

## 第參章 研究方法

本研究所採取的研究方法主要為質性與量化取向的調查研究方法，包含紙筆測驗及個別訪談兩個部分。第一部份是採用量化的方法，先蒐集國一學生做比例問題的紙筆測驗結果，從比例問題的表面結構比較學生的解題表現及解題策略是否有差異。第二部份再採用質性的方法，從比例問題的深層結構探究學生在解決比例問題時的解題表現及解題策略，透過個別訪談的方式瞭解學生的真實想法，最後，比較學生在比例問題的表面結構解題與深層結構解題的差異及關聯性，以瞭解學生在解決比例問題時所遭遇到的困難為何。以下依序介紹本研究之研究架構、研究設計、研究對象、研究工具、研究步驟與過程及資料處理。

### 第一節 研究架構

本研究主要是採取質、量並重的方式進行，分為兩個部分，第一部分是參考文獻設計適當的比例問題，研究者將比例問題測驗設計成三個結構來探討，分別為「不同數字型式」、「不同語意類型」及「不同量的性質」，此三個結構乃是本研究中所稱之「比例問題的表面結構」。透過幾次的預試修正工具後，進入正式的施測，研究者蒐集國一學生在比例問題測驗的解題資料，進行量的分析，主要是從比例問題的表面結構分析學生解題的差異性。

本研究第二部分是訪談學生解題的情形，依據文獻所提之理論架構，將比例問題分成三個深層結構：「比例概念的共變原則」、「比例概念的不變原則」及「比例概念的相對改變原則」，研究者透過半結構性晤談架構來進行訪談，經由一對一的晤談過程中分析學生是否掌握比例問題的三個深層結構，從深層結構的角度去探究學生的解題表現及解題策略。

研究最後一部分，比較學生在比例問題的表面結構及深層結構下的表現是否有差異，探討兩者之間的關聯性，再者，以此做為出發點，瞭解學生無法正確解決比例問題及遭遇困難的真正原因，提供一些建議當作教學現場的教師在教授比例概念時的參考，幫助學生更瞭解比例概念，而非純粹只會比例問題的解題技巧與運算而已，此乃本研究之最終目的。

本研究依據研究目的、研究問題與文獻探討架構而成，分別從比例問題的表面結構和深層結構去探討學生的解題表現與解題策略，最後討論在這兩種結構下學生解題的關聯性，以透過這些研究問題試圖去瞭解學生在解題時遇到的問題及困難，其研究架構的設計如下圖 3-1-1 所示：

茲將研究架構圖中的研究問題敘述如下：

- 1-1 在「不同數字型式」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？
- 1-2 在「不同語意類型」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？
- 1-3 在「不同量的性質」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？
- 2-1 在「比例概念的共變原則」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？
- 2-2 在「比例概念的不變原則」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？
- 2-3 在「比例概念的相對改變原則」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？
- 3-1 探究國一學生在解比例問題時，表面結構的數字型式與深層結構的共變、不變和相對改變原則之間的關聯性為何？
- 3-2 探究國一學生在解比例問題時，表面結構的語意類型與深層結構的共變、不變和相對改變原則之間的關聯性為何？
- 3-3 探究國一學生在解比例問題時，表面結構的量的性質與深層結構的共變、不變和相對改變原則之間的關聯性為何？

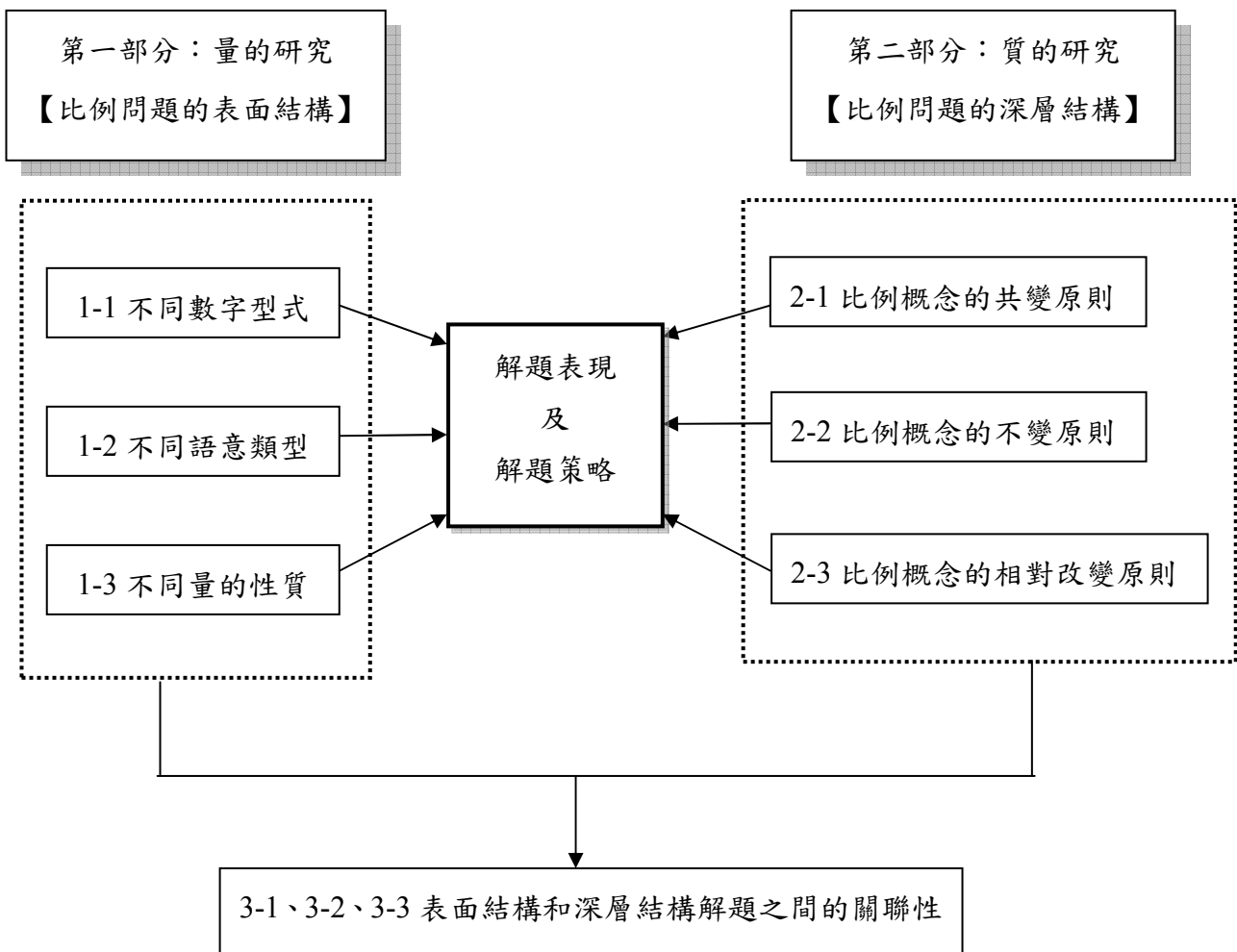


圖 3-1-1 研究架構圖

## 第二節 研究設計

根據上述之研究架構圖，本研究採用紙筆測驗法，比例問題測驗乃是依據研究者參酌文獻的題目加以改編設計而成，透過量的分析從比例問題的表面結構去瞭解學生的解題表現及解題策略類型。再者，配合半結構性晤談從比例問題的深層結構去瞭解學生的解題表現及使用不同解題策略解題的原因，並探究學生在比例問題的表面結構解題與深層結構解題之間的關聯性，以判斷學生在解決比例問題時遭遇到困難的原因。

本研究第一部分主要是採用量的研究，使用「描述性統計」及「多變量重複量數變異數分析」的方式，分別從比例問題的三個表面結構探討與國一學生解題的關係，並輔以半結構性晤談的方式瞭解學生在此三個表面結構下使用不同解題策略的原因，此部分設計一共分成三項。而第二部分主要是採用質的研究，利用「半結構性晤談」的方式從比例問題的三個深層結構探討與國一學生解題的關係，此部分設計共分成三項。最後，第三部分乃是將第一、二部分綜合比較結果，使用關聯量數( $\gamma$ 係數)分析並瞭解表面結構和深層結構兩者之間的關聯性。茲將研究設計分別說明如下：

**【第一部分】**從比例問題的表面結構探究國一學生的解題表現及解題策略。

一、「不同數字型式」與學生解題表現及解題策略的關係

(一)不同數字型式與學生解題表現的關係

本部分探討不同數學學業成就學生在不同數字型式比例問題紙筆測驗的解題表現(依受試者在不同數字型式的比例問題測驗上 15 題的平均得分代表之)是否有差異，因為本研究是依數字型式將比例問題測驗題本分為 T1、T2、T3、T4 四個題本，每一個學生只做其中一個題本，由於寫這四個題本的學生其能力分布可能並不相同，因此，並不宜直接做統計上的考驗來驗證這四個題本的解題表現是否有顯著差異，所以本研究只透過描述性統計來瞭解學生解題表現的概況，其結果只提供參考。

## (二) 不同數字型式與學生解題策略的關係

本部分探討不同數學學業成就學生在不同數字型式的解題策略類型，採用「百分比計次」的方法以瞭解各類型的次數分布，茲將「自變項」與「依變項」分別說明如下：

### (1) 自變項：

數字型式一分為第一式、第二式、第三式及第四式的數字型式。

數學學業成就—依照國中一年級下學期的第一次段考成績分為「高數學學業成就」、「中數學學業成就」及「低數學學業成就」。

### (2) 依變項：

解題策略類型次數—依受試者在比例問題測驗上的解題策略類型次數代表之，正確的解題策略分為七類：「單價法」、「倍數法」、「公式法」、「數量分解法」、「疊加法」、「舉例法」及「計算錯誤」；錯誤的解題策略分為八類：「比例項錯置」、「對應項相等」、「和數相等」、「差數相等」、「乘積相等」、「估算」、「其它運算」及「無計算過程或空白」。

除了統計全部樣本學生的解題策略使用情形外，另外，也輔以半結構性晤談的方式瞭解學生在不同數字型式下使用不同解題策略的原因。

## 二、「不同語意類型」與學生解題表現及解題策略的關係

### (一) 不同語意類型與學生解題表現的關係

本部分探討不同數學學業成就學生在不同語意類型比例問題紙筆測驗的解題表現是否有顯著差異，採用「多變量重複量數變異數分析(multivariate repeated measures analysis of variance)」，茲將「自變項」與「依變項」分別說明如下：

### (1) 自變項：

數學學業成就—依照國中一年級下學期的第一次段考成績分為「高數學學業成就」、「中數學學業成就」及「低數學學業成就」。

### (2) 依變項：

解題表現—依受試者在不同語意類型的比例問題測驗上 15 題的平均得分代表之（分為「熟知的量數」、「部分-部分-不混合」、「部分-部分-混合」、「關

係集合」及「放大-縮小-內在量」五種不同的語意類型，因為「放大-縮小-外在量」的題目只有一題，所以此類型不做分析)。

## (二)不同語意類型與學生解題策略的關係

本部分探討不同數學學業成就學生在不同語意類型的解題策略類型，採用「百分比計次」的方法以瞭解各類型的次數分布，茲將「自變項」與「依變項」分別說明如下：

### (1) 自變項：

語意類型一分為「熟知的量數」、「部分-部分-不混合」、「部分-部分-混合」、「關係集合」、「放大-縮小-外在量」及「放大-縮小-內在量」六種不同的語意類型。

數學學業成就—依照國中一年級下學期的第一次段考成績分為「高數學學業成就」、「中數學學業成就」及「低數學學業成就」。

### (2) 依變項：

解題策略類型次數—依受試者在比例問題測驗上的解題策略類型次數代表之，正確的解題策略分為七類：「單價法」、「倍數法」、「公式法」、「數量分解法」、「疊加法」、「舉例法」及「計算錯誤」；錯誤的解題策略分為八類：「比例項錯置」、「對應項相等」、「和數相等」、「差數相等」、「乘積相等」、「估算」、「其它運算」及「無計算過程或空白」。

除了統計全部樣本學生的解題策略使用情形外，另外，也輔以半結構性晤談的方式瞭解學生在不同語意類型下使用不同解題策略的原因。

## 三、「不同量的性質」與學生解題表現及解題策略的關係

### (一)不同量的性質與學生解題表現的關係

本部分探討不同數學學業成就學生在不同量的性質比例問題紙筆測驗的解題表現是否有顯著差異，採用「多變量重複量數變異數分析(multivariate repeated measures analysis of variance)」，茲將「自變項」與「依變項」分別說明如下：

(1) 自變項：

數學學業成就—依照國中一年級下學期的第一次段考成績分為「高數學學業成就」、「中數學學業成就」及「低數學學業成就」。

(2) 依變項：

解題表現—依受試者在不同量的性質的比例問題測驗上 15 題的平均得分代表之(分為「離散量-離散量-內比」、「離散量-離散量-外比」、「離散量-連續量-外比」、「連續量-連續量-內比」及「連續量-連續量-外比」的解題表現)。

(二)不同量的性質與學生解題策略的關係

本部分探討不同數學學業成就學生在不同量的性質的解題策略類型，採用「百分比計次」的方法以瞭解各類型的次數分布，茲將「自變項」與「依變項」分別說明如下：

(1) 自變項：

量的性質—分為「離散量-離散量-內比」、「離散量-離散量-外比」、「離散量-連續量-外比」、「連續量-連續量-內比」及「連續量-連續量-外比」五種量的性質。

數學學業成就—依照國中一年級下學期的第一次段考成績分為「高數學學業成就」、「中數學學業成就」、「低數學學業成就」。

(2) 依變項：

解題策略類型次數—依受試者在比例問題測驗上的解題策略類型次數代表之，正確的解題策略分為七類：「單價法」、「倍數法」、「公式法」、「數量分解法」、「疊加法」、「舉例法」及「計算錯誤」；錯誤的解題策略分為八類：「比例項錯置」、「對應項相等」、「和數相等」、「差數相等」、「乘積相等」、「估算」、「其它運算」及「無計算過程或空白」。

除了統計全部樣本學生的解題策略使用情形外，另外，也輔以半結構性晤談的方式瞭解學生在不同量的性質下使用不同解題策略的原因。

**【第二部分】**從比例問題的深層結構探究國一學生的解題表現及解題策略。

一、「比例概念的共變原則」與學生解題表現及解題策略的關係

本部分從「比例概念的共變原則」探討學生的解題表現及解題策略，瞭解學生掌握「比例概念的共變原則」與解題之間的關聯性，本部分採用「半結構性晤談」的方式以瞭解學生的解題情形。

二、「比例概念的不變原則」與學生解題表現及解題策略的關係

本部分從「比例概念的不變原則」探討學生的解題表現及解題策略，瞭解學生掌握「比例概念的不變原則」與解題之間的關聯性，本部分採用「半結構性晤談」的方式以瞭解學生的解題情形。

三、「比例概念的相對改變原則」與學生解題表現及解題策略的關係

本部分從「比例概念的相對改變原則」探討學生的解題表現及解題策略，瞭解學生掌握「比例概念的相對改變原則」與解題之間的關聯性，本部分採用「半結構性晤談」的方式以瞭解學生的解題情形。

**【第三部分】**探究比例問題的表面結構與深層結構解題之間的關聯性。

本部分綜合所有受訪學生在「半結構性晤談」的結果，將學生在表面結構和深層結構的解題表現使用關聯量數( $\gamma$ 係數)分析之間的關聯性。



### 第三節 研究對象

本研究的研究對象是選取國中一年級的學生，之所以以國一學生為研究對象，是由於國小高年級時學生已學過比例的概念，對於比例概念應該有相當的基礎與認識，到了國一時其課程又將比例的概念加深加廣，所以想透過此研究瞭解學生在國小階段學習比例概念的情形，以銜接上國中的課程。目前民間教科書開放，比例概念的學習有些是放在國小五年級，有些是放在國小六年級，為了避免受學習不同版本的影響，所以選取國一學生當作研究對象，可以確認的是他們都已學過比例概念，所以學生必然具備此相關知識及能力。

本研究第一部分是從比例問題的表面結構去瞭解學生在解題時的表現差異，研究對象為彰化縣立某國中一年級 12 個班級的學生，該國中為中型學校，位於彰化市，家長的社經地位蠻高的，而班級的分班方式採常態分班。本研究的比例問題測驗依照不同的數字型式分成四種不同的題本(T1、T2、T3、T4)，每一種題本分別隨機抽取三個班級施測，也就是說 T1 題本選取三個班級(共 116 人)施測、T2 題本選取三個班級(共 113 人)施測、T3 題本選取三個班級(共 118 人)施測、T4 題本選取三個班級(共 113 人)施測，共計 12 個班級，全部參與施測總人數為 460 人，施測時間約 40 分鐘，其施測班級採隨機抽樣的方式選取，其參與比例問題測驗班級人數見下表 3-3-1 所示。

表 3-3-1 參與比例問題測驗班級人數表

題本	T1			T2			T3			T4			合計
班級代號	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	12 班
男生人數	21	21	21	21	20	20	21	21	20	21	21	19	247 人
女生人數	19	18	16	17	17	18	18	20	18	17	18	17	213 人
段考平均成績(分)	60.6			57.8			58.8			61.2			
小計	116			113			118			113			460 人

本研究的第二部分是從比例問題的深層結構去瞭解學生在解題時的表現差異，此部分以一對一的方式，每個人進行 40~50 分鐘的個別訪談，個別訪談的對象依據國中一年級下學期的第一次段考成績與教師意見，將學生依照數學學業成就分成高、中、低三組，全部 12 班，每班選出 2 名(1 男 1 女)訪談學生，共計 24 名，其各班參與訪談人數見下表 3-3-2。

表 3-3-2 各班參與訪談人數表

題本	班級代號	數學學業成就			小計(人)	合計
		高	中	低		
T1	A	1 男 1 女	0	0	2	24 人
	B	0	1 男 1 女	0	2	
	C	0	0	1 男 1 女	2	
T2	D	1 男 1 女	0	0	2	
	E	0	1 男 1 女	0	2	
	F	0	0	1 男 1 女	2	
T3	G	1 男 1 女	0	0	2	
	H	0	1 男 1 女	0	2	
	I	0	0	1 男 1 女	2	
T4	J	1 男 1 女	0	0	2	
	K	0	1 男 1 女	0	2	
	L	0	0	1 男 1 女	2	

在本研究的訪談中，每位學生皆以代碼命名之，第一碼代表班級代號；第二碼則為學生的數學學業成就，依據國中一年級下學期的第一次段考成績為主，以「H」表示數學成績為全班前 1/3，「M」表示數學成績為全班的中間 1/3，「L」表示數學成績為全班後 1/3；第三碼則為性別，以 1、2 分別代表男生與女生。研究的訪談對象代碼如下表 3-3-3 所示：

表 3-3-3 訪談對象代碼表

	T1	T2	T3	T4
高數學學業成就	AH1、AH2	DH1、DH2	GH1、GH2	JH1、JH2
中數學學業成就	BM1、BM2	EM1、EM2	HM1、HM2	KM1、KM2
低數學學業成就	CL1、CL2	FL1、FL2	IL1、IL2	LL1、LL2

以下為訪談學生喜好數學程度、有無補習數學及導師對學生的評價(數學能力及學習情形說明)：

1. 高數學學業成就組：此組共有 8 名，4 名男生、4 名女生。

表 3-3-4 高數學學業成就學生背景簡介

	代碼	喜好數學程度	有無補習數學	導師的評價
1	AH1	3	1	非常喜歡畫畫，但衛生習慣不佳，常常東西都亂丟，抽屜亂七八糟，但個性隨和易親近，人緣不錯。
2	AH2	3	1	很乖，當歷史小老師，成績在班上前五名，做事負責，個性很正面、人緣不錯，學習態度佳。
3	DH1	5	0	個性憨厚老實，喜歡想數學問題，數學邏輯很好，反應很快，但容易粗心算錯。
4	DH2	4	1	做事很認真謹慎，語文科較佳，依賴補習，幾乎每天都要補習，數學學習較不獨立。
5	GH1	3	1	個性有點內向害羞，平時安靜不多話，上課很聽老師的話，喜歡看課外書，功課都有按時做。
6	GH2	4	1	個性有些冷酷，不太有情緒和表情，但有問有答，會認真思考數學後才回答問題，是個態度謹慎的學生。
7	JH1	2	1	上課比較不專心，態度散漫，資質夠但不夠積極，人緣不錯，所以這學期被選做副班長，個性有點悶騷，最喜歡上健康教育課。
8	JH2	4	1	最喜歡英文，做事有條有理，思考很有邏輯性，表達能力不錯，上課認真，勇於發言。

註：1. 「喜好數學程度」欄，以「1」表示非常不喜歡，「2」表示不喜歡，「3」表示還好，「4」表示喜歡，「5」表示非常喜歡。

2. 「有無補習數學」欄，以「0」表示無補習，以「1」表示有補習。

2. 中數學學業成就組：此組共有 8 名，4 名男生、4 名女生。

表 3-3-5 中數學學業成就學生背景簡介

	代碼	喜好數學程度	有無補習數學	導師的評價
1	BM1	3	0	人際關係不好，有點自我、愛現，不懂人情世故，成績不錯，有問題會問老師及同學，有學過心算，計算滿快的。
2	BM2	4	1	個性比較愛玩，男生喜歡捉弄她，平時上課乖乖的，成績不是很好，但班上人緣不錯，個性和學習態度都不錯，數學較差、文科較好，擔任學藝股長，很會畫畫。
3	EM1	4	0	個性害羞內向，是個認真聽話的學生，喜歡與人討論事情，熱情專注於有興趣的事情上。
4	EM2	3	1	認真聽話，因為很愛笑，所以人際關係不錯，國文是較拿手的科目，數學時好時差。
5	HM1	3	1	上課聽話，功課有時會偷懶，數學反應有些遲頓，常常腦筋轉不過來，雖然有補習，但成績一直沒辦法進步。
6	HM2	2	1	個性活潑開朗，喜歡講話，與同學相處愉快，較喜歡文科，對數學沒有興趣，成績也都不是很好。
7	KM1	3	1	活潑多話，喜歡閒聊，個性隨性不計較，像個傻大姐，對自己的成績覺得很不理想。
8	KM2	2	1	數學程度中上，喜歡數學、英文，態度真誠、講話直爽，做人很謙虛，人緣不錯，當總務股長，表達能力不錯，會勇於表達自己的想法。

註：同表 3-3-4

3. 低數學學業成就組：此組共有 8 名，4 名男生、4 名女生。

表 3-3-6 低數學學業成就學生背景簡介

	代碼	喜好數學程度	有無補習數學	導師的評價
1	CL1	4	0	個性較內向，很懶惰，所有的學業成績都不是很好，比較喜歡社會科。
2	CL2	5	1	上學期末剛從別的學校轉入，適應情況良好，所有的學業成績都不是很好，滿喜歡數學和自然科，不喜歡文科，個性開朗且不會害羞，老師問話都會誠實回答。
3	FL1	4	0	很守本份，很乖、斯文有禮貌，上課認真聽話，但數學成績不好。
4	FL2	2	1	安靜、內向害羞，很守規矩，數學成績很差，雖然有在補習，但成績依舊不佳。
5	IL1	2	1	表達能力尚可，有時行為幼稚，文科較好，數學成績差，個性懶惰，衛生習慣不佳。
6	IL2	3	1	全部的科目都不好，只有英文和國文還可以，對數學較沒興趣，但還算乖巧聽話。
7	LL1	2	0	數學成績不好，不是很喜歡數學，作業常常遲交，很懶惰，學習態度不佳。
8	LL2	3	1	過動、聒噪多話，常常言不及意，個人主義較強，有時無法聽懂老師的話語，數學成績時好時壞，不是很穩定。

註：同表 3-3-4

## 第四節 研究工具

本研究第一階段是進行班級紙筆測驗，第二階段為個別訪談，以下分別從紙筆測驗的比例問題設計與半結構性晤談二方面依次說明：

### 一、比例問題設計

#### (一)比例問題測驗設計與編製過程

研究者發現在文獻研究中常有設計各種不同的比例問題來研究學生的解題表現，因此，研究者彙整文獻中所提的比例問題結構，重新編製成本研究的比例問題測驗題目，這些不同的結構在本研究中即稱為「表面結構」，透過題目表面的結構來探討學生的解題表現及使用各種不同解題策略的情形，本研究的施測題目多半是參酌文獻的題目加以設計改編而成，主要由「數字型式」、「語意類型」及「量的性質」三項結構所組成，以下分述各項設計架構：

#### (1)數字型式：

本研究依據 Noelting(1980a, b)和林福來(民 73)的四種比例關係式，將數字型式做些微的修正，其數字型式見表 3-4-1：

表 3-4-1 未知數在缺項問題的数字型式表

數字型式	數值特性	範例	範例說明
第一式	第一個比的前後項有整數倍關係， 且兩個比中， 前對應項有一個是另一個的整數倍	$2 : 4 = 8 : x$	4 是 2 的 2 倍， 且 8 是 2 的 4 倍。
第二式	第一個比的前後項有整數倍關係	$2 : 8 = 7 : x$	8 是 2 的 4 倍， 但 7 不是 2 的整數倍。
第三式	兩個比中， 前對應項有一個是另一個的整數倍	$3 : 5 = 18 : x$	18 是 3 的 6 倍， 但 5 不是 3 的整數倍。
第四式	兩個比皆為任意數值， 第一個比的前後項及兩個比的前對 應項都沒有整數倍關係	$2 : 5 = 7 : x$	5 不是 2 的整數倍， 且 7 不是 2 的整數倍。

註：兩個比若相等， $a : b = c : d$ ，則  $a$  和  $c$  稱為比的前項， $b$  和  $d$  稱為比的後項；

$a$  和  $c$  互為對應項， $b$  和  $d$  互為對應項。

## (2)語意類型：

Lamon(1993)依不同的語意結構將問題分為熟知的量數問題(Well-chunked measures)、部分-部分-全體(Part-part-whole)、關係集合(Associated sets)及放大-縮小(Stretchers and shrinkers)四種類型，見表 3-4-2 之說明。而本研究的題目依這四類型做些微的修改，將部分-部分-全體的問題改成部分-部分的問題，因為本研究的比例問題題目中沒有出現”全體”的量數，只出現”部分-部分”的量數，所以本研究的語意類型分為以下四類：熟知的量數問題、部分-部分、關係集合及放大-縮小問題，其中又將部分-部分的問題分成兩種：「混合」及「不混合」兩種，由文獻得知，學生在這兩種情境下會有不同的表現，所以將之分開來探討，另外，放大-縮小問題又可分成「外在量」及「內在量」兩種，由文獻可知，這兩種情境下的題目也與學生解題結果有關，因此特將此考量於研究當中，故本研究的語意類型分類見下表 3-4-2 所示：

表 3-4-2 語意類型分類表

語意類型					
熟知的量數	部分-部分		關係集合	放大縮小	
	不混合	混合		外在量	內在量

## (3)量的性質：

在 Horowitz(1981; 引自 Tourniaire & Pulous, 1985)的研究中指出，兒童在不同量的性質下會有不同成就的差異，因此，本研究的施測試題也將考慮量的性質，依據量的性質分為離散量和連續量兩類，並加以細分其比較的量是同類量(內比)或異類量(外比)，因為依據研究者的預試中發現，學生在同類量的情境下使用差數相等的策略(也就是文獻中所說的加法策略)較頻繁，為了進一步求證學生使用的解題策略和題目結構的關係，所以探討在不同量的性質情境下學生是否會有不同的解題表現，因此，本研究將所有量的性質考慮進去，總共分為五類，依次是「離散量-離散量-內比」、「離散量-離散量-外比」、「離散量-連續量-外比」、「連續量-連續量-內比」及「連續量-連續量-外比」，因為離散量-連續量本身一定為不同類量，所以不可能出現「離散量-連續量-內比」的題目，因此將之排除在外，而研究中量的性質分類見下表 3-4-3 所示：

表 3-4-3 量的性質分類表

量的性質					
離散量-離散量		離散量-連續量		連續量-連續量	
內比	外比	外比		內比	外比

本研究依據上列三種結構設計出 60 題題目，本研究考慮到做答時間及各種因素的限制，因此將 60 題題目依據數字型式分成四個題本，每位受試學生只做其中一個題本，此四個題本分別為：

1. 題本一：編號 T1。數字型式第一式。
2. 題本二：編號 T2。數字型式第二式。
3. 題本三：編號 T3。數字型式第三式。
4. 題本四：編號 T4。數字型式第四式。

每一個題本共計 15 題。在題目的設計過程中，由於熟知的量數問題是兩個外延量的比較，而形成一個內涵量的量數，因此兩數量一定為異類量，並不會產生內比的題目，所以不考慮此種類型的題目，而部分-部分的問題中兩數量一定為同類量，所以不會產生外比的題目，也將此種類型的題目排除，另外，放大-縮小的問題其兩數量也為同類量，所以也將外比的題目排除，且在離散量-離散量-內比的情況下無法找到外在量的題目，故也不考慮此種情形。

本研究乃是針對不同結構的比例問題去探究學生的解題表現，故研究者依據上述的編製原則設計出本研究的比例問題測驗試題，並且為了避免學生察覺問題類型之相似性而影響其作答的結果，故研究者將題目依量的性質依序排列呈現，其最後安排的試題可見下表 3-4-4 所示：

表 3-4-4 比例問題測驗編製表

語意類型 \ 量的性質		離散量-離散量		離散量-連續量	連續量-連續量	
		內比	外比	外比	內比	外比
熟知的量數		×	5	7	×	14
部分-部分	不混合	1	×	×	9	×
	混合	2	×	×	10	×
關係集合		3	6	8	11	15
放大-縮小	外在量	×	×	×	12	×
	內在量	4	×	×	13	×



## (二)比例問題測驗實施及資料處理方式

本研究的比例問題測驗以某國中一年級的 12 個班為施測對象，依數字型式共分為四套測驗卷，其中三個班級使用 T1 的比例問題測驗、三個班級使用 T2 的比例問題測驗、三個班級使用 T3 的比例問題測驗、三個班級使用 T4 的比例問題測驗。每套題本的題型及內容完全相同，只是數字型式不同，共計 15 題，測驗時間約為 40 分鐘，依各班配合的時間不同而將測驗時間安排在早自習、自習課、班會或聯課活動課，每次施測前，研究者會強調一定要寫下算式或想法，盡量不要留下空白及直接猜測，以減少研究者產生評分上的誤差。

### (1)解題表現的計分方式

本測驗解題表現的計分方式是依據答案的正確性採計分數，只要使用正確且合理的解題方法且答案正確者每題可得到 2 分，若使用正確且合理的解題方法但在過程中出現計算錯誤每題可得 1 分，若使用錯誤的解題方法或無計算過程直接給答案者，即使答案恰好正確也一律以 0 分計算，四套題本的計分方式皆相同，15 題滿分 30 分，最低為 0 分，見下表 3-4-5。

表 3-4-5 解題表現計分表

學生的解題表現	得分
<ul style="list-style-type: none"><li>● 空白或無法辨別</li><li>● 無計算過程，直接給答案</li><li>● 使用錯誤的解題方法</li></ul>	0
<ul style="list-style-type: none"><li>● 使用正確的解題方法，但計算過程有錯誤</li></ul>	1
<ul style="list-style-type: none"><li>● 使用正確的解題方法，且答案正確</li></ul>	2

### (2)解題策略的編碼方式

本研究中的題目型態為求第四項的缺項問題( $a:b=c:x$ )，將正確的解題策略分為七類：①單價法②倍數法③公式法④數量分解法⑤疊加法⑥舉例法及⑦計算錯誤；錯誤的解題策略分為八類：①比例項錯置②對應項相等③和數相等④差數相等⑤乘積相等⑥估算⑦其它運算⑧無過程或空白，以下茲將學生回答的所有可能性編碼，編碼表見下表 3-4-6。

表 3-4-6 解題策略編碼表

	編碼	解題策略	說明	舉例 $3:5=6:x$
正確的 解題 策略	R1	單價法	先算出 $\frac{b}{a}$ ，再乘以 $c$ ； 或先算出 $\frac{a}{b}$ ，再用 $c$ 除以 $\frac{a}{b}$	$x = \frac{5}{3} \times 6 = 10$ 或 $x = 6 \div \frac{3}{5} = 10$
	R2	倍數法	先算出 $\frac{c}{a}$ ，再乘以 $b$ ； 或先算出 $\frac{a}{c}$ ，再用 $b$ 除以 $\frac{a}{c}$	$x = \frac{6}{3} \times 5 = 10$ 或 $x = 5 \div \frac{3}{6} = 10$
	R3	公式法	利用外項乘積等於內項乘積 ( $a \times x = b \times c$ )來算 $x$ ； 或用 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{x}$ 交叉相乘來算 $x$	$3 \times x = 5 \times 6$ ， $x = 10$ 或 $\frac{3}{5} \times \frac{6}{x}$ ， $3x = 30$ $\Rightarrow x = 10$
	R4	數量分解法	將數量分成整數倍及非整數倍來運算，最後再做加總	因為 5 是 3 的 1 倍又多 $\frac{2}{3}$ ，所以 $x$ 也會是 6 的 1 倍多 $\frac{2}{3}$ ， $x = 6 + 6 \times \frac{2}{3} = 10$
	R5	疊加法	將乘法分成加法來運算	因為 6 是 2 個 3 相加，所以 $x$ 也會是 2 個 5 相加， $x = 5 + 5 = 10$
	R6	舉例法	舉實際數字代入運算及說明	
	R7	計算錯誤	使用正確的解題策略，但過程中有計算錯誤	

錯誤的解題策略	W1	比例項錯置	列式或計算時使用 $a:b = x:c$ 或 $a:c = x:b$	一開始就將比例式寫錯，可能寫成 $3:5 = x:6$ 或 $3:6 = x:5$
	W2	對應項相等	$x = a$ 或 $x = b$	$x = 3$ 或 $x = 5$
	W3	和數相等	$a + b = c + x$ 或 $a + c = b + x$	$3 + 5 = 6 + x$ ， $x = 2$ 或 $3 + 6 = 5 + x$ ， $x = 4$
	W4	差數相等	$b - a = x - c$ 或 $c - a = x - b$	$5 - 3 = x - 6$ ， $x = 8$ 或 $6 - 3 = x - 5$ ， $x = 8$
	W5	乘積相等	$a \times b = c \times x$ 或 $a \times c = b \times x$	$3 \times 5 = 6 \times x$ 或 $3 \times 6 = 5 \times x$
	W6	估算	在非整數倍中，因為除不盡，所以採用估算的方式解題	因為 $5 \div 3$ 不是整數倍，所以就以 1.5 倍估算，所以 $x = 6 \times 1.5 = 9$
	W7	其它運算	無法判斷運算的意義或計算錯誤	
	0	無過程 /空白	因為沒有計算過程，因此無法判斷其解題策略	

### (三)比例問題測驗的信度與效度

#### (1)信度

研究者採用 Cronbach's  $\alpha$  係數來作為本測驗卷內部一致性之估計方法。若是  $\alpha$  數值愈高，表示測驗內部的題目一致性愈高。結果 T1 題本的  $\alpha$  值為 0.91，T2 題本的  $\alpha$  值為 0.87，T3 題本的  $\alpha$  值為 0.87，T4 題本的  $\alpha$  值為 0.96，表示本測驗卷的題目一致性相當高。

本研究的雙向細目表是依照語意類型及量的性質來劃分，而因為放大-縮小-外在量的題目只有一題，因此不計算其信度，其中有些題目類型在修正後其信度依然較低，可能與題數太少有關，研究者將於最後的建議提出來改進，而各類型的信度呈現如下表 3-4-7 所示：

表 3-4-7 比例問題測驗各類題目的信度

比例問題測驗		T1	T2	T3	T4
語 意 類 型	熟知的量數	0.75	0.75	0.76	0.83
	部分-部分-不混合	0.67	0.69	0.54	0.87
	部分-部分-混合	0.52	0.65	0.45	0.87
	關係集合	0.83	0.67	0.74	0.88
	放大-縮小-內在量	0.41	0.30	0.14	0.74
量 的 性 質	離散量-離散量-內比	0.76	0.71	0.82	0.91
	離散量-離散量-外比	0.79	0.71	0.44	0.81
	離散量-連續量-外比	0.78	0.86	0.80	0.71
	連續量-連續量-內比	0.78	0.76	0.72	0.90
	連續量-連續量-外比	0.54	0.63	0.75	0.78

另外，在質性資料訪談的部分，請一位國中數學教師建立評分者信度，該名教師參與國民教育數學輔導團有 4 年的經驗，且有 5 年的教學年資，在比例深層結構的共變、不變及相對改變原則其評分者信度分別為 0.71、0.67 及 0.79，此部分因為有些訪談內容較模糊，因此涉及主觀判斷，當資料不一致時以研究者為主。

## (2)效度

本研究的比例問題測驗是以雙向細目表建立其內容效度，測驗題目並請指導教授、一位研究生(國小教學年資 8 年，並參與國民教育數學輔導團有 4 年的經驗)及二位資深國中數學教師(教學年資 7 年及 16 年)審核建立專家效度，檢定本測驗的內容及對試題取樣適切與否的評估，藉以獲得較高的專家效度。

## 二、半結構性晤談

### (一)半結構性晤談架構

本研究以半結構性晤談法，從比例問題的表面結構和深層結構去瞭解學生的解題表現及使用不同解題策略的原因，共有 24 名受試學生進行個別訪談，訪談地點為施測學校的輔導室，輔導室內設有一諮商室的小房間，訪談時環境安靜不易受人打擾。訪談的時間為中午午休時間，每次約 40~50 分鐘，一開始會先請導師向學生說明訪談的目的，目的是在瞭解學生的數學想法，並不涉及學生成績，請學生放輕鬆，當作是在聊天即可，盡量減低學生事先準備的情形。訪談結束後，會與每位受試學生達成共識，請學生保密题目的細節與整個過程，以免影響其它接受訪談學生的答案。

本研究的個別訪談架構中的訪談問題設計主要是經由幾次預試經驗中得來，為了在訪談時避免學生回答不完全，所以希望透過半結構性晤談的方式來進行訪談。基本上，研究者是根據國中一年級下學期的第一次段考成績及教師意見來挑選受訪學生，學生依照數學學業成就分成高、中、低三組，徵詢導師意見挑選出表達能力較好及較具有個人想法的學生，研究者事先會從比例問題測驗的回答中大致瞭解學生的錯誤及問題，以便瞭解受訪學生的想法，訪談時即會根據不同受訪學生的錯誤地方提出問題，因此，訪談時並不會每一題都詳細的詢問其想法，通常是根據學生比例問題測驗中錯誤的想法及疑問去探究及晤談。

個別訪談第一部分在瞭解比例問題的表面結構和學生解題的關係，所以會針對每個學生在比例問題測驗的回答去調整晤談的內容，晤談的問題會以「不同數字型式」、「不同語意類型」及「不同量的性質」為主軸去瞭解學生是否受這三種結構的影響而有不同的解題表現及策略，基本上，研究者會挑選學生在比例問題測驗中錯誤的算法來訪談以瞭解學生的想法，透過受訪學生的回答以釐清研究問題。第二部分則在瞭解比例問題的深層結構和學生解題的關係，訪談過程中會依照學生的說明判斷是否具備「比例概念的共變原則」、「比例概念的不變原則」及「比例概念的相對改變原則」三種深層結構的概念，不管學生使用的解題策略為何，都會請學生說出使用此方法的原因，並請他說明及比較其它解題策略的差別，以瞭解使用的解題策略是否有其思考的脈絡及判斷的依據，也才能深入探究學生瞭解比例問題的深層結構情形。其半結構性晤談架構如下表 3-4-8 所示：

表 3-4-8 半結構性晤談大綱

(1) 一開始訪談問的問題		
瞭解學生學習數學的狀況	1. 你喜歡數學嗎？(非常不喜歡/不喜歡/還好/喜歡/非常喜歡)	
	2. 你的數學成績好不好呢？(成績佔全班的前 1/3，中間 1/3 還是後 1/3？)	
	3. 你有補習數學嗎？(一個星期幾小時？)	
	4. 你如果有不會的數學問題，你會向誰請教？	
(2) 訪談每一題都會問的問題		
瞭解題意	5. 題目有沒有看不懂的地方？	● 如果有不懂的地方，請學生指出來並且告知那裡看不懂。
	6. 可以說說看，這個題目大概的意思是什麼嗎？	● 你認為題目中哪些是值得注意的？
解釋想法	7. 你可不可以說明一下你的算式及想法？	● 你認為你的算式合理嗎？原因為何？
	8. 你覺得解這個題目的關鍵是什麼？	● 你第一眼看到這個題目時，最先想到什麼概念？
想法來源	9. 你為什麼會這樣做？	● 可以說明一下你從什麼條件判斷要這樣做？ ● 你覺得題目的數據之間有什麼關係嗎？
	10. 老師有教過這種方法嗎？	● 如果有，是什麼時候教的？ ● 如果沒有，是自己想的嗎？你怎麼想到的？
	11. 你曾經看過類似的題目嗎？	● 如果有，可不可以說說你看過類似的題目是什麼？什麼時候做過的？
其它解法	12. 除了這個方法以外你還有想到其它的方法嗎？	● 如果有，可以請你說說看嗎？
回顧與檢驗	13. 你覺得這個題目困難嗎？	● 如果困難，困難的地方在哪裡？(是文字難懂嗎？是數字難算嗎？)
	14. 你有把握能答對這題嗎？為什麼？	● 如果沒有，可以說說看你覺得有可能錯在哪裡？
(3) 當訪談完全部的題目後問的問題		
瞭解學生作答感受	15. 整體而言，這些題目對你來說困難嗎？	● 請你挑出最困難的題目。 ● 請你挑出最簡單的題目。
	16. 你喜歡做這些問題嗎？	● 為什麼？理由為何？

針對研究問題 1-1，在進行個別訪談時，研究者會依學生的回答情形適時的變換題目數字，例如訪談的學生是接受 T1 題本的比例問題測驗，則研究者會在訪談時改用 T2、T3 及 T4 題本的數字型式問該名學生，所有的題目內容完全相同，只有將數字型式變換，以瞭解學生的解題策略是否會因題目的數字型式而改變，其訪談題目變換數字的順序為 T1、T2、T3、T4，研究者將題目的數字型式由易至難變換，各題本訪談題目轉換數字型式的順序見下表 3-4-9：

表 3-4-9 各題本訪談題目的數字型式轉換順序

接受比例測驗的題本	訪談題目的數字型式順序
T1	T2→T3→T4
T2	T1→T3→T4
T3	T1→T2→T4
T4	T1→T2→T3

針對研究問題 1-2 及 1-3，研究者在晤談時，會請學生比較不同類型題目的關係，瞭解是否不同類型的比例問題會有不同的解題方式，且比較題目之間的難易程度為何，探究學生在解比例問題時其解題表現及解題策略是否因比例問題的「不同語意類型」及「不同量的性質」而有所不同，並從中瞭解學生在解比例問題時產生的疑惑及遇到的困難為何。

針對研究問題 2-1，研究者會讓學生解釋完自己的算式及想法後提出一個問題：「你認為題目當中有沒有什麼關係是會隨著數字的變動而改變的？」，經由提出的問題判斷學生是否具備「比例概念的共變原則」，接著，針對研究問題 2-2 繼續提出另一個問題：「你認為題目當中有沒有什麼關係是會一直保持不變的？」，透過此問題判斷學生是否具備「比例概念的不變原則」，最後，針對研究問題 2-3，請學生說出使用乘除的運算方法和加減的運算方法差別為何，如果學生能清楚區辨乘除運算和加減運算所代表的意涵，則認定為具備有「比例概念的相對改變原則」，反之則否。也就是說，研究者在訪談單一題目時除了會使用上述中的變換數字型式外，還會提供學生各種不同的解題策略，研究者會依不同的題目提供不同的解題策略，但其中一定會提供學生差數相等及和數相等的解題策略讓學生比較說明，例如 T2 比例問題測驗第 1 題：「杰倫有兩個袋子，第一個袋子裡有 10 顆白球和 5 顆黑球，杰倫在第二個袋子裡放了 12 顆白球，杰倫希望從兩個袋子中抽出黑球的機率相同，則你認

為杰倫在第二個袋子裡應該放幾顆黑球？」，若學生第一次的算法是利用單價法「 $10 \div 5 = 2$ ， $12 \div 2 = 6$ 」，則研究者會提供差數相等的算法「 $10 - 5 = 5$ ， $12 - 5 = 7$ 」及和數相等的算法「 $10 + 5 = 15$ ， $15 - 12 = 3$ 」來追問受訪學生，請學生區辨之間的差異，以瞭解學生是否真正知道其數字運算的意義，而不是隨意的將題目給的數字做加減乘除運算而已，其目的是在檢視學生是否瞭解題目的意義，驗證學生是否真具有「相對改變」的概念，研究者希望透過這樣的訪談深入探究能使用正確解題策略的學生是否真的知道解題的意義，不能使用正確解題策略的學生是否也代表他沒有相對改變的概念。

研究中的半結構性晤談主要目的是要一一釐清所有的研究問題，晤談的內容是依據表 3-4-8 的半結構性晤談大綱來進行，晤談過程中還會依據每位學生的問題來做調整，基本上，研究者是根據研究問題來設計要晤談的內容，所以每位學生的晤談內容基本上架構是相同的，但因為每位學生出現錯誤及疑慮的問題不盡相同，因此，研究者會根據學生的回答適時地詢問問題，並針對學生的想法及觀念提出澄清，不管學生回答的正確或不正確，研究者都會盡可能的瞭解其想法，深入探究學生回答背後的概念為何。

## (二)半結構性晤談的資料分析方式

本研究的晤談目的在於探究學生解題表現差異及使用不同解題策略的原因，所以晤談時會盡可能的瞭解學生對每一題的概念，不管學生是否使用正確的解題策略，都會請學生詳細解釋其理由，以下是各個部份半結構性晤談的資料分析方式：

### (1)在「不同數字型式」的結構

研究者將題目的數字型式由易至難變換，如果學生能成功做對 T1 題本的題目，則依序接著做 T2、T3、T4 題本的題目，並透過訪談確認學生是否真正瞭解正確解題的方式，若過程中出現錯誤的解題策略，則請學生解釋解題的方式及原因，並比較不同解題策略的差異性，研究者將使用這樣的晤談方式分析學生的解題策略是否因「不同數字型式」的題目而有所差異。



## (2)在「不同語意類型」的結構

研究者在晤談時會請學生比較「不同語意類型」的題目，瞭解是否不同語意類型的比例問題會有不同的解題方式，並請學生比較題目之間的難易程度為何，探究學生在解比例問題時其解題策略是否因比例問題的「不同語意類型」而有所不同，並從中瞭解學生在解比例問題時產生的疑惑及遭遇到的困難。

## (3)在「不同量的性質」的結構

研究者在晤談時會請學生比較「不同量的性質」的題目，瞭解是否不同量的性質的比例問題會有不同的解題方式，並請學生比較題目之間的難易程度為何，探究學生在解比例問題時其解題策略是否因比例問題的「不同量的性質」而有所不同，並從中瞭解學生在解比例問題時產生的疑惑及遭遇到的困難。

## (4)在「比例概念的共變原則」的結構

學生如果能正確回答出研究者的問題：「你認為題目當中有沒有什麼關係是會隨著數字的變動而改變的？」，則表示該名學生具有共變的概念，將此學生以「○」來代表，無法正確回答，則以「×」來代表，若學生的回答在某些題目有共變的概念，有些沒有，則以「△」來代表。

## (5)在「比例概念的不變原則」的結構

學生如果能正確回答出研究者的問題：「你認為題目當中有沒有什麼關係是會一直保持不變的？」，則表示該名學生具有不變的概念，將此學生以「○」來代表，若無法正確回答，則以「×」來代表，若學生的回答在某些題目有不變的概念，有些沒有，則以「△」來代表。

## (6)在「比例概念的相對改變原則」的結構

學生能回答出使用乘除的運算方法和加減的運算方法差別為何，如果學生能清楚區辨乘除運算和加減運算代表的意涵，則認定為具有比例概念的相對改變原則，反之則否。學生具有比例概念的相對改變原則以「○」來代表，若學生完全不具有相對改變的概念以「×」來代表，若學生知道差數相等策略為錯誤的方法，但無法明確解釋其理由或無法將數字做量化的比較者，則以「△」來代表。

## 第五節 研究步驟與過程

本研究的實施分為準備階段、預試階段、正式施測階段、訪談階段、資料分析階段及完成研究報告階段，茲就各階段詳述如下：

### 一、 準備階段

此階段的主要工作是相關文獻的蒐集與閱讀，並草擬研究計劃，期間與指導教授討論研究架構與相關文獻，並開始與國一學生接觸與討論，以瞭解他們在比例問題的解題情形，在大略瞭解本研究之可行性之後，研究者開始設計本研究的架構、發展研究工具、決定預試與正式施測的學校及樣本數，並與各班導師洽商正式施測的日期。

### 二、 預試階段

預試階段採用紙筆測驗的方式，目的在瞭解學生對比例問題測驗题目的反應及回答情形，對於學生在閱讀有困難的题目及有題意不清的地方作修正，預試的紙筆測驗與指導教授、本所研究生及國中資深教師多次的討論、修改之後，方才決定了本研究比例問題測驗之初步內容，並透過預試學生的作答情形瞭解測驗题目的適當性。本階段於彰化縣立某國中的一個國一班級進行比例問題測驗的預試，受試班級為常態班級，預試的題本選用四套題本中較難的一本，也就是 T4 題本，以做為其它題本的改編依據。

### 三、 正式施測階段

本研究正式的紙筆測驗於九十五年四月下旬舉行，測驗以班級為單位，施測時由研究者依據「施測說明」解說本測驗的目的與作答的注意事項，施測對象為彰化縣立某國中一年級學生，共有 12 個班級，合計 460 人，利用學生早自習、自習課、班會或聯課活動時間進行施測，每次施測時間約為 40 分鐘，測驗完畢後即進行批閱與評分，並開始著手進行解題表現及解題策略之分析。

#### **四、 訪談階段**

訪談在正式紙筆測驗批閱評分完畢後進行，將學生依照數學學業成就分成高、中、低三組，全部 12 班，每班選出 2 名(1 男 1 女)訪談學生，共計 24 名。研究者先與學生說明訪談的目的後再進行，訪談採一對一方式進行，每位學生的訪談時間約為 40~50 分鐘，訪談內容予以錄音，事後由研究者轉譯並分析，進一步瞭解影響學生解題的原因。

#### **五、 資料分析階段**

將正式施測結果輸入電腦作量的處理，並配合訪談資料進行質的分析，最後，綜合歸納學生在比例問題的表面結構及深層結構的解題差異，並瞭解學生在表面結構與深層結構解題的關聯性。

#### **六、 完成研究報告階段**

研究者依據上述的資料分析結果，綜合整理出本研究的結果與討論，並進一步提出研究結論與建議，最後得以完成本研究論文。

茲將本研究的實施流程說明如下圖 3-5-1。

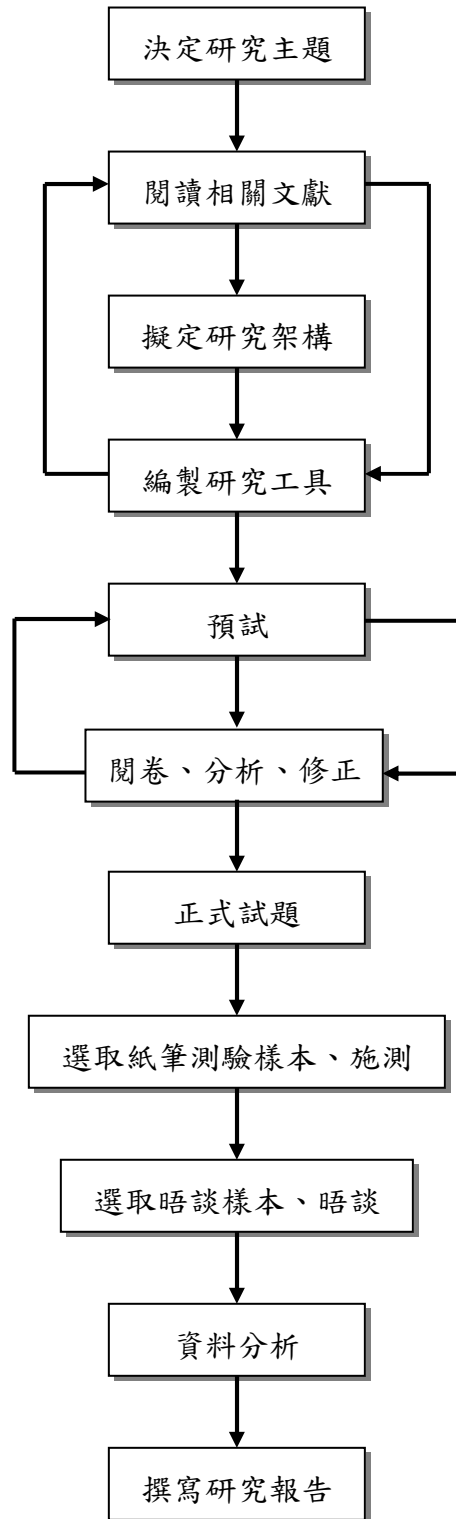


圖 3-5-1 研究實施流程圖

## 第六節 資料處理

研究者將學生在比例問題測驗以及晤談所得到的資料，進行量化的統計分析及質性的晤談分析，藉此瞭解學生在不同結構比例問題的解題表現、解題策略及其解題時的想法。

### 一、量化的統計分析

本研究的比例問題紙筆測驗結果資料採用 SAS 軟體進行統計分析，在分析方法上可分為四種：

- (一) 「描述性統計」：使用於探究研究問題 1-1、1-2 及 1-3。
- (二) 「多變量重複量數變異數分析」：使用於探究研究問題 1-2 及 1-3。
- (三) 「迴歸分析」：使用於探究研究目的二。
- (四) 「相關分析」：使用於探究研究問題 3-1、3-2 及 3-3。

### 二、質性的晤談分析

研究者將全部接受比例問題測驗的 12 個班級的學生依照數學學業成就分成高、中、低三組，每班選出 2 名(1 男 1 女)作為晤談的對象，合計共有 24 名。訪談全程內容都會錄音，並於事後將錄音資料謄錄成文字，以進行訪談學生解題想法的分析。謄錄成文字內容中，研究者的身份將以「I」來表示，而學生將以「S」為代表，訪談學生的代碼可見表 3-3-3。晤談資料原案產生後，研究者即根據學生在解比例問題時的解題表現及解題策略加以分析、歸類，以做為本研究問題 1-1~2-3 的資料結果。