國立臺灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文

指導教授：謝豐瑞 博士

高中生關於向量內積的概念心像之探究

研 究 生：洪志瑋

中 華 民 國 一 0 二 年 一 月

謝誌

從十八歲那年進入師大數學系就讀，彷彿一切都已經命中注定似的，大一遭遇到求學路上最大的困難，經歷了人生中求學路上最嚴重的低潮時，我遇到了生命中的貴人：謝豐瑞老師。真的是千言萬語都無法真切的表達我的感謝。老師可說是我的再造父母，您總是可以知道我的內心想著什麼，而且總是默默的看顧著我，在關建的時刻拉我一把，讓我找到人生的方向；在大五那一年，您叫我參加學長們的 meeting，豐富的討論、紮實的學術內容給我莫大的衝擊！在我心中埋下了念碩士作研究這個念頭的種子。畢業後，因為兵役以及工作原因沒能直接念研究所，但最後還是很幸運地順利通過師大在職進修專班的考試，終於能夠正式跟著老師作研究。研究所這段期間，因為老師的教導，讓我獲得更多的學術知識，讓我在各方面進步良多，真的很謝謝老師。沒有老師您，就沒有今天的志瑋！

感謝口試委員邱守榕教授、羅昭強教授、施皓耀教授，感謝您在百忙之中撥冗前來給予學生指導與提供寶貴的建議，讓我能夠看到不足之處，讓我能夠思考更多，使這本論文能更加充實、完整。

謝謝一路走來一起努力的伙伴們—昭慧學長、書志學長、佳叡學長、春男學長、姿玟學姐、嘉聲學長、俊麟學長、婷瑩、國亨、阿辛、政業、丞瑋、晞安、宜蓁、玉惇、世偉、嵐婷、筱芸、桂銘、旻怡、鈺傑、韋樺、啟台、佩蓁、宜寶、文婉、長民這些日子以來的幫忙以及協助。

謝謝其他一路上鼓勵我、協助我的同事與朋友們，讓我在課業、工作以及總總事務之間能夠持續奮戰、克服難關。

最後，感謝我的家人，以及在我念研究所期間從女友身份變成老婆大人身份的秦綺，謝謝在這些日子以來的包容與體諒，並且讓我在最關建的時刻，可以沒有後顧之憂、全心全力的去完成論文，有你們的支持我才能完成碩士學位。

摘要

本研究探討高中生關於「向量內積」的概念心像。研究採問卷調查法，收集質與量的資料。研究抽樣採立意取樣，包括高程度、中程度學校之文組與理組四個班級一共 149 位高中三年級學生。

本研究的研究結果主要有：

1.學生對於相關的向量概念都有相當程度的理解，但仍有 26％的學生無法分辨向量與純量的不同，有 12％的學生對於向量絕對值的概念是不正確的。

2.學生對於「內積」的心像，其比較核心的主要有向量、偏代數型內積定義以及內積符號等概念，其次為圖形、投影、偏坐標型內積定義以及偏圖像型內積定義等概念。

3.發現高達四成的學生對於起點不同的兩向量不具備皆可作內積的概念心像，僅有約四成的學生其任意兩向量皆可作內積的心像穩固，不會隨著題目所給刺激而有所改變；同時學生的概念心像受到向量、角度、內積定義等相關概念心像的影響。

4.學生對於內積定義三種類型的具備情形，最高的是「偏代數型內積定義」心像，有 95％；其次是「偏坐標型內積定義」的心像，有 82％；最少的是「偏圖像型內積定義」的心像，只有 38％。

5.代數型的心像受到典範例或圖像型定義的影響而有不同的樣貌。圖像型的心像也會有代數型心像的影響，除此之外受到投影概念影響很大。具備坐標型心像的同學中概念完全正確的只有 24％。

關鍵字：向量、內積、概念心像、概念定義

目錄

表次目錄

圖次目錄

第壹章　緒論

第一節 研究動機

在數學教學中，教師往往發現，許多概念自己講解清楚且重複多次，但學生在解題時，卻不斷重複使用相同的迷思概念。顯然學生在解題時，腦中的數學概念或思考與教師所教的有所差異，學生究竟是如何思考的，連結與應用的數學概念與教師所教的差異何在等等，都是數學教育界亟須瞭解的問題。

對於這樣的問題，Tall 和 Vinner (1981)提出之概念定義（concept definition）與概念心像（concept image）提供了一個解釋的方向。Tall 和 Vinner 認為，多數學生在解題時，連結的是與題目相關、學生自我具有的概念心像，他們使用連結到的概念心像來思考題目，而非使用課堂上所教的概念定義進行思考。然而，學生的概念心像是什麼？學生的概念心像與課堂上所教的概念定義有何異同？這些問題都是我們所感興趣的。

向量是高中數學中一個重要的單元，相較於三角函數、對數等單元，學生對於向量似乎不那麼的恐懼，但在向量內積概念出現之後，學生的學習狀態出現急遽的變化，困難因應而生。國內許多研究因而致力於探討學生在向量內積的錯誤類型（e.g.,李永貞，2008；林進發，2001)，研究結果顯示向量內積對於學生來說不是一個簡單易懂的概念。有經驗的教師都知道學生在背出「長度×長度×cosθ」這樣的內積定義上並沒有很大的困難，部分學生也知道內積與「投影量」相關，但學生在面臨題目中需要作內積時，卻出現感知不到題目中有兩向量即可應用內積定義求算內積的現象。

上述現象顯示，學生所具有之向量內積概念心像為何乃數學教育界亟須探討的課題。

第二節　研究目的與名詞解釋

研究目的：本研究的研究目的在於探討高中生關於「向量內積」的概念心像。

根據上述研究目的，擬訂具體研究問題如下：

1. 學生關於「向量定義」與「向量長度」之概念心像的具備情形與樣貌為何？
2. 學生關於「內積特徵」相關概念之概念心像的具備情形與樣貌為何？
3. 學生關於「內積定義」相關概念之概念心像的具備情形與樣貌為何？
4. 學生關於「內積操作」相關概念之概念心像的具備情形與樣貌為何？

名詞解釋：

概念定義：由文字構成，是用來界定某個數學概念的敘述。在本研究中的概念定義可界定為「課本上對於某個數學概念所給的文字定義或教師在教學中對某個數學概念所講述的定義。」

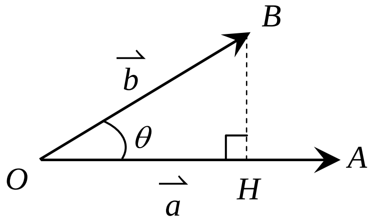
概念心像：學生腦中關於某個數學概念的所有心靈影像(mental pictures)，包括圖像[picture]、符號形式[symbolic form]、圖表[diagram]、圖形[graph]等等。本研究中所指的概念心像即是學生面對外在刺激而浮現的任何型式的表徵。

內積之概念定義：關於「向量內積」之概念定義，一般課本上主要有三種類型。

代數型：兩個非零向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為θ時，我們規定向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的內積為$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，並以$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$表示。

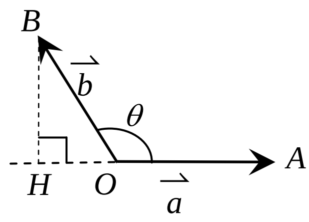
圖像型：設兩個非零向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為θ，我們把$|\overrightarrow{b}|\cos\theta$稱為向量$\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{a}$方向上的**投影量**。下圖中，(1)(2)(3)分別顯示θ為銳角、鈍角與直角的投影情形：

（1）



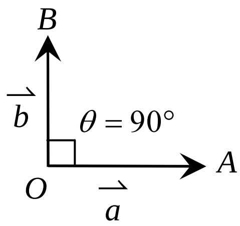
$|\overrightarrow{b}|\cos\theta=\overline{OH}>0$

（2）



$|\overrightarrow{b}|\cos\theta=-\overline{OH}<0$

（3）

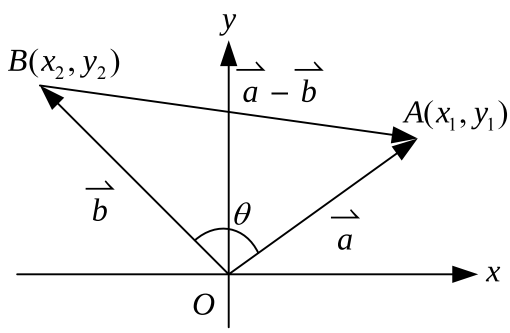


$|\overrightarrow{b}|\cos\theta=0$

於是，非零向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的內積$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，可視為$\overrightarrow{a}$的長度$|\overrightarrow{a}|$與$\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{a}$方向上的投影量$|\overrightarrow{b}|\cos\theta$的乘積，即

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{a}|(|\overrightarrow{b}|\cos\theta)$

坐標型：設$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$是坐標平面上任意兩個非零向量，且$\theta$為此兩個向量的夾角，如圖所示：



在ΔOAB中，利用餘弦定理$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\theta$，得

$$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta.$$

因為$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$，$|\overrightarrow{a}|^2=x_1{}^2+y_1{}^2$，

$|\overrightarrow{b}|^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2$，所以上式可以改寫成

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + y_1{}^2 + y_2{}^2 - 2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$

經化簡，得$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$，又根據向量內積定義知

$\overrightarrow{a}$ ‧ $\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，故$\overrightarrow{a}$ ‧ $\overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

偏代數型內積定義：學生浮現的內積定義之心像，且其心像偏向代數型定義，即「$|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\times\cos\theta$」。

偏圖像型內積定義：學生浮現的內積定義之心像，且其心像偏向圖像型定義，即「$\overrightarrow{a}$在$\overrightarrow{b}$上的投影量 × $\overrightarrow{b}$的長度」。

偏坐標型內積定義：學生浮現的內積定義之心像，且其心像偏向坐標型定義，即「(a_1, a_2) ‧ $(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$」。

第貳章　文獻探討

學生解題失敗來向老師尋求協助，老師究竟應該提供什麼樣的協助呢？替他再重新講解一次題目？在進行一次解題給他看？還是把定義講清楚？還是講解更基本的概念？以上都是可能的作法。如果我們知道學生的問題到底出在哪裡，我們就能夠提供一個比較恰當的協助。

第一節　解題

解題本身是一件非常複雜的事情，所謂解題就是解決問題，如何解決問題？很多專家都對這樣的問題提出了很多看法與理論，如下：

一、Polya（1945）將解題分成4個階段：

1.理解問題(understanding the problem)：理解問題的敘述，並指出問題的主要部分，包括題目中的已知條件與未知條件。

2.擬定計畫(devising a plan)：找出已知條件與未知條件之間的關連，根據條件擬定出解決問題的計畫。

3.執行計畫(carrying out the plan)：執行所擬定的解題計畫。

4.回顧解題(looking back)：檢查所得的答案是否正確，嘗試使用不同方法檢查答案。

二、Schoenfeld（1985）認為數學解題應該考慮4個變項：

1.資源(resources)：解題者所擁有與解題相關的數學知識。

2.捷思(heuristics)：解題者的解題策略。

3.控制(control)：解題時決定計畫、選擇目標、採用策略以及監控、評估結果的歷程。

4.信念系統(beliefs)：解題者對於數學的看法，解題者對數學的看法將會影響其解題行為。

三、Lester（1980）將解題分為下面6個階段：

1.問題的知覺(problem awareness)：解題者感覺到問題的存在。

2.問題的理解(problem comprehension)：解題者將問題轉譯及內化

3.目標分析(goal analysis)：解題者將問題變形並分析其結構，是否有任何子目標可幫助達成目標。。

4.計畫的發展(plan development)：解題者擬定出解題計畫，其中包含解題策略及解題進行的程序、方法。

5.計畫的執行(plan implementation)：解題者依照所擬定的解題計畫加以執行，並注意是否正確。

6.程序和解答評估(procedures and solution evaluation)：檢查答案的合理性及正確性，並回顧整個解題過程。

孫子兵法云：「謀定而後動」，我認為解決問題就是如此，但謀從何而來？難道會有錦囊裡面裝著妙法，當然不是，這些謀就藏在每個人的腦海之中，而每個人所擁有的謀略或高或低、或巧或妙，就看每個人對整體情況的瞭解與掌握度如何？就看每個人所能想到的策略有多少，有多適合問題情境。而這樣的想法，其實跟上面這些專家提出的看法不謀而和。

這些看法都有一個共通的根本部分，不論是解題計畫、解題策略還是謀略，都必須來自於解題者的腦袋中。就如Polya（1945）提到：解題必須從你現有知識中找出與問題有關之處。試想過去在類似的情況下有什麼曾幫過你的忙。在你所考慮的內容中，設法找出熟悉的東西，在你所熟悉的東西中，努力找出有用的東西。Bledsoe, Karen E.和Flick, Lawrence（2012）

認為：解題過程中，主體(如：學生)會將概念進行連結而產生概念地圖(concept maps)。本研究基於以上的論點，認為學生在面臨解題時，學生會去搜找尋他腦袋中現有相關的、可能有用的概念，並將它們串連起來以進行解題。

Wilson（1990）表示，教學常發現，有些能合理敘述出概念定義的學生，不見得能正確指出合於此概念的例子，而能指出合於此概念例子的學生，不一定能說出正確的定義。

所以我們必須釐清何謂「概念」。並且更進一步地，對於學生關於某概念的解釋、說明甚至定義(學生自有的)與「概念定義」之間，也必須加以釐清。本研究採取 Tall 和 Vinner (1981)提出之概念定義（concept definition）與概念心像（concept image）作為一個解釋的方向。

第二節　概念

自希臘時代開始，人類如何認識這個世界，如何獲取知識，一直都是哲學談論的重要問題。康德認為人對萬物的認識，其實是從一種先於經驗而存在（即所謂的先驗）的綜合活動中得來。舉例來說：當你進入到一間蛋糕店，你看到架子上有著一盤薑餅人，你會認為那些是長的同一個模樣的餅乾人，就算其中有一個手斷了，還有另一個少了一隻腳，還有一些大一點，有一些小一點，每一個其實都有著一些差異，你就是會認為它們是同樣的餅乾人，這表示我們已經知道薑餅人的形狀就是那個樣子。那是因為在我們認識薑餅人之前，薑餅人的模子就躺在麵包師傅的工作台上，早已經存在那裡了。這就是理性主義的想法，他們認為存在著一個理形世界，所有的知識都存在於理形世界中。以這樣的想法來看，概念似乎是客體存在的。

而經驗主義的主張恰恰相反，洛克認為人類所有的思想和觀念都來自人類的感官經驗。亞理斯多德認為，我們所擁有的每一種想法或意念都是透過我們看到、聽到的事物而進入我們的意識。也就是說他們不認為有著理形世界的存在。以這樣的角度來看，概念又應該只存在於主體的。

張春興（民 95）在張氏心理學辭典裡這樣說：概念是對具有相關共同屬性一類事物獲得的概括性的認識。此一超越具體事物的認識即為概念。這樣的說法並未說明概念是存在於客體還是存在於主體。不過他在書中說了一個例子：「例如，幼兒吃過、看過、拿過不同形狀、顏色、大小的蘋果之後，在他的意識中將形成一種概括此類水果屬性的認識(蘋果)。」依照這個例子來看，這樣的說法說明了概念是存在於主體（幼兒）的。而後他又提出另一個狹義一點的定義：「以單一概括性的名稱或符號，代表具

有共同屬性的一類事物的全體時，此名稱或符號所代表者即為概念。」他以”書”字代表所有不同種類不同性質的書籍、數字 8 代表量的概念以及 X 代表變數的概念來解釋文字、符號如何用來表示概念，以這樣的說法，又顯示概念存在於客體的想法。

在數學概念方面，Skemp（1987)表示，要形成數學概念，必須先有實際經驗且這些經驗須有某些相似性或共通性。他認為數學是一種抽象概念，這種概念的形成，是需要經過學習的，而且必須透過「經驗」抽象而得。然而我們的教科書中，對於所要教的數學概念，往往都是從定義出發，尤其是高中數學，其數學內容幾乎都是高度發展的數學概念，似乎從定義、定理出發教學是最為輕鬆、簡便的方法了。但對於學生的學習來說，會是輕鬆、方便的學習之路嗎？這樣的問題就相當 Skemp 拋出的一個問題：如果我們直接將一個概念以文字型式定義好，那麼是否一定能縮短形成概念的時間與程序呢？

回答這個問題之前，我們先探討一下概念的特性。Skemp 認為概念具有層次的特性，他將感官對外在世界經驗後而得的概念稱為初級概念(primary concept)，例如：紅色、重、甜等等。而由數各概念再抽象之後得到的概念稱為二級概念(secondary concept)。例如：顏色就是一個自綠色、紅色、黑色等所形成的一個次級概念。如果概念 A 只是概念 B 的一個特例，我們就說 B 比 A 高階，而 B 又是 C 的特例，那麼 C 比 B 跟 A 都高階。

那麼我們再回過頭來看看剛剛的問題，我將以一個例子來回答。今天有一個剛上幼稚園的小朋友，他從來沒有看過牛，他問你說：「牛是什麼？」，而你回答：「牛是哺乳類動物的一種」，先不論這樣定義的夠不夠精準，但相信這樣的說法對這個小朋友來說，是沒有幫助的，因為哺乳類動物這個概念對這個小朋友來說太過高階了。那怎麼樣會是好一點的方

法，一個大家都想得到的方法，就是舉很多的實際例子。這也就是 Skemp 的論點，即超過一個人已有概念階級的高級概念不能用定義方式來溝通，只能蒐集有關的例子供其經驗，使其自我透過抽象來形成概念。

所以我們從定義出發來教學生學習數學概念會是好的方法嗎？我想答案顯而易見。Skemp 認為在數學中，定義是概念發展末端的產物。也就是說定義是非常高階的概念，所以我們看到學生從定義出發去學習數學概念，常常搞到灰頭土臉，到頭來還是搞不清楚概念到底是什麼，最後就是胡亂記了一堆公式。所以我們應該儘可能的提供給學生多一點的例子，讓學生去經驗，讓他自己透過抽象而形成概念才是比較好的作法。另外還有一點得注意，Skemp 提到在數學中，有關的例子多少又含有其他概念，我們在提供例子時必須確定學生已經形成這些預先概念。

第三節　概念定義與概念心像

(concept definition 和 concept image)

由上一節對概念的探討，我們可以看出概念可能存在於客體，也可能是主體的認識。而課堂中所要教授的概念，可能是存在於課本上的客體，也可能是老師本身所具備的概念。Tall（1988）認為概念定義是由文字構成，是用來界定某個概念的敘述。Vinner（1983）強調：「概念定義是以一種不會循環的方式精確解釋概念的文字定義。」這樣的說法被廣泛的接受。所以對於學習者也就是學生來說，所要學習的概念，不論是課本上寫的，還是老師所表達出來的概念，可能是用講的或是寫在黑板上的，都是概念定義。綜合以上，我們可以將本研究中的概念定義界定為：課本上對於某概念所給的文字定義或教師在教學中所講述的定義。

相較於教師本身所具有的或課本上所呈現的概念定義，以學生這個主體來看，他自己本身所具備的又是什麼呢？當學生看到或聽到某個概念的名稱時，它會刺激學生的記憶，在學生記憶中的某些東西會被它喚醒，被喚起的不一定是概念定義，而這個被喚起的東西，Vinner（1991）稱之為「概念心像」。什麼是概念心像呢？根據 Vinner 與 Dreyfus（1989）的說法，概念心像乃指學生心中關於某個特定的概念所產生的圖像所成的集合，以及表現它們特性的全部性質。（而心靈影像我們指的是任何型式的表徵，如圖像[picture]、符號形式[symbolic form]、圖表[diagram]、圖形[graph]等等）Tall 和 Vinner（1981）認為概念心像就是描述那些跟某個概念關連到的所有認知結構，包含所有的心靈影像(mental picture)及相關的性質與過程。Vinner（1983）強調：「在此使用的影像（picture）是十分廣義的，它包含這個概念的任何視覺表徵（甚至符號）。……除了一個概念的心靈影

像，也包含與這個概念相關的性質。……這些性質連同心靈影像的集合就稱為概念心像。」綜合以上，我們可以將本研究中的概念心像界定為：學生面對題目刺激而浮現的任何型式的表徵。

Vinner 與 Dreyfus（1989）都認為學生在解題時常用概念心像來思考而非概念定義。對老師教學來說，當然是希望學生學習之後，面對題目時能夠使用概念定義來解題，這理所當然地是我們的教學目標，那學生的概念心像與概念定義如何才會一致呢？學者專家認為其是否一致取決於概念心像形成的歷程，學生的概念心像是由該概念的例子與非例子的經驗所成的結果（Vinner & Dreyfus，1989），例子接觸的越多，其概念心像發展的越接近概念定義。除此，概念心像的發展並非一夕可成，是經年累月透過各種經驗建構而來，並隨著個體受到新的刺激或新的經驗越趨成熟而產生變化（Tall & Vinner，1981）。

Tall（1988）的研究發現，學生透過舊經驗與新經驗的結合建立屬於他們自己的概念心像，這些概念心像不一定與概念定義一致。譬如當一個小朋友，剛開始學到兩個正數的減法的時候，他會注意到「減」這個動作通常會讓答案變少，此時這樣的注意就成為他概念心像的一部份，但後來遇到負數的減法時，就產生了問題。更甚者，概念心像也不一定是本身前後一致、脈絡相連的，這個結果呼應了 Tall 與 Vinner（1981）的觀點，他們認為：「在特定的時間，只有某部分的概念心像會被喚起（evoked）。不同的時間，被喚起的概念心像可能是會彼此衝突的」，學生不見得會意識到其概念心像是彼此衝突的，「只有當這些相互衝突的概念心像被同時喚起，個體才會感覺到它們之間的衝突。」例如學生認為 $0.\overline{9} = 0.999999\cdots$ 永遠比 1 小一點，此時要求他們利用循環小數化成分數的方法去計算出 $0.\overline{9} = 1$ 時，這樣兩個互相衝突的概念心像同時被喚醒了，他們才會感覺到這兩個

心像之間的衝突，才會產生認知衝突。這正說明了對任何概念而言，學生須在不同的情境與刺激下，都能喚起相同且正確（與概念定義一致）的概念心像，方能順利解題。因而，探討學生在不同的情境與刺激下，是否能夠喚起正確且一致的概念心像顯得格外重要。

此外，我們也必須留意每個學生的概念心像可能是不同的。Bingolbali與 Monaghan（2008）在概念心像的研究結果中提到，不同學習背景(該研究指的是科系)的學生展現出來的概念心像是不同的，因此我們不應該忽視學生的學習背景。這也呼應了 Tall（1988）的觀點，學生透過舊經驗與新經驗的結合建立屬於他們自己的概念心像。每個學生的經驗勢必會因人而異，而且每個人習慣思考的方式也必定有所不同，Skemp（1987）表示，早在 1880 年代，Galton 就發現每個人心智結構中的意向(imagery)程度強落不同，有些人有很強的視覺意向，而有些人什麼意向也沒有，只能憑文字思考，所以每個人的概念心像也因此而有所異同。

綜合以上，我們知道概念心像與概念名稱之間的連結經常因人而異。也就是同一個概念名稱對不同的人而言，很可能會喚起完全不同的概念心像。Vinner（1991）提到：如果你想知道某個人是否知道某個特定的概念定義，你只要要求他寫下來。然而要研究某個人的概念心像，研究者必須問不直接的問題(indirect questions)，這樣才能讓首訪者的概念心像真正呈現出來。也就是說想要判斷一個人是否具備某個概念時，光指出名稱是不夠的，必須要給予不同問題情境的刺激，並加以探討觀察其反應，才能真正知道他的概念心像，本研究立足於這樣的看法，所以設計許多並不直接的問題來探測學生的心像。

第四節　向量內積的相關研究

在國內曾有研究者針對高中生進行向量內積之運算及應用的研究，在本節將對國內與向量內積相關的研究進行探討。

林進發（2001）曾對桃園地區三所國立高中之高二、高三學生進行向量內積之運算及應用的研究。他的研究在探討高中生在向量內積的運算及應用的錯誤類型及造成學生犯錯的原因。他有以下幾點發現：

一、　學生的錯誤原因主要有：

1. 因概念不清產生的錯誤。
2. 對圖形的錯覺。
3. 受先前學習過的知識或本單元學習經驗影響做錯誤的推論。
4. 受舊知識相似概念與線索的引導，形成運算上的錯誤或不當的推論。
5. 符號使用不當，未能注意符號實質的表徵意義。
6. 忽視題目中的已知條件或答案的隱藏條件所產生的錯誤。
7. 受題目中情境設計與文字敘述的影響。
8. 無據的推論與多餘的證明。
9. 粗心計算錯誤。

二、　在同樣的錯誤答案與錯誤類型中，發現其造成錯誤的原因是不相同的。

而國內針對內積所做的研究其實非常的少，其他比較相關的研究還有李永貞（2008）針對高二學生探討學生在學習向量概念與基本運算上有哪些主要錯誤類型及成因。他的研究發現高二學生在向量概念與基本運算上的主要錯誤類型有以下九種：

1.認為向量記號可以表示向量的大小。

2.把方向相反的向量當成負值。

3.把向量大小記號當成絕對值記號。

4.在三角形法兩向量相加時，把和向量的起點與 終點位置寫相反。

5.在平行四邊形法兩向量相加時，使用錯誤的對角線表示它的和向量。

6.認為向量記號相加或相減就是長度相加或相減。

7.認為向量的內積 運算符號就是數的乘法運算符號。

8.不了解向量夾角的定義。

9.認為兩組向量內積中，可以利用「向量大小」或「兩向量夾角」其中一個條件的大小來判斷內積 大小，或當向量大小和向量夾角都不相同時，則無法比較內積的大小。

從以上的結果，我們可以看到其實絕大部分的錯誤原因都是因為學生的概念出現了某些問題。可能是受舊有概念的影響，可能對符號所代表的概念內涵不清楚，可能無法瞭解題目所要表達的概念，或者是對某個概念的認識還沒發展到足夠成熟。

而向量內積有哪些獨特的概念？這些概念在學生心中又會形成什麼樣的概念心像呢？目前並沒有相關的研究在探討這些問題，沒有相關的研究去探討學生腦袋中到底是怎麼樣去看待向量內積的，這些是數學教育界亟須探討的課題。

第參章　研究方法

第一節　研究架構

本研究的研究架構圖是根據研究目的：『探討高中生關於「向量內積」的概念心像』並配合各研究問題，所發展的研究架構，其研究架構圖如下：

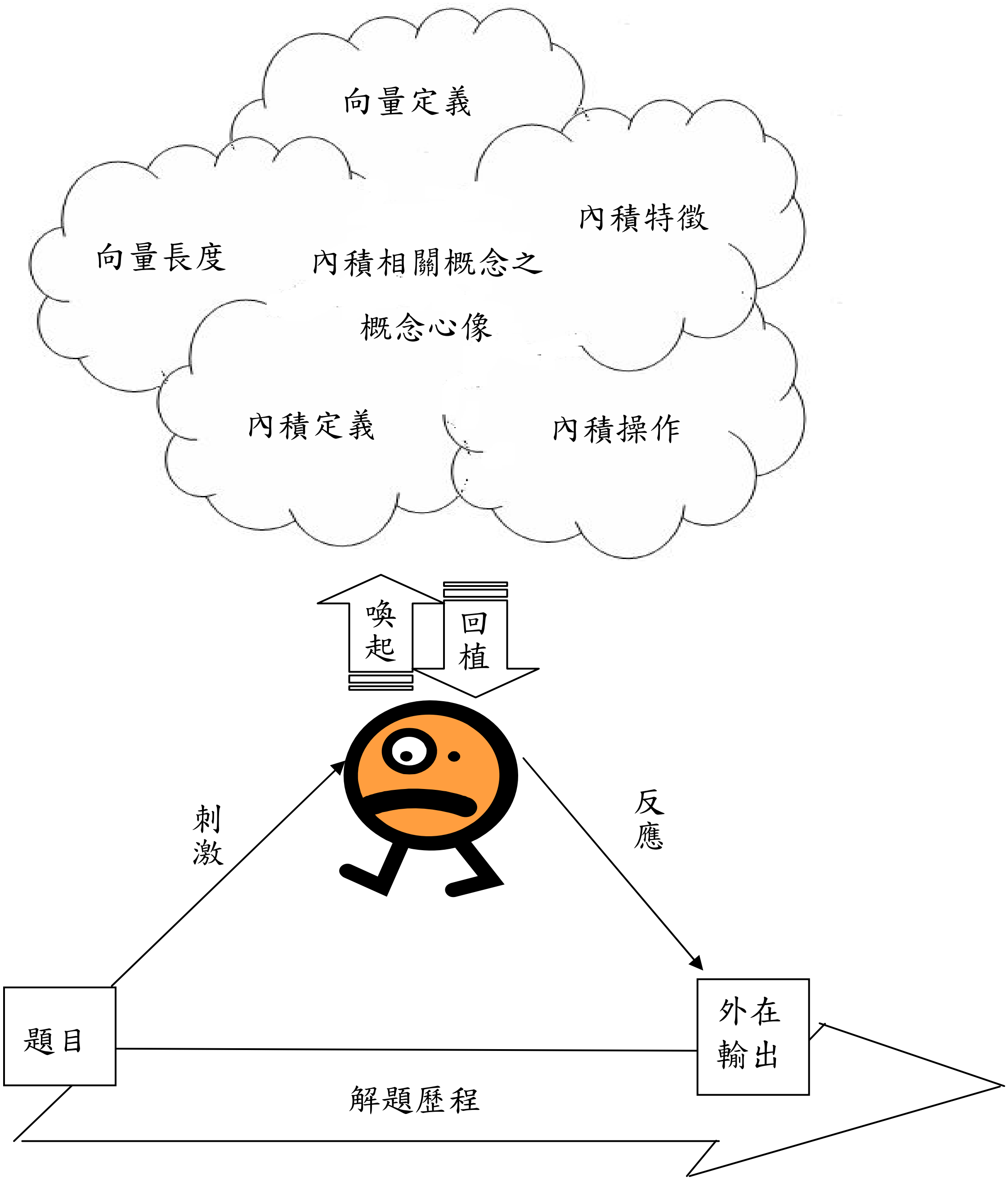


圖 3-1-1. 研究架構圖

關於圖 3-1-1 的研究架構圖說明如下：

學生在解題時，首先會接受到題目的刺激，然後去腦中搜索相關的概念以進行解題，於是某些概念心像就會被喚起。被喚起的心像會回植到腦中思考工作區作為解題的參考，然後學生思考後做出反應，得到形式化的外在輸出。而被喚起的概念心像，會因為題目的不同、刺激的不同甚至時間點的不同，每次都可能是不同樣貌的概念心像，而且概念心像是存在於主體的，理所當然地每個人的概念心像也會有所不一樣。

本研究的研究目的是探討學生關於「向量內積」的概念心像。學生腦中概念心像的發展必定與學習過程有著緊密的關連性。而學生學習向量內積的過程，主要就是學習老師所教的(或是教材上的)「內積的概念定義」。換句話說，對於「向量內積」的學習，其實我們已經有了一個既定目標希望學生能夠達到，希望學生面對題目時，能夠使用內積的概念定義去解題，也就是我們希望學生的概念心像能夠發展的越接近概念定義越好。

因而本研究規劃了五個類別的相關概念：向量定義、向量長度(絕對值)、內積特徵、內積操作與內積定義，藉由探討學生腦中對這些與內積相關之概念的具備情形，以及學生對這些概念的心像模樣為何，來探討學生關於「向量內積」的概念心像。

這五個類別的規劃想法說明如後：探討內積概念，勢必要先探討更基礎的「向量」概念，如果一個學生連內積的先備概念-「向量」是什麼都不曉得，那遑論他對「內積」的瞭解會有多正確。而「向量」概念本身也相當的複雜，為使本研究能夠聚焦在「內積」上，故在向量部分，本研究選取了最基礎的「向量定義」(能區分出向量與純量是不同的)以及內積會用到的「向量長度(絕對值)」。再回到「內積」概念上來討論，一般談論

到某概念時，其名稱與概念本身是密不可分的，也就是外顯的表徵，而談論表徵就不應該不提到符號，研究者將內積名稱、內積符號歸到「內積特徵」這一類別，而內積有一個很特別的特徵就是「內積結果為純量」也將在這一類別作探討。討論完了內積的特徵之後，接下來我們回到「到底內積是什麼？」這個根本的問題上來，於是我們將探討「內積定義」。最後，我們將切到另一個角度來談論「內積」。內積是兩向量之間的「運算」，在這裡我採取另一種比較貼近學生的說法：「把兩向量拿來〝作〞內積」，也就是內積是一種「操作」，我們在「內積操作」這個部分將討論哪些向量可以做這個操作？操作的順序有沒有差？

另外要注意的是，並非除了這五個類別的相關概念外，內積就沒有其他的相關概念了，只是本研究規劃了這五個類別作為對『學生關於「向量內積」的概念心像』的初探目標。

第二節　研究設計

本研究的研究目的乃探討高中生關於「向量內積」之概念心像。本研究定位為基礎性研究(basic research)，因本研究同時可使教師更加瞭解學生學習後形成之概念心像，據以改善教學，故也具有應用性。本研究利用問卷調查，蒐集質與量的資料，針對所蒐集到的資料，進行歸納分析(inductive analysis)。在歸納分析時，不做任何預設的限制、假設，所有的發現均來自於學生的反應。

根據研究目的，本研究設計許多不同情況的問題，透過問卷調查法，調查學生是否具備「向量內積」相關概念的概念心像，並透過質的資料之收集，進一步瞭解其概念心像的樣貌。研究過程包括：問卷編制、施測、回收、質與量的資料分析，其中資料分析以質的分析為主，量的分析為輔。問卷測驗時間並未限制，只要學生願意填答都會給予足夠的時間完成作答。

本研究研究對象為高三學生，選擇這個階段學生之主要原因為高三學生已至複習概念階段，相較於剛學完向量內積概念的高二學生來說，高三學生的概念發展時間較長、接觸概念的經驗較多，概念心像發展趨於尾聲，較為固定，探討這個階段學生的概念心像，較能顯示出高中階段概念學習完成後的概念心像狀況，可供高中教師參考，進行概念教學前後連貫的整體思考。施測時間為高三第二次模擬考後一至兩週，因班級不同有些許差異，而向量內積為該次模擬考所包含的範圍。

第三節　研究樣本

本研究採立意取樣，為了能收集到豐富的質性資料，研究樣本的數學程度以高程度及中程度為主（相對於高中生）。研究樣本來自於四個大台北地區高三班級的學生，其中兩個班級來自於一所學生程度較高的高中，該校高一學生入學時之國中基本能力測驗 PR 值約為 97，另兩個班級來自於一所學生程度中等的高中，學生入學 PR 值約為 70。兩校樣本都包含一個高三文組班級，一個高三理組班級。本研究中，高程度文組代表高程度學校的高三文組班級、高程度理組代表高程度學校的高三理組班級、中程度文組代表中程度學校的高三文組班級、中程度理組代表中程度學校的高三理組班級，扣除無效樣本後一共有 149 人，各班樣本人數情形如下表：

表 3-3-1. 研究樣本之分佈狀況

	有效樣本
高程度文組	37
高程度理組	35
中程度文組	42
中程度理組	35
合計	149

無效樣本之判定：

兩次施測問卷，有任何一次問卷缺漏未受測者，視為無效樣本。或問卷內容超過一半以上未作答者，其明顯為作答意願低下而不予作答，因其會影響分析數據的正確度，亦視為無效樣本。

第四節　研究工具

本研究的研究工具為「向量內積概念心像探測問卷」。問卷內容一共有三個部分，第一部分探討學生對於內積的核心心像，包含一個問題，第二部分與第三部分探討向量的相關概念心像與內積的相關概念心像。第二部分包含八個問題、22 個小題。第三部分包含七個問題、20 個小題。本研究藉由這三部分的問卷取得質與量的資料，質的資料是由學生在問卷上根據題目要求說明理由或陳述答題原因而得。量的資料是根據學生回答問卷上的是非題，經統計後而得。

第一部分僅包含一個問題的原因是因為該題為開放性問題「內積是什麼？」，而第二部分與第三部分是探討向量以及內積的相關概念，所以會有比較多相關的符號、式子，為避免第一部分受到後面題目的提示與影響，故特別獨立出來成為問卷的第一部分。因為題目為完全開放性的設計，所以得到的答案，也往往會是學生面對題目刺激，首先浮現的概念心像，也就是較為核心的概念心像。

第二部分與第三部分一共有十五個問題，包含一題收集學生基本背景資料的題目，以及十四題針對相關概念施測的題目。將這些題目分成兩個部分的考量的因素主要有兩個：一、因為施測題目較多，為避免學生的不耐煩降低答題意願，故將題目分成兩個部分，分兩次進行施測；二、因為各相關概念之間不可能完全獨立無關，所以施測題目之間偶爾會有重疊的概念，擔心題目之間會有相互提示的狀況，所以將可能互相提示、影響的題目分別放在第二以及第三部分不同的問卷上。

由於第二部分與第三部分的題數較多，所以在題目設計上儘可能避免對相同概念重複出題。例如許多向量關係，在二維與三維是共同的，如向

量相交或向量起點相同等等，所以只在平面部分討論，而空間部分主要加入空間中特有的歪斜關係，並以平行關係對應比較，如此希望減低學生不耐煩，降低答題意願的狀況。

本研究的問卷編制由三位數學教育學者專家、十數位資深數學教師及碩博士班學生組成小組，進行八次焦點團體討論與修正而成，其間並進行一次問卷預測，檢驗題目的可行性與正確性，根據預測結果，進行修正完成問卷。

因為時間以及學生狀態等等考量，所以設計為進行兩次的施測，而將第一部分的問卷與第二部分的問卷，在第一次時進行施測，為避免第一部分的問卷受到干擾，施測的方法為先發第一部分的問卷，等待同學回答完畢，收回第一部分問卷，在發第二部分的問卷。為了避免第三部分的受測題目，受到前兩部分問卷的提示與干擾，並考量教學進度以及學生答題意願，將第三部分問卷隔週在進行施測。

第五節　研究過程

研究過程包括三個階段：前置工作階段、施測階段、資料分析與論文撰寫階段。

前置工作階段：

1. 搜尋感興趣的研究主題,與專家研討擬定研究方向,並聚焦出研究目的。
2. 依據研究目的發展預測問卷，過程中與專家、資深教師以及碩博士班學生組成小組進行多次討論。
3. 對預測問卷進行施測，回收後進行資料整理，並依照預測結果與小組進行討論，以修正完成問卷。
4. 尋找合適的研究對象與施測時間。

施測階段：

因研究對象為即將面臨學測的高三學生，並且需要兩次的施測時間，為求不影響教師教學，以及顧慮學生的答題意願，故先行與合作教師討論適合的施測時間點與施測需注意的事項。

資料分析與論文撰寫階段：

將收集到的有效問卷進行質性分析，從學生的陳述回答中抽象出學生的心像模樣並歸納出不同的心像類型，並做量化的統計，從統計結果交叉分析以推論學生的心像，在這階段不斷交錯進行質性分析與量化統計，儘可能地洞察出學生的心像模樣。以利進行更結構性、更整體性、更貼近真實狀況的報導。

以下為研究過程的流程圖：

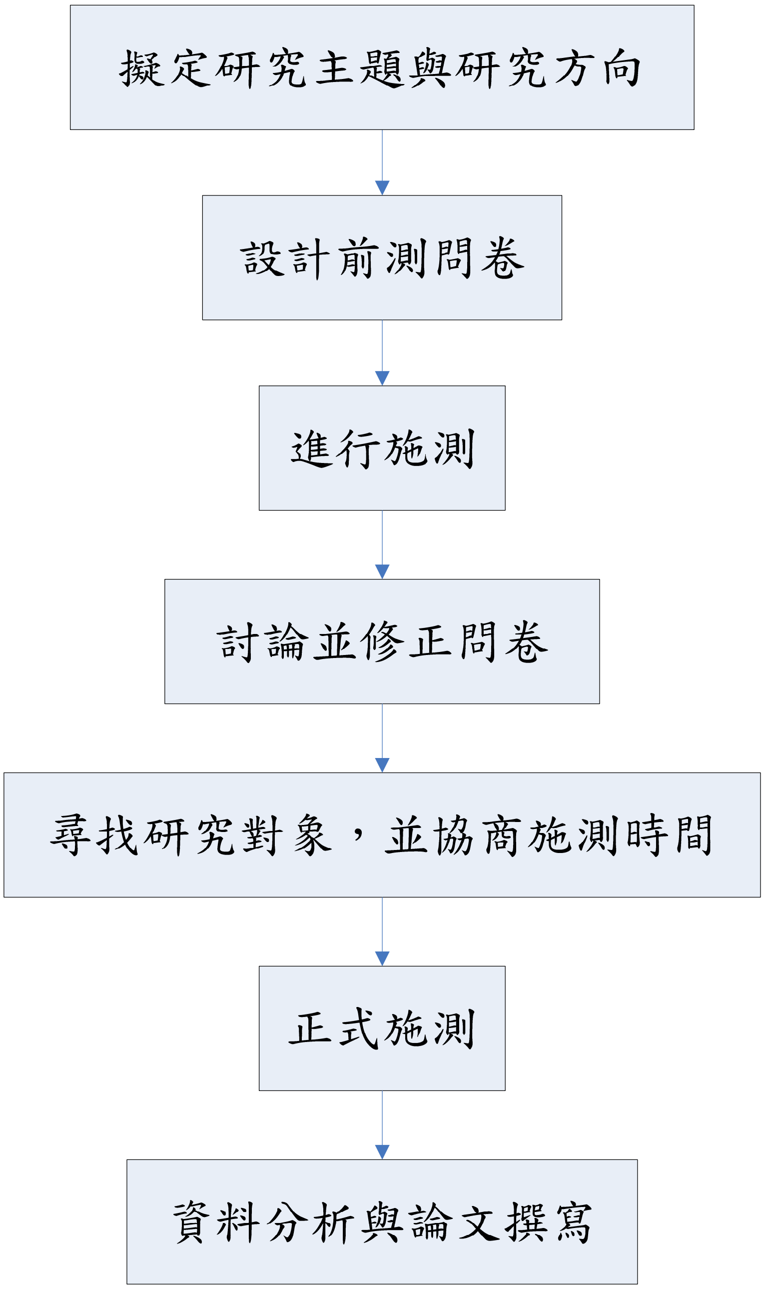


圖 3-5-1. 研究過程流程圖

第六節　研究限制

1. 概念心像並沒有辦法直接觀察，只能由學生的反應來加以推論。而學生的書寫表達能力是否真的能夠將他們腦中的概念心像完整的反應出來，在研究工具的限制之下，我們只能假定學生所陳述的文字說明以及各種回答已經能某程度顯現他們的概念心像。

2. 由於概念心像是會因不同的刺激而有不同的展現，甚至時間點的不同也會有所影響，而且也不可能將所有的概念心像都喚起。所以本研究只能對有被喚起並且能夠觀察到的心像加以報導，並不是報導學生所有的概念心像。

3. 本研究採用問卷收集資料後，根據學生所書寫的內容以及是非題的作答情形來探知學生的心像，並未對學生進行面對面的訪談以進一步確認學生的想法。所以從學生回答去推論其心像時，研究者採取嚴格的分析推論，當學生回答出現不能明確判斷時，只報導能夠確定的最低限度。

4. 本研究的研究樣本為大台北地區兩所公立高中的學生，其 PR 分別為 97 跟 70 左右，所以研究結果並不能擴大到全體高中生。

第肆章　研究結果

本章將探討學生關於「向量內積」的概念心像，將根據資料進行學生概念心像的分析。第一節為研究結果報導的架構。其餘數節將報導各相關概念的研究結果與發現。

第一節　研究結果報導之架構

本研究在研究結果的報導上，將「向量內積」所關連到的重要概念組織為兩個主類別：V.與向量相關、I.與內積相關。其中，與向量相關的概念又分為兩個子類：Vd.向量定義、Vl.向量長度(絕對值)。與內積相關的概念又分為三個子類：Ic.內積特徵、Io.內積操作、Id.內積定義。針對五個子類別所配合的施測題目分節報導。其架構如下表 4-1-1：

表 4-1-1. 向量內積之報導架構

主類別	子類		施測題目
V.與向量相關	Vd.向量定義		3(1),3(2)
	Vl.向量長度(絕對值)		3(1),3(3)
I.與內積相關	Ic.內積特徵	符號	1,2,3(4)
		內積結果為純量	3(1),3(4),7(1),7(2)
	Io.內積定義	代數型	6,8,9
		圖像型	6,8,9
		坐標型	14
	Id.內積操作	任兩向量可做內積	10,11
		交換律	3(5),6Ⅱ

第二節，首先報導 V. 與向量相關的概念，因為本研究欲探討學生對於「向量內積」的概念心像，所以必須先確認學生對於內積的先備概念－「向量」的心像發展狀況。

接下來，第三節至第五節，我們將重點放在與「向量內積」本身較為相關的概念上，內容包括三個子類別：(1)Ic. 內積特徵，此類別包含兩個部分：其一針對內積的「名稱」與「符號(‧)」加以探討。其二為探討「內積的結果為純量」此概念；(2) Id. 內積定義，探測學生對於「內積定義」的概念心像與概念定義的異同；(3) Io. 內積操作，探討內積操作上的兩個重要性質：「任兩向量可做內積」以及「向量內積有交換律」。

第二節　與向量相關之概念

本研究欲探討學生對於「向量內積」的概念心像，而「向量內積」此概念的發展，必定與「向量」有著緊密的關連，所以首先在這一節將探討與向量相關的概念。為使焦點放在「向量內積」上，所以在與向量相關的概念，我們將探討兩個比較相關的子概念：(1)Vd.向量定義，主要探測學生對於「向量」本身是否有基本的認識；(2)Vl.向量長度(絕對值)，因為內積的定義會牽涉到向量長度(絕對值)的概念，所以挑選此概念加以探討。

Vd.向量定義

向量內積有一個很大的特徵，就是兩向量內積的結果為純量不是向量。故在「向量定義」這一個部分，主要探測學生是否具備了「向量不是純量」的概念。

另外，在作兩向量內積時，我們常常使用$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$這些不同的符號來代表兩個向量，故在此設計了題目來看看符號對於學生的概念是否有影響？

施測題目:

3.將下列有可能成為正確式子的打✓，不可能的打✗。

□ (1) $\overrightarrow{a}=8$　　　　□ (2) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$

圖 4-2-1. 向量不是純量與符號影響之施測題目

題目分析：

在第(1)小題，等號左邊是一個向量$\overrightarrow{a}$，等號右邊是一個純量 8，若對

於「向量不是純量」概念不清楚的同學就可能會勾選此選項。

學生所遇到的大部分狀況，$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$都是表示相異的兩向量，而在第(2)小題，若學生對向量的理解不夠清楚，可能會因為符號以及過往學習經驗的影響而打✘。

施測結果&概念心像分析：

表 4-2-1. 向量不是純量與符號影響之施測結果

題目 班級	第(1)小題		第(2)小題	
	打✓	*打✘*	*打✓*	打✘
高程度文組	3	*34*	*37*	0
高程度理組	2	*33*	*34*	1
中程度文組	21	*21*	*41*	1
中程度理組	12	*23*	*35*	0
合計	38	*111*	*147*	2
	26%	*74%*	*99%*	1%

第(1)小題$\overrightarrow{a}=8$，有 38 位(26%)學生打勾，表示有達$\frac{1}{4}$的學生對於「向量不是純量」概念是不清楚的。其中程度較高學校的學生有 5 位，程度較差學校的學生多達 33 位，可以看到在基礎的「向量不是純量」此概念，程度較好學校的學生與程度較差學校的學生有很明顯的落差。

而「向量不是純量」概念不清楚的學生中，其心像並非完全一樣。搭配題目 3. (3)$|\overrightarrow{a}|=\overrightarrow{b}$ 來看，有以下勾選人數分佈情況：

表 4-2-2. 向量不是純量 vs $|\overrightarrow{a}|=\overrightarrow{b}$之分布情況

	$\lvert\overrightarrow{a}\rvert=\overrightarrow{b}$ 打✓	$\lvert\overrightarrow{a}\rvert=\overrightarrow{b}$ 打✘
$\overrightarrow{a}=8$ 打✓	14	24

我們看到在第(1)小題($\overrightarrow{a}=8$)打✓而第(3)小題($|\overrightarrow{a}|=\overrightarrow{b}$)打✗的學生有 24 位，這些學生並非完全不知道向量的定義，否則在面對第(3)小題($|\overrightarrow{a}|=\overrightarrow{b}$)時應該會打✓。因此，可以推測學生對於「向量不是純量」概念的心像有：

A 類：不清楚向量的定義，無法分辨出向量與純量的不同。

B 類：知道向量具有〝大小〞與〝方向〞不是純量，但無法清楚釐清，在面臨某些問題，會因為向量具有〝大小〞而產生錯誤的迷思。

C 類：對於向量定義完全理解，可以清楚分辨向量與純量之間的不同。

關於第(2)小題$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$，幾乎全體學生(99%)都能正確勾選，只有兩位同學不能正確勾選，表示符號的不同對於絕大部分學生是沒有影響的。

VI. 向量長度(絕對值)

施測題目:

3.將下列有可能成為正確式子的打✓，不可能的打✗。
□ (1) $\overrightarrow{a}=8$　　　　□ (3)$|\overrightarrow{a}|=\overrightarrow{b}$

圖 4-2-2. 向量長度(絕對值)之施測題目

題目分析：

關於向量長度(絕對值)此概念，施測題目為 3.(3) $|\overrightarrow{a}|=\overrightarrow{b}$，等號左邊為一向量的絕對值，等號右邊為另一向量。知道向量絕對值表示向量的長度為純量不是向量的學生，在這一小題會打✗；而打✓的學生則對「向量絕對值≠向量」的概念是不清楚的。從題目 3.(2)$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$的勾選狀況，我們知道向量符號不同對於學生沒有影響！但只看 3.(3)小題勾選狀況，我們無法

確認學生「向量絕對值≠向量」概念不正確是因為向量定義的概念不正確，還是對於向量絕對值的概念不正確而進行勾選，所以在這裡搭配第(1)小題來看學生的回答狀況，可以比較準確的知道學生的心像為何。

施測結果&概念心像分析：

表 4-2-3. 向量長度(絕對值)之施測結果

勾選情形 班級	✓✓	✓✗	✗✓	✗✗
高程度文組	2	1	1	*33*
高程度理組	0	2	0	*33*
中程度文組	9	12	1	*20*
中程度理組	3	9	2	*21*
合計	14	24	4	*107*
	9%	16%	3%	*72%*

✓✓代表第(1)小題打✓，第(3)小題打✓ ； ✓✗代表第(1)小題打✓，第(3)小題打✗；

✗✓代表第(1)小題打✗，第(3)小題打✓ ； ✗✗代表第(1)小題打✗，第(3)小題打✗。

第(1)小題與第(3)小題勾選分別為✓✓的學生有 9%，這些學生在向量定義概念就出現了問題，而使得「向量絕對值≠向量」概念也不清楚。勾選情形為✓✗的學生有 16%，這些學生顯示出他們知道向量絕對值與向量是不同的，但對於向量定義的理解不夠清楚而導致錯誤的勾選情形。勾選情形為✗✓的同學，在向量定義部分是沒有問題的，所以在「向量絕對值≠向量」出現問題，顯然是因為對「向量絕對值」本身無法理解，而這樣的學生只有少數 3%。最後就是勾選情形為✗✗的學生有 72%，這些學生就達到向量定義的概念與向量絕對值的概念都沒有問題。

第三節　與內積特徵相關之概念

Ic. 內積特徵_名稱

概念的名稱與概念本身是密不可分的。所以在這裡，我們首先要針對「內積」這一個名稱，來看看當學生面對「內積」這一個名稱的刺激時，會浮現出什麼樣面貌的概念心像。

施測題目:

1.內積是什麼？
(請將所有您知道的、想到的儘量書寫！重點不在答案正確與否，而是您認真的作答。)

圖 4-3-1. 內積名稱所引動的概念心像之施測題目

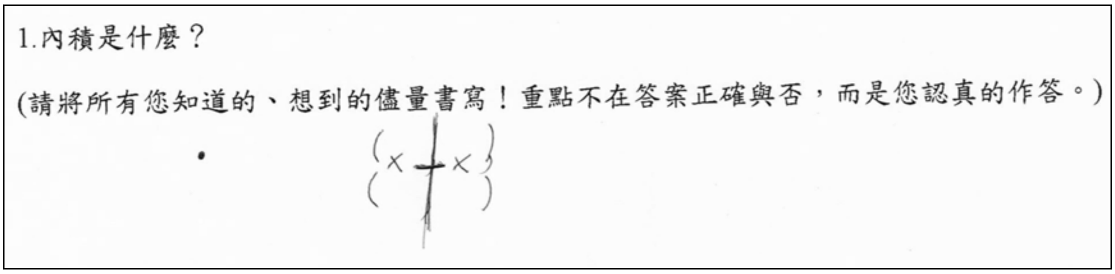
題目分析：

該題為開放性的問題，並獨立於其他問卷先行施測。先行施測可避免學生受到其他題目的提示而影響其作答情形。因為開放性的題目設計，使得學生所回答的內容，會是學生心中首先浮現的心像，也往往是較為核心的概念心像。

施測結果&概念心像分析：

因為本題為開放性的問題，所以學生答案非常的多樣。因此，本研究者將學生的回答情形搭配「向量內積」的相關概念進行歸納整理，將其歸納為以下數類：內積符號、向量、相乘、純量、圖形、投影、偏代數型、偏圖像型、偏坐標型、應用、公式、外積、面積、垂直、物理以及其他。各類概述如下：

內積符號：學生回答中有使用內積符號「·」的情況，如下圖 4-3-2 以及圖 4-3-3。

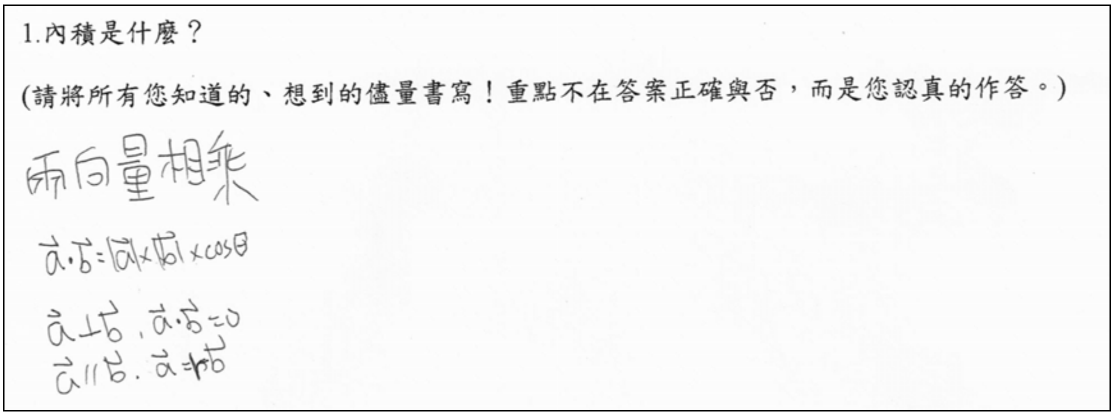


1.內積是什麼？

(請將所有您知道的、想到的儘量書寫！重點不在答案正確與否，而是您認真的作答。)

·

圖 4-3-2. 內積符號之學生例 1



1.內積是什麼？

(請將所有您知道的、想到的儘量書寫！重點不在答案正確與否，而是您認真的作答。)

兩向量相乘

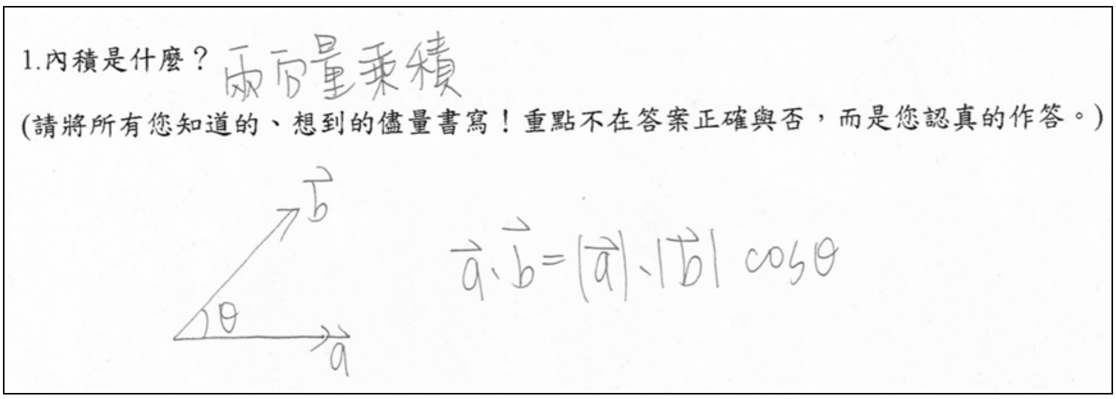
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\theta$

$\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\parallel\vec{b}$, $\vec{a}=t\vec{b}$

圖 4-3-3. 內積符號之學生例 2

但此類的結果有可能被略微低估，因為有少數學生的回答如下圖 4-3-4，此時就無法判斷學生是否有使用內積符號「·」。



1.內積是什麼？兩向量乘積

(請將所有您知道的、想到的儘量書寫！重點不在答案正確與否，而是您認真的作答。)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

圖 4-3-4. 內積符號之學生例 3

向量：學生回答中有出現向量概念，即：有提到「向量」的名稱或使用向量符號。例如上圖 4-3-3 與 4-3-4 的學生都有提到向量也有直接使用向量符號；有一些同學只有提到向量，如下圖 4-3-5 的同學；也有一些同學則是直接使用向量符號。

1.內積是什麼？

(請將所有您知道的、想到的儘量書寫！重點不在答案正確與否，而是您認真的作答。)

1. 向量相乘 → 可求很多東西

2、人內在所積存的德行

圖 4-3-5. 向量之學生例

相乘：學生回答出現「相乘」的概念，此處指的「相乘」是指學生將內積類比於數字的相乘，不是單單出現乘法而已。上面圖 4-3-3、圖 4-3-4 與圖 4-3-5 的學生的回答就出現這樣的概念心像。

純量：學生回答出現「內積的結果為純量」概念，如下圖 4-3-6 學生的回答。

圖形：學生回答中有圖形的情況，如上面圖 4-3-4 與下面圖 4-3-6 的學生。

投影：學生回答中有提到投影或圖形有畫出投影的情形，如下圖 4-3-6 學生的回答。

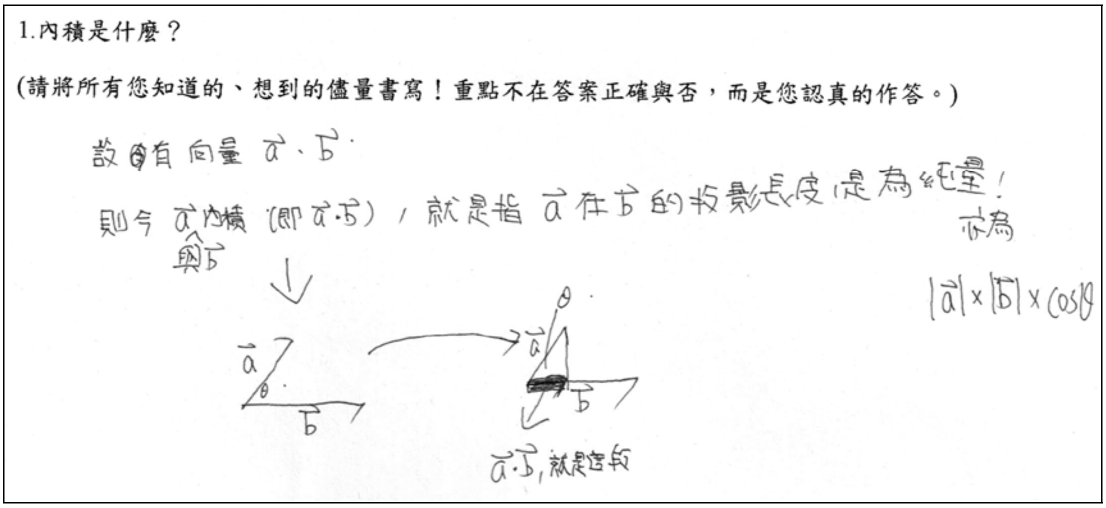


圖 4-3-6. 純量之學生例

偏代數型：學生回答中有出現內積定義的心像，且其心像偏向代數型定義，即「$|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\theta$」，如前面圖 4-3-6 學生的回答。

偏圖像型：學生回答中有出現內積定義的心像，且其心像偏向圖像型定義，即「$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影量 × $\vec{b}$ 的長度」。

偏坐標型：學生回答中有出現內積定義的心像，且其心像偏向坐標型定義，即「$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=a_1b_1+a_2b_2$」。

應用：學生回答中出現「內積是拿來應用到其他地方」的心像。

公式：學生回答出現將代數定義的式子移項之後像公式的式子，即

「$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$」。

外積：學生回答中出現外積的情況。

面積：學生回答中，認為內積就是兩向量所形成的面積。

垂直：學生回答中出現「兩垂直向量內積為零」的心像。

物理：學生回答中，可以看到應該是因為受到物理課上課內容的影響。例如有一位學生的回答是「一個具方向的物理量在空間中運動方向上的累積量」，還有另一位學生的回答是「作功」。

其他：包括回答「我不記得了」、「不清楚」…等情形。還有其他無法歸納的情形，例如有學生回答「相關係數」。

將第 1 題的施測結果依照各類別編碼、統計之後可以得到學生面對「內積」名稱之刺激所引動的概念心像之施測結果，如下表 4-3-1：

表 4-3-1. 「內積」名稱所引動的概念心像之結果

	內積符號	向量	相乘	純量	圖形	投影	偏代數型	偏圖像型	偏坐標型	應用	公式	外積	面積	垂直	物理	其他
高程度文	65%	84%	11%	3%	30%	22%	43%	22%	41%	5%	8%	14%	0%	0%	0%	8%
高程度理	51%	86%	6%	23%	51%	69%	57%	51%	37%	6%	0%	9%	3%	9%	3%	6%
中程度文	29%	55%	24%	0%	31%	0%	40%	0%	12%	5%	7%	0%	7%	7%	0%	21%
中程度理	43%	80%	11%	3%	43%	20%	66%	14%	11%	0%	6%	3%	3%	9%	17%	11%
合計	***<u>46%</u>***	***<u>75%</u>***	13%	7%	38%	26%	***<u>51%</u>***	21%	25%	4%	5%	6%	3%	6%	5%	12%

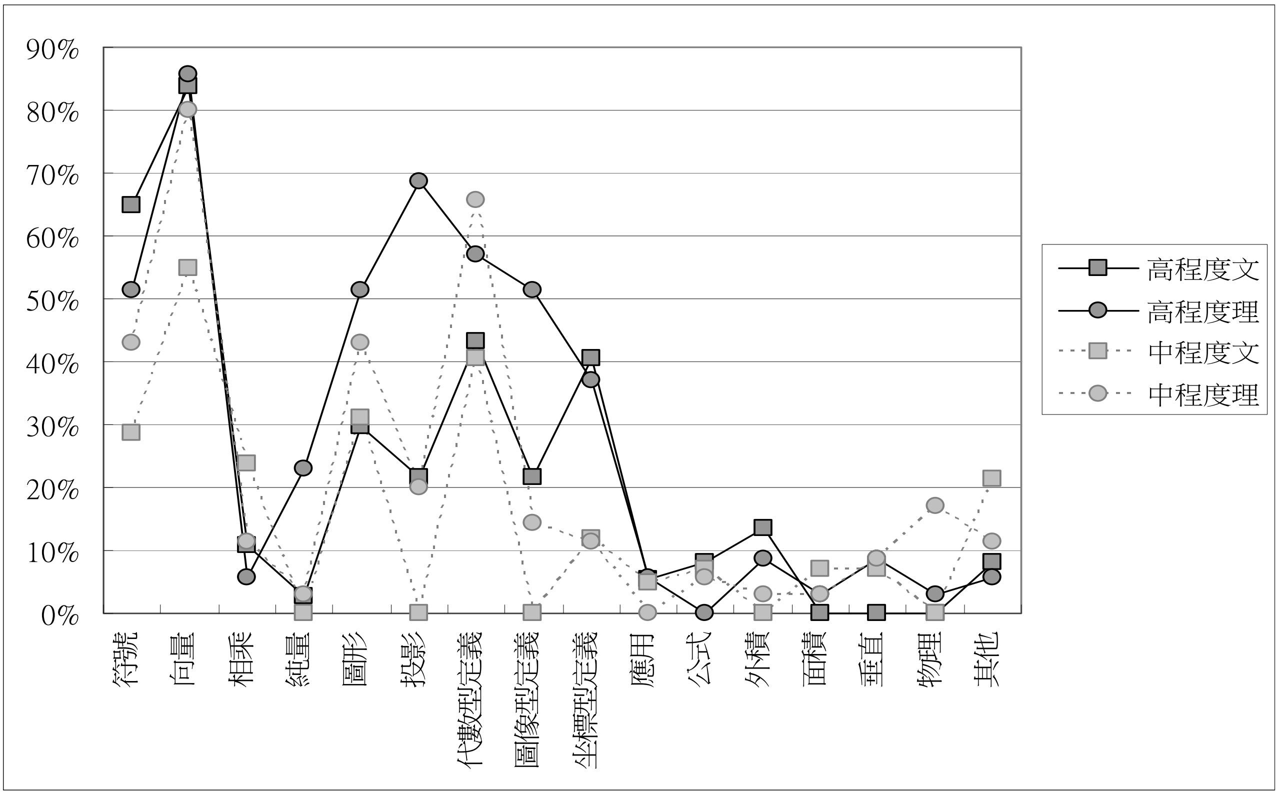


圖 4-3-7. 「內積」名稱所引動的概念心像之結果百分比折線圖

整體來看，學生面對「內積」此一概念名稱的刺激時，浮現的主要概念心像有向量、內積符號以及偏代數型，其中最高的比例是 75%的向量，次高的是偏代數型為 51%，最低的則是內積符號為 46%。比對其他各類，可以發現這樣的情形恰好可以解釋學生多半都能背出內積之代數型定義的情況。另外，我們也可以發現有 38%的學生的概念心像都會有圖形的出現，而且有偏圖像型定義的概念心像的學生只有 21%，這顯示了「圖形」本身對於學生來說是特別的。而內積概念的三種概念定義，學生對於代數型定義的接受度最高，有 51%的學生浮現了偏代數型定義的概念心像，而第二高的偏坐標型定義的概念心像只剩下 25%，最低的偏圖像型概念心像則是 21%。

除此之外，比較高程度學校與中程度學校的回答情況以及文組與理組之間的回答情況，我們有以下幾項發現：

1. 參考上圖 4-3-7，我們可以看到大部分情形，中程度文組班級的比例都低於其他班級，但在「相乘」的部分明顯反轉，有 24%出現了「相乘」的概念心像，明顯高於其他班級(最高 11%)，而高程度理組班級的比例只有 6%。這說明程度較差的學生，比較容易發生「將向量內積類比於數字乘法」的情況。

2. 而「內積結果為純量」此概念心像的出現幾乎都集中在高程度理組班級(23%)。

3. 圖形的出現比例，高程度理組班為 51%、中程度理組班為 43%，都高於高程度文組班級的 30%與中程度文組班級的 31%。而且在偏圖像型定義的心像表現上，不論高程度學校的學生還是中程度學校的學生，都是理組班級高於文組班級。可以看到理組學生在思考上比較習慣使用圖形，並且對於圖形使用的掌握度都高於文組學生。

4. 在投影的部分，其他班級相對於圖形都是下降的狀況，而高程度理組班級的比例突然升高，主要是因為高程度理組班級有些同學是沒有畫圖而直接出現「投影」的文字敘述。

5. 而偏坐標型定義的概念心像表現，高程度學校不論文組理組，都大約為 40%左右，而中程度學校也是不分文組理組都約為 11%左右。

6. 從內積定義的三類概念心像出現的比例，並且搭配學生的回答內容來看，顯示程度較好的學生，其概念心像比較多元；而程度較差的學生。其概念心像較為單一。

7. 另外，有 8 位學生都浮現了「$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$」樣式的式子，並且除此之外，並無其他類似公式的式子出現。這應該是因為內積常常被應用來求角度，有很多時候就會套用代數型定義移項後的式子「$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$」，而有些學生習慣背公式，於是就將該式子當作公式背下來，這 8 位學生應該就是屬於這類型的學生。

8. 還有其他比例較低的類別，這些類別應該就是比較不核心的概念心像，但對浮現了這些概念心像的學生來說，顯然他們對這些類別是特別有感覺的，我們也不應該輕易忽視這些類別，這些類別有應用、外積、面積、垂直、物理。

Ic. 內積特徵_符號

接下來，我們將探討學生對於內積符號「‧」的看法。看看學生辨識「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$是兩向量的內積」的情形如何？有什麼樣不同的心像。

施測題目:

2. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$是什麼？把正確的打✓，不正確的打✗，並說明之(不論✓✗)。

☐ (1)是兩向量的乘積，為什麼？____________________

☐ (2)是兩向量的外積，為什麼？____________________

圖 4-3-8. 內積符號之施測題目 1

3.將下列有可能成為正確式子的打✓，不可能的打✗。

☐ (4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$

圖 4-3-9. 內積符號之施測題目 2

題目分析：

第 2 題包含兩小題是非題，並要求學生寫出答題的理由，以取得質與量的資料。在題目 2.(1)沒有進行勾選的學生，那麼他的心像是可以辨識出$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$不是數字乘積。而能夠清楚辨識「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$是兩向量的內積」的學生，在 2.(2)不會進行勾選。而在 2.(1)進行勾選的學生，有可能是將「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$」類比於「數字的乘積」，也可能將「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$」視為向量特有的一種「乘積」。

在第 2 題中，讓學生勾選「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$是否為兩向量的乘積或外積」，而刻意不出現「內積」該名詞。這樣的題目設計有兩個考量，第一是免去學生其實不甚清楚「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$是兩向量內積」因受題目影響而誘發作答的狀況；第二是可看出學生對於「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$」的看法是類比於「乘積」還是將「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$」視為特別的向量運算而不同於「乘積」。

為了可以更清楚地瞭解學生對於將「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$」類比於「乘積」的看法為何，我們搭配第 3 題的(4)$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$，若其心像是類比於「數字乘積」的同學，那麼其心像可能類比於「數字乘數字=數字」會有「向量乘向量=向量」的想法，而在 3(4)這一小題進行勾選。

施測結果&概念心像分析：

表 4-3-2. 內積符號之施測結果

	2(1)	2(2)	3(4)	作答結果之交叉情形								
				×××	××✓	×✓×	×✓✓	✓××	✓×✓	✓✓×	✓✓✓	其他
高程度文	15	4	15	***13***	7	1	1	8	5	0	2	0
高程度理	15	0	3	***17***	3	0	0	15	0	0	0	0
中程度文	31	3	23	2	5	1	2	16	***15***	0	0	1
中程度理	23	2	20	5	5	1	1	9	***14***	0	0	0
合計	84	9	61	37	20	3	4	48	34	0	2	1
	56%	6%	41%	***25%***	***13%***	2%	3%	***32%***	***23%***	0%	1%	1%

×××代表 2(1)打×，2(2)打×，3(4)打×；××✓代表 2(1)打×，2(2)打×，3(4)打✓；

×✓×代表 2(1)打×，2(2)打✓，3(4)打×；×✓✓代表 2(1)打×，2(2)打✓，3(4)打✓；

✓××代表 2(1)打✓，2(2)打×，3(4)打×；✓×✓代表 2(1)打✓，2(2)打×，3(4)打✓；

✓✓×代表 2(1)打✓，2(2)打✓，3(4)打×；✓✓✓代表 2(1)打✓，2(2)打✓，3(4)打✓；

其他是有一位學生在第 2 題沒有作答，第 3(4)小題打✓的情形。

整體而言，只有少數同學(9 位)在「2.(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 是兩向量的外積」進行勾選，這些同學對於辨識「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 不是外積」是不清楚的。而在「2.(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 是兩向量的乘積」有 44%的學生沒有進行勾選，顯示其認為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 不是一般的數字乘積，這些同學是可以辨識出「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 是兩向量的內積」；而對於 2.(1)進行勾選的學生中，有一些學生的理由出現「內積」或出現「內積的定義」等等，這些同學也顯然對於 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的看法是有別於數字乘積的。統合起來，我們可以確定至少有 66%的學生是可以辨識出「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 是兩向量的內積」。

為了更清楚學生對於「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$」的看法，我們搭配題目 3(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 來交叉比較，發現除了 9 位在 2(2)進行勾選顯示無法正確辨識「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$」是什麼的同學以及一位在第 2 題沒有作答的同學外，其餘同學可以區分成以下四類：

A 類：勾選狀況為✕✕✕，這類學生佔全體的 1/4。這些學生在面對「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$」時，其概念心像比較符合概念定義。他們不會將「內積」視為向量的「乘積」，而是特有的運算。且這類學生(37 位)主要是來自高程度學校的學生(30 位)。下面列舉幾位這類型學生的陳述：

a. 內積≠乘積
b. 乘積有可能是內積或外積
c. 向量 no 乘積
d. 是一向量投影到另一向量的長度乘積
e. 乘積為 2 純量的計算方式,不適用向量,因為有方向性
f. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\lvert\overrightarrow{a}\rvert\lvert\overrightarrow{b}\rvert\cos\theta$

B 類：勾選狀況為✓✕✕，這類學生有 32%，是最多人的一類。這類學生認為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 是兩向量的乘積，但他們在 3(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 打✕，顯然對於內積是能夠掌握的，也就是說他們能夠辨識出「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 是兩向量的內積」，只是他們將內積看做是乘積的一種，這應該是因為受到符號「．」的影響。下面列舉幾位這類型學生的陳述：

a. ∵「・」這個符號就是乘
b. 乘出來為一個數，且稱為內積
c. $\overrightarrow{a}$ ・ $\overrightarrow{b}$ 是表示 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積(乘積)
d. ・是內積符號即兩向量乘積和
e. 乘積出來的，純長度
f. $\overrightarrow{a}$ ・ $\overrightarrow{b}=\lvert\overrightarrow{a}\rvert\lvert\overrightarrow{b}\rvert\cos\theta$ 為內積公式

C 類：勾選狀況為✓✗✓，這類學生有 23%。這類學生也是認為 $\overrightarrow{a}$ ・ $\overrightarrow{b}$ 是兩向量的乘積，但他們跟 B 類學生有不同的心像，他們在 3(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 打✓，這些學生的心像是將「$\overrightarrow{a}$ ・ $\overrightarrow{b}$」類比於「數字乘積」，所以我們可以看到他們的心像是類比於「數字乘數字=數字」而有「向量乘向量=向量」的想法。而這一類的學生主要來自於中程度學校的學生。下面列舉幾位這類型學生的陳述：

a. 內積是兩向量相乘
b. 因為・是乘
c. $\overrightarrow{a}$ ・ $\overrightarrow{b}$ 相同起點所形成兩向量乘積
d. (a_1,a_2) ・ $(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2)$

D 類：勾選狀況為✗✗✓，這類學生有 13%。這些學生面對「$\overrightarrow{a}$ ・ $\overrightarrow{b}$」時，可以辨識出「$\overrightarrow{a}$ ・ $\overrightarrow{b}$ 是兩向量的內積」，但從他們在 3(4)打✓的情形來看，我們可以知道這些學生對於內積的理解是不夠清楚的。

Ic. 內積特徵_內積的結果為純量

內積是兩向量之間的一種運算。一般提到運算，我們就會談論到一些關於運算的特質，比如說：是否具備封閉性？有沒有單位元？反元素存不存在？當然沒有封閉性的狀況之下，就不會有單位元以及反元素。而向量就是一種沒有封閉性的運算，對於高中生來說，從小學到國中到高中，絕大部分的運算都具有封閉性，而內積是少數不具有封閉性的運算，相信學生的心像會有一些特殊的情形。

所以我們將探討這一個部分，而一般教學現場，教師們通常都會採用一個對學生而言比較簡單而且直接的說法，就是「兩向量內積的結果為純量」，而且這樣的說法也比較貼近大部分人對於這個概念的概念心像。接下來我們就將焦點切換到「兩向量內積的結果為純量」這一個很特殊的內積特徵上面。

施測題目:

3.將下列有可能成為正確式子的打✓，不可能的打✗。

☐ (1) $\overrightarrow{a}=8$

☐ (4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$

圖 4-3-10. 內積結果為純量之施測題目

題目分析：

首先從第(1)小題的回答，我們可以知道學生對於純量與向量是否能夠做分辨，而能夠分辨向量不是純量的學生中，若具備有「兩向量內積的結果為純量」這一個子概念的同學，就會在第(4)小題打✗或不勾選。反之，打✓的同學就顯示了他並沒有具備「兩向量內積的結果為純量」這樣的子

概念。

施測結果&概念心像分析：

表 4-3-3. 內積結果為純量之施測結果

	✓✓	✓✗	✗✓	✗✗
高程度文	3	0	12	22
高程度理	1	1	2	31
中程度文	14	7	9	12
中程度理	7	5	13	10
合計	25	13	36	75
	17%	9%	24%	50%

✓✓代表第(1)小題打✓，第(4)小題打✓ ； ✓✗代表第(1)小題打✓，第(4)小題打✗；

✗✓代表第(1)小題打✗，第(4)小題打✓ ； ✗✗代表第(1)小題打✗，第(4)小題打✗。

將這兩小題的勾選狀況交叉比較，我們可以看到四類不同心像的學生。其中有兩類在 3.(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 都打✓，顯示他們都對於「內積的結果為純量」是不清楚的。另兩類在 3.(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 都打✗，顯示他們對於「內積的結果為純量」相較之下是比較清楚的，但搭配第(1)小題，我們可以看到每一類學生的概念心像都有著一些差異，詳細說明如下：

A 類：勾選情形為✓✓，這類學生在 3.(1) $\overrightarrow{a}=8$ 與 3.(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 都打✓，顯示他們對於基本的向量概念以及內積概念都是混淆不清的。這類學生有 25 位，佔整體的 17%，其主要的來源是中程度文組學生有 14 位，而中程度理組學生也有 7 位，高程度學校學生文組與理組合計只有 4 位。

B 類：勾選情形為✗✓，這類學生在 3.(1) $\overrightarrow{a}=8$ 打✗，顯示他們能夠分辨向量與純量的不同，而在 3.(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 打✓，表示他們認為兩向量

內積的結果可以是向量，顯然這類學生對於「內積的結果為純量」此一子概念是不清楚的。這類學生佔全體的 24%，除了高程度理組特別少，只有 2 位，其餘各班都有 10 位上下。

C 類：勾選情形為✗✗，這類學生在 3.(1) $\overrightarrow{a}=8$ 與 3.(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 都打✗，顯示他們能夠分辨向量與純量的不同，並且能夠知道向量內積的結果不是向量，這表示他們對於「內積的結果為純量」是比較清楚的。這類學生佔全體的 50%，其中高程度理組學生最多，有 31 位，高程度文組學生次之，有 22 位；而中程度學校文組理組各有 10 位上下。

D 類：勾選情形為✓✗，這一類的同學跟 A 類的學生同樣在 3.(1) $\overrightarrow{a}=8$ 打✓，顯示這些同學對於向量與純量也是無法辨別的，但這一類的同學在 3.(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 是打✗的，而這一類同學在基本的向量概念上就出現了問題，他們之所以會在 3.(4)打✗，可能是受到符號不同的影響，也可能是因為他們還記得學習過程中老師有提到「內積結果為純量不是向量」。然而在前面一節，我們已經知道了符號的不同對於學生是沒有影響的，所以我們可以得知這類學生的心像是浮現了「兩向量內積的結果不是向量」。不過，這類學生對於向量與純量是無法清楚分辨的，所以他們的概念心像還沒到達「內積的結果為純量」，跟 C 類學生是有所不同的。這類學生只有 9%，主要來自於中程度學校的學生，高程度學校只有 1 位。高程度學校學生這麼少是因為高程度學校學生對於向量與純量是能夠辨別清楚的，只有 5 位高程度學校的學生在 3.(1)打✓。

然而， C 類同學雖然有全體的 50 %，但學生在面臨其他情境時，並不一定能夠浮現此概念以進行解題，也就是關於此概念完全成熟並且能夠將其應用的同學並非多數，譬如學生在面臨第 7 題的(1), (2)小題時，

7. 如果我們想定義三個向量$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$的內積，你認為哪種定法是可能的方法？

□ (1)$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$先做內積，再和$\overrightarrow{c}$做內積，也就是$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}$

□ (2)$\overrightarrow{b}$和$\overrightarrow{c}$先做內積，再和$\overrightarrow{a}$做內積，也就是$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})$

圖 4-3-11. 內積結果為純量之應用題目

這一題是學生沒有遇過的問題，而這兩小題的敘述是「$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$先做內積，再和$\overrightarrow{c}$做內積」、「$\overrightarrow{b}$和$\overrightarrow{c}$先做內積，再和$\overrightarrow{a}$做內積」，若學生對於「兩向量內積的結果為純量」此概念是完全成熟的同學，應該可以使用此概念來判斷出兩向量內積的結果是純量，而純量無法與向量再做內積了。然而學生在面臨這樣的問題時，其回答情形搭配以上幾類來看，回答並非一致而且勾選情況非常混亂，例如：A 類有部分同學對 7(1)或 7(2)打✓，也有部分對 7(1)與 7(2)都打✗；相對地，C 類學生的「內積的結果為純量」概念發展比較好，理應多數同學都不會對 7(1)以及 7(2)打✓才對，但結果 C 類學生也有不少同學對 7(1)與 7(2)都打✓了。顯然學生在面對這樣的問題時，他們的心像不見得會浮現「內積的結果為純量」此概念，反而會受到其他概念的影響比較多。

從學生的勾選狀況與陳述來看，可以確定「兩向量內積的結果為純量」此概念發展有達到完全清楚的學生有 8 位，這幾位學生的勾選情形都是沒有勾選 7.(1)與 7.(2)，並只在 7.(5)「其他，因為_________」打✓，而這些學生的陳述如下：

a. 無論取哪二者先內積，求出者必為一純量 a，純量 a 再與剩下一向量內積後，並非純量而是一向量
b. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$ => 其中$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$已為常數，則常數與向量無法內積
c. 兩向量內積後為純量,不能與第三向量 dot
d. 其中兩個內積後為純量，無法再內積，只能使剩下的那一個向量伸縮
e. $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$ 向量與向量內積才有意義
f. 做一次內積後是純量　無法做第二次內積
g. 作不出來,dot 一次後就成純量了,就無法在 dot 了,頂多當常數使用
h. 內積出來是值,無法再做一次內積

第四節　與內積定義相關之概念

Id. 內積定義

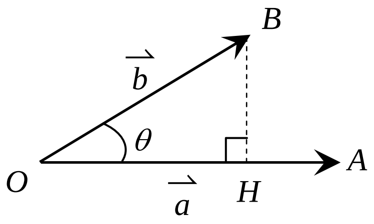
接下來，我們將焦點放到「什麼是內積？」這個根本的問題上面，也就是內積的定義。關於「向量內積」的定義，一般課本上關於「向量內積的概念定義」主要有三種類型，本研究中將這三種類型稱為代數型概念定義、圖像型概念定義以及坐標型概念定義，其詳細內容如下：

代數型：兩個非零向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為θ時，我們規定向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的內積為

$|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\cos\theta$，並以$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$表示。

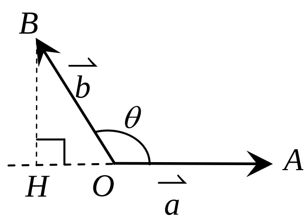
圖像型：設兩個非零向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為θ，我們把$|\overrightarrow{b}|\cdot\cos\theta$稱為向量$\vec{b}$ 在$\overrightarrow{a}$方向上的**投影量**。下圖中，(1)(2)(3)分別顯示θ為銳角、鈍角與直角的投影情形：

(1)



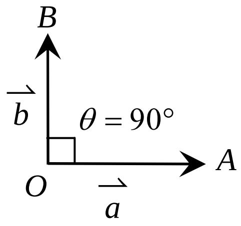
$|\overrightarrow{b}|\cos\theta=\overline{OH}>0$

(2)



$|\overrightarrow{b}|\cos\theta=-\overline{OH}<0$

(3)



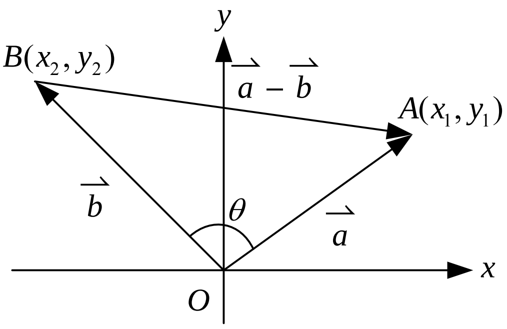
$|\overrightarrow{b}|\cos\theta=0$

於是，非零向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的內積$\overrightarrow{a}$ · $\overrightarrow{b}$，可視為$\overrightarrow{a}$的長度$|\overrightarrow{a}|$與$\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{a}$方向上的投影量$|\overrightarrow{b}|\cos\theta$的乘積，即

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{a}|(|\overrightarrow{b}|\cos\theta)$

坐標型：設$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$是坐標平面上任意兩個非零向

量，且θ為此兩個向量的夾角，如圖所示：



在ΔOAB 中，利用餘弦定理$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos\theta$，得

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - 2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta.$$

因為$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,\ |\overrightarrow{a}|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2,$

$|\overrightarrow{b}|^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2$，所以上式可以改寫成

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {y_1}^2 + {y_2}^2 - 2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$

經化簡，得$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$，又根據向量內積定義知

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，故$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

學生的概念心像之發展，必定與他的學習有著緊密的關聯性。而學生在學習向量內積的過程即是在學習上面這三種類型的概念定義，也是我們希望學生經過學習之後，其心像發展能夠達到的目標。所以我們想要瞭解學生對於「內積定義」的概念心像，首先可以從這三類型的「內積定義」出發來看看學生對於這三種類型的具備情形。

然而學生的概念心像通常跟概念定義之間是不會完全相同的，除非他的概念已經發展的非常成熟，那他的概念心像才可能與概念定義相當的接近。所以在這裡，我們將學生對於內積定義的概念心像類型區分為「偏代

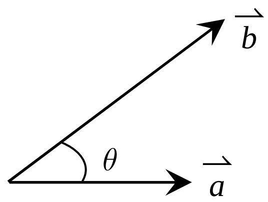
數型內積定義」、「偏圖像型內積定義」以及「偏坐標型內積定義」。

但概念心像不是一次會展現出全部的樣貌，它會因為時間點的不同以及受到不同的刺激，而浮現出不樣貌的心像，甚至可以是前後不一致的。故為了能夠探測學生對於三種類型的「內積定義」的具備情形，本研究除了第 1 題「內積是什麼？」這一題直接且開放性的問題外，還設計各種不同情況的題目，以探測學生的概念心像為何？

<u>施測題目:</u>

6.如右圖，把正確的打✓，不正確的打✗ 。

Ⅰ.下列哪些式子可以看成是右圖$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的內積？

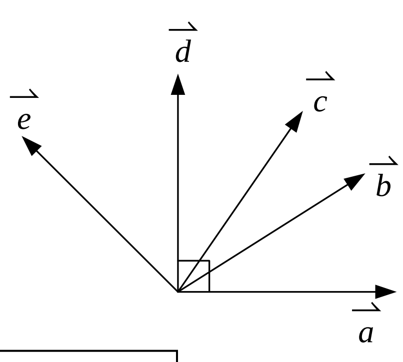


□ (1) $(|\overrightarrow{a}|\cos\theta)|\overrightarrow{b}|$ □ (2) $\cos\theta|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$

□ (3) $(|\overrightarrow{b}|\cos\theta)|\overrightarrow{a}|$

圖 4-4-1. 內積定義之施測題目 1

8.右圖為五個等長的向量.試問向量$\overrightarrow{a}$與下列哪一個向量的內積最大？<u>並在下面空白處說明你的理由或看法</u>。



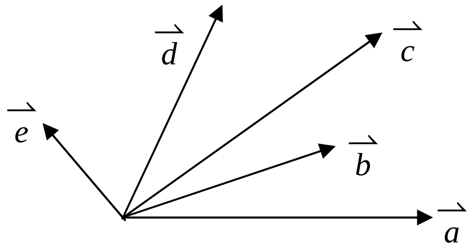
□ (1) $\overrightarrow{b}$ □ (2) $\overrightarrow{c}$ □ (3) $\overrightarrow{d}$ □ (4) $\overrightarrow{e}$

□ (5)一樣大 □ (6)不能確定

說明：

圖 4-4-2. 內積定義之施測題目 2

9.如圖，試問向量 $\vec{a}$ 與下列哪一個向量的內積最大？<u>並在下面空白處說明你的理由或看法</u>。



□ (1) $\vec{b}$　□ (2) $\vec{c}$　□ (3) $\vec{d}$　□ (4) $\vec{e}$

□ (5)一樣大　□ (6)不能確定

說明：

圖 4-4-3. 內積定義之施測題目 3

14.若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$，則下列正確的請打✓，不正確的打✗，並說明之(不論✓✗)。

□ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1b_1,\ a_2b_2)$，為什麼？________________________________

□ (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\cdot\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}$，為什麼？________________________________

圖 4-4-4. 內積定義之施測題目 4

<u>題目分析：</u>

雖然施測題目列出 6.8.9.14.這四題，但在分析時並非只看這四題，我們的目的是看出學生對於三種類型的內積定義之具備情形，所以整份問卷只要學生有顯示出他有某一類型的心像，我們當然得說學生是有具備某一類型的心像。而這四題分別都有偏向某一類型做題目的設計，所以學生整份問卷如果都沒有浮現某一類型的心像，我們可以說他很可能是沒有該類型的心像，或者是該類型的心像非常之薄弱很難被引動。

第 6 題設計是以代數型為主，其三個選項為代數型$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$的變化，若有代數型心像的學生應該在此題目的刺激下會容易被引動，而沒有代數型心像的同學，可能會全部打✖，但全部打✖的同學也可能是因為受到代數型$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$此式子影響很深的關係，而造成除了$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$之外其他式子都不認為是內積。所以我們必須要搭配學生其他部分的回答情形，以判斷其心像為何。

第 8 題與第 9 題是常考的概念題目加以變化設計，第 8 題使用三種類型中任何一類型的內積定義，都可以順利解題，不過這一題主要是針對代數型跟圖像型做設計。因為使用坐標型的同學，必須先假設坐標軸，然後給予各向量坐標形式，進行內積發現只要比較x分量相乘的結果即可，最後才解出答案。我們可以看到要使用坐標型來解題，動作較複雜、難度較高，使用坐標型的同學應該是坐標型的心像非常的強。使用代數型的同學，從題目得知每個向量的長度相等後，只要比較$\cos\theta$的大小即可解題，但若其三角函數的概念有誤的話則會勾選錯誤的選項。而使用圖像型的同學，只要將各個向量投影至$\overrightarrow{a}$上，比較投影量的大小即可輕易選出(1)$\overrightarrow{b}$為正解。

但面對第 9. 題，若學生只有偏代數型的概念心像，則會無法順利解題；相對地，若學生有圖像型的心像，學生可以將各向量投影至$\overrightarrow{a}$上，比較投影量後輕易地將此題解出。

第 14. 題是針對坐標型設計的題目，題目直接給予兩向量的坐標型式，要求學生回答兩向量的內積為何？並要求學生說明理由，從學生勾選搭配其陳述的理由，我們可以知道學生是否有坐標型的心像。

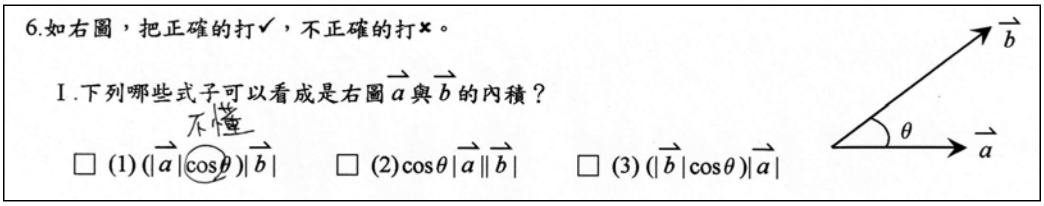
施測結果&概念心像分析：

這裡要探測學生對於「偏代數型內積定義」、「偏圖像型內積定義」以及「偏坐標型內積定義」此三種類型的概念心像具備情形，首先對這三種類型做一個說明：

偏代數型內積定義：

學生有浮現內積是三個物件 $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$、$\cos\theta$ 相乘的心像。

整體來說，大多數同學都會浮現偏代數型的心像，只有極少數同學是沒有浮現偏代數型心像，這類同學的例子如下：



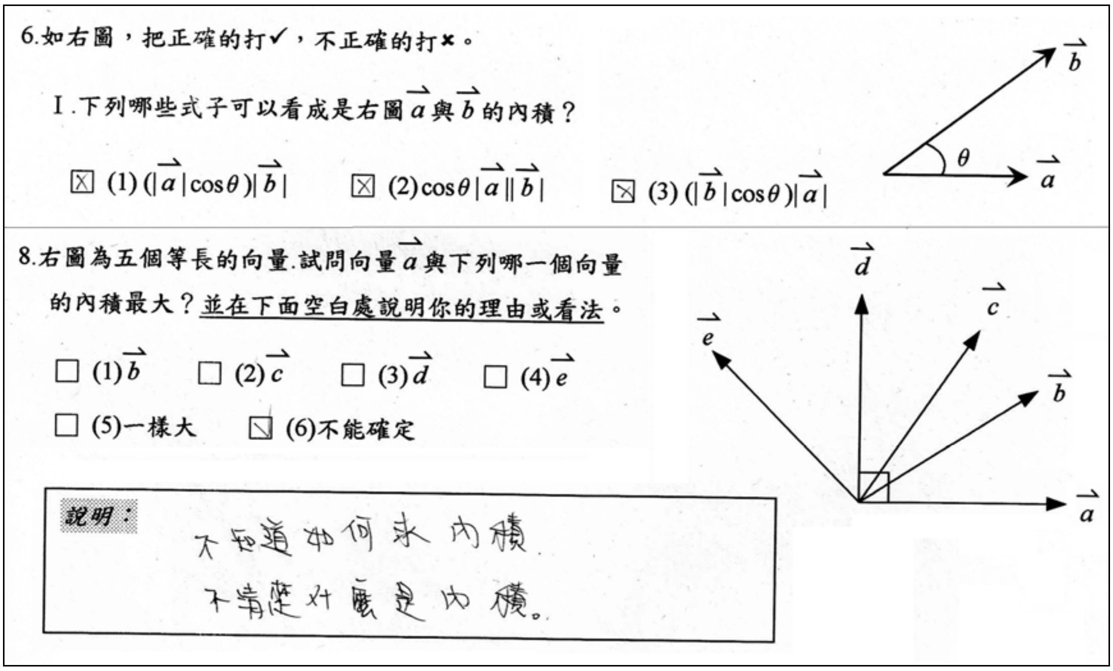
6.如右圖，把正確的打✓，不正確的打✗。

I.下列哪些式子可以看成是右圖 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積？

不懂

□ (1) $(|\vec{a}|\cos\theta)|\vec{b}|$ □ (2) $\cos\theta|\vec{a}||\vec{b}|$ □ (3) $(|\vec{b}|\cos\theta)|\vec{a}|$

圖 4-4-5. 無代數型學生例 1



6.如右圖，把正確的打✓，不正確的打✗。

I.下列哪些式子可以看成是右圖 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積？

☒ (1) $(|\vec{a}|\cos\theta)|\vec{b}|$ ☒ (2) $\cos\theta|\vec{a}||\vec{b}|$ ☒ (3) $(|\vec{b}|\cos\theta)|\vec{a}|$

8.右圖為五個等長的向量.試問向量 $\vec{a}$ 與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

□ (1) $\vec{b}$ □ (2) $\vec{c}$ □ (3) $\vec{d}$ □ (4) $\vec{e}$

□ (5)一樣大 ☒ (6)不能確定

說明： 不知道如何求內積

不清楚什麼是內積。

圖 4-4-6. 無代數型學生例 2

上面兩位同學的例子，他們在其他地方也都沒有出現類似代數型 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 的式子，其答題的狀態也很混亂，可以判斷這類同學是沒有「偏代數型內積定義」的心像，甚至可能對於「內積」的相關概念都是相當薄弱的。

也有另一種狀況，是學生對內積定義所浮現的心像非常偏向圖像型，雖然他能判斷式子$(|\vec{a}|\cos\theta)|\vec{b}|$或$(|\vec{b}|\cos\theta)|\vec{a}|$是內積，但其實他對於$(|\vec{a}|\cos\theta)$或$(|\vec{b}|\cos\theta)$所浮現的心像是投影，是偏圖像型的，而非代數型中三個物件相乘的想法，這些同學我也認定他沒有浮現偏代數型的心像，以下舉一位這類學生的例子：

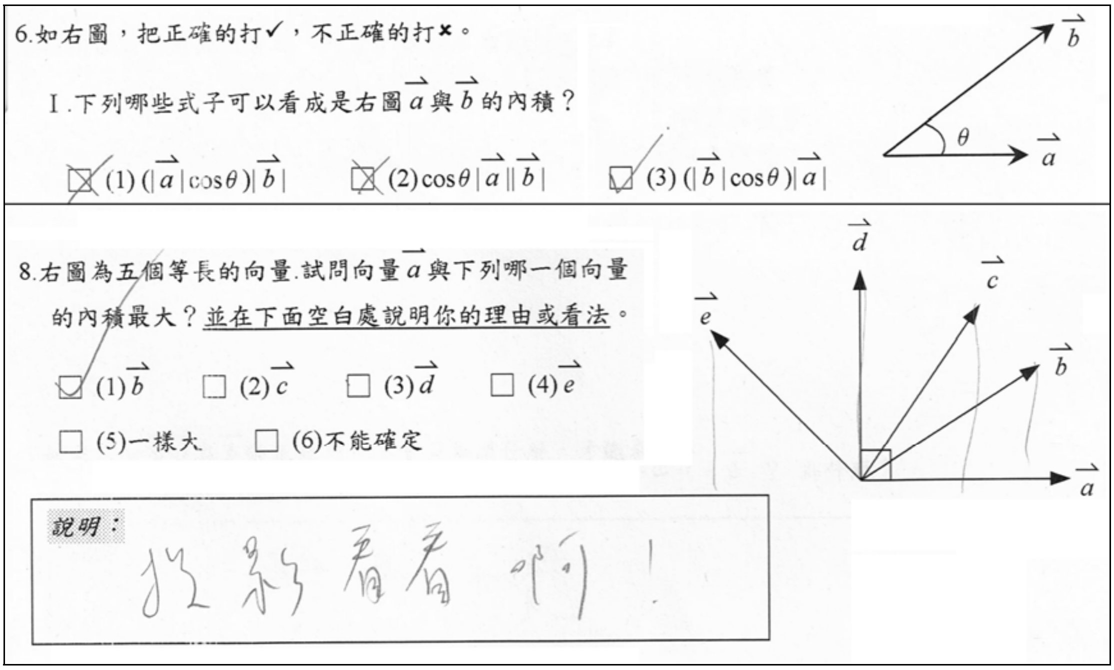


圖 4-4-7. 無代數型學生例 3

我們可以看到這一位學生雖然在 6(3). $(|\vec{b}|\cos\theta)|\vec{a}|$打✓，但他在其他地方都沒有出現過代數型的式子，並且搭配其第 8 題的回答，還有第 9 題的回答也跟第 8 題一樣，都是利用投影的想法，我們可以知道這位學生其

實是浮現的是圖像型的概念心像。

偏圖像型內積定義：

學生有浮現內積是「投影量」乘以「被投影向量的長度」這樣的心像。

然而有些同學的回答是「內積是$\overrightarrow{a}$投影到$\overrightarrow{b}$上的長度」，這些同學我也將其認定是有偏圖像型的心像。雖然他似乎沒有「圖像型內積定義」，但學生會將內積看成投影之後的長度，顯然是因為受到學習歷程中圖像型定義的影響，所以應該說這些同學的心像是〝錯誤〞的「圖像型內積定義」比較恰當。

偏坐標型內積定義：

學生有浮現內積是兩向量的坐標做運算的結果。同學面對第 14 題時，如果有偏坐標型的心像，應該會被(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(a_1b_1,\ a_2b_2)$所引動。若學生對(1)勾選，顯示他有錯誤的「坐標型內積定義」；若學生打✘，且他回答的理由是內積是$a_1b_1+a_2b_2$，那我們可以知道他是有正確的「坐標型內積定義」，若學生打✘，並且在整份問卷中都沒有顯示出坐標型的心像，我們就認為他應該沒有「偏坐標型內積定義」的心像，或者是相當薄弱難以被引動。

以下表 4-4-1 為「偏代數型內積定義」、「偏圖形型內積定義」與「偏坐標型內積定義」三種心像類型的學生比例：

表 4-4-1. 三種「內積定義」類型的學生比例

	偏代數型	偏圖像型	偏坐標型
高程度文組	36	16	*30
高程度理組	34	32	*24
中程度文組	38	1	31
中程度理組	33	8	28
合計	141	57	113
	95%	38%	*82%

*第 14 題偏坐標型的題目在問卷的最後，高程度兩個班級的部分學生因為答題意願影響而沒有對問卷的後半段題目進行答題，高程度文組有 3 位、高程度理組有 8 位。這些同學因沒有回答 14 題，我們沒辦法確認其有無偏坐標型的心像，所以在算百分比時，也將這 11 位同學去除。

我們可以看到三種類型之中，有「偏代數型內積定義」之心像的同學最多，幾乎是全體學生，比例高達 95%；其次是「偏坐標型內積定義」，是全體的 82%；而最少的是只有 38%的「偏圖像型內積定義」。這樣的結果，我們可以發現一些現象：「代數型」跟「坐標型」這兩種定義都比較像「公式」，而「圖像型」這一種定義比較具有「動作」，學生對於「公式」的接受度會高於「動作」，而程度越高的學生對於「動作」類型定義的接受情形越好。

每一種類型的心像其實也不盡相同，對於每一種類型的概念心像本研究還有一些發現，以下針對三種類型的概念心像分別報導。

Id. 內積定義_偏代數型的概念心像

偏代數型心像的 141 位同學，我們來看他們面對第 6 題情形時的回答狀況，可以知道這些同學的心像是有些區別的。

6.如右圖，把正確的打✓，不正確的打✗ 。

Ⅰ.下列哪些式子可以看成是右圖 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積？

□ (1) $(|\overrightarrow{a}|\cos\theta)|\overrightarrow{b}|$　　□ (2) $\cos\theta|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$

□ (3) $(|\overrightarrow{b}|\cos\theta)|\overrightarrow{a}|$

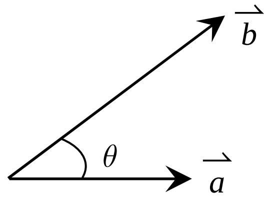


圖 4-4-8. 代數型 vs 圖像型之施測題目

第 6 題題目如圖 4-4-8，選項(1)有圖像型中投影量的概念，而且是非典型地由下方的向量投影到斜上方的向量。選項(2)的表徵是比較類似代數型中的「長度×長度，再× $\cos\theta$ 」，但也把位置稍作調整，看看是否學生會有「長度必須在一起」的心像。選項(3)也是幾何型中投影量的概念，而此選項是比較典型地由上方的向量投影到下方的向量，但 $\overrightarrow{a}$ 長度是比較短的。若代數型心像發展成熟，應該會認定三個選項都是內積。

下表 4-4-2 為這 141 位同學在第 6 題的答題情形：

表 4-4-2. 代數型 vs 圖像型之答題情形

勾選 班級	<u>(1)(2)(3)</u>	(1)	(2)	(3)	(1)(3)	(2)(3)	三選項 均打✗
304	28	0	4	1	2	1	0
309	30	1	0	0	2	0	1
3 己	22	0	16	0	0	1	0
3 庚	24	0	8	0	0	1	0
合計	104	1	28	1	4	2	1

由上表 4-4-2，我們可以看到學生有以下幾種不同的心像：

A 類：該類學生勾選(1)(2)(3)，此類學生的概念心像比較符合概念定義。

B 類：該類學生恰勾選(2)，這一類學生的概念心像應該是受到典型代數式 $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ 的影響很深，認為兩長度必須要放在一起。我們可以看到 A 類以外的其他幾類，以 B 類人數最多，可以發現「代數型概念定義」對學生的影響是很大的！

C 類：我將恰選(1)、恰選(3)以及恰選(1)(3)的學生歸為這一類，因為這些學生的心像應該都受到圖像型定義的影響。其中當然可以把三者區分，C1：恰選(1)(3)，認為內積是一個向量投影到另一向量上的投影量，再乘以向量的長度。C2：恰選(3)，這些學生認為必須由上方的向量投影下來，其投影量再乘以向量長度，應該是受到典範例的影響。C3：恰選(1)，這類同學也是要先找出投影量，但他選擇的投影方式跟 C2 不同，是被投影的向量長度要足夠，這也是受到典範例的影響。

D 類：選(2)(3)的學生，這些學生的概念心像應該是比較不穩定的，會因為面對不同狀況而引動偏代數型(B 類)或偏圖像型(C2 類)的心像

E 類：該類學生三個選項均打✘，這類學生應該深受代數式 $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ 的影響，其他都無法接受。

除此之外，我們搭配第 8 題與第 9 題來看。有一些同學在第 8 題時使用「代數型內積定義」去解題，這時有一部份同學的概念上有錯誤而做出

錯誤的勾選外，其他同學都可以順利判斷出選項(1)$\overrightarrow{b}$為正確答案。但面臨第 9 題時，是無法利用「代數型內積定義」順利解題，所以這些學生出現各種不同的回答狀況，從第 8 題與第 9 題這些不同的回答狀況，我們有以下發現：

1.有一類同學在第 8 題使用「代數型內積定義」，但面對第 9 題時使用「圖像型內積定義」來解題，這些同學應該是因為第 9 題使用「代數型內積定義」無法順利解題，所以轉成使用「圖像型內積定義」來進行解題，這些同學的心像同時具備「代數型內積定義」與「圖像型內積定義」，並能夠在適當時機切換使用。下面圖 4-4-9 這一位學生就是此類型的例子。

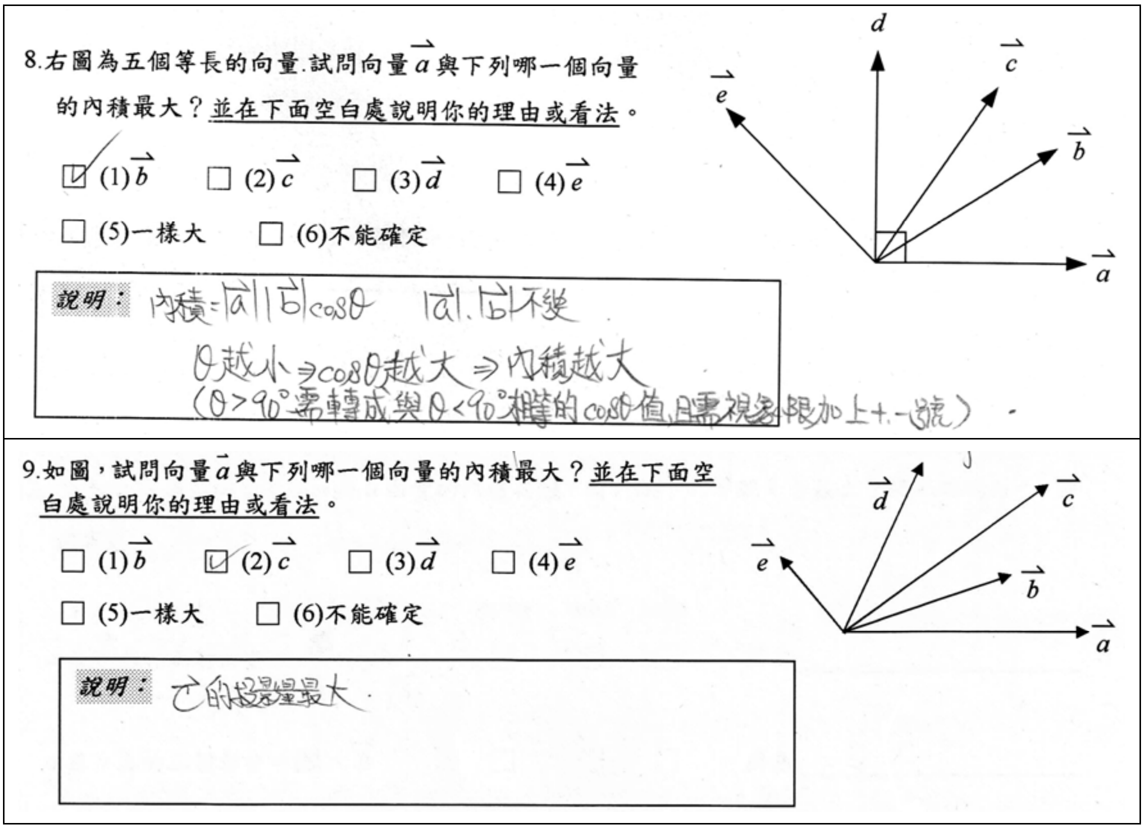


圖 4-4-9. 具備「代數型」與「圖像型」心像的學生例

2. 有一類同學在第 8 題使用「代數型內積定義」，在面對第 9 題時依舊使用「代數型內積定義」來解題，但發現條件不足而勾選「(6)不能確定」

這一個選項，這些同學應該是只有「偏代數型內積定義」的心像，或是「偏圖像型內積定義」的心像比較薄弱難以被引動。舉一位學生的陳述為例子，如下圖 4-4-10。

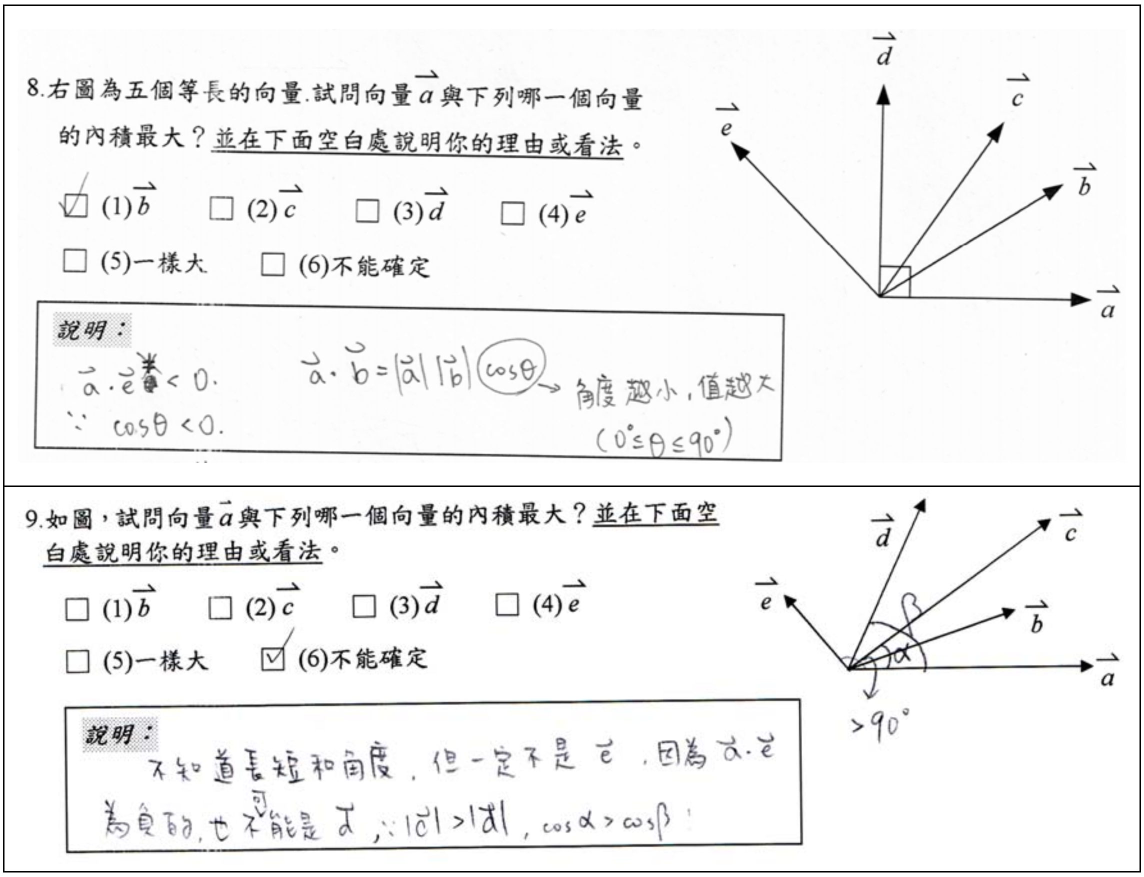
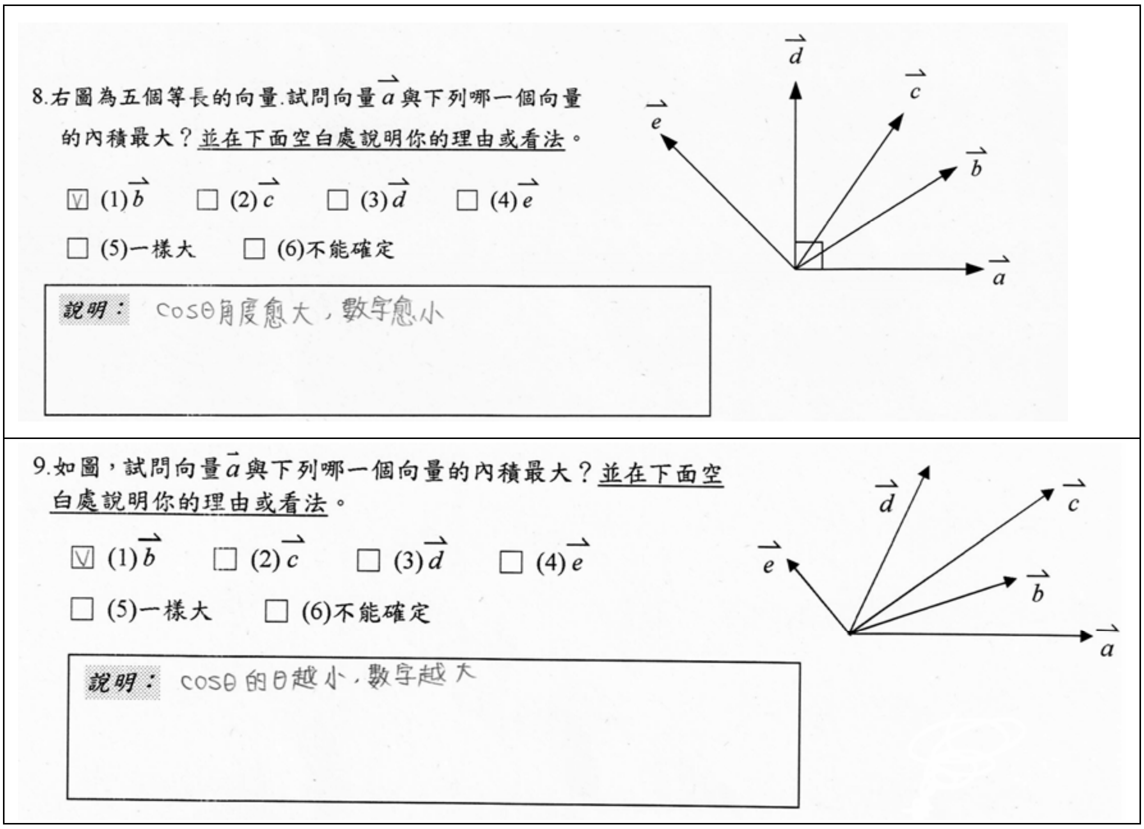


圖 4-4-10. 具備「代數型」心像且「圖像型」心像薄弱的學生例

3.有一部份同學面對第 8 題與第 9 題時都使用「代數型內積定義」來解題，但他們只注意「角度」的條件，顯示學生認為「角度」對於內積的重要性高過於「長度」。這裡又分成三種不同的類型：(1)認為角度越小，內積越大；(2)認為角度越大，內積越大；(3)認為垂直時內積最大。

第(1)類學生的例子如下圖 4-4-11，我們可以看到這類同學的「代數型內積定義」以及基本的三角函數概念應該都是沒有問題的。



8.右圖為五個等長的向量.試問向量$\vec{a}$與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

☑ (1)$\vec{b}$ ☐ (2)$\vec{c}$ ☐ (3)$\vec{d}$ ☐ (4)$\vec{e}$

☐ (5)一樣大 ☐ (6)不能確定

說明： cosθ角度愈大，數字愈小

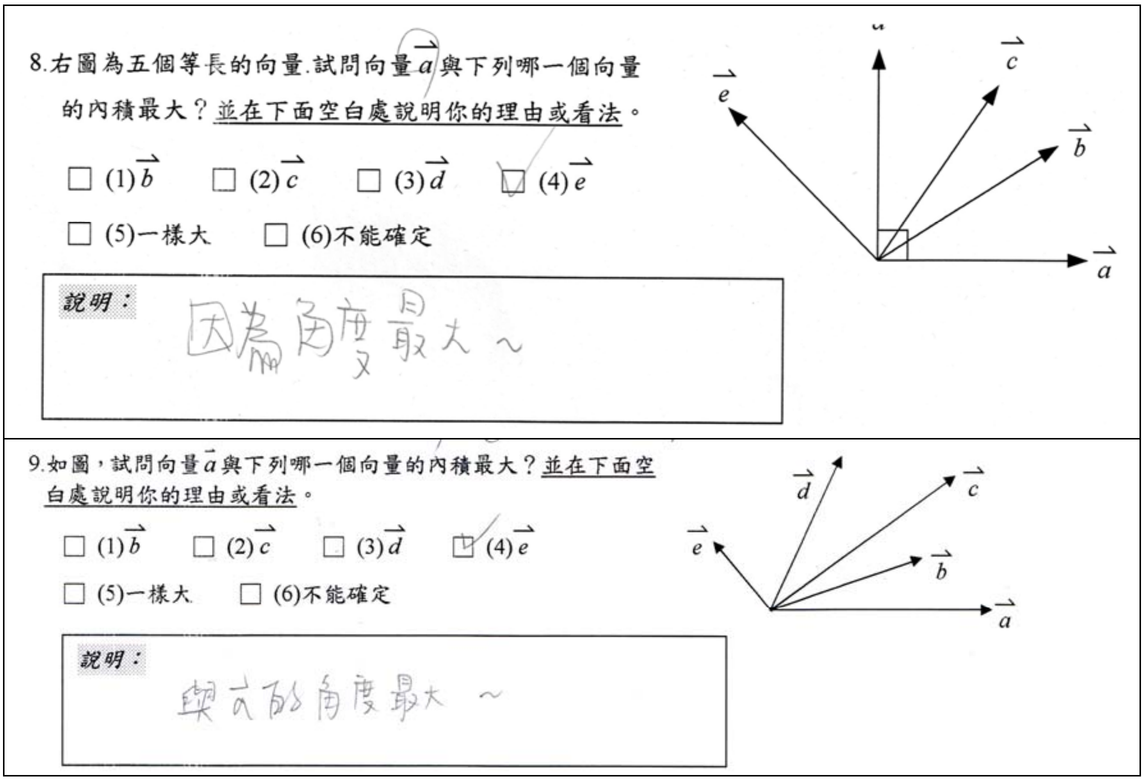
9.如圖，試問向量$\vec{a}$與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

☑ (1)$\vec{b}$ ☐ (2)$\vec{c}$ ☐ (3)$\vec{d}$ ☐ (4)$\vec{e}$

☐ (5)一樣大 ☐ (6)不能確定

說明： cosθ 的θ越小，數字越大

圖 4-4-11. 認為角度越小，內積越大的學生例



8.右圖為五個等長的向量.試問向量$\vec{a}$與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

☐ (1)$\vec{b}$ ☐ (2)$\vec{c}$ ☐ (3)$\vec{d}$ ☑ (4)$\vec{e}$

☐ (5)一樣大 ☐ (6)不能確定

說明： 因為角度最大～

9.如圖，試問向量$\vec{a}$與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

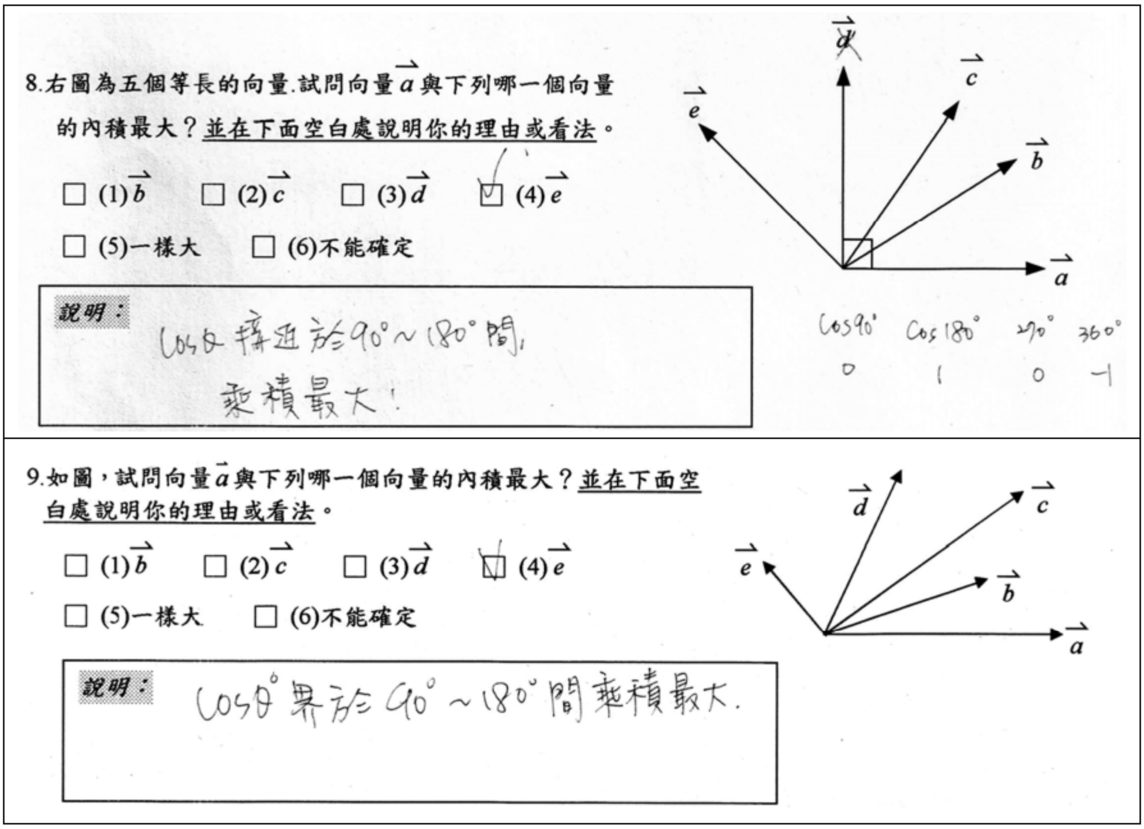
☐ (1)$\vec{b}$ ☐ (2)$\vec{c}$ ☐ (3)$\vec{d}$ ☑ (4)$\vec{e}$

☐ (5)一樣大 ☐ (6)不能確定

說明： 與它的角度最大 ～

圖 4-4-12. 認為角度越大，內積越大的學生例 1

上圖 4-4-12 是第(2)類學生「認為角度越大，內積越大」的例子，他可能是直接抓取角度為主要判斷的依據，但也有可能是因為三角函數概念錯誤造成的，如下圖 4-4-13 這一位學生的例子。


8.右圖為五個等長的向量.試問向量 $\vec{a}$ 與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

□ (1) $\vec{b}$ □ (2) $\vec{c}$ □ (3) $\vec{d}$ ☑ (4) $\vec{e}$

□ (5)一樣大 □ (6)不能確定

說明：cosθ 擇近於90°~180°間，乘積最大！

9.如圖，試問向量 $\vec{a}$ 與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

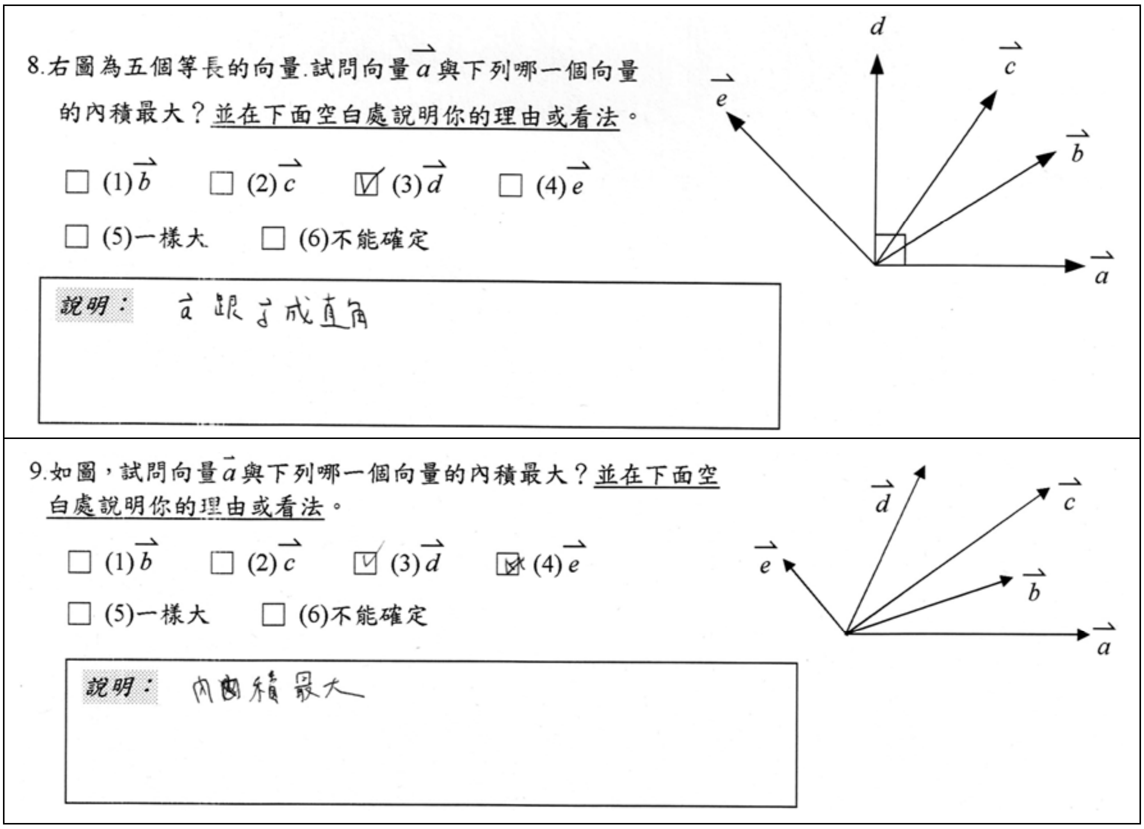
□ (1) $\vec{b}$ □ (2) $\vec{c}$ □ (3) $\vec{d}$ ☑ (4) $\vec{e}$

□ (5)一樣大 □ (6)不能確定

說明：cosθ 界於 90°~180° 間乘積最大.

圖 4-4-13. 認為角度越大，內積越大的學生例 2

還有第(3)類學生，這類學生會特別去注意到「直角」，我們可以看下圖 4-4-14 這一位學生的例子，他在第 8 題的陳述直接寫「$\vec{a}$ 跟 $\vec{d}$ 成直角」，然後他在第 9 題的陳述雖然沒提到直角，但他在選項(4)打✓後塗掉，然後在選項(3)打✓，顯然他在找最接近直角的向量。不過跟第(2)類學生一樣，我們不能確定是因為三角函數的概念出錯，還是他們直接抓取「直角」當作判斷的依據。


8.右圖為五個等長的向量.試問向量$\vec{a}$與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

□ (1)$\vec{b}$ □ (2)$\vec{c}$ ☑ (3)$\vec{d}$ □ (4)$\vec{e}$

□ (5)一樣大 □ (6)不能確定

說明： $\vec{a}$ 跟 $\vec{d}$ 成直角

9.如圖，試問向量$\vec{a}$與下列哪一個向量的內積最大？並在下面空白處說明你的理由或看法。

□ (1)$\vec{b}$ □ (2)$\vec{c}$ ☑ (3)$\vec{d}$ ☒ (4)$\vec{e}$

□ (5)一樣大 □ (6)不能確定

說明： 內積最大

圖 4-4-14. 認為垂直時內積最大的學生例

Id.內積定義_偏圖像型的概念心像

有「偏圖像型內積定義」心像的同學比較少，只有 57 位，佔全體的 38%，其分佈狀況如下表 4-4-3 所示：

表 4-4-3. 「偏圖像型」的分佈狀況

	偏圖像型
高程度文組	16
高程度理組	32
中程度文組	1
中程度理組	8
合計	57
	38%

從這個表中，我們可以看到程度越高越容易出現「偏圖像型內積定義」的心像，且理組人數都高於文組人數。

另外，從學生的陳述中，研究者發現關於「偏圖像型內積定義」心像至少有兩種不同類型的心像：

A 類. 認為內積是「某向量在另一向量上的投影量乘上被投影向量的長度」，這一類同學的心像比較符合「圖像型概念定義」。如下圖 4-4-15 就是這類學生的例子。

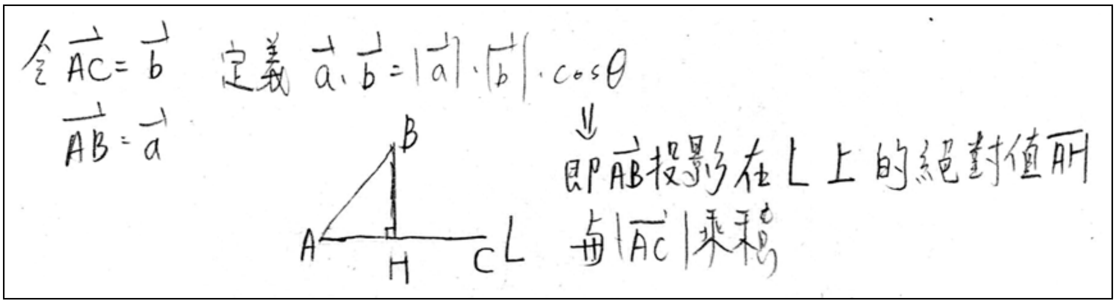
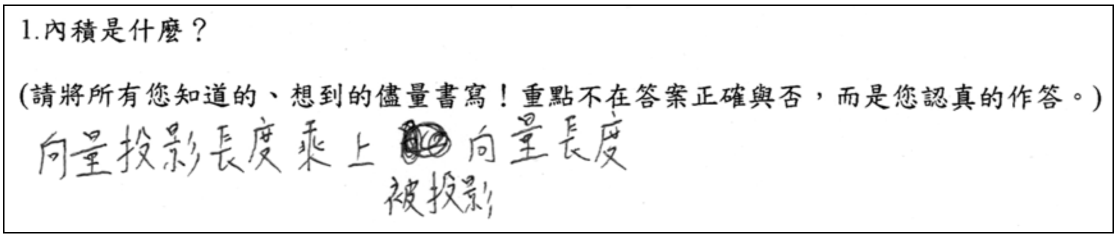


圖 4-4-15. 圖像型內積定義之學生例 1


1.內積是什麼？

(請將所有您知道的、想到的儘量書寫！重點不在答案正確與否，而是您認真的作答。)

圖 4-4-16. 圖像型內積定義之學生例 2

上圖 4-4-16 是另外一位學生的例子，有意思的是這個例子中學生並沒有畫出圖形，他是用文字直接敘述出「圖像型內積定義」，而這種沒有圖形只有文字敘述這樣的情況，都是高程度理組的學生。

B 類. 認為內積是「某向量投影到另外一個向量上的長度」，這類同學忽略了還要乘上被投影向量的長度。下面列舉兩位這類學生的陳述：

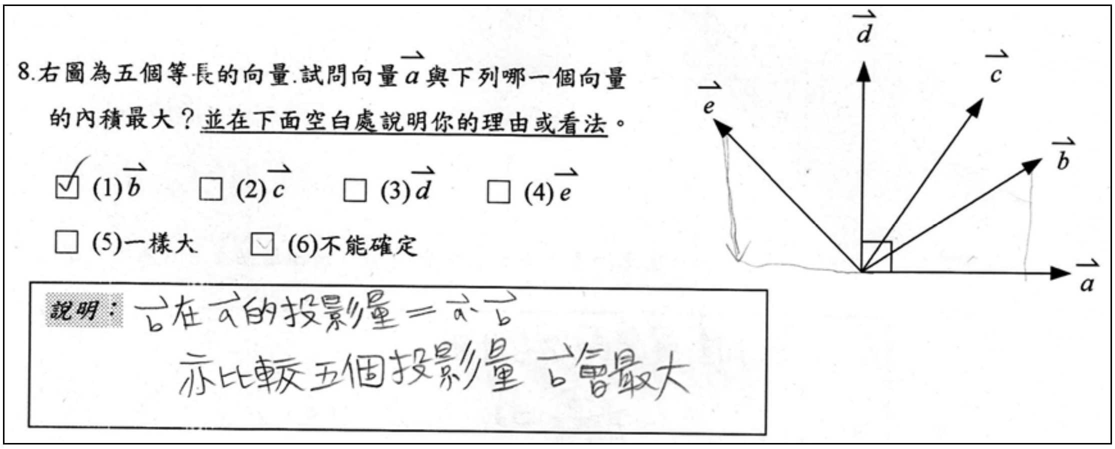


圖 4-4-17. 內積是投影量之學生例 1

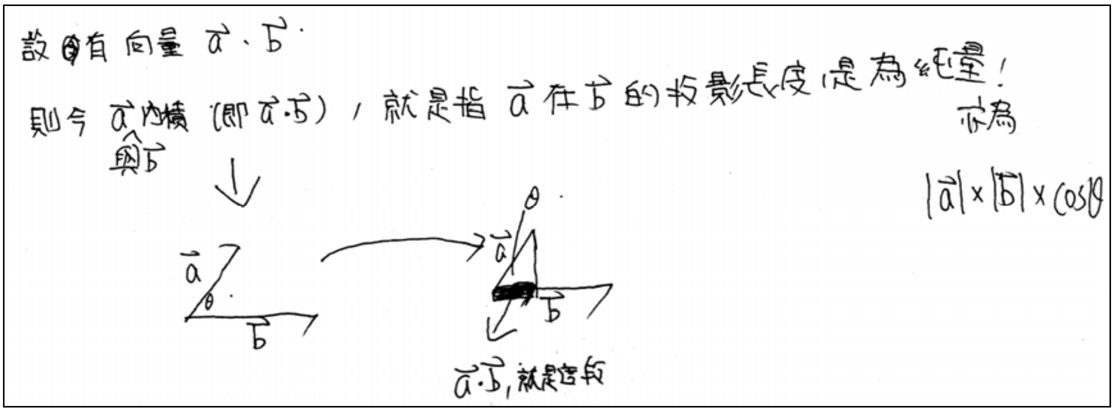


圖 4-4-18. 內積是投影量之學生例 2

除此之外，研究者還有一些其他的發現：

1. 學生在顯現「圖像型內積定義」的心像時，有兩種情況，一種是純圖像型，只注意「投影」不會去在意「角度」的，如下圖 4-4-19 的學生例子。另一種是會有混合代數型的，他們在投影量的部分會搭配上「角度」，也就是會注意到投影量＝向量長〝乘上 $\cos\theta$〞這件事情，舉兩位這種類型學生的例子：圖 4-4-20 的學生以及圖 4-4-21 的學生

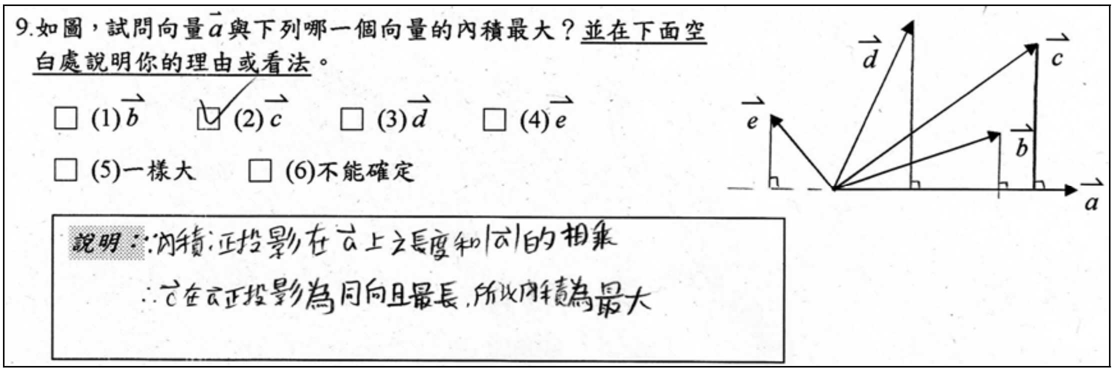


圖 4-4-19. 圖像型-注意投影之學生例

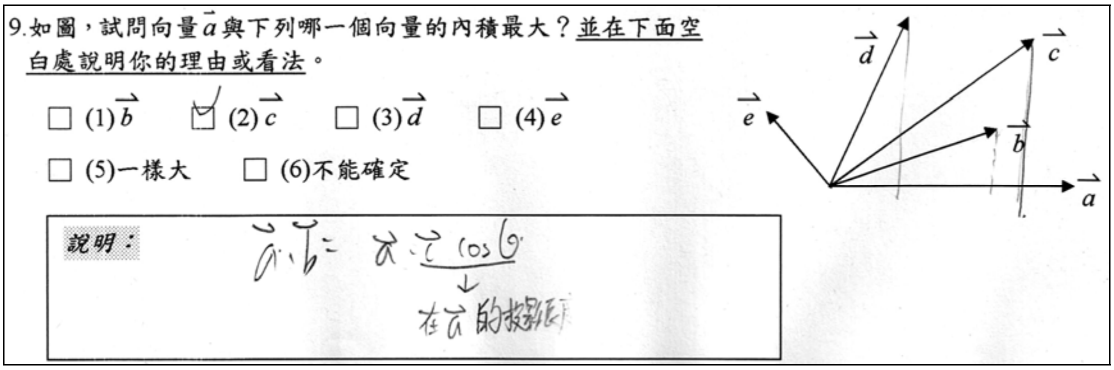


圖 4-4-20. 圖像型-注意角度之學生例 1

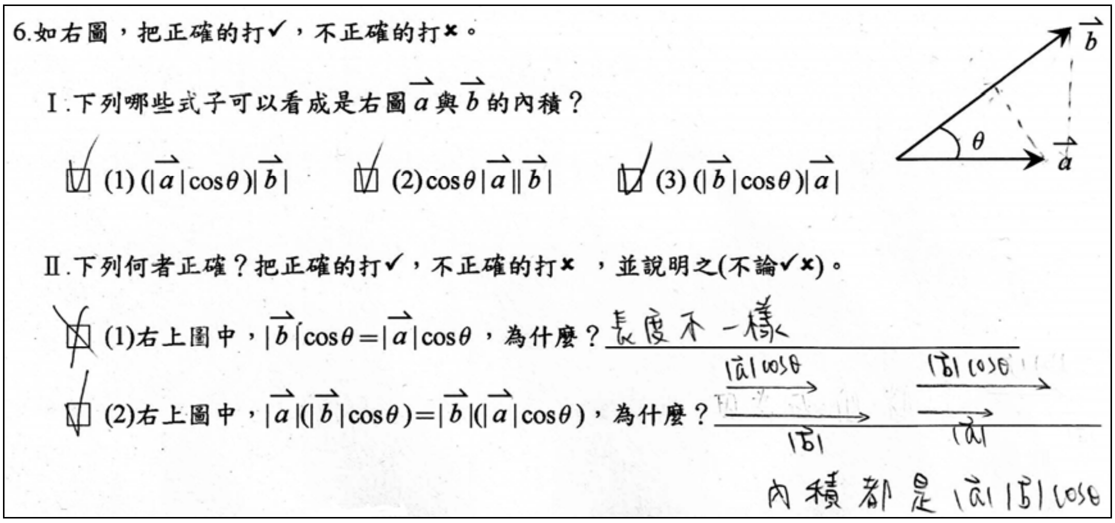


圖 4-4-21. 圖像型－注意角度之學生例 2

2. 有「偏圖像型內積定義」心像的同學，面對第 8 題與第 9 題也不見得會使用它來解題。這跟前面談論「偏代數型」時說的是一致的，對於某些同學來說，「偏圖像型內積定義」的心像相較於「偏代數型內積定義」的心像是比較薄弱的，所以在面對第 8 題以及第 9 題，並不一定能夠引

動「偏圖像型內積定義」的心像以進行解題。如前面圖 4-4-17 與圖 4-4-18 的兩位同學在第 9 題都勾選(6)不能確定，可以知道他們面對第 9 題都是浮現「偏代數型內積定義」的心像，所以認為條件不夠而勾選(6)不能確定。

3.「偏代數型」與「偏圖像型」兩種心像都有的同學一共有 54 位，其分佈情況如下表 4-4-4 的第一欄-「代數&圖像」。這些同學面臨第 8 題與第 9 題時，浮現何種類型的心像以進行解題，其交叉情形如下表所示

表 4-4-4. 具備「偏代數型」與「偏圖像型」的分佈情況與展現情形

	代數&圖像	代數–代數	代數–圖像	圖像–圖像	圖像–代數	其他
高程度文組	16	4	1	9	2	0
高程度理組	31	1	8	20	0	2
中程度文組	0	0	0	0	0	0
中程度理組	7	1	3	2	0	1
合計	54	6	12	31	2	3

代數&圖像 代表具備「偏代數型」與「偏圖像型」兩種心像
代數–代數 代表第 8 題使用「偏代數型」，第 9 題使用「偏代數型」
代數–圖像 代表第 8 題使用「偏代數型」，第 9 題使用「偏圖像型」
圖像–圖像 代表第 8 題使用「偏圖像型」，第 9 題使用「偏圖像型」
圖像–代數 代表第 8 題使用「偏圖像型」，第 9 題使用「偏代數型」
其他–高程度理組 這兩位學生是在第 8 題使用「偏代數型」以及「偏圖像型」，第 9 題使用「偏圖像型」
其他–中程度理組 這位學生是在第 8 題使用「偏坐標型」，第 9 題使用「偏圖像型」

根據上表可以將這 54 位學生可以分成以下幾種不同類別的心像：

A. 以「偏代數型」為主，這類學生有 18 位。他們在面對第 8 題兩種心像都可以解題的題目時，會浮現「偏代數型」心像以進行解題，表示他們心中「偏代數型」心像是比較主要的概念心像。而這 18 位同學在面臨第 9 題使用「偏代數型」不能夠解題的題目時，有 6 位同學會繼

續使用「偏代數型」來解題，這些同學比較固著於「偏代數型」的心像：另外 12 位同學在第 9 題就轉成使用「偏圖像型」來解題，這些同學就比較有彈性一些，面臨問題時能夠切換不同的心像來進行解題。

B. 以「偏圖像型」為主，這類學生有 31 位。他們在面對第 8 題兩種心像都可以解題的題目時，會浮現「偏圖像型」心像以進行解題，表示他們心中「偏圖像型」心像是比較主要的概念心像。

C. 「偏代數型」與「偏圖像型」並重，這類學生就是其他－高程度理組那兩位學生，他們在第 8 題同時使用「偏代數型」以及「偏圖像型」，而在第 9 題使用「偏圖像型」，可以看到他們對於兩種類型的心像都發展的非常的良好，並且可以任意切換。

D. 剩下 3 位同學是概念比較不清楚的同學。有兩位在第 8 題使用「偏圖像型」順利解題，但在第 9 題卻使用「偏代數型」而導致無法得到正確答案。另一位則是在第 8 題使用「偏坐標型」而無法順利解題，而在第 9 題使用「偏圖像型」順利解題。這 3 位同學的解題就是浮現哪一種類型的心像就試試看，沒有因為題目的條件刺激而去思考可不可行，每次都可能不一樣，也就是他們的概念心像發展的都還不夠完整。

Id. 內積定義_偏坐標型的概念心像

有浮現「偏坐標型內積定義」心像的同學也不少，一共有 113 位，而且高程度文組有 3 位同學，高程度理組有 8 位同學沒有對第 14 題作答，將這 11 位同學去掉後，剩下的 138 位同學中有高達 82%的學生會浮現「偏坐標型內積定義」的心像。而這些「偏坐標型內積定義」的心像也是有不同的情況，大致可分為三類：

A. 有些同學在面對第 14 題會對(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(a_1b_1,\ a_2b_2)$ 打✖，並在後面寫出正確的答案 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$，或者在問卷其他地方有寫出正確的坐標型定義 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$，我們可以認定這些同學的「坐標型內積定義」概念是正確的。

B. 另外有一些同學在第 14 題對(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(a_1b_1,\ a_2b_2)$ 打✓，並且在問卷其他地方也寫出錯誤的式子或者在問卷其他地方都沒有出現類似「坐標型內積定義」的式子，那這些同學對於「坐標型內積定義」的概念是錯誤的。

C. 還有一些同學比較特別，他們在問卷其他地方會寫出正確的「坐標型內積定義」的式子 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$，但在面對第 14 題時也對(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(a_1b_1,\ a_2b_2)$ 打✓，顯示他們的「偏坐標型內積定義」的心像前後是不一致的，這類的同學就是「偏坐標型」之概念心像發展的還不夠成熟，所以面對第 14 題時，才會被引動出錯誤的「坐標坐標型內積定義」之心像。

將各類型的人數統計之後可以得到下表：

表 4-4-5. 「偏坐標型」的概念心像

	偏坐標型	概念正確	概念錯誤	前後不一致
高程度文組	30	8	12	10
高程度理組	24	7	9	8
中程度文組	31	4	26	1
中程度理組	28	14	14	0
合計	113	33	61	19
	82%	24%	44%	14%

從上表中，我們可以發現對於「坐標型內積定義」概念完全正確的人只有 33 位，佔全體的 24%，其中有 14 位來自於中程度理組班級的學生。而對於「坐標型內積定義」概念是錯誤的同學為最多，有 61 位，佔全體的 44%，這些同學雖然有「坐標型內積定義」，但大部分只是有印象是兩坐標的 x 坐標跟 y 坐標拿來相乘，所以在第 14 題受到題目影響而做出錯誤的選擇，這類型中程度學校的學生都多於高程度學校的學生。而「偏坐標型」的概念前後不一致的同學有 19 位，可以看到都幾乎都來自於高程度學校。

第五節　與內積操作相關之概念

在解題或教學上，遇到需要使用內積的時候，我們常會說：「把$\overrightarrow{a}$跟$\overrightarrow{b}$作內積」或「$\overrightarrow{a}$內積$\overrightarrow{b}$」。這也是學生對於內積一個直接的觀感，就是把內積當作是一種操作，而向量是操作的元素。那麼既然是操作，我們就應該考慮哪些東西可以拿來操作？操作的順序會不會有什麼影響？以這樣的角度來看，也就是要問「哪些向量可以作內積？」以及「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$等不等於$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$？」。

這樣的兩個問題，我們在換成內積的相關概念來看，也就是「任兩向量皆可作內積」以及「內積具備交換律」這兩個內積相關的概念。所以接下來針對這兩個概念來加以探討。

而「任兩向量皆可作內積」這個部分，在論文分析過程中，已先將本部分發表於*中等教育期刊*，以下「任兩向量皆可作內積」部分(p74~p87)轉載自*中等教育期刊*。

Io. 內積操作_任兩向量可作內積

首先，我們先針對「哪些向量可以做內積？」來做探討，也就「相同維度的任兩向量皆可作內積」此一子概念，而高中主要分為平面以及空間兩個部分，故本研究分別針對平面以及空間設計題目探測學生的概念心像。

施測題目:

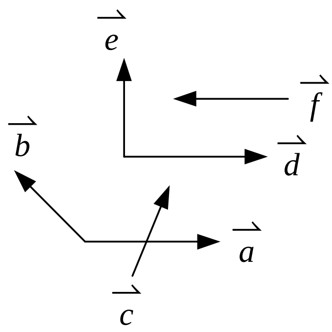
10.如圖，下列哪些向量可以作內積，把可以的打✓，不可以的打×，並在下面空白處說明你的理由或看法。

□ (1) $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$　　□ (2) $\overrightarrow{a},\overrightarrow{e}$

□ (3) $\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$　　□ (4) $\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}$

□ (5) $\overrightarrow{a},\overrightarrow{d}$　　□ (6) $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}$

□ (7) $\overrightarrow{d},\overrightarrow{e}$　　□ (8) $\overrightarrow{f},\overrightarrow{d}$



說明：

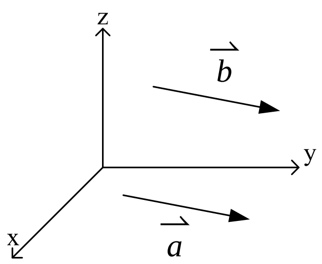
圖 4-5-1. 任兩向量可做內積之施測題目 1

11.假設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為空間中兩向量，將下列正確的打✓，<u>並在下面空白處說明你的理由或看法</u>：

(1) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 分別為兩平行線(在同一平面，且永不相交)上的方向向量，則

$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$

□一定可以作內積
□有時可以作內積
□一定不可以作內積

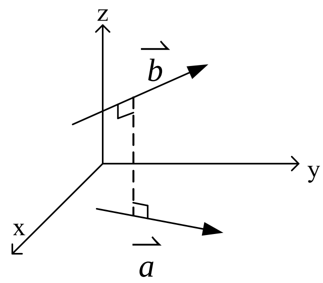


說明：

(2) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 分別為兩歪斜線（不在同一平面，且永不相交）上的方向向量，則

$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$

□一定可以作內積
□有時可以作內積
□一定不可以作內積



說明：

(3) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為任意兩向量，則

$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$

□一定可以作內積
□有時可以作內積
□一定不可以作內積

說明：

圖 4-5-2. 任兩向量可做內積之施測題目 2

題目分析：

第 10.題為是非題，題目如圖 4-5-1 所示；第 11.題為單選題，題目如圖 4-5-2 所示。兩部分都另要求學生寫出答題的理由或看法，以取得質與量的資料。其中第 10.題因小題的題數過多，僅要求學生針對整體的情形而未要求針對每一題提供理由或看法，此作法的優點是避免學生因失去耐心放棄某些順序較後面題目的回答，而且學生在整體回答可提供多項理由時，會選擇性提供，此時所展現出的往往是其最核心的概念心像。

第 10.題中向量的關係主要有兩個考慮因素：(1) 向量的起點相同與否；(2) 夾角的大小（<90°、=90°、>90°），此因素的探測題主要著重在起點不同時，當起點不同時，夾角乃指向量本身或向量平移後相交之夾角；另起點不同時也多增加了平行向量夾角為 0°與 180°之狀況。施測題目的結構如下表 4-5-1、表 4-5-2 所示：

表 4-5-1. 向量起點相同與否搭配夾角大小的題目分布情形

	<90°	= 90°	>90°
起點相同	典型圖形	(7)	(1)
起點不同	(3), (6)	(2)	(4)

表 4-5-2. 向量平行時方向相同與否的題目分布情形

	同向(0°)	反向(180°)
平行	(5)	(8)

其中起點相同且夾角小於 90°為一般典範例中的典型圖形，為基礎題，根據實務經驗，學生多數知道可以求作內積，概念心像變化度不大，故並未在此部分施測，若學生認為典型圖形的情況不能作內積會在其他題目顯示出來。當兩向量起點不同時，可分為兩向量本身有相交，或兩向量平移後有相交，本研究選擇兩向量平移後有相交的情形探討，對於兩向量本身有相交的情形，則以第(6)題典型的夾角（<90）做為代表，與第(3)題

比較，可探討向量本身相交與平移後相交的概念心像差異。表(二)中第(5)題與第(8)題皆為平行狀況，可視為單一概念進行探討，其中第(5)題為兩向量平行且方向相同，第(8)題為兩向量平行且方向相反。

第 11.題中三維空間向量與平面向量最大的不同處在於「歪斜」的狀況，故設計第(1)題為兩向量平行的情形，搭配第一部分的第(5)題，可探究空間對於學生的概念心像影響情形；這個部分的第(2)小題為兩向量歪斜的情形，為空間中的特殊狀況，為避免學生因不瞭解或忘記什麼是「歪斜」致使無法作答，題目中提供「歪斜線(不在同一平面，且永不相交)」的敘述，並且附上圖形；第(3)小題是兩任意向量的情形，用以取得學生整體概念的心像狀況。

施測結果&概念心像分析：

下面依照施測題目設計以及發現結果分四個部分報導，分別為:

一、平面上兩向量是否可作內積的概念心像

下面表 4-5-3 為第一部分「平面上任意兩向量皆可作內積」的概念心像題之施測結果。

表 4-5-3. 平面向量可作內積各小題勾選百分比

題號／班級	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
高程度文組	100%	81%	84%	86%	70%	89%	95%	70%
高程度理組	97%	89%	91%	91%	89%	94%	91%	91%
中程度文組	93%	69%	74%	67%	48%	76%	95%	43%
中程度理組	97%	80%	83%	83%	51%	83%	91%	60%
合計	97%	79%	83%	81%	64%	85%	93%	65%

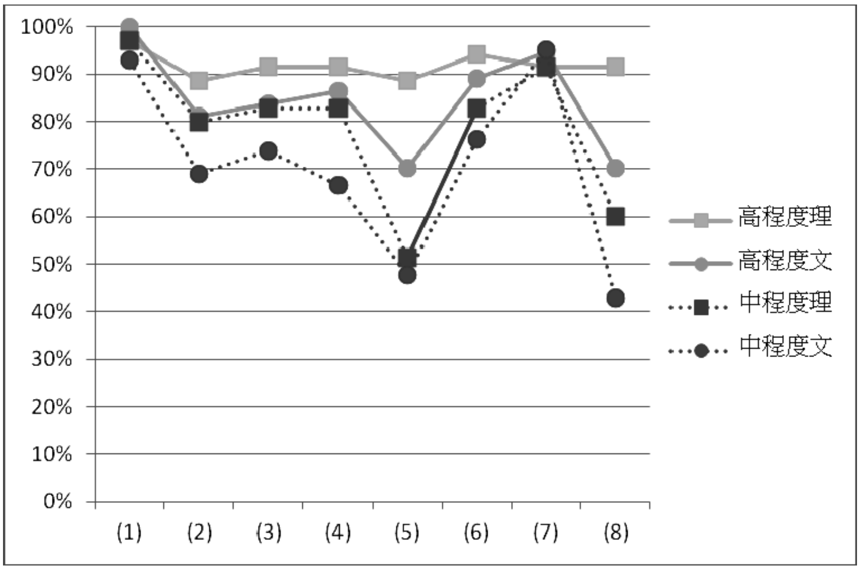


圖 4-5-3. 平面向量可作內積各題勾選百分比折線圖

由表 4-5-3 與圖 4-5-3 可看出，整體而言，學生最認為可以作向量內積的是兩向量起點相同的第(1)及第(7)題，都分別有九成以上的勾選率。他們認為最不能作內積的是兩向量平行的第(5)及第(8)題，都只有約六成五的勾選率。

高程度學校理組同學的「平面上任意兩向量皆可作內積」之概念心像較為完整，各不同向量關係都有約九成以上的同學具備，反觀文組同學，不同向量關係是否可作內積的心像就有較大的差異，較為典型的起點相同向量可高達九成至十成的勾選率，但起點不同的平行或垂直題勾選率就降至七成或八成，且由圖 4-5-3 可看出，此程度學校文組同學受到不同向量關係刺激的概念心像模式與中程度學校的學生較為接近。中程度學校不論是理組或文組同學，不同向量關係下所具備的可作內積概念心像差異都頗大，而文組同學，在起點不同的向量關係上，顯然比理組同學不具備可作內積的概念心像。

除此，由起點相同與否及夾角大小關係兩因素來看，本研究有下列幾項發現：

1. 平面上兩向量可否作內積的影響主要來自起點相同與否而非夾角大小。將答題的勾選狀況搭配施測結構表 4-5-1 可以得到表 4-5-4。

表 4-5-4. 向量起點相同與否搭配夾角大小題目之勾選百分比

	<90°	= 90°	>90°	平均
起點相同	典型圖形	93%	97%	95%
起點不同	84%	79%	81%	81%

表 4-5-4 數據顯示在不同的向量關係上，九成以上學生具備「兩起點相同的向量可作內積」之概念心像，因為教師教學時常使用起點相同這類例子，故學生透過例子經驗發展出其概念心像。而在非平行狀況下，約有八成學生具備「起點不相同的兩向量可作內積」的概念心像，與起點相同的狀況相比約有 15%的落差。而夾角大小的影響並不大，只有 2%~5%的差異。

2. 85%的學生認為「起點不相同且本身相交的兩向量可作內積」，83%的學生認為「起點不相同且平移後才相交的兩向量可作內積」，其差異並不大，這顯示兩向量當起點不同時，不論本身相交或平移後才相交，學生對其是否可作內積的概念心像類似。

3. 當兩向量起點相同或者兩向量起點不同但非平行時，多數學生之概念心像為此兩向量可作內積

4. 表 4-5-5 是兩向量平行時的勾選狀況，表中數據顯示，學生對於兩向量平行時可作內積的概念心像較為薄弱。

表 4-5-5. 兩向量平行題目之勾選百分比

	同向(0°)	反向(180°)	平均
平行	64%	65%	64%

從表 4-5-4 可看出，當兩向量非平行時，夾角的角度大小對於是否可作內積的影響不大，而表 4-5-5 顯示，學生對於「兩平行向量可作內積」的概念心像最弱，只有 64%的學生認為平行向量可作內積，與起點相同時 95%學生認為向量可作內積相比，有高達三成的差距。

5. 整體而言，對於兩向量是否可作內積，多數學生的概念心像為「起點相同時可作內積」、「起點不同時，向量本身相交或平移後相交可作內積」、有高達四成的學生認為「向量需起點相同或者相交」方可作內積，以下是幾位學生實際敘述之摘錄：

a. 有角度，才有內積
b. 向量跟向量要相連
c. 有辦法形成夾角才能算
d. 內積要從同一點出發，有兩者的夾角才能算出內積
e. 由公式所知，只差在 2 向量所夾之角度
f. 兩向量需同一起點，才能內積

二、三維空間及任意向量是否可作內積的概念心像

以下表 4-5-6 為第二部分三維空間中兩平行、歪斜及為指定維度之任意向量可作內積的勾選比例：

表 4-5-6. 第二部分三維空間及任意向量可作內積各題勾選百分比

關係 班級	三維平行			三維歪斜			兩任意向量		
	一定可以	有時可以	一定不可	一定可以	有時可以	一定不可	一定可以	有時可以	一定不可
高程度文組	68%	5%	22%	73%	3%	22%	59%	38%	0%
高程度理組	89%	3%	3%	91%	0%	6%	89%	9%	0%
中程度文組	40%	2%	57%	48%	17%	36%	19%	81%	0%
中程度理組	46%	3%	51%	63%	9%	29%	37%	63%	0%
合計	60%	3%	34%	68%	7%	23%	50%	49%	0%

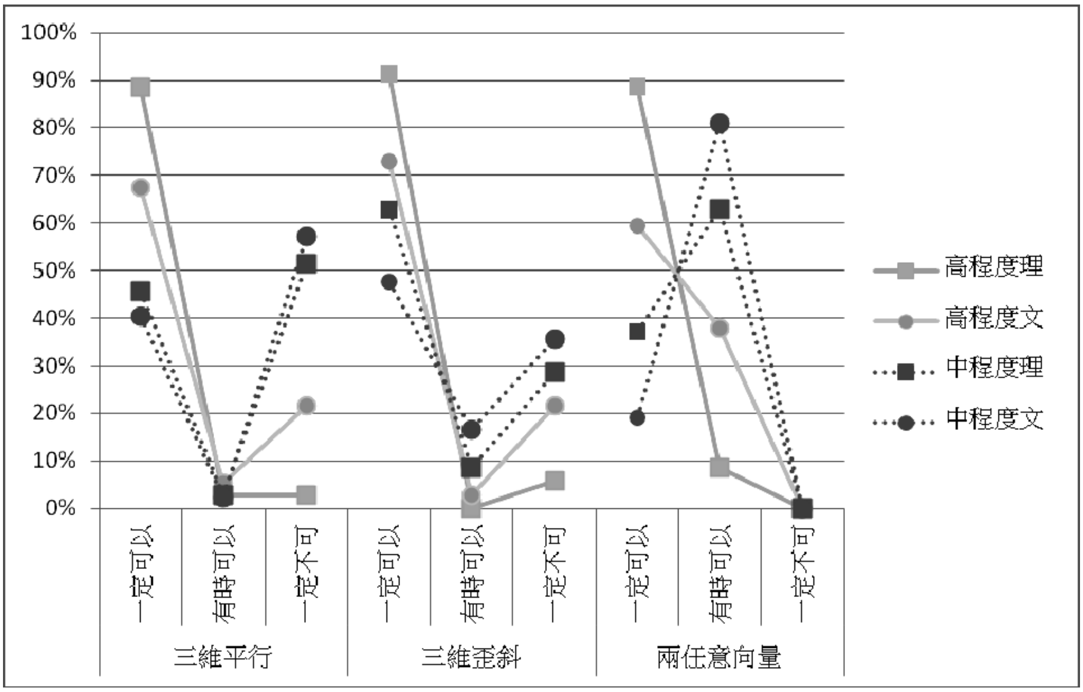


圖 4-5-4. 三維空間及任意兩向量是否可作內積各題勾選百分比折線圖

由表 4-5-6 與圖 4-5-4 可看出，就平行與歪斜而言，較多學生具備平行向量不可或不一定可作內積的概念心像，且比例高達四成。對於給定明確關係的向量而言，較多學生具有絕對的「一定可以」或「一定不可以」作內積的概念心像，而對於未明確指定關係的任意兩向量而言，高達一半的學生認為其有時可以，有時不可作內積。

高程度理組學生不論有沒有給定向量關係或所給定關係為何，都有高達九成比例的學生具有兩向量可作內積的概念心像，反觀此程度文組學生（參見圖 4-5-4），未給定明確關係向量時，其一定可以作內積的概念心像大幅滑落，約高達四成的學生轉為有時可以作內積的心像。至於中程度學校的學生，不論理組還是文組，學生的主要概念心像反而是有時可以作內積而非一定可以作內積，文組學生比例甚至超過八成。

三、任意兩向量是否可作內積的概念心像

針對平面與空間向量是否可作內積的概念心像，本研究有下列幾項發現：

1. 三維空間中與平面中之平行向量，學生認為可以作內積的比例差距不大，皆為約六成（參見表 4-5-3 第(5)題與表(六)三維平行題數據），向量是否可作內積的心像並未明顯受到空間維度的影響。

2. 兩向量在歪斜時比在平行時有較多學生具有可以作內積的心像，學生的自述顯示他們認為「兩歪斜向量平移後會有夾角，所以可以作內積」的概念心像，此心像與平面向量時一致，認為「要有角度」才能作內積。

3. 對於第 11 題的布題中所提任意兩向量，50％的學生勾選一定可以作內積，然而與第 10 題交叉比對後，發現這些學生未必全具備任意兩向量皆可作內積的概念心像，他們在第 10 題提供的不同情境中引動不同的可作內積概念心像。表 4-5-7 顯示學生針對未指定的任意兩向量一定可作、有時可作內積之比例與其在第 10 題給定向量關係下是否全部勾選可作內積的分布表。

表 4-5-7. 任意向量可作內積與第一部分各題可作內積勾選一致性百分比

任意向量 勾選 / 班級	一定可作 全部勾選 （一致）	有時可作 全部勾選 （可能不一致）	一定可作 部分勾選 （不一致）
高程度文組	51%	11%	8%
高程度理組	83%	3%	6%
中程度文組	14%	14%	5%
中程度理組	26%	11%	11%
合計	42%	10%	7%

註：百分比為占該班級全體之百分比。

由表 4-5-7 可看出，僅有 42%的學生其「任意兩向量一定可以作內積」的心像是穩固的，不會隨著題目所給刺激而有所改變。10%的學生面對平面上各種給定兩向量關係，都具有可作內積的心像，但對於未指定關係的任意兩向量，概念心像轉為有時可以作內積，其概念心像在不同情境中可能並不一致。較為特別的是，有 7%的學生對於未指定關係的任意兩向量具有一定可作內積的心像，但面臨給定的各種向量關係時，卻未必皆引動可作內積的心像。

四、向量、角度與內積定義等相關概念心像與主概念心像的關係

針對學生的勾選狀況，搭配學生自我表述的理由或看法，本研究發現至少有三類不同層面的相關概念心像導致學生在兩向量是否可作內積的主概念心像上產生與概念定義不一致的情形，此三類相關概念心像分別針對向量、角度與內積定義概念。

1. **向量概念**：部分學生在「向量可平移」的概念心像不符概念定義，進而影響任意兩向量皆可作內積之心像。下面為兩位這類型學生的答題情形：

<table>
<tr><td>學生</td><td colspan="2">題　　目</td><td>勾選狀況</td><td>說　　明</td></tr>
<tr><td rowspan="4">甲</td><td colspan="2">第一部分</td><td>勾選可以：
1,7</td><td>內積要從同一點出發，有兩者的夾角才能算出內積</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第二部分</td><td>平行</td><td>一定不可以</td><td>∵兩向量平行　∴兩向量無交點</td></tr>
<tr><td>歪斜</td><td>一定不可以</td><td>無交點</td></tr>
<tr><td>任意</td><td>有時可以</td><td>有交點可以，無交點不可</td></tr>
</table>

這一位甲同學，在第一部分只勾選了兩向量起點相交的(1)與(7)，

第二部分的平行與歪斜都認為一定不可以作內積，並且說明其勾選理由為「有兩者的夾角才能算出內積」、「兩向量無交點」等，顯然他在面對向量時，並沒有或無法引動向量可平移使得任兩向量都可以相交的概念心像，導致視向量如線段般有絕對位置，影響可否作內積的心像。

<table>
<tr><th>學生</th><th colspan="2">題　　目</th><th>勾 選 狀 況</th><th>說　　明</th></tr>
<tr><td rowspan="4">乙</td><td colspan="2">第一部分</td><td>勾選可以：
1,7</td><td>有角度，才有內積</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第二部分</td><td>平行</td><td>一定不可以</td><td>沒有角度，怎能作內積～</td></tr>
<tr><td>歪斜</td><td>一定不可以</td><td>[空白]</td></tr>
<tr><td>任意</td><td>有時可以</td><td>[空白]</td></tr>
</table>

從上表乙同學的回答可以看到該生認為有角度才有內積，他認為「沒有角度，怎能作內積」，而他在第一部分並沒有勾選本身相交的兩向量，在面對向量時與甲同學相同，並沒有或無法引動向量可平移使得任兩向量都可以以起點重合的方式相交，找到角度作內積的概念心像。

2. **角度概念**：這類型的學生，具有「向量可平移」的概念，但他們具有「平行沒有角度」的心像，搭配其「有角度方可作內積」的心像，導致他們任何向量皆可作內積的心像不完備。底下是兩個學生的例子：

學生	題目		勾選狀況	說明
丙	第一部分		勾選可以：1,2,3,4,6,7	兩向量除平行和重合外，其他都有內積
	第二部分	平行	一定不可以	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$，兩者無 θ
		歪斜	一定可以	投影在一平面上，兩向量有交點，則有 θ 角可求內積
		任意	有時可以	同第 10 題[第一部分]

這位同學，在第一部分只有第(5)與(8)題平行的狀況沒有勾選，其餘都認為可以作內積，在第二部分的文字說明中可看出，他認為平行是沒有夾角 θ，在他的角度概念心像中，0°與 180°是不算「有夾角」的，即使他已經知道內積的求算公式用到 $\cos\theta$，且在三角函數學習歷程中他必定多次求算過 $\cos 0^\circ$這類函數值，然而，「有夾角方可作內積」且 0°與 180°不算有夾角的心像仍使他放棄以公式來判斷，而以「有夾角」這個抽象的概念心像來控制兩向量可否作內積的心像。

學生	題目		勾選狀況	說明
丁	第一部分		勾選可以：1,2,3,4,6,7	可以形成角度的應該都可以吧！
	第二部分	平行	一定不可以	兩向量平行無法內積
		歪斜	一定可以	可以內積，內積為 0
		任意	有時可以	平行好像無法內積

上表顯示丁同學與上一位丙同學一樣，在第一部分只有第(5)與(8)兩題平行的狀況認為不可以作內積，而他的說明是「可以形成角度的應該都可以吧！」，所以他認為平行是沒辦法形成角度的。

3. **內積定義概念**：這類型的學生，具有「向量可平移」的概念心像，他們知道兩向量是可以平移，是會有夾角的。但他們在某些角度下認定兩向量是無法作內積的，他們認為不可作內積的狀態主要有平行與垂直，而他們認為這些狀態不可作內積的可能原因是他們受到定義內積時投影概念或公式概念，搭配上無定義的「沒有」之感知影響。底下是兩位學生的例子：

學生	題目		勾選狀況	說明
戊	第一部分		勾選可以：1,2,3,4,6,7	$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{d}$角度為 180°, $\overrightarrow{f}$和$\overrightarrow{d}$角度為 0°
	第二部分	平行	一定不可以	$\therefore \overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$平行,疊合後角度為 0°
		歪斜	一定可以	$\therefore \overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$疊合後角度≠0° 也≠180°
		任意	有時可以	看角度為多少

戊同學在第一部分也是只有第(5)與(8)平行的狀況認為不可作內積，由他的說明可看出，他與丙、丁兩位同學不同，他的心像中，兩向量平行是有角度的，但他依舊認為平行不能作內積，因為其夾角為 0°或 180°，至於為何這樣的夾角不可作內積，則可能是受到內積定義中的投影圖像影響，兩向量夾角為 0°與 180°時，感知中「沒有」投影（0°投影雖為本身，但圖像中會畫不出從投影向量終點到被投影向量的垂線，故看不到投影）。

<table>
<tr><th>學生</th><th colspan="2">題目</th><th>勾選狀況</th><th>說明</th></tr>
<tr><td rowspan="4">己</td><td colspan="2">第一部分</td><td>勾選可以：
1,3,4,5,6,8</td><td>[空白]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第二部分</td><td>平行</td><td>一定可以</td><td>[空白]</td></tr>
<tr><td>歪斜</td><td>一定可以</td><td>[空白]</td></tr>
<tr><td>任意</td><td>有時可以</td><td>θ=90°不行</td></tr>
</table>

己同學雖然寫的理由不多，但由他在第一部分只有第(2)與(7)垂直狀況沒有勾選且在第二部分以「θ=90°不行」說明，可看出他具有向量可平移、任何向量皆有夾角之概念心像，並且在其他夾角度數都具有兩向量可以作內積之心像，唯獨在夾角為 90°時認為不可以作內積，可能受到內積公式定義中 cos90°為 0，感覺是「沒有」，故不可作內積之影響。

Io. 內積操作_交換律

接下來我們探討關於內積操作的另一個重要的問題「$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$等不等於$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$？」。也就是探討學生關於「內積具有交換律」這個子概念之概念心像的具備情形。

施測題目＆題目分析：

3.將下列有可能成為正確式子的打✓，不可能的打✗。

□ (5) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

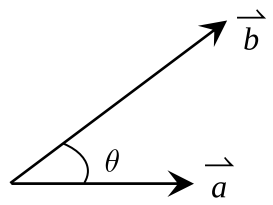
圖 4-5-5. 內積交換律之施測題目 1

第 3.(5)小題為是非題，若學生具備有「內積具有交換律」這個子概念，則會對此題打✓，反之會對此題打✗。這是單純從符號來看，若將學生帶入到內積定義的情境中，因為學生對於內積定義會有不同的感受，可能會對交換律有不同的看法。而三種內積定義中，有兩種都是代數式，以學生從小到大的學習經驗，我們相信學生應該都具備有基本的交換律概念，其結果應該跟第 3.(5)差異應該不大，所以這裡我們就針對「圖像型內積定義」的情境設計題目來探測學生的概念心像之情況，其題目為下圖 4-5-6。

6.如右圖，把正確的打✓，不正確的打✗ 。

Ⅱ.下列何者正確？把正確的打✓，不正確的打✗ ，

並說明之(不論✓✗)。



☐ (1)右上圖中，$|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\cos\theta$，

為什麼？____________________________________

☐ (2)右上圖中，$|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta) = |\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)$，

為什麼？____________________________________

圖 4-5-6. 內積交換律之施測題目 2

這一題題目為兩題單選題，並要求學生寫出答題理由，以探測他們的心像樣貌。題目刻意配上圖形，並搭配第(1)小題，先引導學生帶入投影的想法，在這種投影的想法下，第(2)小題中的$|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta)$就是$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影量再乘以$|\vec{a}|$，而$|\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)$則是$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影量再乘以$|\vec{b}|$，也就是內積的圖像型定義，只是投影的方向不同而已。看看學生在這種情境下，其心像狀況為何。

施測結果&概念心像分析：

表 4-5-8. 內積交換律的施測結果

	$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$
高程度文組	37
高程度理組	35
中程度文組	39
中程度理組	32
合計	143
	96%

上表為學生在 3.(5) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ 打✓的人數統計。幾乎全部學生都認同 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$，有高達 96%。這顯示絕大部分的學生都具備「內積有交換律」的概念心像。

表 4-5-9. 第 6.Ⅱ題的勾選情形

	×✓	××	✓✓	✓×	其他
高程度文組	33	1	0	2	1
高程度理組	33	1	1	0	0
中程度文組	33	4	1	1	3
中程度理組	29	3	2	0	1
合計	128	9	4	3	5

×✓代表第(1)小題打×，第(2)小題打✓ ； ××代表第(1)小題打×，第(4)小題打×；

✓✓代表第(1)小題打✓，第(4)小題打✓ ； ✓×代表第(1)小題打✓，第(4)小題打×；

其他代表放棄作答。

從上表來看，受到題目的刺激，能夠勾選出正確答案×✓的人數有變少的現象。而勾選情形為××的同學應該是受到題目引導進入投影的情境，認為兩個投影量 $|\overrightarrow{b}|\cos\theta$ 與 $|\overrightarrow{a}|\cos\theta$ 不會相等，那麼再分別乘上 $|\overrightarrow{a}|$ 與 $|\overrightarrow{b}|$ 也不會相等，也就是這些同學對於「圖像型內積定義」的心像是不夠成熟的。而其他的勾選狀況，搭配他們的回答理由，應該就是整體概念比較混亂的

同學。我們從同學的答題理由來看，會發現同學有幾種不同的概念心像：

1. 單純使用交換律來判斷$|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta)=|\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)$，也就是把等號左右兩邊的式子看成是三個代數物件相乘，所以根據乘法交換律，而得到相等。以下表列一些這類同學的回答：

a. 應該可以把括弧消去，則左式=右式
c. $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$為常數，$\cos\theta$ 為實數$\Rightarrow$有交換律
d. 全是純量，所以乘法有交換律
e. 不是一樣嗎？$|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{a}|$

2. 被題目帶到圖形的情境，而產生錯誤的判斷的這類同學。其中有三位有比較詳細的說明其答題理由，表列在下面。可以看到這些同學的心像發展還不夠成熟，無法將題目$|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta)$與$|\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)$視為兩向量內積，進而判斷$|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta)=|\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)$等式成立。

a. 向量無交換律
b. 順序反了,意義就不同(感覺上)
c. $|\vec{a}||\vec{b}|\times|\vec{a}|\cos\theta\neq|\vec{b}||\vec{a}|\times|\vec{b}|\cos\theta\rightarrow|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$

3. 浮現內積心像的同學，這類同學可以將題目看成是兩向量做內積，進而判斷等式成立，以下表列幾位這類同學的回答：

a. $\because\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\rightarrow$乘積互換結果不變
b. 內積相等
c. 同樣的兩向量內積相等
d. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

第伍章　結論與建議

本章將對於研究的結果進行論述，並對往後教學與後續研究提出建議。

第一節　結論

概念心像是每一個人學習概念所自己建構出來的心理產物，而且是經由許多經驗的累積才能夠抽象出概念，建構出自己的概念心像，所以每個人的概念心像，理所當然的都不盡相同。而本研究為展現整體性，以全體樣本為單位進行報導。

一、關於向量的概念心像：

1.學生對於相關的向量概念都具備有基礎的概念，但仍有 26%的學生無法分辨向量與純量的不同，有 12%的學生對於向量絕對值的概念是不正確的。

2.學生關於「向量」的概念心像至少有三種類型：A.不清楚向量的定義，無法分辨出向量與純量的不同。B.知道向量具有〝大小〞與〝方向〞不是純量，但無法清楚釐清，在面臨某些狀況時，會把焦點放在向量的〝大小〞上。C.對於向量定義完全理解，可以清楚分辨向量與純量之間的不同。

二、關於「內積特徵」的概念心像：

1.「內積」該名稱對學生刺激而浮現的心像，顯示學生比較核心的心像主要有向量、偏代數型內積定義以及內積符號等概念心像，其次為圖形、投影、偏坐標型內積定義以及偏圖像型內積定義等概念心像。

2. 從開放性題目中學生的陳述狀況來看，有以下發現：(1)程度較差的學生，比較容易發生「將向量內積類比於數字乘法」的情況。(2)理組學生在思考上比較習慣使用圖形，並且對於圖形使用的掌握度都高於文組學生。(3)有一部分學生把代數型定義移項後的式子「$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$」當作公式背下來。(4)其他出現比例較低的類別，我們不應該輕易忽視這些類別，因為對於浮現了這些概念心像的學生來說，顯然他們對這些類別是特別有感覺的，而這些類別有應用、外積、面積、垂直、物理。

3.有 10 位同學無法辨識「$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$」是什麼。其餘同學關於「$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$」的概念心像有四種類型：A. 將「內積」視為向量的特有的運算，佔全體的 1/4。B.將內積看做是乘積的一種，佔全體的 32%。C. 將「$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$」類比於「數字乘積」，佔全體的 23%。D.可以辨識出「$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$是兩向量的內積」，但對於內積的理解是不夠清楚的，有 13%。

4.發現有五成的同學具備「兩向量內積的結果為純量」的概念心像，而有四成的同學認為兩向量內積的結果可以是純量，剩下一成的同學是對於純量與向量無法正確辨識，但可能記得上課時老師有說過$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$的結果是純量而不是向量，而有類似的心像浮現。

5.而具備「兩向量內積的結果為純量」概念的同學，在面臨第 7.題的(1)(2)小題也不見得能夠浮現這一個概念心像以進行解題。這也再次呼應了 Tall 與 Vinner（1981）所說的概念心像常常是前後不一致的，不同的時間，被喚起的概念心像可能是會彼此衝突的。

三、關於「內積定義」的概念心像：

1. 學生關於內積定義三種類型的概念心像具備情形，最高的是「偏代數型內積定義」的心像，為 95%；其次是「偏坐標型內積定義」的心像，為 82%，最少的是「偏圖像型內積定義」的心像，為 38%。而且程度越高的學生越容易出現「偏圖像型內積定義」的心像。

2. 「偏代數型內積定義」的心像除了一類跟概念定義比較一致的心像樣貌外，至少還有以下 4 種不同的心像：(1)認為兩長度$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$必須放在一起。(2)受圖像型影響很重，必須要$(|\overrightarrow{b}|\cos\theta)$或$(|\overrightarrow{a}|\cos\theta)$，有投影的概念才行。(3)心像比較不穩定，面對不同狀況會浮現不同的心像，認為是內積的有$\cos\theta|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$或$(|\overrightarrow{b}|\cos\theta)|\overrightarrow{a}|$ (由上方投影至下方)，受典範例影響較重。(4)深受代數型$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$影響，除此之外的式子都不認為是內積。

3.偏代數型心像且沒辦法切換不同心像來解決不同情況的同學，在遭遇困難時，容易捨棄長度的部分，而比較專注在角度的部分。也就是對他們來說，角度的重要性高於長度。

4.「偏圖像型內積定義」的心像至少有以下兩種類型：A.與概念定義較為一致，認為內積是「投影量乘以被投影的長度」。B.認為內積是「某向量投影至另一向量的長度」。而展現偏圖像型的心像時，有一種是只注意「投影」而不會去在意「角度」的。另一種是在投影量的部分會搭配上「角度」，也就是會注意到投影量=向量長〝乘上$\cos\theta$〞這件事情。

5.「偏代數型內積定義」與「偏圖像型內積心像」兩種心像都具備的學生中，以「偏圖像型」為主要概念心像的人比以「偏代數型」為主概念心像還要

多。

6.具備「偏坐標型內積定義」心像的同學中，其概念心像發展較成熟的同學約有 24%，而概念是錯誤的同學高達 44%，還有一部份同學是發展的還不夠成熟，他們可以寫出正確的坐標型定義的式子$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$，但受題目影響也會認為$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(a_1b_1,a_2b_2)$，這樣的同學佔 14%。

四、關於「內積操作」的概念心像：

1.整體來說，只有 42%的學生在任何題目刺激下都認為「任意兩向量皆可作內積」。在平面上兩向量可不可以作內積，主要受到「起點是否相同」的影響，而「夾角大小」的影響不大。

2.學生關於「任兩向量可以作內積」的心像在平面上或空間中差異並不大，很多學生都認為兩平行向量是不可以作內積的。而空間中「歪斜」的狀況有比「平行」的狀況稍微好一點，但也受到「歪斜不相交」這樣的原有概念心像影響，使一部分學生認為沒有夾角，無法作內積。

3.學生在面對「題目中說任意兩向量」與「題目中給定某兩各向量」這兩種題目的刺激下，會有不一致甚至矛盾的概念心像浮現。

4.本研究發現學生在向量可否作內積的心像上受到至少三類不同層面的相關概念心像影響，這三類心像分別是「向量概念-向量可不可以平移」、「角度概念-兩平行或歪斜向量有無夾角」以及「內積定義概念-特定向量夾角在投影或公式定義時部分物件『消失』」。

5.學生對於「內積具有交換律」的概念心像，在代數符號的刺激狀況下，

有高達96%的學生都認為內積是有交換律的。但搭配有圖形投影情境的題目，有一部分同學受到影響被引導至投影的情境後，其心像發展的不夠成熟無法將$|\overrightarrow{a}|(|\overrightarrow{b}|\cos\theta)$與$|\overrightarrow{b}|(|\overrightarrow{a}|\cos\theta)$視為兩向量內積，進而判斷兩式相等。

整體來看，心像發展的還不夠成熟的同學，其概念心像常常是片段的、孤立的，在面對題目時，同學的思考往往是比較單一一點的，而且面對不同題目時的心像可以是完全衝突的，即使題目只是前後兩小題而且是類似的題目，學生在面對兩題時所浮現的心像還是可以完全的不同。顯示這些同學的概念心像與概念心像之間的聯繫是比較弱的。

第二節　建議

一、對教學建議：

本研究起因於學生解題遭遇困難時，身為老師所能給予的幫助，到底什麼才是對學生有效的協助，也就是整份研究的發現都能夠提供教師對於學生有更進一步的認識瞭解。所以接下來是研究者自己切換回教師的角色來看這些研究結果而浮現的一些感覺，以個人的角度來跟教師們交流一點心得。

1.學生常常會說：「我懂了！我知道了！」，但從研究結果可以看到事實並非如此，常常是學生以為自己懂了、知道了，但其實他並非真的完全能夠掌握。我們應該更審慎的確認學生的心像是否真的發展的足夠成熟，尤其是學生解題失敗後，來問問題的時候，更要小心確認學生的真正心像。

2.從研究結果可以知道內積出現問題，可能是因為先備概念出現了問題，如基本的向量概念，更甚者有可能是角度概念。在教學時，老師們往往很自然地使用與概念定義一致的概念心像，而忽略學生的概念心像可能還發展的不夠成熟。故建議教師在進行內積教學時，要多示範、講解相關先備概念的正確使用。

3.三種關於內積定義的心像具備情形的百分比，並不讓人意外，但學生對於坐標型內積定義的正確度也如此之低，實在頗令人擔憂。因為我們常利用內積的坐標型與代數型之間的串連來解決夾角問題，所以建議教師可以讓學生在坐標型內積定義部分多做題目練習，以發展正確的坐標型內積定義之心像。

4.在教學時除了一般典範例外，應儘可能提供各種不同的例子讓學生累積各種經驗，以便發展更完整的概念心像。

5.從研究結果來看，學生最能夠記得的內積定義是「代數型內積定義」，而接受度最低的是「圖像型內積定義」，但不管哪一種類型，學生對於這些定義的認識似乎也都不是非常的正確。回過頭想想 Skemp 說的：概念的學習應該提供給學生許許多多的例子，讓學生從例子中抽象出概念來。

我們看看代數型的定義，三個物件$|\overrightarrow{a}|$、$|\overrightarrow{b}|$和$\cos\theta$相乘，這樣的定義對學生有意義嗎？為什麼不可以是$|\overrightarrow{a}|$、$|\overrightarrow{b}|$和$\sin\theta$，為什麼是這三個？圖像型的定義是投影量乘上被投影向量的長度，這又是為什麼？難道不能是互相投影之後在相乘嗎？同樣地，坐標型的定義對學生來說也都只是公式。也許我們教學生時都太過於公式、定義出發。

那「內積」的例子是什麼？一堆題目？從一堆題目學生可以從中抽象出「內積」的概念，當然不可能！那它的例子到底是什麼？有些課本上雖然有使用「作功」來解釋，但我想那樣的說明還是不能算例子，因為對學生而言那還是太過高級的概念了，對他們來說已經不能算是有感覺的例子了。我想這是很多老師不得以選擇以定義、公式出發來教「內積」的原因。做完這個研究，我也不斷的問自己，到底怎樣的例子對學生而言才會有感覺，才能算是例子？

筆者左思右想，想到一個還算可以的例子，提供給老師們當作參考。

「想像有一輛車子拋錨了，

第一例：我們出力去推它，把它推 50 公尺，有沒有感覺我們花費了一些能量？

第二例：又一次很不幸的拋錨了，這次我們出一樣大的力量去推，但必

須推 100 公尺，兩倍遠，想像這次花的能量跟上次比較一下。

第三例：再一次不幸！這次一樣推 100 公尺，不過這次我們用力一點，用 2 倍的力向去推，這樣比較快，那所花的能量？

第四例：這次～沒有不幸！只是想一下，如果我們出的力是有角度的(配上圖形)，那有全部的力量都派上用場嗎？」

我想應該還有更多、更好的例子可以提供學生去感覺，只是需要各位老師好好去想一想。重點就是要儘可能提供多一點的例子，讓學生去感覺，去抽象出概念來。我認為如此對學生而言，其概念建立的一定會好更正確一點。

二、對研究建議：

1.本研究只抽樣了大台北地區的兩所公立高中，若能將樣本擴大並涵蓋各程度學校，則可使其結果更為全面。

2.本研究為初步探索學生的概念心像，後續研究者不妨針對本研究的初步結論再進一步探索學生更深入、更細部的概念心像。

3.本研究利用「問卷調查法」收集資料後，根據學生的問卷回答來推論學生的概念心像，並未對學生進行面對面的訪談，故有時無法更精準判斷學生的心像之樣貌，所以也造成研究結果有些部分，只能知道有哪些不同的心像並沒有辦法知道每種心像切確的比例，建議搭配學生訪談以求刻畫更為精準的心像樣貌。

參考文獻

中文部分：

Skemp, R. R. 。(1987) 數學學習心理學 (陳澤民譯，1995)。台北：九章出版社。

李永貞。(2008)。高二學生在向量概念學習上的主要錯誤類型及其補救教學之研究。國立臺灣師範大學。（未出版之碩士論文）

林進發。(2001)。桃園地區高中學生向量內積之運算及應用錯誤類型之研究。國立高雄師範大學。（未出版之碩士論文）

張春興。(2006)。張氏心理學辭典。台北：東華書局。

林福來等。(2009)。高中數學第 3 冊，南一書局。

許志農等。(2009)。高中數學第 3 冊，龍騰文化。

余文卿等。(2009)。高中數學第 3 冊，翰林出版。

英文部分：

Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008). Concept Image Revisited, *Educational Studies in Mathematics, v68 n1* p19-35

Bledsoe, K. E. & Flick, L. (2012). Concept Development and Meaningful Learning among Electrical Engineering Students Engaged in a Problem-Based Laboratory Experience, *Journal of Science Education and Technology, v21 n2* p226-245

Lester, F. K. (1980). Problem solving：Is it problem? In M. M. Lindquist(Ed.), Selected issues in mathematics education (p29-45). Berkeley CA:McCutchan

Polya, G (1945) . *How to solve it?* Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando,FL：Academic Press

Tall, D & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.*

Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. In J. D. Lange & M. Doorman (Eds.), *Senior Secondary Mathematics Education*, OW&OC, Utrecht, 37-41.

Vinner, S. (1983). Concept definition, Concept image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 239-305.

Vinner, S. (1991) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, Mathematics Education Library, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 65–81.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 355-356.

Wilson, P. S. (1990) Inconsistent Ideas Related to Definitions and Examples, *Focus on Learning Problems in Mathematics, v12 n3-4* p31-47.