂，事後亦難有效率檢查。故以「理解分配律，學習用符號標記面積」任務，教導運用橫式書寫計算過程、維持作答欄位的版面工整，並運用分配律簡化算式提高作答正確率。對較複雜的複合圖形，應教導學生先把面積區塊用符號標記起來，避免「漏算面積區塊」的情形發生，再利用橫式書寫計算過程及運用分配律簡化算式，使計算正確。

5. 軌道任務五

維持原任務，但強調分割和移補後之圖形部分和整體關係的辨識，可用解題策略之檢核，強化學生將所學圓形複合圖形面積解題的技巧和能力擴展應用。

# 伍、結論和建議

## 一、結論

（一）依據 HLTs 可設計圓形複合圖形面積任務，包含「認識圓形的基本組成要素」、「理解圓面積公式的由來」、「運用分割和移補的技巧來計算面積」、「理解分配律，學習用符號標記面積」及「『填補』和『其他策略』」。

（二）學業成就表現高、低分組的學生於「圓形複合圖形面積任務」的表現有所差異，其反應促使教師省思與修正調整學習軌道中任務的設計安排。

（三）經由教學實驗回溯省思後，教師對於學生概念的理解、教學方法及課程設計等信念產生以下改變：

1.對學生概念的理解：(1)掌握學生圓形複合圖形面積解題的幾何思考和進程；(2)釐清學生的迷思概念；(3)瞭解學生的解題概念。

2.教學方法的改進：(1)重視圓形的基本構成要素；(2)強調圓面積公式之具體操作；(3)強化圓形複合圖形面積計算的解題技巧和簡化算式策略。

本研究結果除可支持 HLTs 應用於數學特殊議題，像是圓形複合圖形面積任務的設計和教學實驗，獲得良好成效，豐富文獻資料外，透過教學順序的安排實施，協助教師深入理解學

生圓形的數學概念發展情形，掌握任務和學生認知特性，提供學生合宜的學習機會，最重要的是師生互動歷程中，教師從假設性軌道中臆測學生的思考、理解學生的想法，並從形成性評量中給予學生不同的回饋反應，協助學生理解；另外，教師從自身的回溯省思瞭解到「學然後之不足，教然後知困」之啟示，不僅對教學技巧、學科內容知識或是課程設計方面，HLTs皆提供最佳的導引方向和機制，有利於教師將理論和實務結合，解決課室實際問題。尤其是教學實驗後，不僅讓教師瞭解學生學習歷程可能產生的困境，掌握學生數學思考，適時地提供學生可利用之策略和方法，對於解決其教室中的實務問題有所助益。最重要的是在利用 HLTs 的歷程中，透過目標的檢視、師生互動的回饋、省思習慣的培養，提供教師專業發展的機會，擴增對圓面積相關的數學知識和教學策略，建立了對圓形複合圖形面積的教學模式（Local instruction model），展現了 Clements 和 Sarama（2004）、Gravemeijer（1999）及 Simon（1995）等學者強調的 HLTs 的精神和意涵。

## 二、建議

### （一）教學實施前需先分析學習目標、檢視學生數學先備知識，以利 HLTs 的設計

本研究經文獻探討和教學經驗的分析，瞭解學生在學習圓形複合圖形面積解題歷程，欠缺圓形相關要素的認識、對公式誤用、缺乏圖形分割、移補技巧；分析教科書內涵，設計相關任務、執行教學，掌握學生學習進程，並提出合宜之協助，提供學生學習機會。依據 Clements 和 Sarama（2004）、Gravemeijer（1999）及 Simon（1995）等致力於學習軌道理論發展的學者認為，教學目標的分析與設定不僅可協助教師掌握教學進程，更可導引學生的學習方向，因此教師在教導圓形及扇形面積時，應先分析教學目標和教材內容，檢視學生先備知識是否足夠、思索如何實施任務等問題，並將其列入正式課堂教學計畫的內容。

### （二）重視圓面積公式的演變，強化分割和移補變化前後之圖形部分和整體的關係

研究發現，學生會利用視覺觀察，依據圖形面積之特質予以分割和移補，但在計算歷程忽略部分和整體圖形之間的關係，以致運用不完整的公式概念解題，故教師在教導公式應用時應重視「面積公式的演變由來」此一環節，透過圖形的剪裁拼湊、圖形移位的方式，幫助學生理解面積公式代表的涵義，強化其進行圖形移補後有關部分和整體圖形結構的關係，要求計算時先以「文字或符號」註明欲求面積之組成部分，再依組成要素列出橫式計算，運算式子若有共同的數字，則使用「分配律」做簡化，使計算過程清楚，事後更容易檢查答案。

### （三）提供課後學習檢測任務讓學生練習，以驗收課堂學習成果

本研究採用 HLTs 教學實驗模式，係以圓形複合圖形面積之重要概念和特殊意義作為學習目標（運用視覺觀察來形成「切割」和「移補」概念、運用「文字或符號」來做面積的加減算式和等式寫法、運用「分配律」來化簡橫式的四則運算），形成包含學生可能的學習路徑，

特徵為採用「啟發式」的步驟進行，鼓勵學生思索題目、應用先備知識解答問題。由於考量學生的程度不同，故設計的學習單內容以簡易為主，且採用學生較容易表達的具體方式，如：摺紙、描繪、組合圖形作答。因為題目數量不多，故可能會有先備知識方面的檢測遺漏之虞；加上採用班級討論方式，有些學生因害羞或個性靜默而不敢發言，造成教師無法確實掌握該部分學生之先備知識。故在課堂教學結束後，應另外準備一份學習檢測任務讓學生課後練習，以確實驗收學生學習成果及瞭解學生先備知識不足的部分。

# 參考文獻

## 一、中文文獻

王建興（2003）。**國小教師數學單元教學之探討－以圓周率教學為例**（未出版碩士論文）。國立臺北師範學院，臺北市。

【Wang, J.-X. (2003). *The study of mathematics unit teaching in elementary－Example of π unit* (Unpublished master's thesis). National Taipei Teachers College, Taipei, Taiwan.】

沈佩芳（2002）。**國小高年級學童的平面幾何圖形概念之探究**（未出版碩士論文）。國立臺北師範學院，臺北市。

【Shen, P.-F. (2002). *Study on fifth & sixth graders' understanding to two-dimensional geometry concepts* (Unpublished master's thesis). National Taipei Teachers College, Taipei, Taiwan.】

侯雪卿（2004）。**國小高年級學生圓概念教學模組補救教學之個案研究**（未出版碩士論文）。國立嘉義大學，嘉義市。

【Hou, X.-Q. (2004). *The case study of the remedial teaching module of the circle concept by elementary school students* (Unpublished master's thesis). National Chiayi University, Chiayi, Taiwan.】

教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要－數學學習領域**。臺北市：作者。

【Ministry of Education. (2008). *National primary and secondary school syllabuses consistent－Nine areas of mathematics learning*. Taipei, Taiwan: Author.】

陳嘉皇（2004）。**國小學童面積概念轉化文本之設計及其教學效果之實驗研究**（未出版博士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

【Chen, C.-H. (2004). *The study on the elementary students' conception transfer of area learning text design and the effect inquion teaching experiment researchry* (Unpublished doctoral dissertation). National Kaohsiung Normal University, Kaohsiung, Taiwan.】

陳嘉皇（2008）。國小面積資訊教材學習軌道設計與教學成效探討。**高雄師大學報：自然科學與科技類，25**，103-124。

【Chen, C.-H. (2008). The study of the effects of learning trajectories designing and teaching experiment on elementary school students' area formulation conception developed. *Kaohsiung Normal University Journal: Sciences and Technology, 25*, 103-124.】

陳嘉皇（2013）。國小六年級學生運用一般化基模進行圖形規律問題解題之研究。**教育科學研究期刊，58**（1），59-90。doi:10.3966/2073753X2013035801003

【Chen, C.-H. (2013). Application of generalization schemas to solve figural pattern problems on sixth graders. *Journal of Research in Education Sciences, 58*(1), 59-90. doi:10.3966/2073753X2013035801003】

譚寧君（1994）。高年級面積教材的分析－國民新課程之精神。載於臺灣省國民學校教師研習會（編著），**國民小學數學科新課程課程概說（高年級）**（pp. 134-165）。臺北市：教育部。

【Tan, N.-J. (1994). An area of high-grade materials analysis, national primary spirit of the new curriculum. In Taiwan National School Teacher Workshops Published (Ed.), *National primary school mathematics new curriculum overview say (high grade)* (pp. 134-165). Taipei, Taiwan: Ministry of Education.】

## 二、外文文獻

Clements, D. H., & Battista, M. T. (2000). Designing effective software. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 761-776). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89. doi:10.1207/s15327833mtl0602_1

Confrey, J., Nguyen, K., Lee, K., Panorkou, N., Corley, A., & Maloney, A. (2012). *TurnOnCCMath*. Retrieved from https://www.turnonccmath.net

Corcoran, T., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence based approach to reform*. New York, NY: Center on Continuous Instructional Improvement, Teachers College-Columbia University.

Gravemeijer, K. P. E. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177. doi:10.1207/s15327833mtl0102_4

Nguyen, K. H. (2010). *Investigating the role of equipartitioning and creating internal units in the construction of a learning trajectory for length and area* (Unpublished doctoral dissertation). North Carolina State University, Raleigh, NC.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. doi:10.2307/749205

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488. doi:10.3102/00028312033002455

Journal of Research in Education Sciences
2016, 61(1), 1-41
doi:10.6209/JORIES.2016.61(1).01

# Teaching Students How to Calculate the Area of Complex Figures With Circles by Using Learning Trajectories

Chia-Huang Chen
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

Bi-Tsz Wu
Taichung Municipal Li Sing Elementary School

## Abstract

A mathematics course teaching students how to calculate the area of complex figures with circles was designed using learning trajectories. We conducted a teaching experiment to examine the learning conditions and problem-solving performance of students and understand their misconceptions and difficulties in different areas of learning. Teacher journals review teaching techniques and effective teaching methods to assist students in forming complete and systematic concepts of circles and in solving problems. The subjects in this study comprised a sixth-grade class of students at a public elementary school in Central Taiwan and their homeroom teacher. The course content focused on the concepts of determining the area of complex figures with circles, as introduced in sixth-grade mathematics in the Grade 1-9 Curriculum Guidelines. We referred to math teaching materials and guidelines to design the course. The collected and analyzed data included: (1) teacher-student interactions during class, (2) the math worksheet performance of students, and (3) after-class interview records. We verified teaching effectiveness by using the worksheet scores and qualitatively analyzed the misconceptions of students. The findings of this study indicate the following: (1) the teaching materials designed using learning trajectories include the Basic Composing Elements of Circles, Understanding the Circle Area Formula, Cutting and Shifting Techniques to Calculate Area, Understanding the Distributive Law and Marking Areas with Symbols, and Filling in and Other Strategies, (2) students with different levels of cognition displayed varying performance on the area

Corresponding Author: Chia-Huang Chen, E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw
Manuscript received: Aug. 12, 2014; Revised: Dec. 19, 2014, Mar. 8, 2015; Accepted: Mar. 17, 2015.

worksheets, and (3) after retrospective reflections on the teaching experiment, the teacher's behavior changed with regard to understanding the conceptions of the students, teaching methods, and curricular design.

**Keywords:** area, circle, complex figure, learning trajectories