

中學生通訊解題第七期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

89701

某銀行有千禧龍年的銀幣 2000 枚，欲分裝成 n 袋($n>2$)，使得每一袋內銀幣的“枚數”正好形成連續的正整數。試問該如何分裝？（盡量寫出一切可能的分裝法）

參考解答：

設第一袋裝 a 枚，第二袋裝 $a+1$ 枚，第三袋裝 $a+2$ 枚， \dots n 袋裝 $a+(n-1)$ 枚，則

$$a+(a+1)+(a+2)+\dots+(a+n-1)=2000$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot [2a+(n-1)]}{2} = 2000$$

$$\Rightarrow n \cdot (2a+n-1) = 4000 = 2^5 \times 5^3 \quad \text{-----(1)}$$

因 $2a$ 為偶數，故 n 與 $2a+n-1$ 為一奇數，一偶數，並且 $2a+n-1$ 顯然比 n 大 ($2a-1>0$)，所以由(1)式及上面的說明可列出下面三種方程組：

$$(A) \begin{cases} 2a+n-1=5^3 \\ n=2^5 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} 2a+n-1=5 \times 2^5 \\ n=5^2 \end{cases} \quad (C) \begin{cases} 2a+n-1=5^2 \times 2^5 \\ n=5 \end{cases}$$

由(A)解出 $n=32$ 堆：47,48,49, \dots ,78 ($a=47$)

由(B)解出 $n=25$ 堆：68,69,70, \dots ,92 ($a=68$)

由(C)解出 $n=5$ 堆：398,399,400,401,402 ($a=398$)

解題重點：(1)能將整數作適當的分解。

(2)能利用奇偶性及大小關係，簡化討論分類。

評析：(1)本題答題人數共有 43 人，平均分數為 4.26 分，得分率為 61%。

(2)台師大附中中國中部黃道生，北縣福營國中張品慈，基隆銘傳國中陳維昌，北市永吉國中黃紹倫，答題扼要清晰，值得稱許。

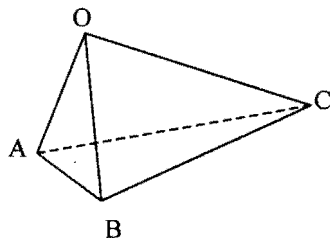
問題編號

89702

三角錐 $O-ABC$ 如右圖，每一雙相對的稜長分別為 $\overline{BC}=a$, $\overline{OA}=a'$, $\overline{AC}=b$, $\overline{OB}=b'$, $\overline{AB}=c$, $\overline{OC}=c'$,

試問：以 $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$ 為邊長能否作成一個三角形？

請說明理由。



參考解答：

首先觀察四面體可分解出

$\triangle ABC, \triangle OBC, \triangle OAB, \triangle OAC$ 四個三角形，

利用此四邊形“兩邊之和大於第三邊”

我們得到底下幾個數學不等式：

$$a < b + c \quad \text{-----(1)}$$

$$a' < b' + c' \quad \text{-----(2)}$$

由(1)+(2)得 $a + a' < (b + b') + (c + c')$ ----- (3)

同理可得 $b + b' < (a + a') + (c + c')$ ----- (4)

$$c + c' < (a + a') + (b + b') \quad \text{----- (5)}$$

所以 $a + a', b + b', c + c'$ 三數可為一個三角形的三邊邊長。

解題重點：(1)利用三角形兩邊和大於第三邊

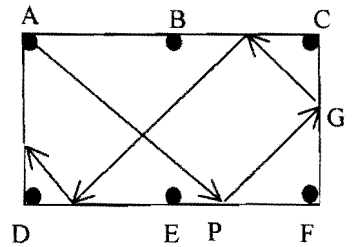
(2)利用不等式性質解題。

評析：(1)本題參答人數共有 34 位，平均得分數為 5.36，得分率為 78%。

(2)答題品質較佳者有：北縣海三中學施程鴻，江翠國中張源平，東海高中張閔超，基隆銘傳國中趙新，高市陽明國小楊哲宇，基隆二信中學黃園心，高市五福國中黃全斌，北市永吉國中黃紹倫，北縣新莊國中吳之堯，彰化員林國中楊浩渝等。

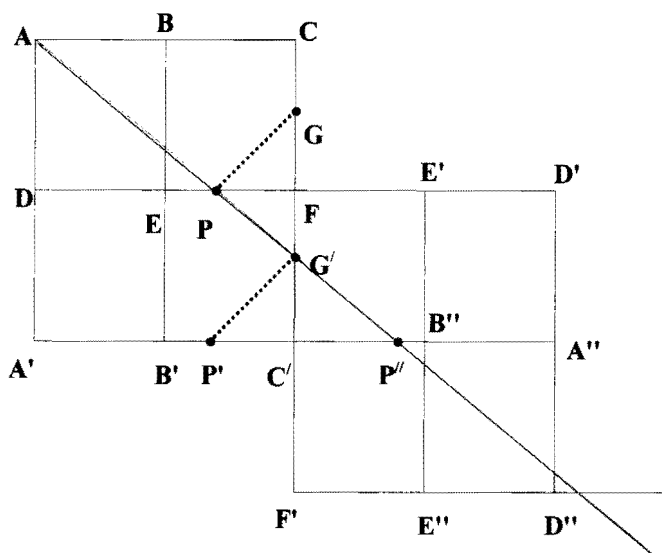
問題編號
89703

在長 260 公分、寬 150 公分的撞球台（如圖）由 A 洞沿 45 度角將球擊出，若球會無限制地以 45 度角反彈，試問最後球會落入哪個球袋內？



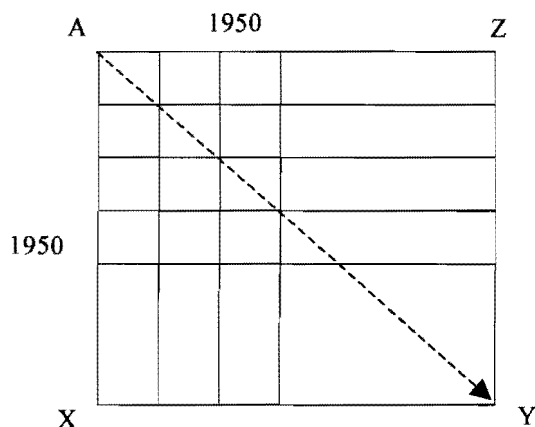
參考解答：

(1)這個題目可以利用下圖來分析：圖中每一小格的長為 150 公分，寬為球台長邊的一半（130 公分），球由 A 點以 45° 角射出，遇台邊彈回的路線可以用 DEF 為軸，將球台“鏡射”為 $DEF - A'B'C'$ ，以 $\overline{PG'}$ 代替 \overline{PG} ，再鏡射為 $\overline{FE'D'} - C'B''A''$ ，以 $\overline{G'P''}$ 代替 $\overline{G'P'}$ ……以此類推



如此第一個遇到的格點就是進入的袋。

- (2) 因為 130 與 150 之最小公倍數為 1950，故要達到格點，必然是在長的方向為 150 的倍數，在寬的方向為 130 的倍數（如圖）。



$$\begin{aligned} &AXYZ \text{ 為一個正方形} \\ &\overline{AX} = 150 \times 13 \\ &\overline{AY} = 130 \times 15 \end{aligned}$$

- (3) 13 為一個奇數表示落袋時的邊為(D,E,F)，15 為一個被 4 除餘 3 的數，表示球落袋時為 (B,E)，今同時發生，即球將落入 E 袋。

評析：

- (1) 本題答題人數 38 人，平均得分數為 3.96 分，得分率為 56.6%。
 (2) 答對題目的人中，以列舉方式或單純以圖解的方式作答者，給 4 分。因為本題的數字不大而且最初進行的路線不錯，，才能夠列舉，這種列舉的方法，比較沒有一般性。（18 人）

(3)完全能得出抽象型式結論者給 7 分，其中包含：新莊國中吳之堯、師大附中國中部黃爲生、永吉國中黃紹倫，在論證的過程中犯有粗心小錯誤者給 6 分，有高市五福國中黃全斌、高師大附中國中部蔡政洋、高市陽明國小蔡政江、再興國中高業航；基本上 6 或 7 分均應視為優良的解題品質。

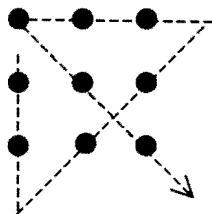
(4)比較未能流利的使用數學語言（使用較一般語言者）給 5 分，有北市敦化國中林翰企，彰化員林國中楊浩渝、北市明德國中王琨傑，他們三位就是這樣的例子，可再加強數學表達的訓練。

問題編號

89704

由 $n \times n$ 個點所形成的方形點陣 ($n \geq 3$)，是否能用 $2n-2$ 條線段一筆劃（筆尖不離紙面）完成？

例如： $n=3$ 時



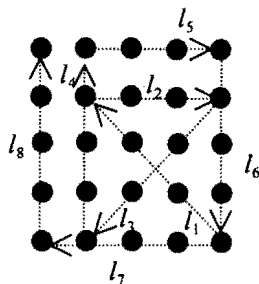
由左圖知用 4 條線段一筆畫連成。

$$4 = 2 \times 3 - 2 = 2n - 2$$

參考解答：

先將以 $n=3, 4, 5$ 代入，動手操作，檢驗命題是否為真。

如下圖(一)所示：



圖一

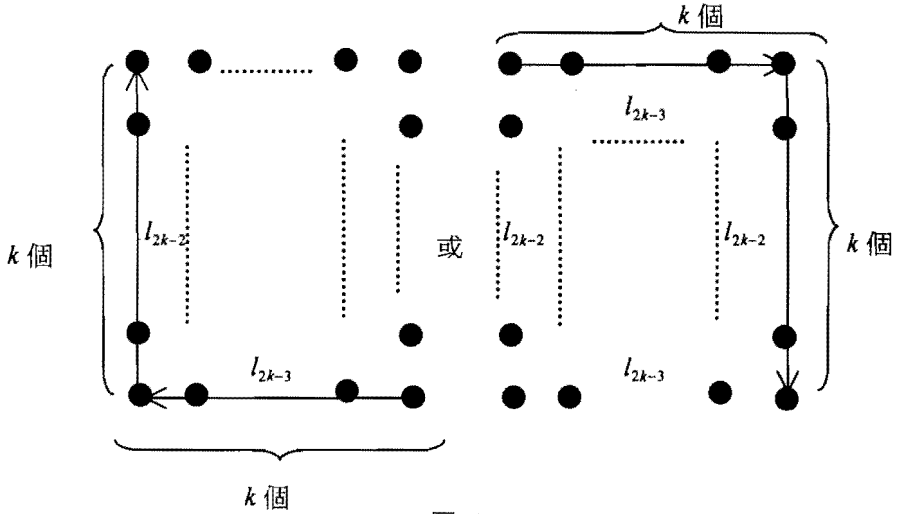
- (1)當 $n=3$ 時，由 3×3 個點所形成的方形點陣，可用 $2 \times 3 - 2 = 4$ 條線段($l_1 \rightarrow l_2 \rightarrow l_3 \rightarrow l_4$)畫連成。
- (2)當 $n=4$ 時，由 4×4 個點所形成的方形點陣，可用 $2 \times 4 - 2 = 6$ 條線段，由 l_4 畫向上延伸一點，接 $l_5 \rightarrow l_6$ 一筆畫連成。
- (3)當 $n=5$ 時，由 5×5 個點所形成的方形點陣，可用 $2 \times 5 - 2 = 8$ 條線段，由 l_6 畫向下延伸一點，接 $l_7 \rightarrow l_8$ 一筆畫連成。

由上述的事實，我們猜測命題：

“由 $n \times n$ 個點所形成的方形點陣，可用 $2n-2$ 條線段一筆畫連成。”

以下，利用數學歸納法加以證明命題為真：

- (i) 當 $n=3$ 時，以驗證得命題為真。
- (ii) 假設，當 $n=k$ ($k \geq 3$) 時，命題為真，如圖(二)所示。



圖二

即由 $k \times k$ 個點所形成的方形點陣，可用 $(2k-2)$ 條線段一筆畫連成，且收筆在左上角（或右下角），收筆線為 l_{2k-2} 。

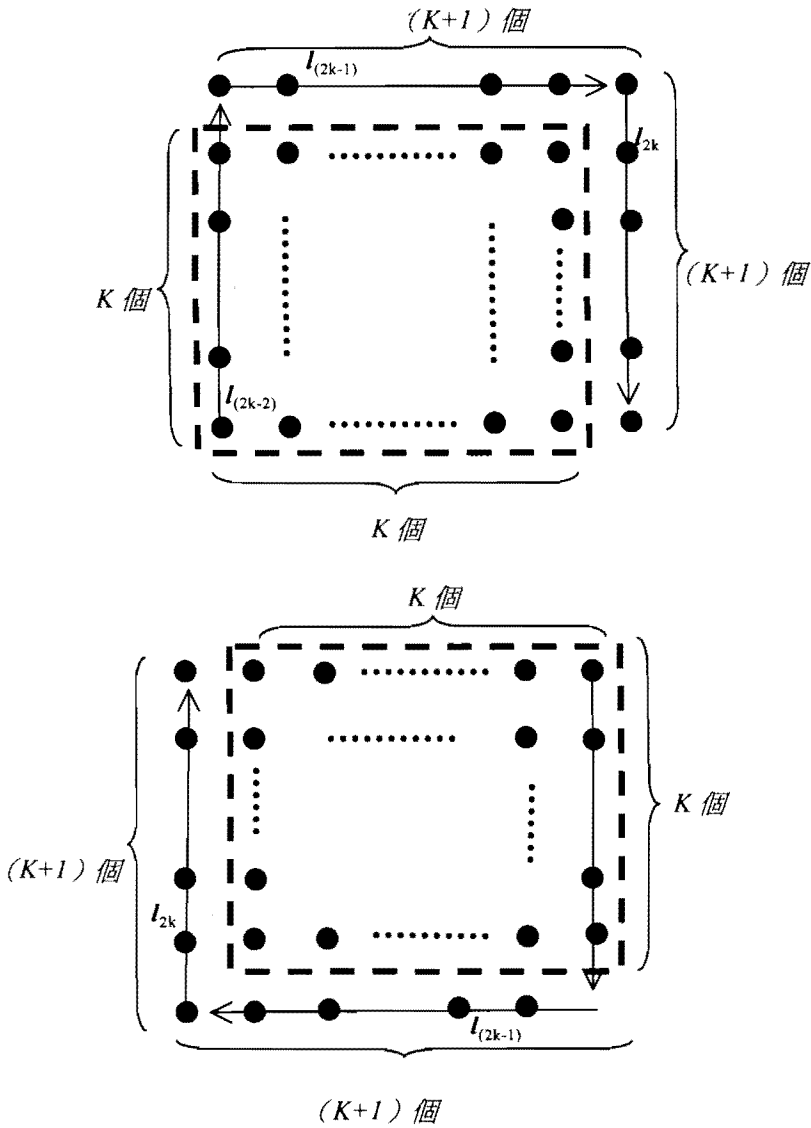
則當 $n=k+1$ 時，

即由 $k \times k$ 的方形點陣的上方和右邊各自加一排點形成 $(k+1) \times (k+1)$ 的方形點陣，（或由下方和左邊各自加一排點），如圖三。

此時，只要由收筆線 l_{2k-2} 向上延伸一點，接 $l_{(2k-2+1)} (= l_{2k-1}) \rightarrow l_{(2k-2+2)} (= l_{[2(k+1)-2]} = l_{2k})$ ，即可 $2(k+1)-2$ 條線段一筆畫連成。

這就是說，當 $n=k+1$ 時，命題也成立。

由(I)(ii)知，命題對任何正整數 n 都成立。



圖三

解題重點：(1)先將以 3, 4, 5 代入操作測試，檢驗命題是否為真。

(2)再以數學歸納法證明命題為真。

評析：(1)上述的一筆畫法並非唯一的方法，而“是否能用”為存在性問題，只要一種解就可以。

(2)大部分徵答者都以驗證總結，以數學歸納法證明命題為真者的推論過程都稍嫌粗糙，但以國中生成而言，已值得嘉許。

(3)優良徵答者有：高市陽明國小蔡政江，高師大附中蔡政洋，基隆二信中學黃園心，

北縣江翠國中黃明山，新竹光華國中賴俊儒，彰化員林國中羅元隆等人。

(4)本題徵答人數共有 54 人，平均分數為 4.81 分，得分率為 69%。

問題編號

89705

今有 2000 堆石塊，每堆石塊的數目依次是 $1, 2, 3, \dots, 2000$ 塊。每一輪允許從中任意挑出若干堆來，並從這些堆中每堆扔掉相同數目的石塊。試問，最少需要多少輪，就可以扔掉全部石塊？

參考解答：

〈解法一〉

每一輪之後，都把那些具有相同數目石塊的堆視為一組。空了的堆也視為一組，假定在某個時刻共有 n 組。如果在下一輪時，又從某些堆中各扔掉相同數目的石塊，而這些堆原屬於 k 個不同的組，則在扔後他們仍分屬於 k 個不同的組，此因不同組的堆在扔後所剩石塊數目仍不相同。其餘的堆則至少分屬 $n-k$ 個不同的組。因此，總的組數不會少於 $\max\{k, n-k\}$ 。

這樣一來，便可知道，在每一輪之後，組數至多減少到原來的一半，具體到問題本身，知其下降的速度不會快於如下數列：

$$500, 250, 125, 63, 32, 16, 8, 4, 2, 1$$

亦即需要經過 11 輪。另一方面，確實存在通過 11 輪即可拋盡所有石塊的可能性：

第一輪，先自塊數不少於 1000 的各堆中各扔出 1000 塊，於是，各堆中的石塊數目只剩下如下各種情況：

$$1000, 999, \dots, 3, 2, 1, 0 \quad (*)$$

第二輪，再自塊數不少於 500 的各堆中各扔出 500 塊，於是各堆中的石塊數目只剩下如下各情況：

$$500, 499, \dots, 3, 2, 1, 0$$

如此下去。一般地，令 n 依次取遍(*)中各項，每次自塊數不少於 n 塊數各堆中扔出 n 塊，使剩下的各堆中的石塊數目只有如下各種情況：

$$n-1, n-2, \dots, 1, 0 \text{ 於是只需 } 11 \text{ 輪即可扔盡所有的石塊。}$$

〈解法二〉

假設有 n 堆石塊，每堆石塊的數目依次是 $1, 2, 3, \dots, n$ 塊

(a)設 $n=2k+1$ ， k 為非負整數，每堆石塊的數目依次是 $1, 2, 3, \dots, 2k+1$ 塊

如果每輪挑出 x 堆，每堆扔掉 y 個石塊，共扔掉了 xy 個石塊。想要最少輪，則 xy 要有最大值，且 $x+y \leq (2k+1)+1$ 。

$$\because \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{2k+2}{2} \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \leq k+1, \text{ 等號成立} \Leftrightarrow x=y=k+1$$

即 $1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots, 2k+1$ 中挑出 $k+1, k+2, \dots, 2k+1$ 這 $k+1$ 堆，每一堆扔掉 $k+1$ 個石塊，變成 $1, 2, 3, \dots, k, 0, 1, 2, \dots, k$ 。

(b) 設 $n=2k$ ， k 為正整數，每堆石塊的數目依次是 $1, 2, 3, \dots, 2k$ 塊

如果每輪挑出 x 堆，每堆扔掉 y 個石塊，共扔掉了 xy 個石塊。想要最少輪，則 xy 要有最大值，且 $x+y \leq 2k+1$ 。

$\because \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{2k+1}{2} \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow$ 等號成立 $\Leftrightarrow x=y=\frac{2k+1}{2}$ ， xy 會有最大值，但 x, y 為正整數，

故取 $x=k+1, y=k$ 或 $x=k, y=k+1$ ， xy 有最大值。

當取 $x=k+1, y=k$

即 $1, 2, 3, \dots, k-1, k, k+1, \dots, 2k$ 中挑出 $k, k+1, k+2, \dots, 2k$ 這 $k+1$ 堆，每一堆扔掉 k 個石塊，變成 $1, 2, 3, \dots, k-1, 0, 1, 2, \dots, k$ 。

當取 $x=k, y=k+1$

即 $1, 2, 3, \dots, k-1, k, k+1, \dots, 2k$ 中挑出 $k+1, k+2, \dots, 2k$ 這 k 堆，每一堆扔掉 $k+1$ 個石塊，變成 $1, 2, 3, \dots, k-1, k, 0, 1, 2, \dots, k-1$ 。

(c) 由(a)(b)之討論可知利用這樣的方法，前一輪是 $2k+1$ 或 $2k$ 堆時，在每一輪之後，最多的那一堆石塊數為 k 個。因為這種取法每次扔掉的石塊數均為最多，所以只要每次維持這種方法，則扔石塊的次數必為最小。

(d) 本題一開始 $n=2000$ ，利用此法每次最多那堆石塊數依次為：

$$1000, 500, 250, 125, 62, 31, 15, 8, 7, 3, 1$$

故最少須 11 輪才可以扔掉全部的石塊。

解題重點：本題要說明如何用 11 輪扔掉全部的石塊，而且 11 輪是最少的。

評析：

(1) 參與本題徵答的學生，大致上都能找出如何用 11 輪就扔掉全部的石塊，但是大部分的同學對於說明「11 輪是最少的」這個部分，答題的情形並不理想，顯然需要在這方面的訓練要再加強。

(2) 優良徵答者有：北縣東海高中莊開超、北市敦化國中薛朝文、高市陽明國小蔡政江、竹市光華國中李俊坤、北縣新莊國中吳之堯、北市永吉國中黃紹倫等 6 位同學。

(3) 本題徵答人數共有 32 位，平均分數為 3.9 分，得分率為 56%。