第五章《東算抄》內容分析（下）

本章內容主要分成二部分，首先探討的是《東算抄》卷之四，也就是最後一卷其中包含〈問答〉、〈雜題〉、〈附啓蒙捷術〉兩個單元。再者，所要研究的是目錄中未標明的部分－〈追錄〉。

5.1 卷之四的內容分析

第四卷可說是《東算抄》極具特色的部分，其中〈問答〉之內容是節錄一七一三年六月二十一日（「癸巳閏五月二十九日」），洪正夏「與劉生壽錫入（賓）館中與五官司曆何國柱論算。」的內容中，所涉及的數學問題及三淵先生所問的天文曆法問題。〈雜題〉之名雖於目錄中有標題，但卻不見於卷之四文本內容之中，筆者認爲應是介於〈附啓蒙捷術〉與「日去地圖」間的律呂隔八相生圖及音律部分。〈附啓蒙捷術〉中包含假令盈不足術與開方釋所，皆抄自算學啓蒙，〈追錄〉中有〈堆積還源門〉、〈盈不足〉、〈方程正負〉。

5.1.1 〈問答〉

筆者在比較東算抄及九一集後，認爲〈問答〉應包含兩部分其一是洪正夏「與劉生壽錫入（賓）館中與五官司曆何國柱論算。」；其二是三淵先生問曆法問題，將數學論證討論或反思的情形呈現於書中可說是東算家的特色之一，[1]這種方式使讀者經解凍的過程後，又能感受到當時的「溫度」。

5.1.1.1 〈問答〉與歷史現場

在論述數學內容前，讓我們先回到歷史現場，將鏡頭拉回至一七一三年此時正值清康熙五十二年，正是五官司曆根據朝鮮李朝肅宗三十九癸巳年實錄，當年五月「壬辰，平安監司俞集一以勑使牌文出來事啓聞。其文曰：『欽差頭等侍衛阿齊圖、護獵總管穆克登奉命前往朝鮮國，五月初二日起行。詔書一道，御杖一對，欽差牌貳面，迴避肅靜牌四面，黃傘貳柄，五官司曆前例所無也，六品通官三員，跟役十九名。』」可見，何國柱的確伴隨阿齊圖與穆克登此行訪問朝鮮。此行的相關活動由《朝鮮李朝實錄》中趙泰耇的一則見證，可略知一二，茲引述如下：[2]

---

[1] 參見《東算抄》卷之四〈問答〉，頁 325-333。

[2] 參見洪萬生，〈十八世紀東算與中算的一段對話：洪正夏 vs.何國柱〉，頁 6。

（七月）乙亥，引見大臣備局諸臣。【趙】泰耈曰：「五官司曆出來時，許遠學得儀器算法，仍令隨往義州，盡學其術矣。儀器之用有『儀象志』,『黃赤正球』等冊，算書及此等冊使之刊布，儀器亦令造成。而司曆又言，爾國所無書冊器械，當歸奏密給云，日後使行，許遠使之隨往好矣！」上允之。

其中許遠爲觀象監官員，李朝肅宗四十一年乙未 (1715 年) 時果然奉派出訪清朝欽天監，帶回《日食補遺》、《交食證補》、《曆草駢枝》等書，測算器械六種以及西洋自鳴鐘，可見此時天文曆法之問題頗受朝鮮當時執政者所重視，也可瞭解《東算抄》或《九一集》收錄曆法問題於書中的脈絡。

由洪正夏於《九一集》中所記錄對話現場可知至少有洪正夏、劉壽錫、何國柱與阿齊圖四人，九一集中將對話內容編爲 21 個問題，但東算抄僅節錄 4 題且一題「約瑟夫斯問題」未見於《九一集》，不知是否另有他人提問？或是兩書之中之問題，並未涵蓋當時所有對話的數學內容，但可發現「對話」是常在東算家中展開的。筆者就研究內容在此僅探討東算抄中的問題：

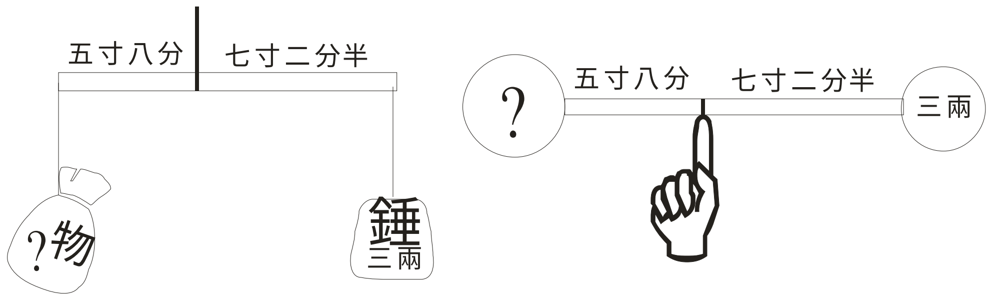
〔1〕無星秤問題

今有無星秤稱物，只云錘邊七寸二分半，物邊五寸八分，錘重三兩，問物重幾何？

答曰：物重三兩七錢五分。

法：置錘邊七寸二分半，以錘重三兩乘之，得數為實，以物邊五寸八分除之得數，合問。

此一問題可視爲槓桿原理的應用，或求重心的問題。其平衡點的位置即爲所求，如圖示：



其利用「反衰法」可解此類問題，但利用槓桿原理可寫成：

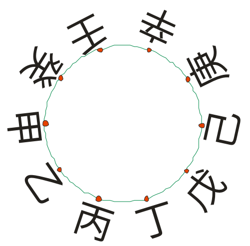
$W_{物} \times L_{物} = W_{錘} \times L_{錘}$ ，故物邊 $L_{物} = \frac{3\times 7.25}{5.8} = 3.75$ 。由此可知當時東算家不只處理單純的數學問題而是擴大了數學解題的層面。此題與〈縱橫乘除門〉的第三題本質相同，[3]只不過在該門所用的豬隻重量要對應到此題所用的長度，又見東算家的轉化能力。

[3] 參見《東算抄》，頁 86。

〔2〕約瑟夫斯（Josephus）問題：

或問，今有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸十人，乃計十拔去，而後欲使甲留在，問自何人為始？

答曰：自丁為始。

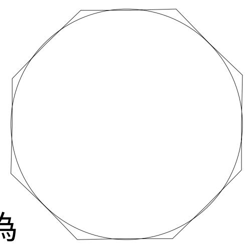


法曰：置一於上為法，置二於下為實，乃法加十共得十一，又加一得三，以實三減去法十一，自盡則餘法二。又法二加十得十二，又實三加一得四，以實四減去法十二，自盡則餘法四。又法四加十得十四，又實四加一得五，以實五減去法十四，自盡則餘法四。又法四加十得十四，又實五加一得六。以實六減去法十四，自盡則餘法二。又法二加十得十二，又實六加一得七，以實七減去法十二，自盡則餘法五。又法五加十得十五，又實七加一得八，以實八減去法十五，自盡則餘法七。又法七加十得十七，又實八加一得九，以實九減去法十七，自盡則餘法八。又法八加十得十八，又實九加一得十，以十減去法十八，自盡則餘法八。以八為始，八即丁也，計之，合問。

將其解法整理如下 ：

法	1	1	2	4	4	2	5	7	8
實	2	3	4	5	6	7	8	9	10
餘法	1	2	4	4	2	5	7	8	8

先以一爲法二爲實，「餘法」爲（法＋脫數）÷實之餘數，但不得爲0，若能整除則以實爲法餘法爲下一步驟之「法」，「實」乃逐次加一，如此連續步驟，直到實加一恰爲原人數爲止，此時餘法即爲所求。

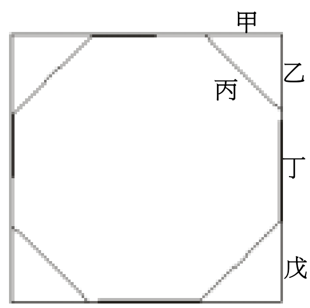


〔1〕 圓外切八邊形邊長問題

或問，有圓徑十尺，外切八邊形每邊若干？

答曰：每邊四尺有奇。

法：置徑十尺自乘得一百為實，倍徑得二十為縱方，以一為隅法，平方開之，得每邊數，合問。



解曰：丙自乘倍之當折半而倍之者，欲兼得戊也，平方開之，以加丁，即得乙丁戊之通長，即圓徑也，故徑自乘則其為數也，有丁自乘數一段，乙戊通長自乘數一段，即丙自乘兩段丁與乙戊相乘數二段，故曰徑自乘內有面自乘數三段，八邊面自乘數，面乘乙戊數兩段，故為實。

倍徑，則有丁面兩個，乙戊通長兩個，故為縱方。

以一為隅者，縱方之中只有丁兩介，故為縱方，故欲加入一丁也。

又法：置徑十尺以七因七即一段斜也，以十七十七即一段斜，兩段方相併數除之，得八角，每面四尺十七分之二。

此題有兩種解法：

解法一：利用代換方式列方程式解之：

$$\sqrt{2\times \text{•¸}^{\;2}} = \sqrt{2}\times \text{•¸} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times b = b + \text{‰o³}$$

$$b + \text{‰o³+’š} = \text{‰o³+’š} + \text{•è}$$

10^2=（乙+丁+戊）^{2}

=乙^2+丁^2+戊^2+2 乙丁+2 丁戊+2 乙戊

=丙^2+丁^2+2（乙丁+戊丁）+丁^2

=丙^2+2 丁^2+2（乙丁+戊丁）

=丙^2+2 丁（乙+戊+丁）

= x^2+20x…..（設邊長爲 x）

解法二：利用方五斜七，設邊長爲 x

$$\text{‰o³} = \frac{5}{7}\times \text{•¸}$$

$$\text{‰o³+’š} + \text{•è} = \text{•¸} + 2\text{‰o³}$$

$$x + \frac{10}{7}x = 10$$

$$\frac{17}{7}x = 10 \Rightarrow x = 4\frac{2}{17}$$

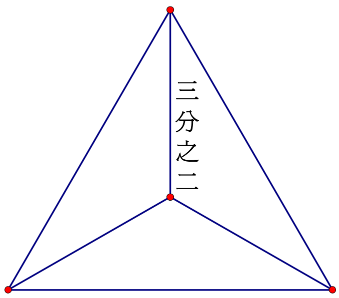
由此題之解法可見其靈活，以同質性的變數代換而列出方程式，方程式一旦列出就難不倒精於開方各術的算學者。再者，可觀察到發散性思考的特質，東算家不拘泥於圓之內切，而以一外切四邊形作爲輔助。

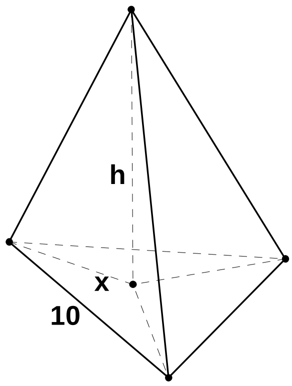
〔2〕 正四面體體積

或問，有等邊立三角體，每邊十尺，問內容積若干？

答曰：一百一十七尺八寸四分九厘六毫一絲有奇。

法：以十尺為弦，自乘，又十尺折半得五尺為句，自乘，相減餘七十五尺為實，平方開之得股八尺六寸六分不盡四厘四戶為中長，以每面十尺乘之折半得平，三角積四十三尺三寸，寄左，又列中長八尺六寸六分，二之三而一，得中心五尺七寸七分三厘三毫不盡一系為句，就自乘得三十三尺三寸三分０九戶九二八九，又上斜十尺為弦，自乘得一百，以小減多餘六十六尺六寸六分九厘００七息一一為實，平方開之，得股八尺一寸六分五厘一毫不盡，即中高也，以中高乘寄左，得三百五十三尺五寸四分八厘八戶三系，三歸，得立積，合問。





$$’†ü’· = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8.66025404$$

$$ŽOŠpŒ`–ÊÏ = \frac{1}{2} \times 10 \times 8.66 = 43.3$$

$$x = 8.66 \times \frac{2}{3} = 5.773333$$

$$(5.773333)^2 = 33.33099289$$

$$h = \sqrt{10^2 - 33.33099289} = 8.1651$$

$$é“Ï = \frac{1}{3} \times 43.3 \times 8.1651 = 117.84961$$

由此問題的解題方式，可看出對於相關的幾何知識，已有正確的認知，例如重心於中線的位置，在關孝和的《括要算法》的利卷裡有求正三角形平中徑、角中徑與面積問題，數據相同，東算家很可能將其轉變爲求正四面體體積問題。

第五至七題爲三淵先生所提問，與〈周髀算經〉測日高之問題類似：

〔3〕 或問，朞三百篇九百四十分者何也？

答曰：日、月不及天十三度十九分度之七，內減日不及天一度，餘十二度十九分度之七，通分納子，又以四因，即九百四十分。

此處未出現「法曰」，應是對於時的對談很忠實的紀錄，故未加入「法曰」，直接以「問」－「答」形容，是非常口語化的。

〔7〕周公至洛，定天下之中，立八尺之表，南入千里差一寸，問日去地幾里差一寸者，南八千里立八尺表，則日影七尺九寸，故謂之差一寸也。

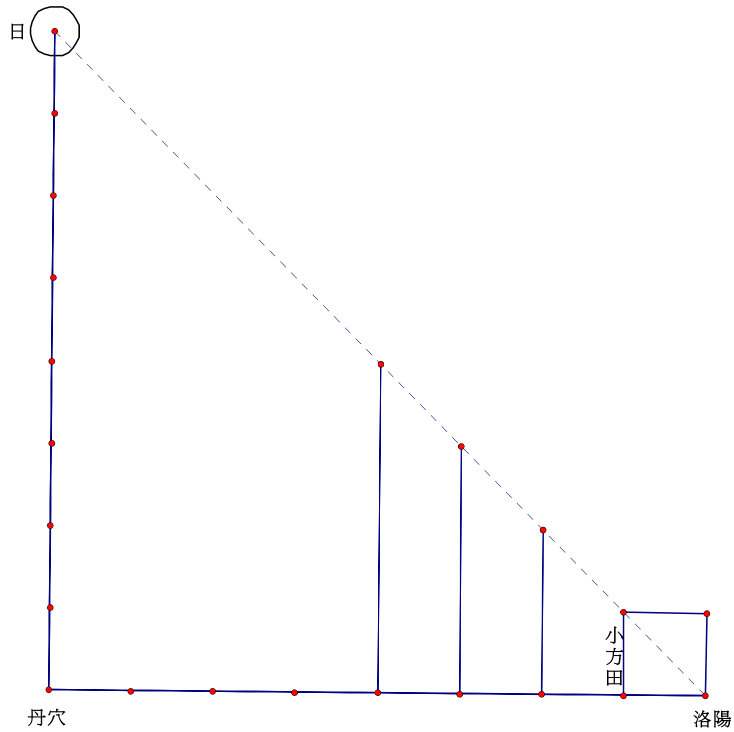
答曰：日去地八萬里。

解曰：自洛南入八萬里至丹穴，丹穴當戴日月行道之地，立八尺之表則影一寸，又出千里則影二寸，又出八萬里至洛陽則影八尺，而八尺表之影八尺，故比如小方田也，八萬里則如大方田，故日去地亦八萬里也，自丹穴以南至於日南之國則日影皆向南，[4]所謂開北戶以向日者也，日南之國在日之南。

---

[4] 「丹穴」一詞在《詩經》爾雅中有如此描述：「岠齊州以南，戴日為丹穴，北戴斗極為空桐，東至日所出為大平，西至日所入為大蒙。太平之人仁，丹穴之人智，大蒙之人信，空桐之人武。」，故古人認爲「丹穴」於日之正下方。

以「**千里差一寸**」利用比例關係並輔以下圖說明：



此處所謂「**千里差一寸**」，應是源自於《周髀算經》卷上之二，其中有一段對話：

昔者榮方問於陳子曰：今者竊聞夫子之道，知日之光大，光之所照一日所行，遠近之數…天地之廣袤，夫子之道皆能知之，其信有之乎？陳子曰：然…陳子曰：日中立竿測影…周髀長八尺，夏至之日晷一尺六寸，髀者股也，正晷者勾也，正南千里勾一尺五寸，正北千里勾一尺七寸。[5]

最後得到結論爲「**周髀長八尺，勾之損益，寸千里**」，依此東算抄的日去地圖便繪製成等腰三角形。在本題雖無較艱深之數學論述，但可知曆算、測望問題是算家需會處理的問題。而三淵先生適合許人？爲何題問此問題？筆者將留待第六章探討。

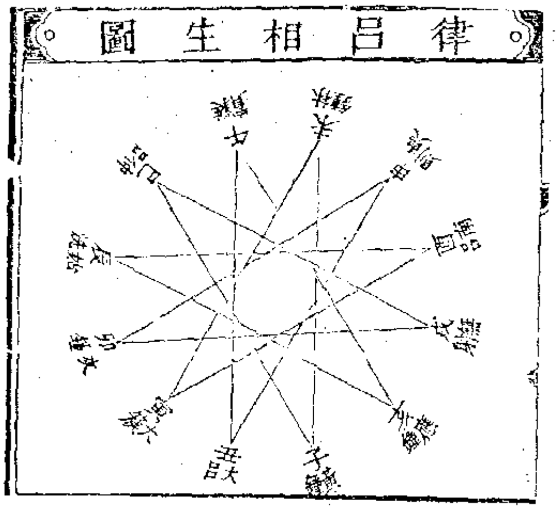
5.1.2 雜題：律呂隔八相生圖

律學又稱律呂或律呂之學，律呂之學在中國古代聲學理論中佔有重要地位，而中朝之間的音樂自古就有相互交流，律學又是樂器的製作與樂曲的編寫的基礎，聲學不僅是用在音樂方面，還跟五行、地支或節氣相結合，雖然後者未具實質意義，但能反映當時的自然觀。

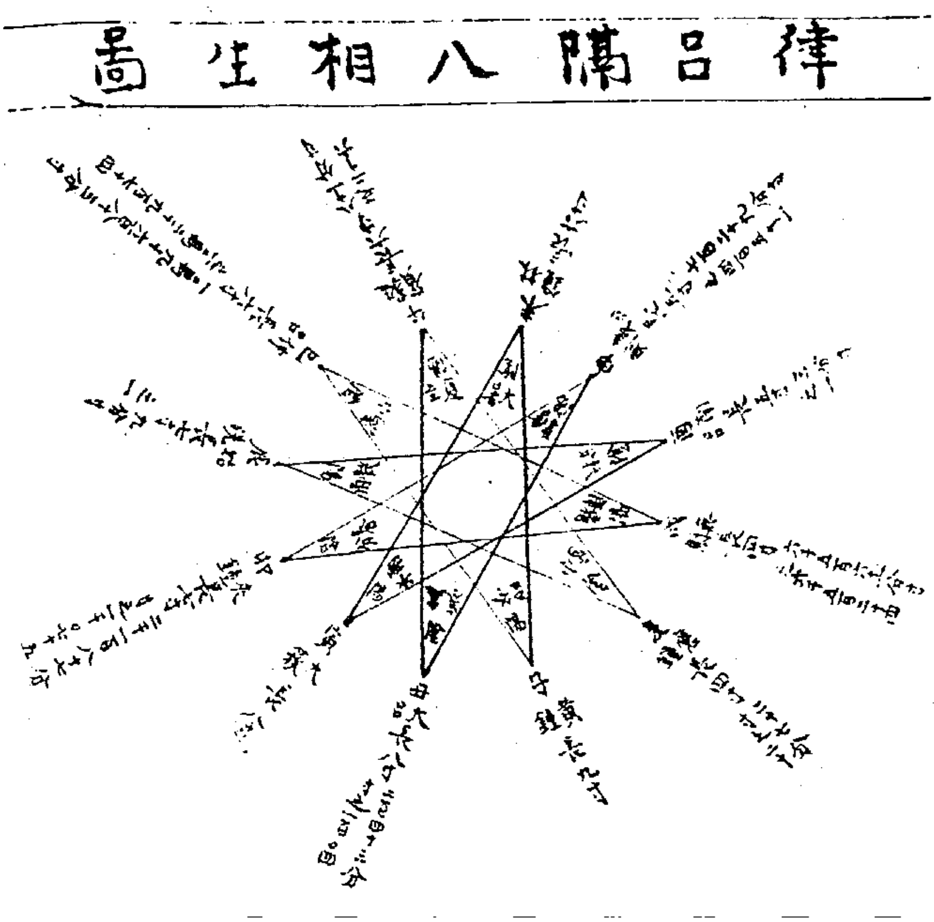
[5] 引自漢．趙君卿注、唐．李淳風釋，《周髀算經》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第一分冊，（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 19。

東算抄在此列出律呂隔八相生圖，顯然是抄自於《算法統宗》的律呂相生圖，並列出相互間的推算方法，而「隔八」二字應從《算法統宗》之律呂相生歌而來：

律呂相生識者稀，黃鐘九寸是根基，
隔八生陰三損一，陰率生陽益一奇，
黃林大簇皆全寸，餘者通之更不疑，
具用九分乘見積，四時氣候配攸宜。



【圖 5-1《算法統宗》之律呂相生圖】



【圖 5-2《東算抄》之律呂相生圖】

除了表示各律之推算規則外，筆者認爲將律學納入《東算抄》，應與自十七世紀起，朝鮮在傳統宮廷音樂與舞蹈的範疇之外，又積極發展出三種不同的聲樂形式－抒情曲（gagok）、敘事曲（gasa）、詩歌吟唱（shijo），介於中產階級與貴族之間的文人學者留下許多的樂譜抄本，[6]有間接關連。

黃鐘律又是律學之根本，在此《東算抄》與《算法統宗》的陳述略有差異，其從音樂和算理兩方面來說明：

黃鐘律，長者聲下，故重濁而舒遲；短者聲高，故清輕而剽急。陽生陰曰下生，陰生陽曰上生，皆以左旋。
陽生陰三分損一，隔八生陰，陰生陽三分益一，隔八生陽。

其中各律之管長數據早在東漢末《周禮》注釋中就有記載，給出了以寸爲單位的十二律管長其數據爲：

黃鐘： 9 寸　應鐘：$4\frac{20}{27}$寸　無射：$4\frac{6524}{6561}$寸　南呂：$5\frac{1}{3}$寸

夷則：$5\frac{451}{729}$寸　林鐘：6 寸　蕤賓：$6\frac{26}{81}$寸　仲呂：$6\frac{12974}{19683}$寸

姑洗：$7\frac{1}{9}$寸　夾鐘：$7\frac{1075}{2187}$寸　大簇：8 寸　大呂：$8\frac{104}{243}$寸

若以三分損益法「**二因三歸為損，三分損一；四因三歸為益，三分益一**」，[7]林鐘即「**陽生陰，三分損一，隔八生陰，陰生陽，三分益一，隔八生陽**」來計算，黃鐘爲 9 寸且屬性爲陽，則隔八相生得林鐘，即$9\times\frac{2}{3}=6$，由林鐘起隔八相生得大簇$6\times\frac{4}{3}=8$，以此類推可得到各律長。

5.1.3 附啟蒙捷術

〈附啓蒙捷術〉共分爲兩部分二十八題，其中假令盈不足術三題，開方釋鎖二十五題，在此雖名之啓蒙捷術，但卻未用算學啓蒙的方法，足見主體性與自主性的呈現。

---

[6] 參閱《韓國》，頁 76。
[7] 參閱劉鈍《大哉言數》，頁 149。

5.1.3.1 假令盈不足

此部分三個問題分別抄自《算學啓蒙》盈不足術門第六、七、九題，其中「假令」之用法應倣自《算學啓蒙》，其於解盈不足問題時必言「假令」二字，[8]有假設之意，此三題分別用三種方式解題，不僅是一題多解，而是對同一類型的問題展現不同的數學思維，從單一的題提升爲「類」，其分析如下：

〔1〕 今有甲米不知其數，貯於四碩五斗囤中，乙誤入粟，滿而相和，今變為糲米，共量得三碩四斗四升，問甲米、乙粟各幾何？糲米六升折粟一斗

答曰：甲米一碩八斗五升，乙粟二碩六斗五升。

法曰：置四石五斗內減三石四斗四升，餘為一石六升，以四升除之，得乙粟，又四石五斗內減乙粟餘為甲米，合問。餘一石六升即糠，而以四升除之者，即粟一斗，米為六升，糠為四升，故以糠四升計粟一斗。

用現代符號表示解法

設甲米：x　乙粟：4.5-x

體積比　米：粟=10：6=5：3

$$x+(4.5-x)\times 0.6=3.44$$

$$0.4x=0.74\Rightarrow x=1.85$$

此題的「糲米六升折粟一斗」爲關鍵，由此得知體積之比，然後列方程式求解。

接著又再度出現「攜酒遊春」問題，與上一章節的解法又有差異，其所用方法乃採逐步推演，未直接使用盈不足術：

〔2〕 今有人攜酒遊春，不知其數，只云遇務而添酒一倍，逢花而飲三斗四升，今遇務逢花各四次，酒盡壺空，問原攜酒幾何？

答曰：三斗一升八合七勺半。

法曰：置第四次所飲三斗四升，內半減第四次所添，餘一斗七升；又加第三次所飲三斗四升，內半減第三次所添，餘二斗五升半；又加第二次所飲三斗四升，內半減第二次所添，餘二斗九升七和半，又加第一次所飲三斗四升，內半減第一次所添，餘為原攜數，合問。又一法見物不知總門

設原攜酒：x

$$2[2[2(2x-3.4)-3.4]-3.4]-3.4=0$$

$$B=[2[2(2x-3.4)-3.4]-3.4]=\frac{3.4}{2}=1.7$$

$$C=[2(2x-3.4)-3.4]=\frac{3.4+1.7}{2}=2.55$$

$$D=(2x-3.4)=\frac{2.55+3.4}{2}=\frac{5.95}{2}=2.975$$

$$x=\frac{2.975+3.4}{2}=3.1875$$

[8] 參見元．朱世傑《算學啓蒙》，頁 1174。

此題解法似乎是爲〈物不知總門〉之同類型題目（第十題）做完整的過程解說，筆者認爲並非作者不懂盈不足術，而是東算家注重解題的過程。

第三題是二色方程問題，一樣寫推理過程，不直接使用盈不足術：

〔3〕 今有鵝鴨九十九隻，直錢九百三文，只云鵝九隻直錢一百二十三文，鴨六隻直錢四十六文，問二色及各價幾何？

答曰：鵝二十四隻直錢三百二十八文，鴨七十五隻直錢五百七十五文。

法曰：置九十九隻，以鴨三隻價二十三文乘之，得二貫二百七十七文又置九百三文，三因得二貫七百九文，二數相減餘四百三十二文，為實，又置鵝三隻價四十一文，內減鴨三隻價二十三文，餘十八文為法，實如法而一，得鵝二十四隻，又列九十九隻內減鵝二十四隻，餘七十五隻即數鴨，求價用異乘同除法，合問。

本題是以「方程術」解之：

解法：設鵝：x　鴨：y

$$x+y=99 \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{123}{9}x+\frac{46}{6}y=903 \ldots\ldots(2)$$

$$(2)\times 3 \Rightarrow 41x+23y=2709 \ldots\ldots(3)$$

$$(1)\times 23 \Rightarrow 23x+23y=2277 \ldots\ldots(4)$$

$$(3)-(4) \Rightarrow 18x=423 \Rightarrow x=24$$

其實以方程式列式解答，所得之數與盈不術公式的各個元素可相互呼應，今將過程完整寫，出足證理路清楚，一方面也便於他人研讀。

5.1.3.2 開方釋所

開方釋所共二十五題，全數皆抄自《算學啓蒙》之〈開方釋所門〉其對照表如下：

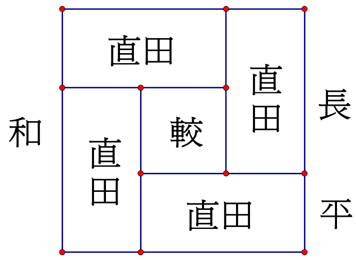
東算	啓蒙	東算	啓蒙	東算	啓蒙	東算	啓蒙	東算	啓蒙
1	8	6	15	11	20	16	26	21	31
2	10	7	16	12	21	17	27	22	32
3	12	8	17	13	23	18	28	23	33
4	13	9	18	14	24	19	29	24	34
5	14	10	19	15	25	20	30	25	22

題目雖同，但解法有所差異，其中第九、十、十一、二十三題爲一題二法，第二十五題用三法，第一、八、九、十四繪有圖形。與《算學啓蒙》最大的差異在於未使用天元術，且繪有圖形作爲輔助。利用圖形的輔助在解決數學問題時有畫龍點睛，使人易曉之功用。例如在處理面積問題，出入相補原理，弦圖，條段法等，在《東算抄》的開方釋所第一題便利用條段法，即朱世傑所說的古法：

〔1〕**今有直田八畝五分五釐，只云長平和得九十二步，問長平各幾何？**

答曰：長五十四步，平三十八步。

法曰：列和自之得八千四百六十四即直田四段即較自乘合數**，內減直積四倍**八千二百八**餘二百五十六**即較自乘數**，平方開之得較十六，副置和加較折半得長，減較折半得平，合問。**



在東算抄中繪製有圖

其解法爲設長：x　平：y

一畝＝240 平方步，故八畝五分五釐＝8.55×240＝2052

x＋y＝92

xy=2025

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$ ……【如右圖，直田四段及較自乘】

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=92^2-4\times 2025=256$

$\therefore x-y=16$

x=54，y=38

其實若忽略「立天元一」之用法細究各題之解法卻與啓蒙有相同之處：

<table>
<tr><td colspan="3">題　文</td></tr>
<tr><td colspan="3">〔5〕今有直田九畝八分，只云長取八分之五，平取三分之二，相併，得六十三步，問長、平各幾何？
答曰：平四十二步，長五十六步。</td></tr>
<tr><td colspan="3">解　法</td></tr>
<tr><td>東算抄</td><td>法曰：列分母三分　八分
之二　之五
互乘子，得十五箇長、十六箇平，又分母八分、三分相乘得二十四，以乘云數得一千五百十二，此十五長、十六平相和之數，</td><td>設長：x　平：y
依題意列式：</td></tr>
</table>

	寄左，列積通步以十五乘之，得三萬五千二百八十為實，以寄左數為縱方，以十六為隅法，減縱平方開之，得平，以平除積得長，合問。	$\frac{5}{8}x+\frac{2}{3}y=63$ $xy=9.8\times240=2352$ $15x+16y=63\times24=1512$ $15xy=2352\times15=35280$ $(1512-16y)y=35280$ $-16y^2+1512y=35280$ $16y^2-1512y=-35280$ $y=42$ $x=2352\div42=56$
算學啓蒙	長 平 術曰：依圖佈算 母互乘子乃得長十五箇平十六箇，分母相乘得二十四，乘六十三得一千五百一十二即是十五長十六平數也，立天元一為平，以十六乘之減云數，餘為十五長，用平乘之為十五段積，寄左，列畝通步以十五乘之，與寄左相消得開方式，平方開之得平，以平除積得長，合問。	依圖佈算 8 5 3 2 15’· +16•½ = 63×24 = 1512 設平爲 x 15’· = 1512 − 16x 15’iÏ (1512 − 16x)x $15\times9.8\times240=35280$ $-16x^2+1512x-35280=0$ $x=43$ ’· = 2352 ÷ 42 = 56

第十七題的解法非常特殊，若以其解題所列的方程式而言，已帶有根號而且對於各項的稱呼用甲、乙、丙縱表示：

〔17〕今有圓田一段，周為實，平方開之，得數，加入原積共得一百一十四步，問周徑各幾何？

答曰：周三十六步，徑一十二步。

法曰：列共數十二乘之得一千三百六十八為實，以十二為甲縱，一為丁縱即隅法，帶縱三乘方開之得平方開之數，自之得周，三而一得徑，合問。

今以現代符號表示：

設周爲 x

依題意列式：

$$\sqrt{x}+\frac{x^2}{12}=114$$

$$12\sqrt{x}+x^2=114\times 12=1368$$

$$x^2+12\sqrt{x}=1368$$

$$\sqrt{x}=6$$

$$x=36$$

對同一問題，《算學啓蒙》解題的方向不同「**立天元一為徑**」，所列之方程式爲「$9x^4-2736x^2-48x+207936=0$」，雖然筆者無法斷言是否朱世傑刻意避開未知數於根號之中的情形？但可以肯定的是《算學啓蒙》中所列的方程式，未出現類似的方程式。

第二十五題提出三種解法，其中一法與《算學啓蒙》實質上相同。另外，還提出一個捷算法：

〔25〕今有大、小方田二段，只云大方冪內減小方面餘一千二百六十八步，又云小方冪內減大方面餘七百四十八步，問大小方面各幾何？

答曰：大方面三十六步，小方面二十八步。

法曰：列大方餘冪自之得一百六十萬七千八百二十四，內減小方餘冪得一百六十萬七千七十六為實，以一為甲縱，倍大方餘冪為乙縱，以一為丁縱即隅法，三乘方翻法開之，得大方面，加入小方餘冪得七百八十四為實，平方開之得小方面，合問。

今以現代符號代數解法表示：

設大方面：x　小方面：y

$$x^2-y=1268$$

$$y^2-x=748$$

（一）

$$y=x^2-1268\Rightarrow\left(x^2-1268\right)^2-x=748$$

$$x^4-2\times 1268x^2-x+1268^2-748=0$$

$$x^4-2536x^3-x+1607076=0$$

$$x=36$$

（二）啓蒙之法

$$x=y^2-748$$

$$\left(y^2-748\right)^2-y=1268$$

$$y^4-1496y^2-y+558236=0$$

一法：列小方餘冪自之得五十五萬九千五百四，內減大方餘冪得五十五萬八千二百三十六為實，以一為甲縱，倍小方餘冪為乙縱，以一為丁縱，三乘方法開之得小方面，加入大方餘冪得一千二百九十六為實，平方開之得大方面，合問。	$x=y^2-748$ $(y^2-748)^2-y=1268$ $y^4-1496y^2-y+558236=0$ $y=28$
一法：列大方餘冪平方開之得三十六，則積不足為二十八，此即小方面所減數也，又列小方餘冪加三十六得七百八十四為實，平方開之得二十八，則積無餘及不足，合問。此非正法，然亦可為捷徑之一段，故今姑錄之卷末云爾。	（三） $\sqrt{1268}=35.6089....$ $36^2=1296$ $1296-28=1268$ $748+36=784$ $\sqrt{784}=28$ 積無餘，及不足。

其中第三個方法雖言「**非正法**」，但其原理是正確的，先求其最接近之數，因 1268 是減 y 後所得之數，故假設 x 是 36，此有點類似單設法求解，且預估的方式是正確的。

由以上兩題可見轉化及自主，並發現提升之處，但既然此處題目完全與算學啓蒙相同作者肯定參考過算學啓蒙來編寫，但爲何捨天元術不用，亦未像開方各術門廣用籌式表達方程式，仍須仔細探究？

另外，由第二十五題的解法最末所言「…**故今姑錄之卷末云爾。**」，可確定原書應以此爲終，其後之追錄爲追加之部分，與附錄中未記載相符。

5.2 卷之四內容特色

從卷之四可說是《東算抄》中最令人感到有「溫度」的部分，藉著〈問答〉的探究，彷佛將讀者帶回 1713 年那場對話場景之中。此外本卷之〈附啓蒙捷術〉的題目全部「抄」自《算學啓蒙》的〈開方釋所門〉，可見編者或作者頗重視『智慧財產權』，筆者將本卷之體例、內容特色，歸納整理如下：

（1）本卷的體例共有如下九種：

1.「今有」－「答曰」。
2.「或問」－「答曰」－「法曰」。
3.「或問」－「答曰」－「法」－「又法」。
4.「或問」－「答曰」－「法」。

5.「或問」－「答曰」。
6.「又問」－「答曰」。
7.「…問…」－「答曰」－「解曰」。
8.「今有」－「答曰」－「法曰」。
9.「今有」－「答曰」－「法曰」－「一法」。

（2）收錄數學對話的內容，可見當時的對話頗受到重視，清朝使節來訪應是當時宮廷中之大事，東算家把握學習的機會，並彰顯自己的成就。《東算抄》把情境去除掉，只列出單純問題形式，可見原先成書的動機應再研究。

（3）收錄三淵先生所題問之相關天文曆法問題，可知曆算亦是東算家所需具備的算學能力。當時算學家的交遊情形與算學家所扮演的角色，亦值得再研究。

（4）〈附啓蒙捷術〉中的〈假令盈不足〉，皆未用盈不足術解題，「攜酒遊春」問題以逐步推導解題，另一題用方程術解題，皆未使用現成之口訣或公式，有解說之意。而不用公式更可彰顯其對問題本質的瞭解。

（5）〈開方釋所〉所有問題皆收錄自《算學啓蒙》之〈開方釋所門〉，但差別在於皆未用天元術解題。

（6）第 16、22、23、24 倣《算法統宗》以“○”爲斷句符號。

（7）〈開方釋所〉第二十五題，用類似單設法解題，展現出靈活的思維，但東算家指稱「**此非正法**」，也可看出其對數學嚴謹性的認定。

（8）由〈開方釋所〉最後一題所寫「**此非正法亦可為捷徑之一段，故今姑錄之卷末云爾**」，[9]可知卷之四爲原本預定之最後章節。

5.3 追錄

此部分共二十題，未記載於東算抄的目錄之中，故名爲〈追錄〉，共分爲〈堆積還源門〉十一題，主要是探討堆垛問題。盈不足術包含持錢買絲、松竹並生共兩題，方程正負七題，其中兩題與《算學啓蒙》方程正負門相同，另有堆垛問題四個及一個均輸問題。

5.3.1 堆積還源門

同樣是處理堆垛問題，但〈堆積還源門〉與〈缶瓶堆垛門〉最大的不同在於，前者加入了圖示驗證，並貼心地佈置了數目較小的「假如」題，附於「今有」題之後以方便繪圖及解說。筆者今將書中圖示繪出，並從中發現東算家的創見。

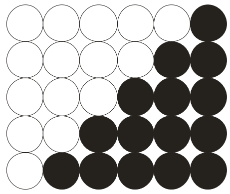
[9] 參見《東算抄》卷之四，頁 370。

5.3.1.1 平面問題：茭草、圓箭、方箭

〔1〕今有茭草底子每面五十四，問積幾何？
答曰：一千四百八十五束。
術曰：副置五十四束，下位添一束以乘上位得二千九百七十，半之，得積，合問。

即 $\dfrac{(54+1)\times 54}{2}=1485$ 此題完全抄自算學啓蒙，緊接著第二題就以圖形解說：

〔2〕假如茭草底子每面五束，問積幾何？
答曰：十五束。
列五束於上，下位添一相乘得三十，半之，得十五，合問。餘皆倣此



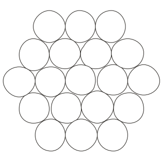
此題「**列五束於上，下位添一相乘**」乃配合圖示，不同於第一題之公式解法「**副置五十四束下位添一束以乘上位**」。

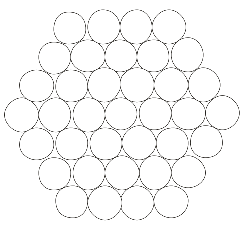
第三、四題爲「圓箭」問題，第一個解法利用等差級數性質，第二個解法利用公式解法。

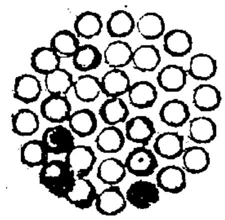
〔3〕今有圓箭一束，外周五十四隻，問積幾何？
答曰：二百七十一支。
術曰：副置五十四隻，下位添六，以乘上位得三千兩百四十為實，以圓法十二而一，加心箭一隻，合問。

利用圓法，設外周爲 n，則圓箭總數爲 $\dfrac{(n+6)\left[\dfrac{n-6}{6}+1\right]}{2}+1=\dfrac{(n+6)\times n}{12}+1$，接著給出假如題並繪出圖示（左圖爲原書之圖，右二圖爲筆者繪製，以佐證「**圓箭六包一**」）。

〔4〕假如圓箭一束，外周十八隻，問積幾何？
答曰：三十七隻。
列十八隻於上位，添六支以乘下位，得四百三十二為實，十二而一得數，加心箭一隻，合問。圓箭六包一

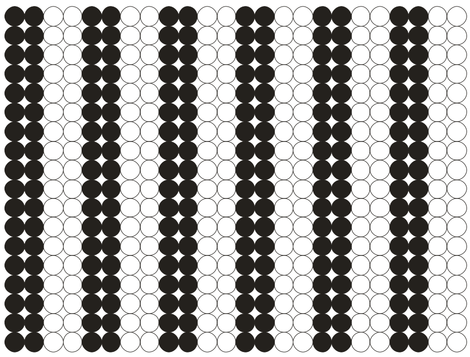






第一個解法利用$\dfrac{(n+6)\left[\dfrac{n-6}{6}+1\right]}{2}+1$，即設外周為$n$，先去掉中心 1 個後，可將圓箭展開，則各層形成一公差為六的等差數列，先算出該數列之和，最後再把中心加回來。

圓箭虛積四百三十二即外周十八加六得二十四以十八乘之得數者乃元積之十二倍而心箭初不入故加一隻然後合問餘皆倣此。



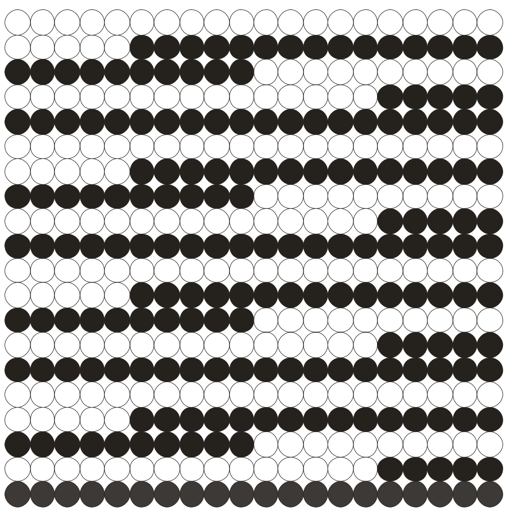
圓箭外周十八隻加六相乘之圖

第二個解法為$\dfrac{(n+6)\times n}{12}+1$，即設外周為$n$，先去掉中心 1 個後，$(n+6)\times n$為虛積，除以 12 後再加中心 1 個，即為所求如圖…

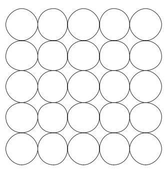
處理方箭問題時仍配合不同的公式給予不同的圖示加以驗證：

〔6〕**假如方箭外周十六，問積幾何？**

答曰：二十五。



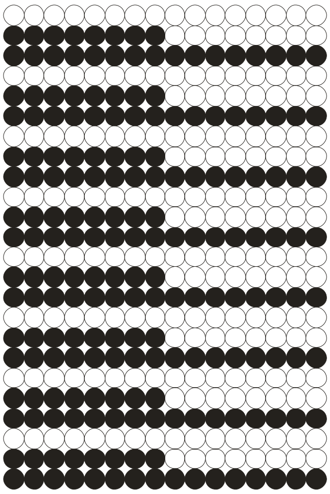
方箭外周十六各加四相乘之圖
方箭四百即方積十六倍餘皆倣此
又有下法圖詳見可推



方箭八包一

設外周爲 n，此法爲利用 $\left[\frac{(n-4)}{4}+2\right]^2=\frac{(n+4)^2}{16}$，其中 $\left[\frac{(n-4)}{4}+2\right]$ 爲方箭每邊之長。則 $(n+4)^2$ 爲所求積的十六倍。

另一個圖解法利用設外周爲 n，$\frac{(n+8)\times\left[\frac{n-8}{8}+1\right]}{2}+1=\frac{(n+8)\times n}{16}+1$，同樣利用「方箭八包一」的特性，先去掉中心 1 個，則由內而外每一層形成一個公差爲八的等差數列，求出級數和，再將中心加回來即爲所求。圖解如下：



方箭周十六加八相乘之圖
置周添八以週乘得數為實以
十六除之加中心一

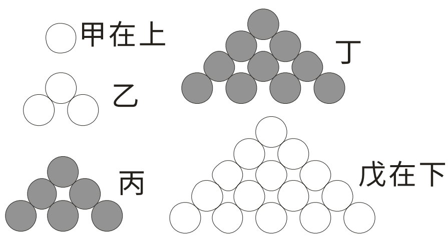
5.3.1.2 立體問題：三角垛、四角垛

前一小節處理有關平面問題，本小節探討立體問題，並以三角垛與四角垛爲例，解三角垛問題一般以 $\sum\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{[n(n+3)+2]\times n}{6}$ 來計算或列式，今分析第八題之解法如下：

〔8〕**假如每面底子五箇，共積幾何？**
答曰：三十五箇。

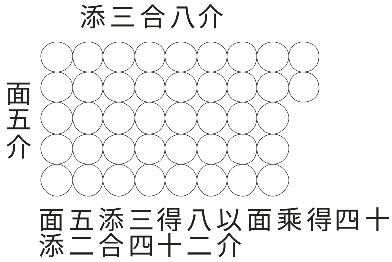
第一個圖解法圖示爲利用逐層遞推的方式：

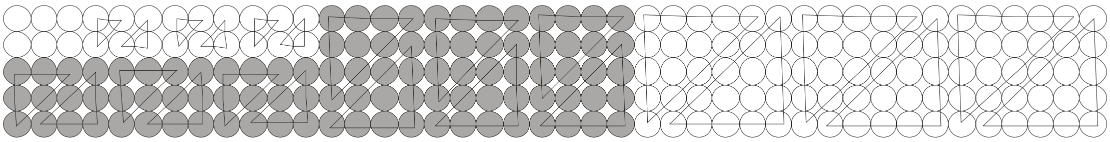
右三稜高下前
後各五面



第二個圖示解法爲利用$\sum\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{[n(n+3)+2]\times n}{6}$中之$\frac{[n(n+3)+2]\times n}{6}$：

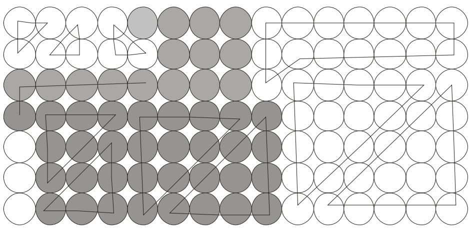
右列四十二以面五介乘之得數
乃三角果積六倍數





此即$[5\times(5+3)+2]\times 5=210$，解題者還細心的以顏色區分，及畫上輔助之三角形，以驗證公式成立。

第三個圖示解法利用$\sum\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}\times(n+2)}{3}$，其圖示如下：



又面添一即六以面五相乘得三十折
半得十五又面添二即七以十五相乘
得一百五三而一得三十五介合問

第四個型態的解法爲「**又面添二即七，以面五相乘得三十五，又面添一得六，相乘得二百十介，六而一，先添一、後添二亦同**」即$\sum\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+2)\times n(n+1)}{6}$。

第十題爲四角垛問題以

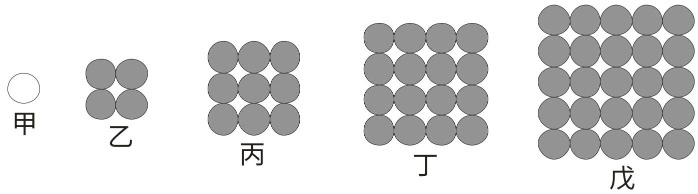
$\sum n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]=\frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\times n$爲主，提出三種圖示：

〔10〕**假如每面底子五箇，問共積幾何？**
答曰：五十五箇。

第一個圖解法圖示爲利用逐層遞推的方式：

四角果面

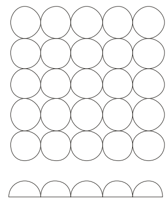
右四面高下前後左右
五面各五箇



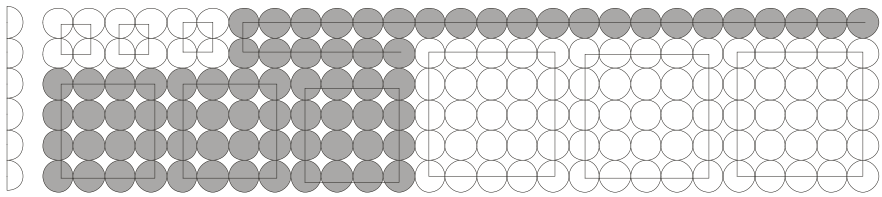
第二個解法圖示乃利用$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]$

解題者仍畫上輔助線條，以下圖示，筆者乃倣原圖繪製而成。

右面五介添半介得五
介半，又以面五相乘得
二十七介半圖

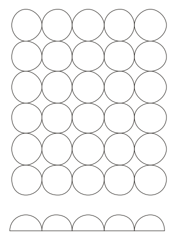


右二十七介半，又面五介添一得六介，相乘得一百六十五介，三而一，得五十五個，合問。

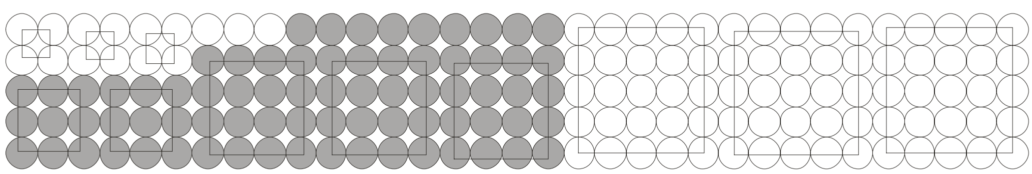


第三個解法圖示利用$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\times n$來解題：

面五介添一箇半得六
箇半，又以面五介乘之
得三十二介半圖



右三十二介半又添半介，以面五介相乘，一百六十二介，[10]三而一得五十五介圖。



[10] 此處原書計算錯誤，應更正爲「一百六十五介」。

5.3.1.3 混合問題：三角垛加四角垛

第十一題因圖解法有誤，於方程正負門第三題已有更正，故筆者在此以後者爲例，本題與《算學啓蒙》之〈堆積還源門〉第十四題相同，但東算家給予圖解說明：

〔11〕今有三角、四角果子各一所，共積六百八十五介，只云三角底子一面不及四角底子一面七介，問二色底子一面各幾何？

答曰：三角底面五介，四角底面十二介。

術曰：列積六之得四千一百一十為實，即四角虛實共積二所每所各一千九百五十為實，積三倍六之則為二所，故方廉隅併倍之，三角虛實共積一所二百十為實積六倍故為一所，列不及七於三位上位加一得八四角添一以底面乘之故加一，中位加半則七介半四角乘數再以底面添半乘之，下位得七三位互乘得四百二十倍之得八百四十，以減原積四角隅積餘三千二百七十為實，又八介七介半七介輪乘得一百六十八介半，（輪乘者，八介、七介半相乘得數，八介、七介相乘得數，七介半、七介相乘得數，三位併之得一百六十八介半），倍之，又列一介、兩介相乘得二介三角添二，以底面乘之，又添一再乘，故一、二相乘，又併入上位共得三百三十九為縱方，又八介、七介半、七介相併得二十二介半，倍之得四十五介，又一介、二介相併得三介，加入上位共得四十八介為縱廉，以三為丙縱三角一所，四角兩所合為三，立方開之得三角底面五介，加不及七介得四角底面十二介，合問。

以上解法將數字相乘的過程解說的鉅細靡遺，用現代帶數符號表示如下：

設三角果子底面爲 n，則四角果子底面爲 n+7
依題意列式爲：

※ 三角垛：

$$\sum \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

※ 四角垛：

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{(n+7)(n+8)(2n+15)}{6}=685$$

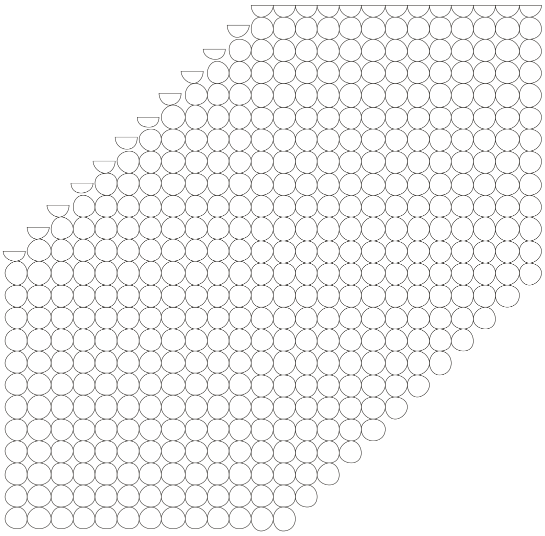
$$n(n+1)(n+2)+2(n+7)(n+8)\left(n+\frac{15}{2}\right)=4110$$

$$n^{3}+3n^{2}+2n+2\left(n^{2}+15n+7\times 8\right)\left(n+\frac{15}{2}\right)=4110$$

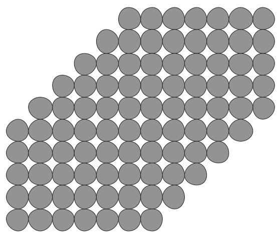
$$3n^{3}+48n^{2}+339n=3270$$

$$n=5$$

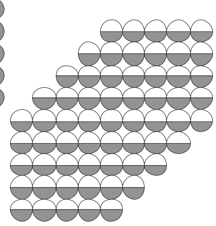
但最爲特別的還是在其圖解的過程：



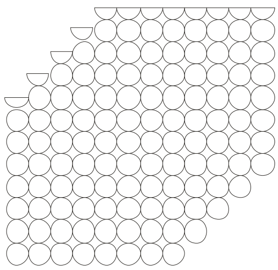
（一）



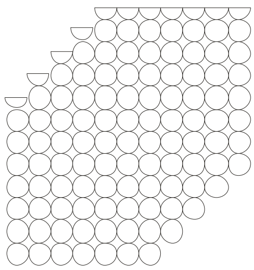
（二）



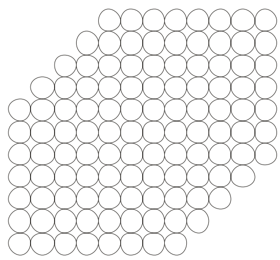
（三）



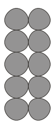
（四）



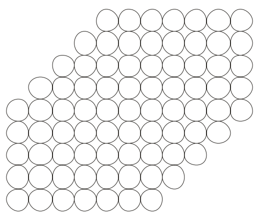
（五）



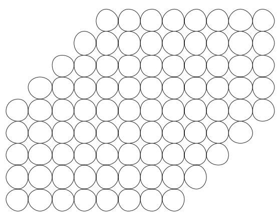
（六）



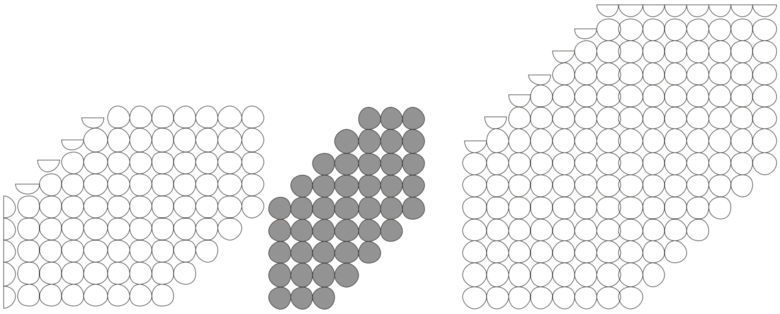
（七）



（八）

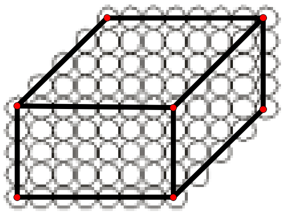


（九）



（十）　　　　（十一）　　　　（十二）

東算家利用以上圖形來驗證方程及所求解之正確性，最重要的是將其立體化，此處原圖並未添加立體輔助線，但若以原題之解法，東算家是以立體的心象解題，今將解法分析如下：



（一）「長十三介、平十二介、高十二介半，四角果虛實共積一所，合一千九百五十。」：

$(n+8)(n+7)(n+7.5)=(5+8)(5+7)(5+7.5)=13\times12\times12.5=1950$

（二）「長七介、平六介、高五介，三角果虛實一所，合二百十。」：

$n(n+1)(n+2)=5(5+1)(5+2)=5\times6\times7=210$

（三）「長五介、平五介、高五介，合一百二十五，四角、三角積中各上商得數一段，三角一介、四角二介，合丙縱三介，與上商五介三次上乘得三百七十五介。」：

$n^3+2n^3=3n^3=3\times5^3=375$

（四）「長八介、平五介、高七介半，合三百介，右四角積所附縱方一段。」：

$8\times7.5\times n=60n=8\times7.5\times5=300$

（五）「長七介、平五介、高七介半，合二百六十二介半，右四角積所附縱方一段。」：

$7\times7.5\times n=52.5n=52.5\times5=262.5$

（六）「長八介、平七介、高五介，合二百八十介，右四角積所附縱方一段。」

$8\times7\times n=56n=56\times5=280$

（七）「長二介、高五介、又三角積所附縱方一介。」：

$2\times n=2\times5=10$

（八）「長七介、平五介、高五介，合一百七十五介，右四角積所附縱廉一段。」：

$7\times n\times n=7n^2=7\times25=175$

（九）「**長八介、平五介、高五介、合二百介，又四角積所附縱廉一段。**」：

$8\times n\times n=8n^2=8\times 25=200$

（十一）「**長三介、平五介、高五介，合七十五介，右三角積所附縱廉一段。**」：

$n^2+2n^2=3\times 25=75$（圖中黑白相間表示兩者混合）

（十二）「**長八介、平七介、高七介半，合四百二十介，倍之得八百四十介，右四角積所附差七介，所成一段先減元積數。**」

$8\times 7\times 7.5\times 2=840$

以上（一）～（十二）項與方程式的各項係數相互呼應，求得總數亦符合所給條件，由平面擴展至立體，東算家提出另類的解題思維。

5.3.2 盈不足術

此部分由《算學啓蒙》之〈盈不足術門〉中收錄第四及第八題，分別爲「持錢買絲」及「松竹並生」問題，解法與《算學啓蒙》相同，只是每題術曰後皆有解曰，是詳細說明列式的程序，筆者不再重述。但「松竹問題」以盈不足術處理所得答案爲近似解，筆者在此略做說明：

> **今有松竹并生，只云松初日長五尺，竹長二尺，松日自半，竹日自倍，問松竹幾何日而長等？**
> **答曰：二日九分日之二，各長七尺七寸九分寸之七。**[11]

以盈不足術解題基本上是將生長函數視爲線性的，若假設經 D 日而等長，可列關係式：$\dfrac{D-2}{1.5}=\dfrac{3-D}{5.25}$，則 $D=2\dfrac{2}{9}$ 日，然而實際情形應如下分析：

	二日	三日	D 日
松	5+2.5	5+2.5+1.25	$\dfrac{5\left[1-(0.5)^D\right]}{1-0.5}=10\left[1-(0.5)^D\right]$
竹	2+4	2+4+8	$2\left(2^D-1\right)$

設 D 日而長等

$10\left[1-(0.5)^D\right]=2\left(2^D-1\right)$

$\left(2^D\right)^2-6\times 2^D+5=0$

$2^D=5\Rightarrow D=\dfrac{\log 5}{\log 2}$

[11] 參見《東算抄》，頁 385。

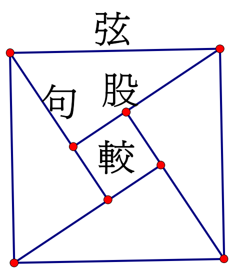
5.3.3 方程正負門

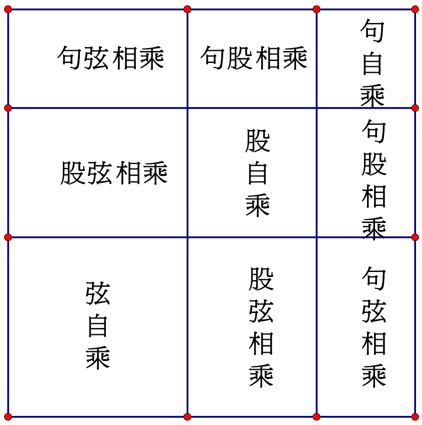
方程正負門中共有七題，第一、二題收錄自《算學啓蒙》方程正負門的第八及第九題，第一題中出現了《東算抄》中第四個天元術的例子，但解法與《算學啓蒙》相同，惟本門二題皆繪有輔助圖示，並有解曰說明，是最大的不同。第三至六題爲堆垛問題，皆使用圖示，其中第三、第四與《算學啓蒙》之〈堆積還源門〉的第十四和十二題相同，第七題爲均輸問題。

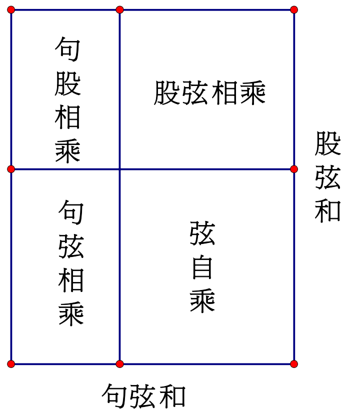
筆者今以第一題爲例將解法以現代代數符號表示：

5.3.3.1 句股問題：利用圖形思考

〔1〕今有直田，句弦和取二分之一，股弦和取九分之二，共得五十四步，又句弦和取六分之一減股弦和三分之二，餘有四十二步，問句股弦各幾何？
答曰：句二十七步，股三十六步，弦四十五步。







解法：

設句：a 股：b 弦：c

$$\frac{1}{2}(a+c)+\frac{2}{9}(b+c)=54....(1)$$

$$-\frac{1}{6}(a+c)+\frac{2}{3}(b+c)=42....(2)$$

$$(1)\times 18 \Rightarrow 9(a+c)+4(b+c)=972....(3)$$

$$(2)\times 18 \Rightarrow -3(a+c)+12(b+c)=756....(4)$$

$$(4)\times 3+(3) \Rightarrow 40(b+c)=3240 \Rightarrow b+c=81$$

$$a+c=[(b+c)\times 12-756]\div 3=72$$

$$2(b+c)(a+c)=2(ab+bc+ac+c^2)=(a+b+c)^2=11664$$

$$a+b+c=108$$

$$a=108-81=27$$

$$b=108-72=36$$

$$c=45$$

5.3.3.2 堆垛問題

第三至六題所用的解法公式與〈缶瓶堆垛門〉及〈堆積還源門〉皆同，第三題與第五題並附有圖解，今將公式整理如下：

題號	題文	公式
3	今有三角、四角果子各一所，共積六百八十五介，只云三角底子一面不及四角底子一面七介，問二色底子一面各幾何？	三角垛：$\sum\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 四角垛： $\sum n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]$
4	今有四角果子一所，積二萬九千三百七十介，問每面底子幾何？	$\sum n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]$
5	今有酒瓶一垛，底闊四介，長七介，問積幾何？	$S=1\times a+2\times(a+1)+3\times(a+2)+\ldots+n\times[a+(n-1)]$ $=\frac{1}{3}n(n+1)\left\{\frac{[a+(n-1)]-n}{2}+\frac{1}{2}+[a+(n-1)]\right\}$ $=\frac{1}{6}n(n+1)\{2[a+(n-1)+a]\}$ a：長　n：闊
6	今有酒瓶一垛，積六十介，只云闊不及長三介，問長闊各幾何？	同第五題

其中第四題列出詳細開方過程，由此題可瞭解何謂「兩縱不同法」：

〔4〕 今有四角果子一所，積二萬九千三百七十介，問每面底子幾何？

答曰：四十四介。

術曰：列積三之得八萬八千一百一十為實，以一為長闊之差，以半為高闊之差，以兩縱不同法立方開之。

解曰：初商置四十為準，另以四十張三位，上位添一得四十一，中位添半得四十半，下位四十，以上位乘中位得一千六百六十半，又以下位乘之得六萬六千四百二十，即立方正面，以減元積餘為二萬一千六百九十為實。又列四十以四十一乘之得一千六百六十半，又列四十以四十半乘之得一千六百二十，又列四十半以四十一乘之得一千六

百六十半，三位併之得四千九百二十半，即立方之三段縱方，寄左，又立次商置四為準，又四十一、四十半、四十相併得一百二十一半，以次商四乘之得四百八十六，即立方之三段縱廉，寄左，又次商四自乘得十六，即立方一段隅，併上項寄左二位，得五千兩百二十二半與次商四相呼得二萬一千六百九十，除實恰盡，合問。

今將解法以現代代數符號表示：
設底面：n

$$\sum n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]=29370$$

$$\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]=88110\ldots(1)$$

初商爲 40，令 $n=40+n_1$ 代入（1）式

$$(40+n_1)(40.5+n_1)(41+n_1)=88110$$

$$n_1^{\ 3}+(41+40.5+40)n_1^{\ 2}+(40\times41+40\times40.5+40.5\times41)n_1+40\times40.5\times41=88110$$

$$n_1^{\ 3}+121.5n_1^{\ 2}+4920.5n_1=21690$$

$$n_1\left(n_1^{\ 2}+121.5n_1+4920.5\right)=21690\ldots(2)$$

置次商爲 4， $21690-4\times\left(4^2+121.5\times4+4920.5\right)=0$

故 $n=40+4=44$

由此解法可看出是利用增乘開方法求解可寫成如下過程：

$$\sum n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]=29370$$

$$\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)\right]=88110$$

$$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-88110=0$$

1	＋	$\frac{3}{2}$	＋	$\frac{1}{2}$	－88110		40
		40	＋	1660	＋66420		
1	＋	41.5	＋	1660.5	－21690		
		40	＋	3260			
1	＋	81.5	＋	4920.5			
	＋	40					
1	＋	121.5	＋	4920.5	－21690		4
	＋	4	＋	502	＋21690		
1	＋	125.5	＋	5422.5			

5.3.2.3 均輸問題：擺脫傳統，使用方程正負術

第七題爲典型的均輸問題，東算家使用兩種方式解題，正負法的使用使得數字運算簡化，抓住問題的本質，不受限於傳統的算法，今將兩種方法詳列如下以供讀者比較：

〔7〕今有糧一萬九千石，派與甲、乙、丙三縣，各以其人戶多少、米價貴賤、僦值遠近、舟車險易而均輸之，甲縣戶三萬，米石價一兩四錢，遠輸二百里，用車載二十石行一里僦錢十三文，交乙縣戶兩萬，米石價一兩二錢，遠輸五百里，用舟載二十五石行一里僦錢三文，丙縣戶一萬，米石價一兩二錢，遠輸兩百里，用人擔六斗行五十里，雇值錢十八文，問各縣輸米幾石、雇錢幾許、每戶總計米價、雇價各幾何？

答曰：甲：三萬戶，共八千石，共僦車值一萬四百兩，每戶米二斗六升六合三分合之二，每三戶合米八斗，僦值錢三錢四分三分文之二，每三戶合錢一兩四分，總計米價、雇價每戶錢七錢二分。

乙：二萬戶，共八千石，共僦船值四千八百兩，每戶米四斗，僦值錢二錢四分，總計米價、雇價每戶錢七錢二分。

丙：一萬戶，共三千石，共負擔雇價三千六百兩，每戶米三斗，負擔雇價錢三錢六分，總計米價、雇價每戶錢七錢二分。

術曰：各以其縣米價併僦值之數，命其戶以正負較列之，以甲縣車載二十石除其僦值十三文得六里五戶即一石行一里數也，以乘二百里得一兩三錢，并米價一兩四錢，合得二兩七錢。以乙縣舟運二十五石除其僦錢三文，得一里二戶即以一石行一里數，以乘五百里得六錢，并米價一兩二錢，共得一兩八錢。以丙縣負擔六斗除雇值十八文，得三文即一斗行五十里數，以乘一石得三錢，即一石行五十里數。以五十里除之得六分，即一石行一里數，以二百里乘之得一兩二錢，并米價一兩二錢共得二兩四錢。

原法以各縣米價併僦錢之數以除其戶為衰，甲二兩七錢除三萬為一萬一千一百十一九分之一，乙一兩八錢除二萬為一萬一千一百十一九分之一兩二兩四，除萬為四千一百六十六三分之二，各通分內子，甲十萬以乙分母九、丙分母三，乘之，得二百七十萬乙十萬，以甲分母九丙分母三乘之得二百七十萬，丙一萬兩千五百，以甲分母九乙分母九乘之得一百一萬二千五百為各衰，合之為六百四十一萬二千五百，為法，各衰乘總米得數為實，以法除之得各縣米數。

以上爲均輸法筆者依術文程序以現代符號加以整理如下：

	戶數	米價（兩/石）	距離（里）	僦錢（文）
甲	30000	1.4	200	13（20 石 1 里）
乙	20000	1.2	500	3（25 石 1 里）
丙	10000	1.2	200	18（6 斗 50 里）

【甲】

13÷20=0.65（文）＝0.0065（兩） ….一石行一里

0.0065×200=1.3（兩）…. 一石行二百里

1.3＋1.4=2.7（兩）

【乙】

3÷25=0.12（文）＝0.0012（兩） …一石行一里

0.0012×500＝0.6（兩）…一石行五百里

0.6＋1.2=1.8（兩）

【丙】

18×10/6÷50＝0.6（文）＝0.006（兩） ….一石行一里

0.006×200＝1.2（兩） ….一石行二百里

1.2＋1.2＝2.4（兩）

假設甲米：x 石、乙米：y 石、丙米：z 石

又每戶負擔的錢要相等

【以各縣米價并僦錢之數以除其戶爲衰】

甲衰：$\dfrac{30000}{2.7}=11111\dfrac{1}{9}$　乙衰：$\dfrac{20000}{1.8}=11111\dfrac{1}{9}$　丙衰：$\dfrac{10000}{2.4}=4166\dfrac{2}{3}$

通分內子

甲衰：$\dfrac{30000}{2.7}=11111\dfrac{1}{9}=\dfrac{2700000}{9\times9\times3}$ ＝＞2700000

乙衰：$\dfrac{20000}{1.8}=11111\dfrac{1}{9}=\dfrac{2700000}{9\times9\times3}$ ＝＞2700000

丙衰：$\dfrac{10000}{2.4}=4166\dfrac{2}{3}=\dfrac{1012500}{9\times9\times3}$ ＝＞1012500

2700000＋2700000＋1012500＝64102500

$$x=\frac{19000\times2700000}{64102500}=8000$$

$$y=\frac{19000\times2700000}{64102500}=8000$$

可簡化成：$\dfrac{2.7x}{30000}=\dfrac{1.8y}{20000}=\dfrac{2.4z}{10000}$

$\Rightarrow x:y:z=8:8:3$

$$z=\frac{19000\times1012500}{64102500}=3000$$

另外，再以正負法解題：「**正負法以二兩七錢命為甲縣之衰為二十七戶以一兩八錢命為乙縣之衰為十八戶以二兩四錢命為丙縣之衰為二十四戶以三縣衰命為適足而列之甲之二兩七錢乙之一兩八錢丙之二兩四錢同為一石之價則一也然則甲二十七戶之米乙十八戶之米丙二十四戶之米同故曰適足**」

甲三萬戶正	**乙二萬戶正**	**丙一萬戶正**	**米一萬九千石**
甲二十七戶正	**乙十八戶負**		**適足**
	乙十八戶正	**丙二十四戶負**	**適足**

右互乘同減異加得丙米三千石

【正負法】之解法如下：
假設甲、乙、丙三縣每戶米分別爲 A、B、C
因每戶均輸故 2.7A＝1.8B=2.4C
即 27A=18B=24C 可視爲甲縣二十七戶米、乙縣十八戶米、丙縣二十四戶米適足。
三縣總米一萬九千石故綜合上述條件可列方程組
30000A＋20000B＋10000C=19000…（1）
27A－18B=0…（2）
18B－24C=0…（3）
解聯立方程式得 $A=\frac{8}{3}$（石） B＝0.4（石） C＝0.3（石）
故甲縣：8000 石，乙縣：4000 石，丙縣：3000 石

正負法中「**右互乘，同減異加**」即是使用方程正負術解題，將傳統與創新並列，足見已擺脫中算之模仿者或跟隨者的角色。

5.4〈追錄〉內容特色

〈追錄〉爲原預定內容編輯完成之後再加入，故未編排入附錄中，應不是原編者所加。從內容來看，解題的風格亦相當不同。今將其體例、內容之特點歸納整理如下：

（1）〈追錄〉的體例計有如下三種：
1.「今有」－「答曰」－「術曰」。
2.「假如」－「答曰」。
3.「今有」－「答曰」－「術曰」－「解曰」。
（2）〈堆積還源〉中爲了以圖解說明，皆設計一數字較小的問題，以茲驗證公式的正確性，立體與平面的圖示兼而有之。
（3）〈盈不足術〉兩題皆收錄自《算學啓蒙》，解法相同，但分別列「解曰」提供詳細說明。

（5）〈方程正負〉中第一、二題收錄自《算學啓蒙》方程正負門的第八及第九題，分別給予圖示輔助說明，「解曰」詳列方程正負術之解題程序。

（6）由〈方程正負〉第四題再次驗證了東算家熟捻增乘開方法。

（7）〈方程正負〉第七題本爲均輸問題，在此給予傳統解法及方程正負術兩個方式。東算家的轉化的能力值得肯定。

從〈追錄〉中不禁讓我們覺得「好酒沈甕底」，有「倒吃甘蔗」之感，從此處發現不同的思維模式，堆垛的圖解似乎嘗試說服讀者，可以「實實在在，安安心心」地使用公式，並從平面拓展到立體。再者，由此處再一次驗證朝鮮算學家傳承了『開方術』、『方程術』並廣泛且靈活運用。