國立臺灣師範大學

物理研究所

碩士論文

Laguerre-Gaussian 疊加態的光偏振研究

The study of polarization states of superposed Laguerre-Gaussian beams

研究生:王立文

指導老師:陸亭樺 博士

中華民國一〇六年一月

摘要

雷射問世至今已超過五十年，不同於以往一般光的性質，雷射大大地吸引了人們的目光，旋即著手投入雷射領域的研究，隨著科技的快速演進，雷射不僅在各領域應用層面上大放異彩，且對於本身的研究更趨廣泛深入。

雷射有許多的特性，同調、能量集中、偏振與光場分布等，本篇對於雷射的模態、疊加模態及兩者的偏振態為主軸。利用數值模擬方法造出目標模態的光柵圖，將光柵圖資訊輸入空間光調製器(spatial light modulator, SLM)，再利用干涉儀與光學儀器予以輔助，產生圓柱座標型式下的高斯模態，即 Laguerre-Gaussian 模態與 Laguerre-Gaussian 疊加模態，因其疊加模態圖案複雜且具輻射對稱性，故又稱為花形模態(flower type mode)。此外，本實驗加入四分之一玻片(quarter wave plate, QWP)，並與干涉儀配合，調整雷射之偏振，產生空間非齊性之偏振(spatially inhomogeneous)，不同於以往的空間齊性偏振(spatially homogeneous)。最後，使用高階龐加萊球(high order Poincaré sphere, HOPS)輔助分析具空間非齊性偏振之雷射模態的偏振分布與模態的強度分布。

關鍵字: Laguerre-Gaussian 模態, 疊加的 Laguerre-Gaussian 模態, 偏振分布

Abstract

It has been more than fifty years that laser was invented, because of the properties of laser are not common with the general light. By the rapid development of technology not only the laser has a great applications in many other fields but also more thorough and wide we know about laser than before.

Laser has many different kinds of properties like coherent, polarization, distribution of intensity and concentrated energy. We focus on the laser modes, superposed modes and both the distribution of polarization in this topic. Using the method of numerical simulation to create the grating what we plan to study. Entering the grating into spatial light modulator and assisted by interferometer and other optical instruments to build the Gaussian laser mode which under the cylindrical coordinate we called Laguerre-Gaussian mode. Also we use the same method to build the superposed Laguerre-Gaussian mode, because of the complex composition and symmetry we called it flower type mode. In addition we employ quarter wave plate to adjust the distritubion of polarization to generate the spatilly inhomogeneous beam, not common with the general spatilly homogeneous beam. Finally we analyze the spatilly inhomogeneous beam and distribution of intensity by high order Poincaré sphere.

Keywords: Laguerre-Gaussian mode, superposed Laguerre-Gaussian mode,
distribution of polarization

致謝

時光飛逝，憶起碩班時日猶如白駒過隙，記憶中的點點滴滴浮上心頭，遙想剛入學時非常擔心修課問題的新生，如今映入眼簾即是我將提筆致謝所有大力相助的貴人。

最感謝的是陸亭樺老師，剛進研究所什麼都不懂時，都是老師一點一滴地教導與栽培，給予課業與實驗上的幫助。不僅老師的專業與能力令人尊敬，而老師又像姐姐一樣地與我們相處，大至生涯規劃，小至生活瑣事，能夠沐浴在此環境學習，真的非常地幸運，也非常地珍惜，謝謝老師。

裕雯學姐、哲剛學長與仁璽學長，感謝你們時刻的叮嚀與提醒，忙碌時也都抽空教導我實驗的經驗與技巧，從你們身上學到很多做研究的精神與態度，雖然相處時間只有短暫的一年，但非常地充實，我會把你們的叮嚀銘記於心，謝謝你們。

騰德、言均與韋如學妹，非常地幸運在研究所能遇到你們，我們一起面對考試、實驗與年會等考驗，共享辛苦的過程與成功的果實，有你們的陪伴讓我的研究所生涯不孤單，很快樂。你們帶給我無限的活力與正能量，包容我的任性，陪我度過生活一切喜怒哀樂，讓我變得開朗活潑，縱使我們將各奔東西，但你們依舊在我心中，我非常珍視我們的緣分，感謝你們出現在我的生命中。

最後感謝我的家人，有他們的全力支持與信任，我才能完成碩士學業，感謝幫助過我的每一位貴人，需要感謝的人太多了，就謝天吧。

目錄

摘要----------1
Abstract----------2
致謝----------3
目錄----------4

第一章　緒論----------5

1.1　前言----------5

1.2　研究動機----------6

第二章　理論背景----------7

2.1　Poincaré sphere 龐加萊偏振球----------7

2.2　Laguerre-Gaussian Mode 圓柱座標之高斯模態與偏振分析----------12

2.3　疊加的 Laguerre-Gaussian Mode 與偏振分析----------23

2.4　Spatial Light Modulator 空間光調製器(SLM) ----------29

2.5　SLM 產生模態光柵圖----------31

第三章　實驗結果與分析----------34

3.1　實驗架構----------34

3.2　Laguerre-Gaussian Mode 實驗結果與偏振分析----------37

3.3　疊加的 Laguerre-Gaussian Mode 實驗結果與偏振分析----------44

第四章　結論與未來工作----------51

參考文獻----------52

第一章 緒論

1.1 前言

西元 1916 年，Albert Einstein 首先提出了描述原子受激輻射與自發輻射的關係，此後人們不斷地猜測與嘗試此現象是否能強化光束，直到西元 1958 年 Charles Hard Townes 與 Arthur Leonard Schawlow 發現將氖光燈泡所發出的光照在稀土晶體上時，晶體分子會發出鮮豔且聚在一起的強光，根據此一神奇的現象，他們進一步提出了雷射原理，雷射或又稱激光(Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, LASER)，原意即為光的受激輻射放大。雷射帶有的特性使得自從雷射原理問世後，科學家們趨之若鶩地鑽研雷射世界，許多種雷射與產生雷射的方式相繼被發現，如半導體雷射或氦氖雷射等，隨著科技的發展將雷射從實驗室研究進展到應用在現今各大領域，如光纖通訊、雷射雷達，甚至醫學的雷射治療、雷射矯正視力等，都是所有致力於雷射研究的結晶。

雷射共振腔之構造對於雷射模態具有高度相關性，可透過共振腔組成、離焦、離軸或腔長等變化，產生各式各樣的模態，而本篇使用空間光調製器(spatial light modulator, SLM)[1]對雷射進行空間光調製，改變雷射模態，探討雷射的光場與對應之偏振分布。

1.2 研究動機

1970 年 Arthur Ashkin 提出光陷阱(optical trapping)理論[2]，並且更進一步地發展出光學鑷子(optical tweezer)[3]的應用技術。利用帶有角動量的雷射光束來捕捉或控制粒子的行為[4]，我們可以輸入不同的光場與角動量[5]，使得粒子產生各種運動行為，而這些特性都應用在日新月異的科技之中，不僅是物理研究、訊號傳輸或醫學治療等，都是雷射大放異彩之地。

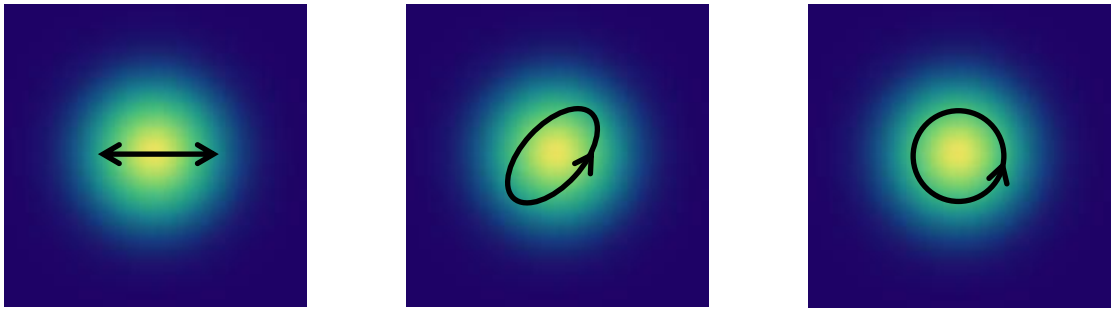
柱面型雷射共振腔可以產生 Laguerre-Gaussian 模態[6]，如在腔外再加一個柱透鏡並調整腔長、離焦或離軸等參數，便可得到具有高度輻射對稱性的光場分布，故又稱為花形模態[7]，但因理論複雜與實際架構上的限制，我們使用 SLM 幫助產生 Laguerre-Gaussian 模態與花形模態[8]，將數值模擬之光柵圖[9--12]資訊以電腦輸入 SLM 並顯示於液晶層，使入射之基本模態讀取光柵資訊轉變為具有角動量之 Laguerre-Gaussian 模態或花形模態並觀察其光場，最後我們使模態帶有偏振[13]，並使用干涉儀輔助，研究模態的偏振分布。

第二章 理論背景

2.1 Poincaré sphere 龐加萊偏振球

偏振(polarization)

雷射光是一種電磁波，其中電場與磁場彼此互相垂直，而偏振方向指的即是電場的震盪方向。在空間中電場與磁場彼此互相垂直且兩者又同時垂直電磁波傳遞方向，故電磁波屬於橫波。我們知道光屬於電磁波，一般而言自然光的偏振屬於任意方向，亦即電場方向只要同時滿足垂直磁場與電磁波傳遞方向，震盪的電場即可呈現任意方向，稱為非偏振光。現假設我們限制電場震盪方向只能朝單一方向，則此稱為線偏振(linear polarization)，若使電場震盪方向以固定頻率旋轉，則電場的向量方向會隨時間流逝描繪出圓形，稱此為圓偏振(circular polarization)，若描繪出橢圓形，則稱此為橢圓偏振(cylindrical polarization)，對於後兩者又可按照觀察者往源頭望去，電場隨時間流逝之旋轉方向而分順逆時針方向，將圓偏振細分為右旋圓偏振與左旋圓偏振，也將橢圓偏振細分為右旋橢圓偏振與左旋橢圓偏振。



Linear　　Elliptical　　Circular

圖 2-1 偏振分布

偏振分布(distribution of polarization)

一般帶有偏振的雷射光，其中之偏振屬於空間齊性偏振(spatially homogeneous)，亦即該雷射光帶有之偏振不隨雷射內空間位置不同而改變偏振方向，是屬於傳統的偏振分布。而本實驗研究探討的是空間非齊性之偏振(spatially inhomogeneous)，此類與空間相關之偏振不同於以往的偏振，空間非齊性之偏振與雷射內空間位置相關，雷射內不同空間位置會對應到不同方向的偏振，亦即與空間相關。

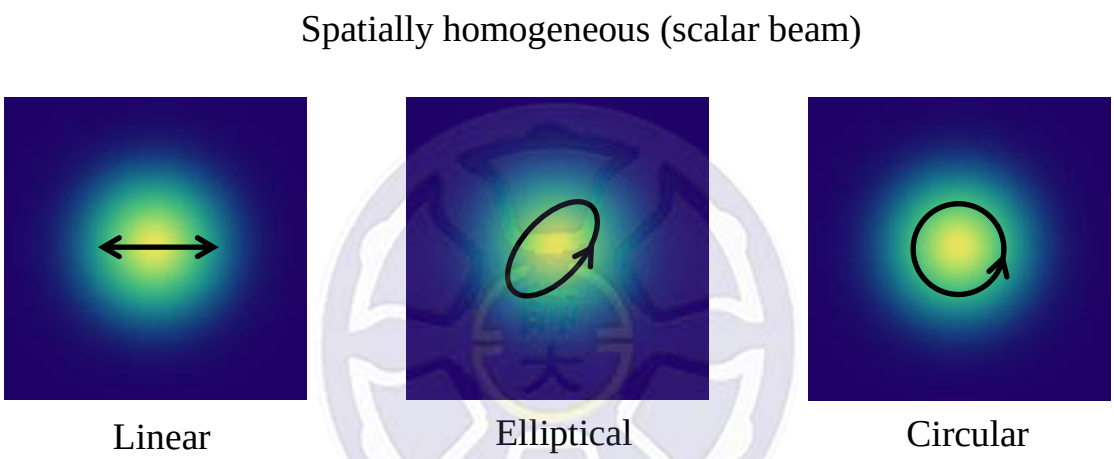


圖 2-2 空間齊性偏振分布

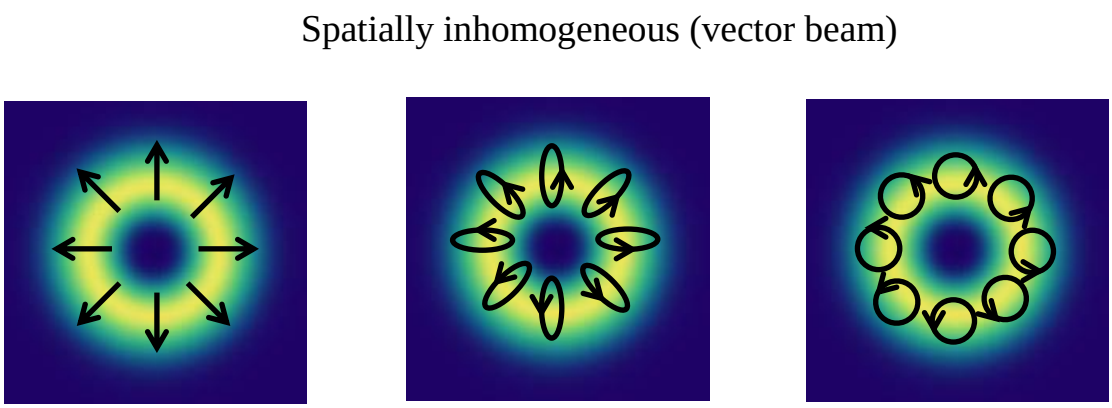


圖 2-3 空間非齊性偏振分布

Poincaré sphere 龐加萊偏振球

大多數的光源屬於非偏振光，例如:陽光、燈光等，此類光源的光是由不同頻率、相位和偏振等，多數不同光學特性的光隨機混合而成，為了解光的偏振，人們投入光的偏振研究。

在十九世紀時，能幫助想像與理解偏振問題的只有偏振橢圓，但如果光的傳播需透過許多光學器材，則描述偏振的行為會變得繁雜且難以找到正解。直到西元 1852 年 George Stokes 提出能夠描述偏振光、非偏振光和部分偏振光的一種強度表示方法，稱為 **Stokes parameters**，其中包含四種參數，即可描述任何光的偏振態，最重要的是這四個參數可以直接測量得到。

Stokes parameters 的四個參數 $\boldsymbol{S_0}$、$\boldsymbol{S_1}$、$\boldsymbol{S_2}$、$\boldsymbol{S_3}$ 是可以直接使用儀器測量得知的物理量，假設 $\boldsymbol{I_0}$、$\boldsymbol{I_1}$、$\boldsymbol{I_2}$、$\boldsymbol{I_3}$ 分別是光束整體能量、水平偏振部分能量、$+45^{\circ}$偏振部分能量與右旋部分偏振能量，則 Stokes parameters 的操作型定義為

$$\begin{aligned} S_0 &= I_0 \\ S_1 &= I_1 - I_0 \\ S_2 &= I_2 - I_0 \\ S_3 &= I_3 - I_0 \end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

遵照參數定義測量各類偏振之光束強度，即可估算出 Stokes parameters。

為了更方便地使用 Stokes parameters，將(2.1.1)之參數組成一組向量，稱為 **Stokes vector** 而強度I_0與、偏振度 P 與 Stokes vector 之間的關係為

$$\begin{aligned} S_0 &= I_0 \\ S_1 &= I_0 P \cos 2\psi \cos 2\chi \\ S_2 &= I_0 P \sin 2\psi \cos 2\chi \\ S_3 &= I_0 P \sin 2\chi \end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

P 為偏振度$0 \leq P \leq 1$，因 Stokes vector 之型式(2.1.2)與球座標之型式(2.1.3)非常相似，故可將I_0P、2ψ、2χ 做為三維空間偏振分布之正交基底，描繪出偏振球。

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
\qquad (2.1.3)
$$

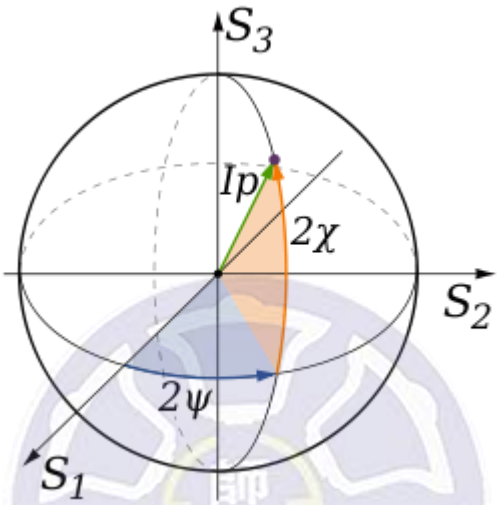


圖 2-4 三維偏振球

在 Stokes parameters 被提出不久後，西元 1892 年 Henri Poincaré 提出**龐加萊球(Poincaré sphere)**，Poincaré sphere 可以將所有的偏振態表示於球上，對於偏振分析無疑是一大利器，而依照偏振的種類可以分成 first order Poincaré sphere 與 high order Poincaré sphere(HOPS)，前者是適用在光的偏振為空間齊性而後者則是適用於光的偏振為空間非齊性，本研究著重在後者的偏振分布，即 HOPS[14-15]。

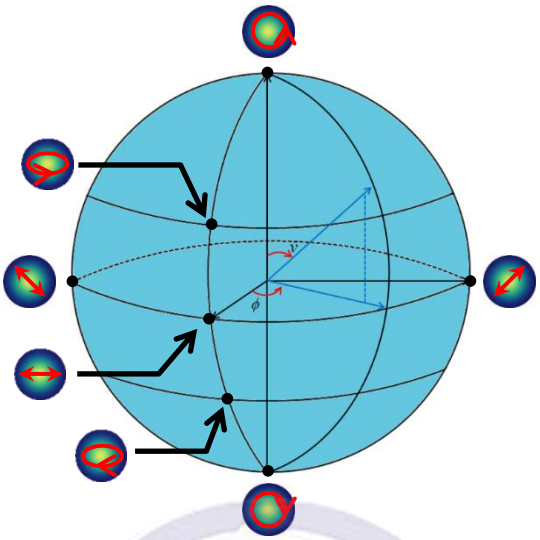


圖 2-5　First order Poincaré sphere

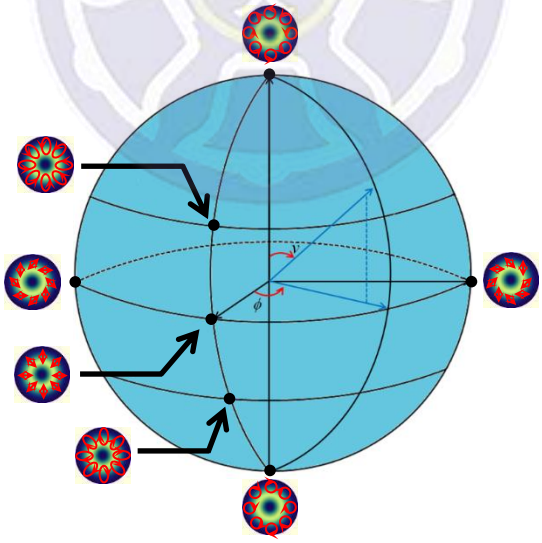


圖 2-6　High order Poincaré sphere

2.2 Laguerre-Gaussian Mode 圓柱座標之高斯模態與偏振分析

雷射共振腔的模態(mode)，即電磁波在特定邊界條件下的強度分布，電磁波必須滿足邊界條件的限制，而共振腔內的雷射光強度分布會受到共振腔形狀影響，不同的共振腔能支撐的模態也都不相同，本篇使用空間光調製器(spatial light modulator, SLM)，產生 Laguerre-Gaussian 模態。

圓柱座標下的高斯模態

雷射光屬於電磁波，而電磁波在均勻介質的傳遞可以由求解荷姆霍茲波方程(Helmholtz wave function)了解，其方程如下

$$\nabla^2 u(x,y,z) + k^2 u(x,y,z) = 0 \qquad (2.2.1)$$

其中函數$u(x,y,z)$為此波方程的解，k 是波數(wave number)，且 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ是介質中的光波長)，由於我們假設(2.2.1)的解屬於平面波，故波沿著 z 軸傳遞前進，而形式則變為

$$u_{plane}(x,y,z) = A_p \exp(\pm ikz) \qquad (2.2.2)$$

因我們假設雷射光沿著z軸傳播前進，讓雷射光有明確的行進方向，故A_p為常數，且已知平面波為波方程式其中一解，所以可以假設另一形式解如

$$u(x,y,z) = \varphi(x,y,z) exp(-ikz) \qquad (2.2.3)$$

其中$\varphi(x,y,z)$是可以用來描述平面波與解在振幅與相位上差異。接著我們把新假設的解$u(x,y,z)$，(2.2.3)代入荷姆霍茲波方程(2.2.1)，可以發現$\varphi(x,y,z)$必須滿足下列方程式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial_x{}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial_y{}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial_z{}^2}-2ik\frac{\partial\varphi}{\partial_z}=0 \qquad (2.2.4)$$

接著我們使用近軸近似方法，亦即假設雷射光束被侷限在 z 軸附近的區域內，故$\varphi(x,y,z)$對於 z 會變成近軸波方程式(paraxial wave equation)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial_x{}^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial_y{}^2}-2ik\frac{\partial\varphi}{\partial_z}=0 \qquad (2.2.5)$$

(2.2.5)式依據其邊界條件會有不同的解，其中一解可以使用高斯函數表示，亦或說基本模式即是高斯函數。我們假設解在 x 與 y 方向對稱，則其場形式$u(r,z)$

$$u(r,z)=\frac{w_0}{w(z)}\exp\left[-i\big(kz-\Phi(z)\big)-r^2\left(\frac{1}{w^2(z)}+\frac{ik}{2R(z)}\right)\right] \qquad (2.2.6)$$

(2.2.6)式中

$$r^2=x^2+y^2 \qquad (2.2.7)$$

且

$$\Phi(\mathrm{z})=\tan^{-1}\left(\frac{\lambda \mathrm{z}}{\pi \mathrm{w_0}^2}\right) \qquad (2.2.8)$$

在(2.2.6)式中，w 是高斯光束的斑點大小(半徑長)，R 是波前的曲率半徑，而 w 和 R 都是 z 的函數，且w_0是常數。

從(2.2.6)式描述的高斯光束當波前變成平面波時，其光束斑點大小最小。假設我們令光束斑點最小的位置為 $z=0$，則$w(z)$和$R(z)$可以有以下表達式

$$w^2(z)=w_0\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)^2\right] \qquad (2.2.9)$$

而

$$R(z)=z\left[1+\left(\frac{\pi {w_0}^2}{\lambda z}\right)^2\right] \qquad (2.2.10)$$

從(2.2.9)式中可以看出，當 $z=0$ 時，$w^2(z)$有最小值，且其值為${w_0}^2$，w_0定義為光腰半徑(beam waist)，且配合(2.2.10)式可以發現，當 $z=0$ 也就是光腰處，波前的曲率半徑為無限大，且此波前屬於平面波。

最終我們將(2.2.6)式代入(2.2.1)式，可得完整的電場形式

$$\mathrm{E}(r,z)=E_0\frac{w_0}{w(z)}\exp\left[-i\big(kz-\Phi(z)\big)-r^2\left(\frac{1}{w^2(z)}+\frac{ik}{2R(z)}\right)\right] \qquad (2.2.11)$$

圓柱座標下的高階模態

圓柱座標系統之電場會隨著方位角φ改變，故在假設電場波函數通解形式時，必須考量與方位角φ相關之形式，如下

$$u(r,\varphi,z) = A(z)\exp\left[-\frac{ikr^2}{2q(z)}\right]S(r)\exp(il\varphi) \qquad (2.2.12)$$

其中$q(z)$為高斯光參數(Gaussian beam parameter)，且$S(r)$的通解形式為

$$\mathrm{S}(r) = \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega}\right)^{l} L_p^l\left(\frac{2r^2}{\omega^2}\right) \qquad (2.2.13)$$

其中L_p^l是 Laguerre 多項式，在高斯光束的表象下，l為方位角參數，且亦是軌道角動量(orbital angular momentum, OAM)量子數，而p為徑向參數。以下為前四項 Laguerre 多項式

$$\begin{aligned}
L_0^l(u) &= 1 \\
L_1^l(u) &= -u + l + 1 \\
L_2^l(u) &= \frac{u^2}{2} - (l+2)u + \frac{(l+2)(l+1)}{2} \\
L_3^l(u) &= \frac{-u^3}{6} + \frac{(l+3)u^2}{2} - \frac{(l+2)(l+3)u}{2} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6}
\end{aligned} \qquad (2.2.14)$$

接著我們將(2.2.12)式代入(2.2.4)式中，經過變數變換與整理後，可得之通解形式與 Laguerre 解形式相同，如下

$$\mathrm{u}\frac{d^2L_p^l}{du^2} + (-u+l+1)\frac{dL_p^l}{du} + pL_p^l = 0 \qquad (2.2.15)$$

故我們可以將圓柱座標下的電場表示為

$$E_p^l(r,\varphi,z)=\left[\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}\right]^{1/2}\frac{1}{\omega(z)}\left[\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right]^{|l|}L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right)\exp(il\varphi)$$
$$\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{\omega^2(z)}-ikz-\frac{i\pi r^2}{\lambda R(z)}-i(2p+|l|+1)\phi_0(z)\right] \quad (2.2.16)$$

從(2.2.16)之電場形式可以知道，只要給予各種(p,l)參數，便可得到該參數對應的 Laguerre-Gaussian 模態，圖 2-7 為模態數值模擬圖。

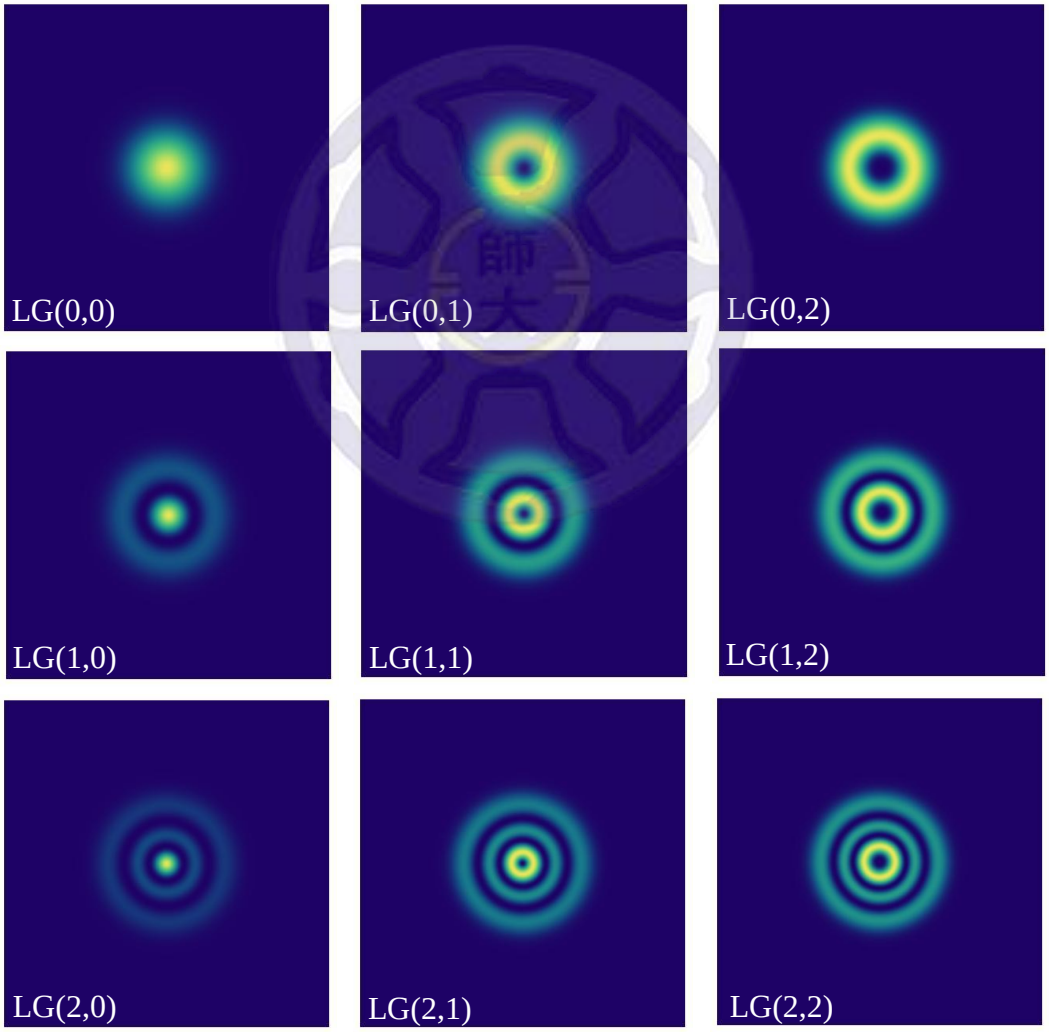


圖 2-7　Laguerre-Gaussian mode

Laguerre-Gaussian 模態偏振分析

本節將探討加入偏振的 Laguerre-Gaussian 模態並如何將之應用在龐加萊偏振球(Poincaré sphere)且加以分析模態之偏振分布[16]。

在參數空間下的高階龐加萊球(HOPS)，其偏振態ψ_ℓ可表示為

$$\psi_\ell(v,\phi) = \cos\left(\frac{v}{2}\right) e^{-i\phi/2} L_\ell + \sin\left(\frac{v}{2}\right) e^{i\phi/2} R_\ell \qquad (2.2.17)$$

其中ϕ是方位角而v是極角，將此兩參數對應到龐加萊球座標上如圖 2-8

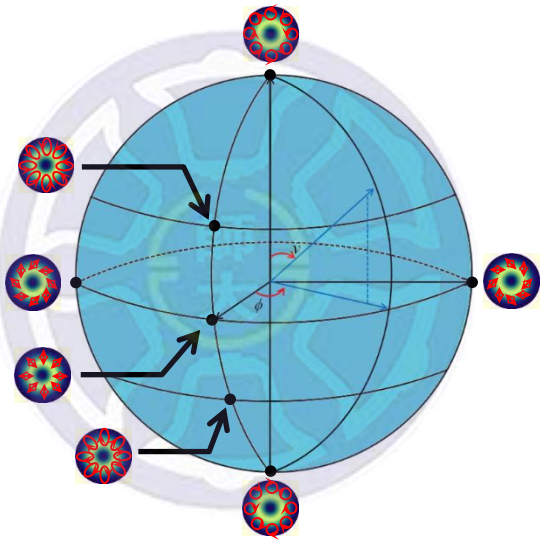


圖 2-8　High order Poincaré sphere

(2.2.17)式中之L_ℓ與R_ℓ為正交之左旋圓偏振與右旋圓偏振，形如

$$L_\ell = (\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\ell\varphi}/\sqrt{2}$$
$$R_\ell = (\hat{x} - i\hat{y})e^{+i\ell\varphi}/\sqrt{2} \qquad (2.2.18)$$

而每個光子擁有自旋角動量(spin angular momentum)$\sigma\hbar(\sigma = \pm 1)$，$\hbar$為普朗克常數。

(2.2.17)式中之$e^{i\ell\varphi}$為相位項，與軌道角動量(OAM)有關，每個光子具有$\ell\hbar$之軌道角動量，ℓ屬於整數($\ell = \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$)，而$\varphi$即為對應入射 Laguerre-Gaussian 模態之相位。

利用(2.2.17)式探討高階龐加萊球上任意座標的偏振分布

首先將北極點之座標參數代入(2.2.17)，即$\psi_\ell(v,\phi) = \psi_\ell(0,\phi)$

$$\psi_\ell(0,\phi) = cos\left(\frac{0}{2}\right)e^{-i\phi/2}L_\ell + sin\left(\frac{0}{2}\right)e^{+i\phi/2}R_\ell = L_\ell \qquad (2.2.19)$$

由(2.2.19)式可發現，北極點之偏振為左旋圓偏振。

再來將南極點之座標參數代入(2.2.17)，即$\psi_\ell(v,\phi) = \psi_\ell(\pi,\phi)$

$$\psi_\ell(\pi,\phi) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-i\phi/2}L_\ell + sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{+i\phi/2}R_\ell = R_\ell \qquad (2.2.20)$$

由(2.2.20)式可發現，南極點之偏振為右旋圓偏振。

最後探討一個赤道上的點，即$\psi_\ell(v,\phi) = \psi_\ell\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

$$\begin{aligned}\psi_\ell\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{-i0/2}L_\ell + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{+i0/2}R_\ell \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}L_\ell + \frac{\sqrt{2}}{2}R_\ell \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\ell\varphi/\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}-i\hat{y})e^{+i\ell\varphi/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\ell\varphi} + \frac{1}{2}(\hat{x}-i\hat{y})e^{+i\ell\varphi} \qquad (2.2.21)\end{aligned}$$

從(2.2.21)式中可以發現，位於高階龐加萊球赤道上這點，是正交的左旋圓偏振與右旋圓偏振的線性組合，故我們可以把 HOPS 上北極點的左旋圓偏振與南極點的右旋圓偏振當作一組正交基底，將每個偏振型態利用此正交基底展開，便可以分析每個偏振型態，並將之標記在 HOPS 上，反言之，在 HOPS 上每一個座標點便對應一種偏振型態。

接著我們將(2.2.21)式繼續延伸，便可得知入射之 Laguerre-Gaussian 模態之偏振分布。

$$\begin{aligned}\psi_\ell\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= \frac{1}{2}(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\ell\varphi}+\frac{1}{2}(\hat{x}-i\hat{y})e^{+i\ell\varphi} \\ &= \hat{x}\left(\frac{e^{i\ell\varphi}+e^{-i\ell\varphi}}{2}\right)+\hat{y}\left(i\frac{e^{-i\ell\varphi}-e^{i\ell\varphi}}{2}\right) \\ &= \hat{x}[\cos(\ell\varphi)]+\hat{y}[\sin(\ell\varphi)]\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

從(2.2.21)式延伸得到的(2.2.22)式中可看出其中有相位φ，將對應之 Laguerre-Gaussian 模態的相位φ代入，便可得到在 HOPS 座標$\psi_\ell(v,\phi)=\psi_\ell\left(\frac{\pi}{2},0\right)$位置之 Laguerre-Gaussian 模態的偏振分布。

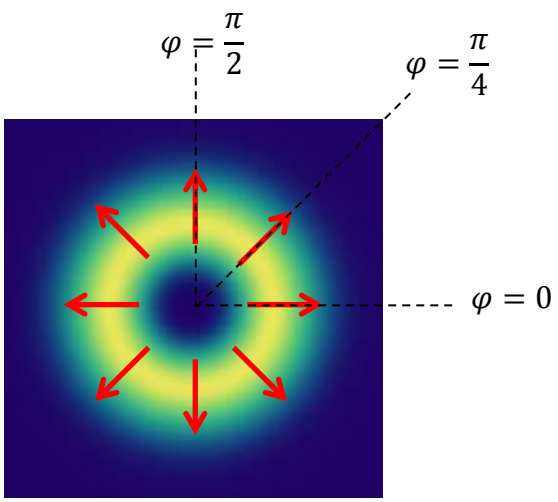


圖 2-9　Laguerre-Gaussian 偏振分布

將 Laguerre-Gaussian 模態之相位代入(2.2.22)式中，便可得到圖 2-9 的結果。

$\varphi = 0, \ell = 1$

$$\psi_\ell = \hat{x}[\cos(1 \cdot 0)] + \hat{y}[\sin(1 \cdot 0)] = \hat{x} \qquad (2.2.23)$$

$\varphi = \frac{\pi}{4}, \ell = 1$

$$\psi_\ell = \hat{x}\left[\cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] + \hat{y}\left[\sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} \qquad (2.2.24)$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}, \ell = 1$

$$\psi_\ell = \hat{x}\left[\cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] + \hat{y}\left[\sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = \hat{y} \qquad (2.2.25)$$

由(2.2.23)、(2.2.24)和(2.2.25)三式可知，Laguerre-Gaussian 模態不同相位所對應的偏振分布，帶有此偏振形式之 Laguerre-Gaussian 模態即屬於空間非齊性偏振分布。因此，利用 HOPS 的參數空間偏振表示式(2.2.17)與(2.2.18)即可幫助我們解析偏振的線性組合，更進一步代入雷射模態的相位，便可得知該雷射模態的偏振行為。圖 2-10 為 Laguerre-Gaussian 模態與對應之偏振分布圖。

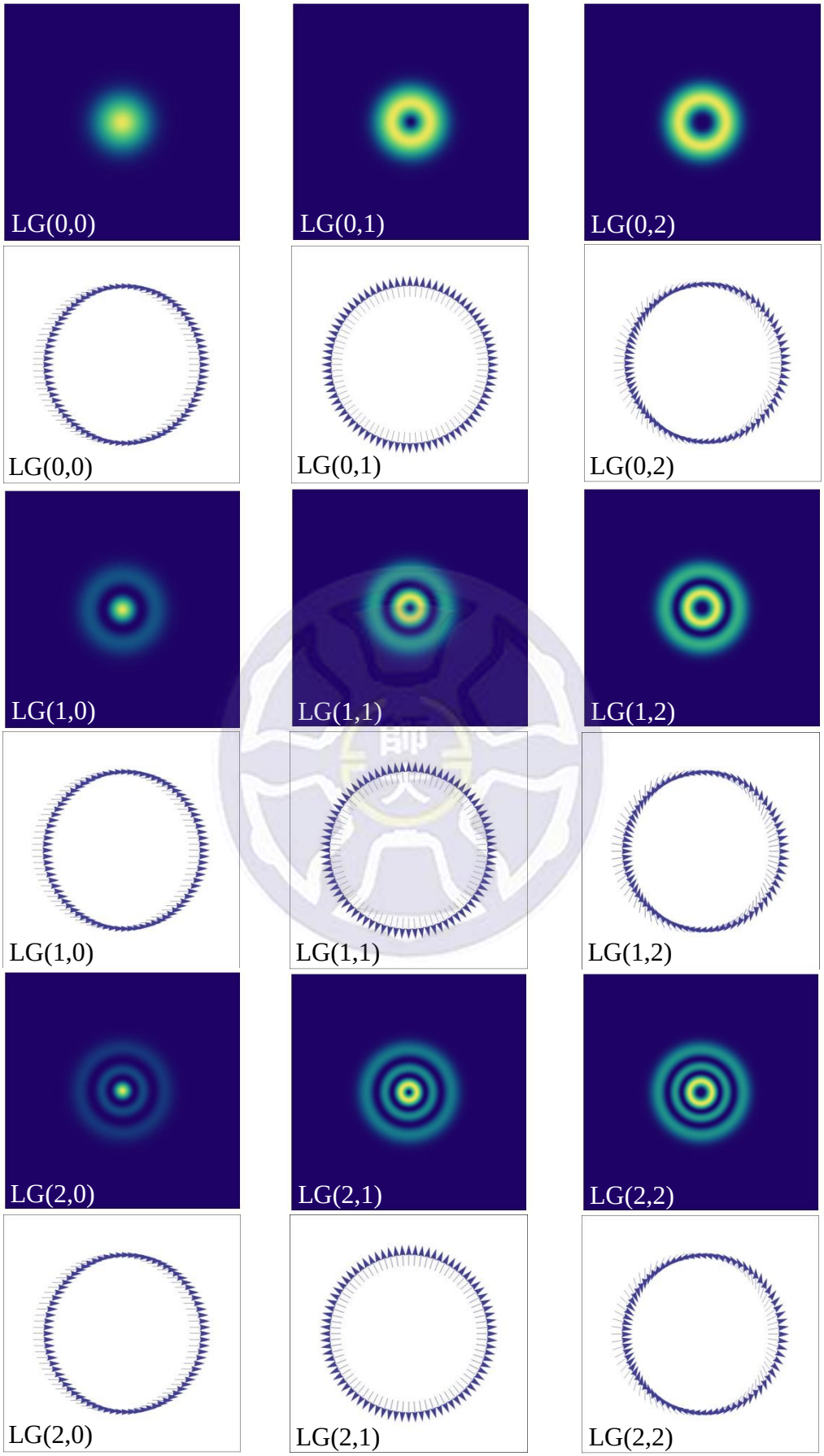


圖 2-10 Laguerre-Gaussian 模態偏振分布

從圖 2-10 的結果可以知道，這些 Laguerre-Gaussian 模態是已具有偏振，故我們會加入偏振片輔助觀察，而加入偏振片會使某些區域的雷射光無法通過，無法通過的區域即為偏振方向與偏振片方向垂直，如圖 2-11。

(假設偏振片角度為水平)

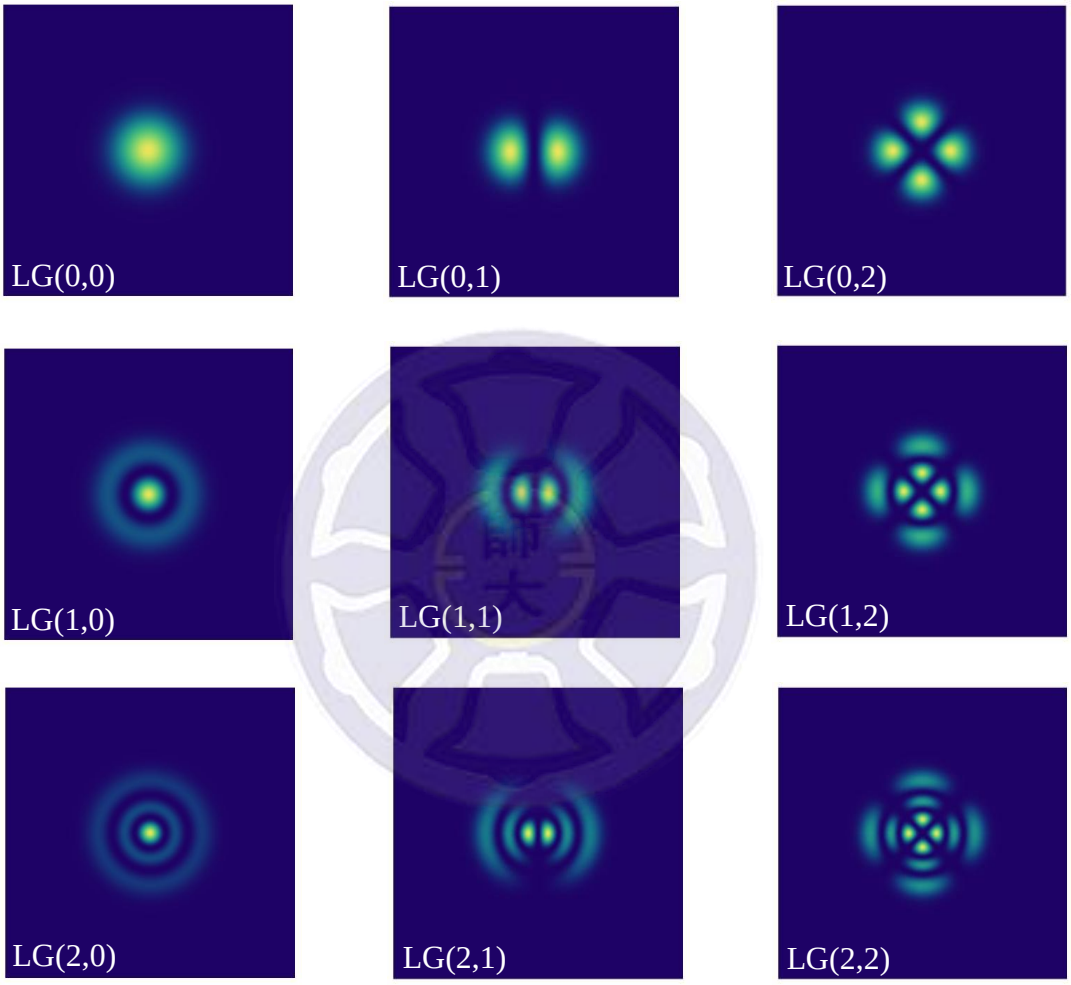


圖 2-11　過偏振片之 Laguerre-Gaussian 模態

2.3 疊加的 Laguerre-Gaussian Mode 與偏振分析

疊加的 Laguerre-Gaussian 模態

至此我們推導了柱座標下的高斯模態與 Laguerre-Gaussian 模態的電場波函數形式，在本節我們將建立疊加的 Laguerre-Gaussian 模態的電場波函數形式，而因為疊加的模態具有高度對稱性與複雜幾何結構，故又稱之為花形模態(flower type mode)。

花形模態是由 Laguerre-Gaussian 模態疊加而成，故帶有不同(p, l)參數的 LG 模態相互疊加便會產生多樣的花形模態，為了方便表示與標記，我們將花形模態的參數表示為

$$(p_0, l_0, u, v, N) \tag{2.3.1}$$

其中p_0和l_0是在建構花形模態中，在疊加的過程擔任基準的 Laguerre-Gaussian 模態參數，即$\mathrm{LG}(p_0, l_0)$，也就是是徑向參數與方位角參數，而 u 和 v 為p_0和l_0之公差，並對應疊加項數 K 則可寫出另一 LG 模態之參數，表示如下

$$\begin{aligned} p_N &= p_0 + Ku \\ l_N &= l_0 + Kv \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

利用(2.3.2)式我們假設$K = 1$，即此花形模態為兩個 LG 模態的疊加，其一為基準$\mathrm{LG}(p_0, l_0)$，另一為$\mathrm{LG}(p_1, l_1)$而p_1和l_1表示為

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + 1 \times u \\ l_1 &= l_0 + 1 \times v \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

由(2.3.2)式與(2.3.3)兩式可知，花形模態的參數可以使用(2.3.1)式表示，可以從參數讀出組成花形模態的 Laguerre-Gaussian 模態。

為了建立疊加的 Laguerre-Gaussian 模態電場波函數，我們將(2.3.4)式

$$E_p^l(r,\varphi,z)=\left[\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}\right]^{1/2}\frac{1}{\omega(z)}\left[\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right]^{|l|}L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right)\exp(il\varphi)\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{\omega^2(z)}-ikz-\frac{i\pi r^2}{\lambda R(z)}-i(2p+|l|+1)\phi_0(z)\right] \tag{2.3.4}$$

改寫成有$N+1$項 Laguerre-Gaussian 模態疊加的形式

$$\Psi_p^l(z)=\sum_{K=0}^{N}\left[\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}\right]^{1/2}\frac{1}{\omega(z)}\left[\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right]^{|l|}L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right)\exp(il\varphi)\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{\omega^2(z)}-ikz-\frac{i\pi r^2}{\lambda R(z)}-i(2p+|l|+1)\phi_0(z)\right] \tag{2.3.5}$$

本篇是使用 SLM 模擬雷射柱面型共振腔所產生的花形模態，故我們必須考慮雷射共振腔的真實情況，假設在共振腔中的模態都是高斯分布，所以我們必須加入(2.3.6)式

$$C_K^N=\frac{N!}{K!\,(N-K)!} \tag{2.3.6}$$

而隨著 N 值越大，(2.3.6)式會趨於高斯分布。

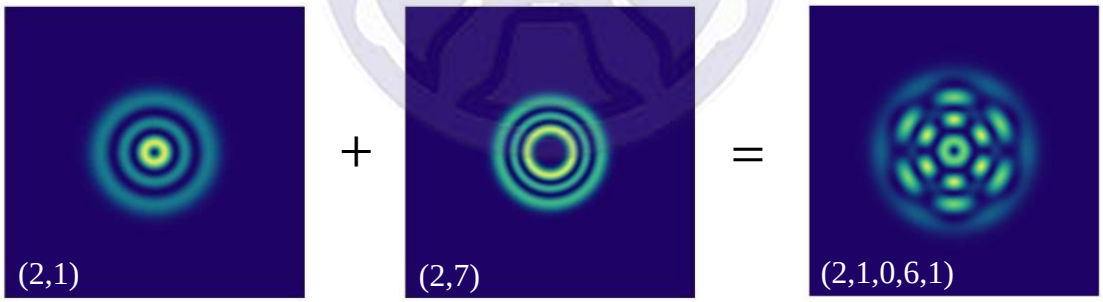
在此我們考慮真實情況，加入模態的高斯分布，可以將(2.3.5)式改寫成為

$$\Psi_p^l(z) = \frac{1}{2^N}\sum_{K=1}^{N}\sqrt{\frac{N!}{K!\,(N-K)!}}\left[\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}\right]^{1/2}\frac{1}{\omega(z)}\left[\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right]^{|l|}L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right)\exp(il\varphi)$$
$$\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{\omega^2(z)} - ikz - \frac{i\pi r^2}{\lambda R(z)} - i(2p+|l|+1)\phi_0(z)\right]$$

（2.3.7）

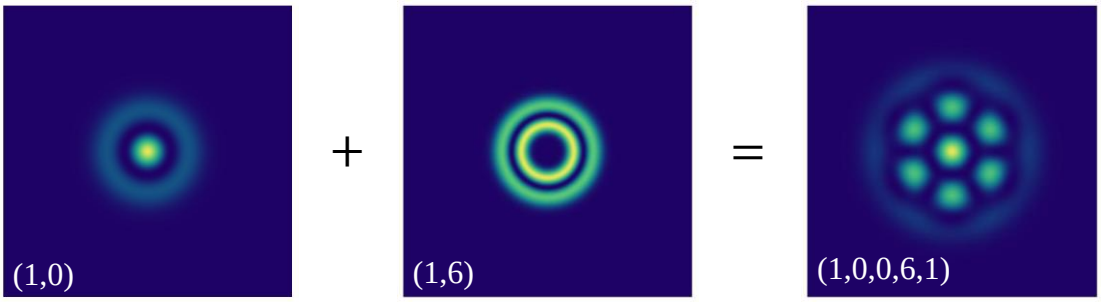
其中$1/2^N$為歸一化常數，故我們成功建立花形模態的波函數形式，並以參數(p_0, l_0, u, v, N)表示疊加的 Laguerre-Gaussian 模態。

圖 2-12 為不同參數的花形模態，並將之組成的 Laguerre-Gaussian 模態一同表示



(p_0, l_0) (p_1, l_1) (p_0, l_0, u, v, N)

$$\begin{cases} p_0 = 2 + 0\times 0 = 2 \\ l_0 = 1 + 0\times 6 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = 2 + 1\times 0 = 2 \\ l_1 = 1 + 1\times 6 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} p = p_0 + Ku \\ l = l_0 + Kv \end{cases}$$



(p_0, l_0) (p_1, l_1) (p_0, l_0, u, v, N)

$$\begin{cases} p_0 = 1 + 0 \times 0 = 1 \\ l_0 = 0 + 0 \times 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 1 + 1 \times 0 = 1 \\ l_1 = 0 + 1 \times 6 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} p = p_0 + Ku \\ l = l_0 + Kv \end{cases}$$

圖 2-12 疊加的 Laguerre-Gaussian 模態

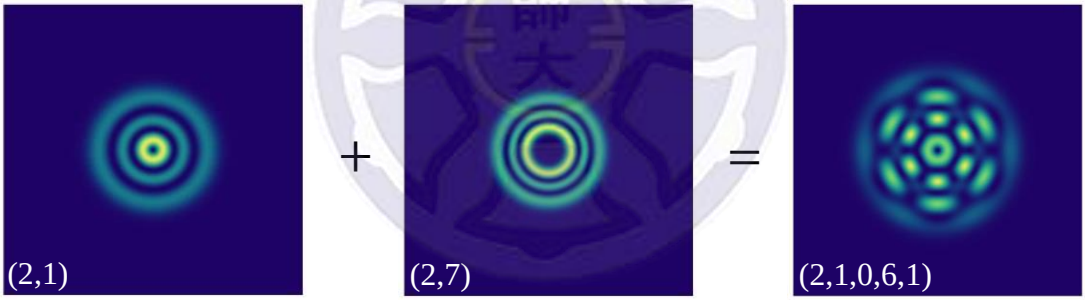
疊加的 Laguerre-Gaussian 模態偏振分析

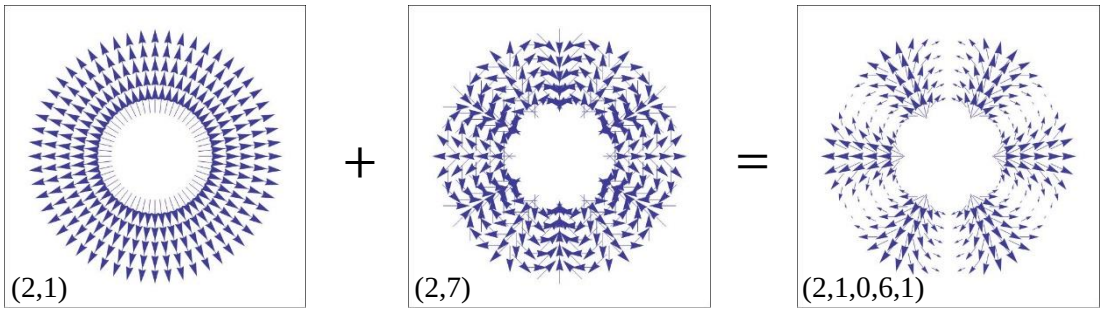
在 2-2 節我們利用龐加萊球分析 Laguerre-Gaussian 模態的偏振分布，在本節我們將利用相同的方法表示花形模態的偏振分布，

在參數空間下的高階龐加萊球(HOPS)，其偏振態ψ_ℓ可表示為

$$\psi_\ell(v,\phi) = \cos\left(\frac{v}{2}\right) e^{-i\phi/2} L_\ell + \sin\left(\frac{v}{2}\right) e^{i\phi/2} R_\ell \qquad (2.3.8)$$

同樣利用(2.3.8)可以寫出 Laguerre-Gaussian 模態偏振的線性組合，並可進一步帶入模態的相位求出各相位之偏振，圖 2-13 為各模態之偏振。





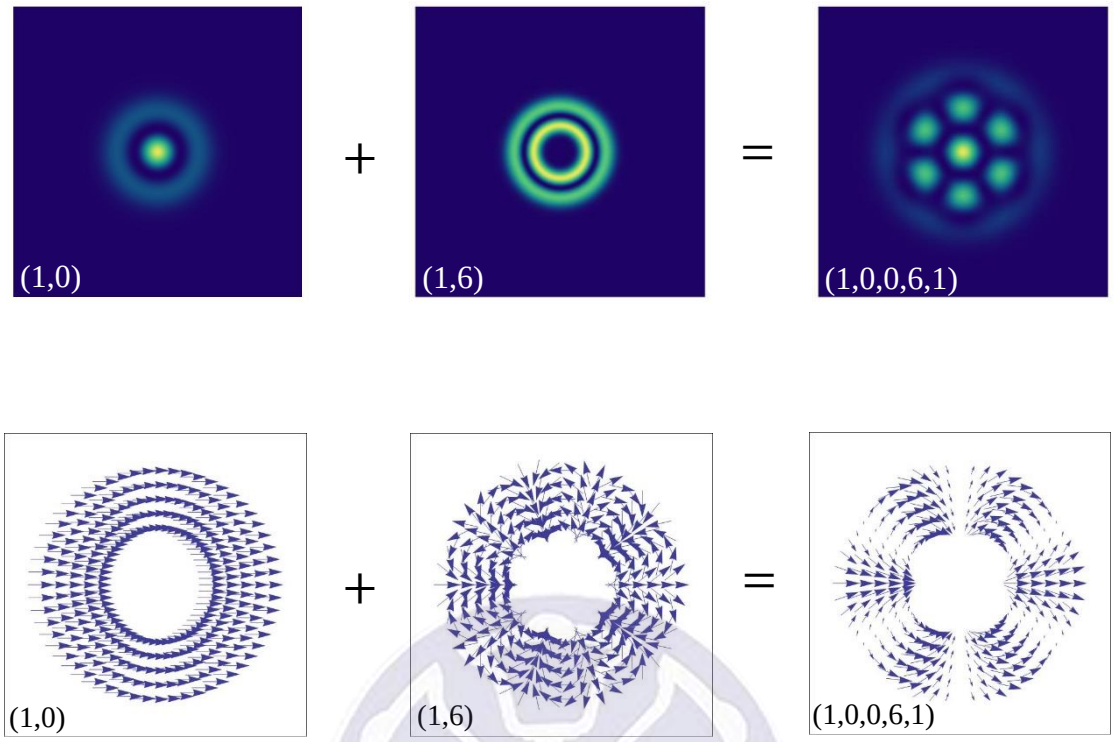


圖 2-13 疊加的 Laguerre-Gaussian 模態偏振分布

圖 2-13 中的花形模態是已具有偏振，而我們參照 Laguerre-Gaussian 模態的方法，加入偏振片觀察，圖 2-14 為加入偏振片的花形模態。

(假設偏振片角度為水平)

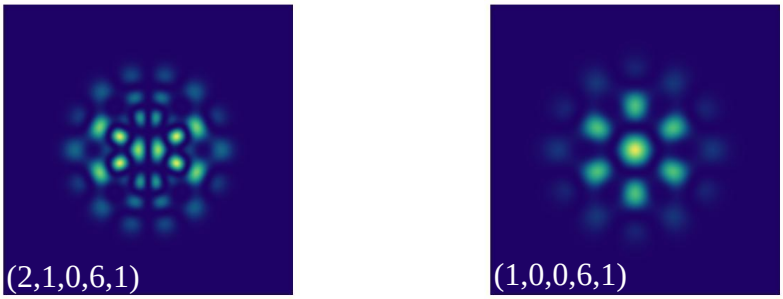


圖 2-14 過偏振片之花形模態

2.4 Spatial Light Modulator 空間光調製器(SLM)

空間光調製器(spatial light modulator, SLM)，是一種廣泛運用的光學儀器，偏振分析、光柵繞射、相位調製或光學鑷子等，皆可與 SLM 配合應用，SLM 有透射式與反射式，本篇使用反射式 SLM(圖 2-15)模擬雷射共振腔，採取光柵繞射法產生 Laguerre-Gaussian 模態與疊加的 Laguerre-Gaussian 模態。

圖 2-15 反射式 SLM

SLM 中液晶層的液晶分子為橢球狀，當接受到電腦輸入光柵圖資訊時，液晶分子就會旋轉，對於入射的雷射光，就會有不同的折射效果以達到空間光調製，圖 2-16 為反射式 SLM 之側面圖，最外層也就是最上層是保護底下層狀結構的玻璃基板(glass substrate)，而取向層(alignment layer)有兩層在中間平行排列的液晶層(liquid crystal layer)的上下兩側，最底部則是矽底板(silicon backplane)在矽底板上有單位像素電極(pixelated electrode)，並在上方有與之對應的透明電極(transparent electrode)。

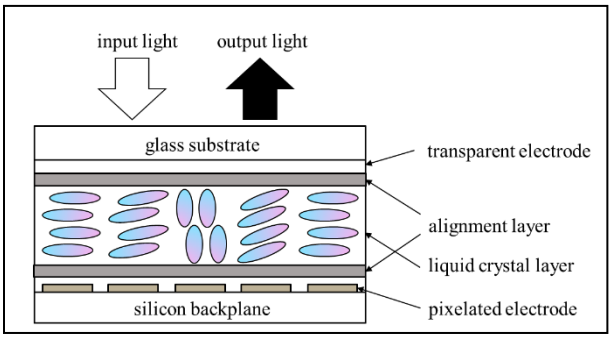


圖 2-16 反射式 SLM 側面圖

下表為本篇論文使用的反射式 SLM 規格

Part no.	HED 6010xxx
Type	LCOS(reflective), Active Matrix LCD
Drive scheme	Digital (pulse width modulation)
Mode	ECB mode, nematic
Phase levels	256 (8-bit) grey levels
Active Area	15.35 mm × 8.64 mm
Weight	12 grams
Nominal	1920×1080 pixels
Total	1952×1088 pixels
Pixel Pitch	8.0 μm
Fill Factor	87%
Image Frame Rate	60 Hz
0^{th}order intensity	60%
Illumination (max.)	~2W / cm^2
Operating temp.	+10℃ to +70℃
Waveband	VIS

反射式 SLM 規格表

2.5 SLM 產生模態光柵圖

我們將光柵圖資訊輸入 SLM 讓光束在經過時讀取帶有波函數資訊的光柵，進而產生繞射圖案，而其中第一階繞射圖案即是我們輸入光柵圖資訊的模態。

輸入的資訊即是利用數值模擬方法，將 Laguerre-Gaussian 模態之波函數Ψ_p^l與一個平面波函數Ψ_{plane}進行疊加干涉，並計算光柵強度

$$I_{fork} = \left|\Psi_p^l + \Psi_{plane}\right|^2 \tag{2.5.1}$$

而(2.5.1)式之計算，可以改寫簡化成只與指數有關，如下

$$I_{fork} \propto \left|e^{i\Phi} + e^{ik_p z}\right|^2 = 2\left[1 - \cos\left(k_p z - \Phi\right)\right] \tag{2.5.2}$$

其中Φ是 Laguerre-Gaussian 模態之相位，而k_p為平面波波數

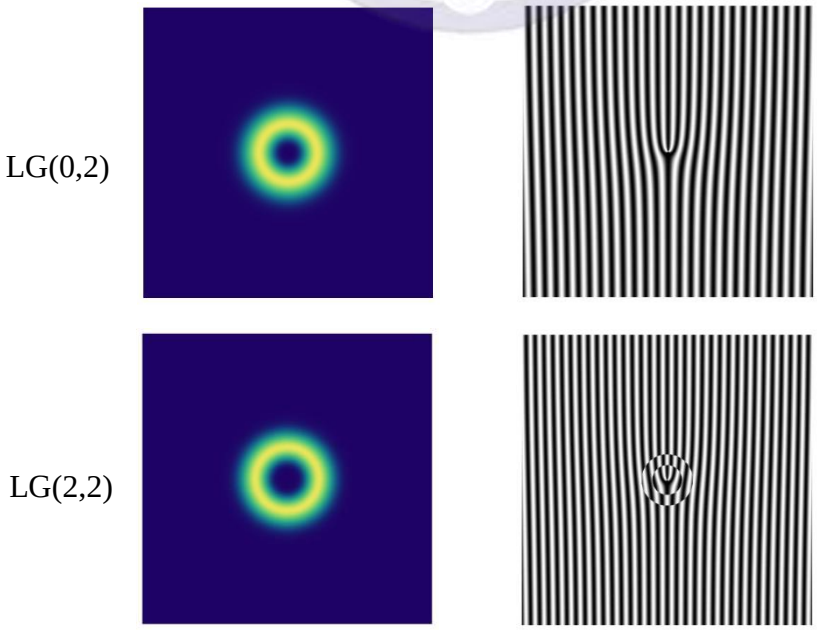


圖 2-17　Laguerre-Gaussian 模態光柵圖

圖 2-17 我們可以看出光柵中有叉狀結構(fork-like)，即表示此 Laguerre-Gaussian 模態具有軌道角動量(OAM)，同時也對應到模態傳遞時相位無法定義的奇異點位置。

圖 2-18 則是疊加的 Laguerre-Gaussian 模態，而疊加的模態具有高度對稱性與複雜的幾何結構，又稱花形模態，故對應的模態光柵圖也更為複雜，花形模態的光柵圖叉狀結構可以對應到花形模態強度分布圖。

(1,0,0,6,1)

(2,1,0,6,1)

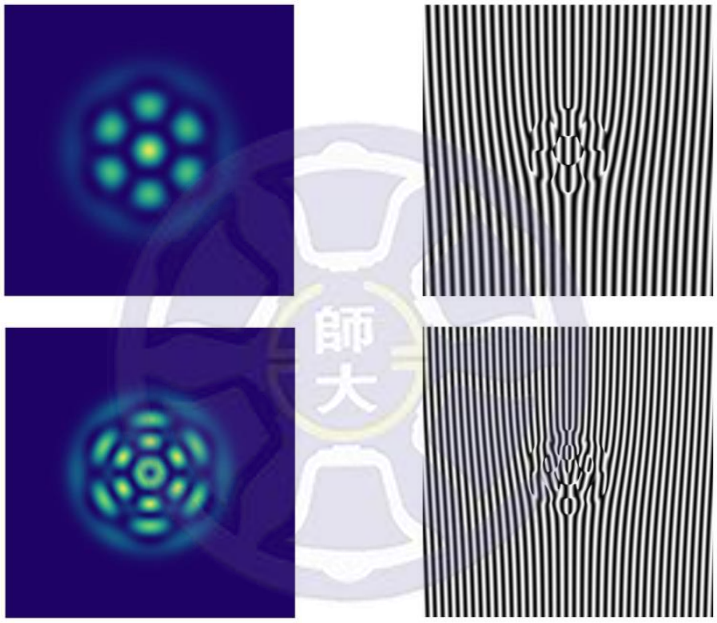
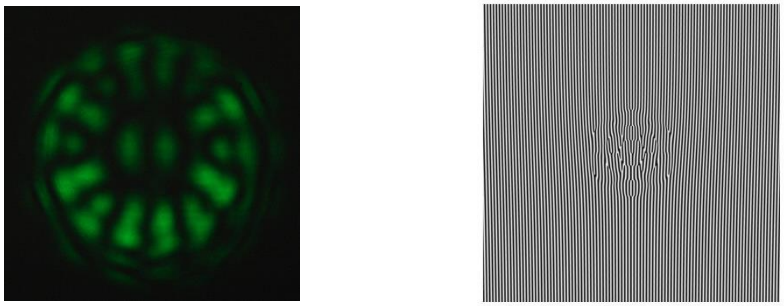


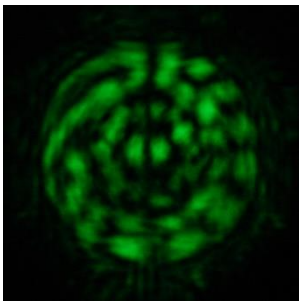
圖 2-18 疊加的 Laguerre-Gaussian 模態光柵圖

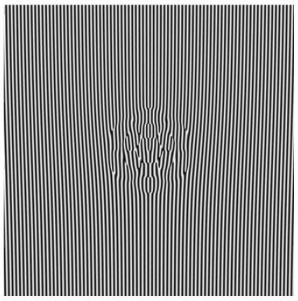
圖 2-19 為同一參數，不同柵數之光柵圖，觀察其經干涉後疊加之駐波型式強度圖，不同 k 值(波數)會使模態強度圖稍有不同。

k=800000

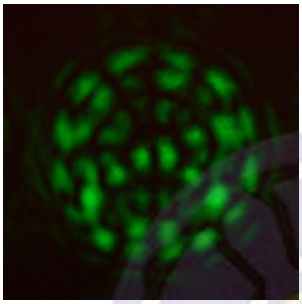


k=1000000





k=1300000



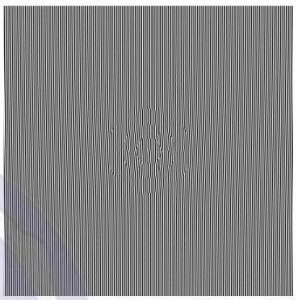


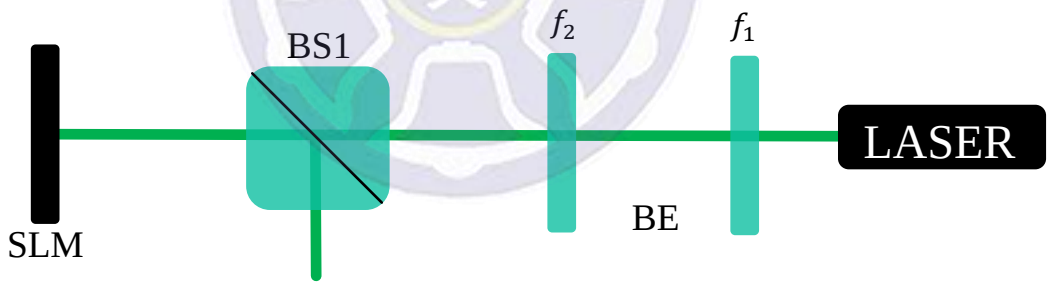
圖 2-19　不同 k 值光柵圖與對應之駐波型式強度圖

由圖 2-19 可看出，當光柵圖之 k 值越大，亦即柵數越多越密集時，呈現的駐波型式強度圖與理論預測圖更為符合。疊加的 Laguerre-Gaussian 模態之光柵圖較 Laguerre-Gaussian 模態之光柵圖相對複雜，故第三章實驗結果中，疊加的 Laguerre-Gaussian 模態為輸入 k=1300000，而 Laguerre-Gaussian 模態則為輸入 k=1000000，將此設定之光柵圖輸入 SLM 進行空間光調製。

第三章 實驗結果與分析

3.1 實驗架構

本實驗使用之雷射光源為 $\lambda = 532nm$ 之綠光固態雷射，並帶有水平方向的線性偏振，使用空間光調製器(spatial light modulator, SLM)，模擬雷射共振腔環境改變入射光的模態，而為了要讀取 SLM 液晶面板上面的光柵資訊，我們在雷射出光後架設一組擴束系統($f_1 = 50mm, f_2 = 300mm, \times 6$)，將雷射光六倍擴束以至可以完全讀取 SLM 的光柵資訊。SLM 是使用反射式，所以使用分光鏡將改變模態之雷射導入干涉儀系統，實驗架構至此，已可改變雷射模態，將基本模態(fundamental mode)轉變成 Laguerre-Gaussian 模態或疊加的 Laguerre-Gaussian 模態(flower type mode)，圖 3-1 為造出雷射模態之部分架構。

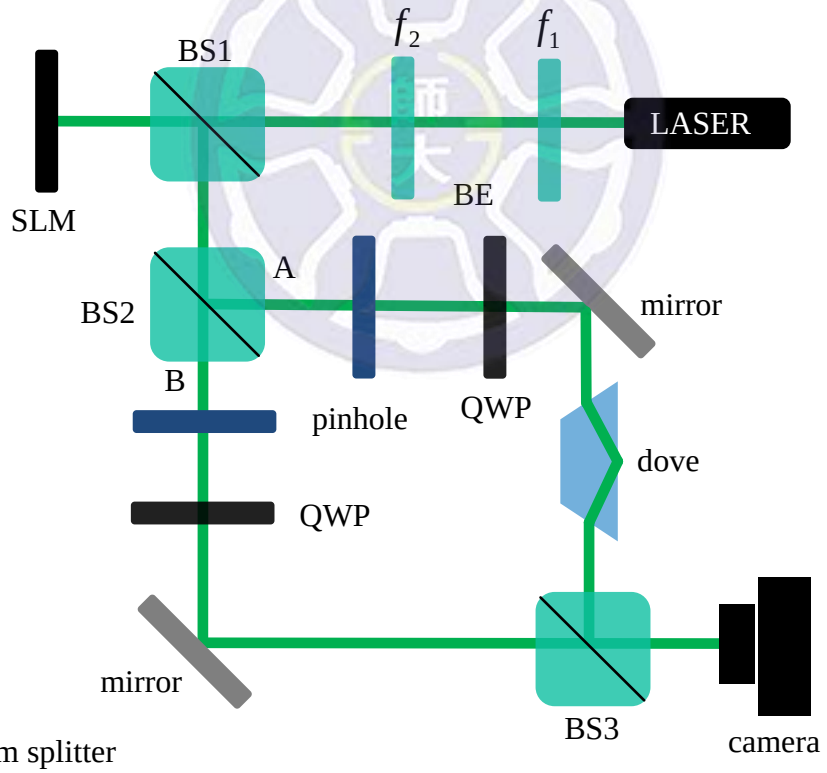


BS: beam splitter
BE: beam expander
$f_1 = 50mm$
$f_2 = 300mm$

圖 3-1　可改變雷射模態之部分架構圖

將讀取 SLM 光柵資訊已改變模態之雷射導入干涉儀中，在雷射光進入兩道光路(A,B)前在適當位置使用光圈選取經光柵繞射後的第一階繞射圖案，之後分別使雷射光在兩道光路中經過偶數次反射與奇數次反射，讓兩道光在最後會聚時相位相差π，故在圖 3-2 中相機前分光鏡(BS3)的位置上兩道光相會並干涉產生駐波形式。

因為雷射出光即是水平方向線性偏振，故我們在兩道光路中再加入四分之一玻片(quarter wave plate, QWP)讓兩道光路的水平線性偏振分別改變成左旋圓偏振與右旋圓偏振，而一樣在分光鏡(BS3)的位置產生帶有偏振之干涉，最後使用偏振片輔助以觀察模態的偏振分布，便可配合本篇第二章提到的利用高階龐加萊球(HOPS)分析空間非齊性之偏振 Laguerre-Gaussian 模態。



BS: beam splitter
BE: beam expander
$f_1 = 50mm$
$f_2 = 300mm$
QWP: quarter wave plate

圖 3-2　實驗架構圖

圖 3-3 為雷射經過架構時改變的狀況。

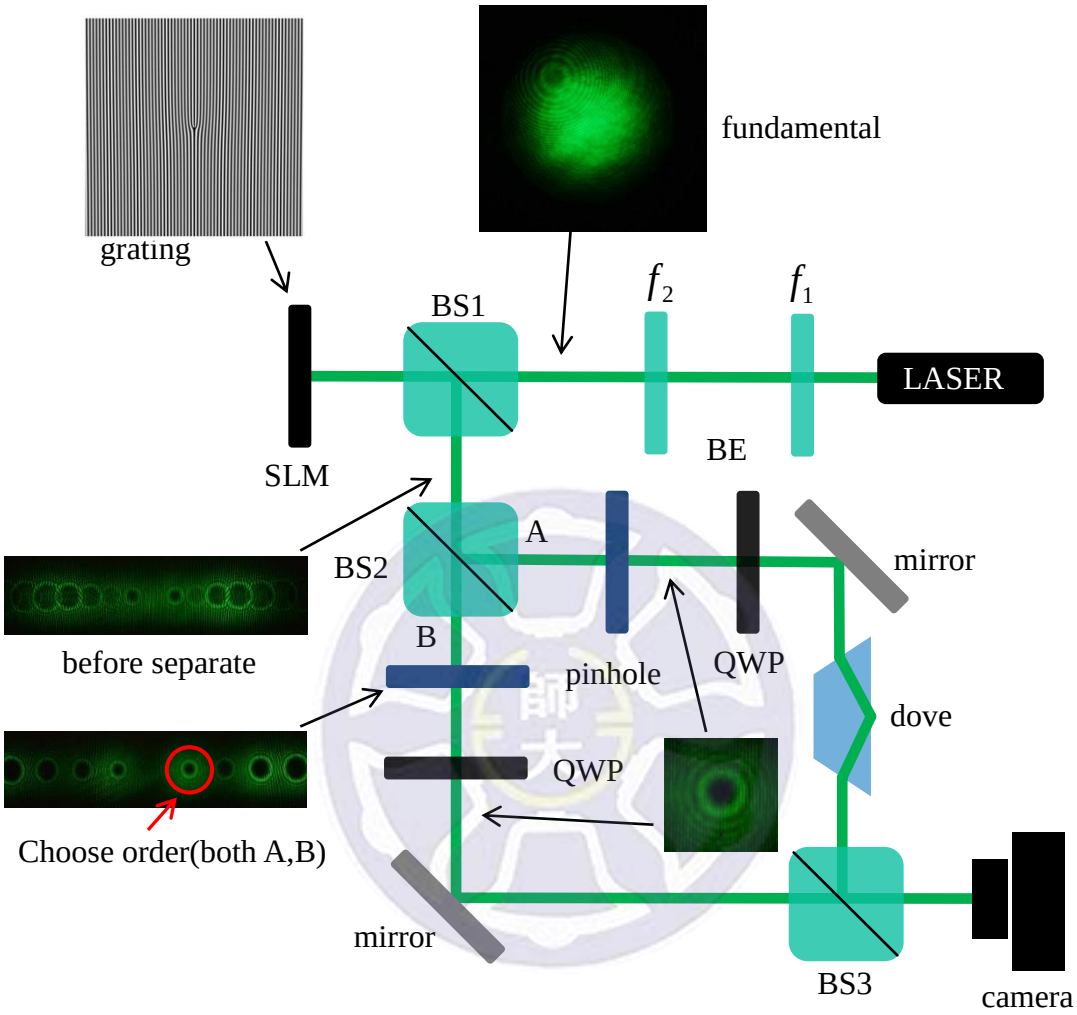
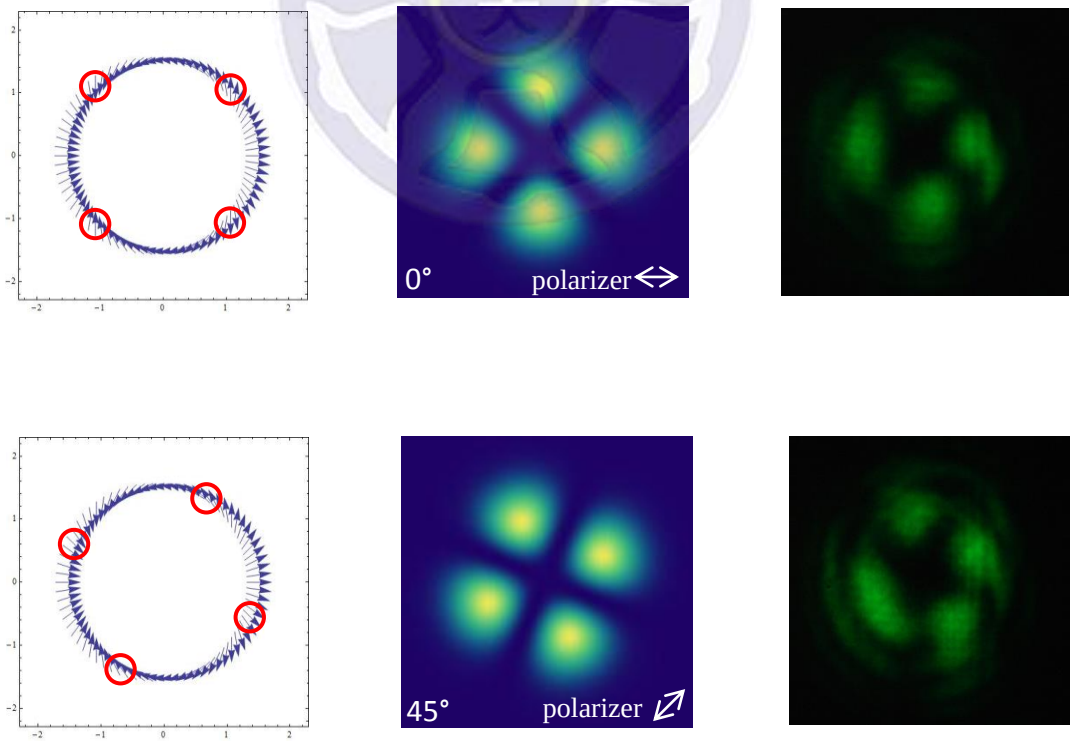


圖 3-3　雷射通過架構示意圖

3.2 Laguerre-Gaussian Mode 實驗結果與偏振分析

Laguerre-Gaussian (0,2)

首先，我們從本篇前面可以知道 LG(0,2)的強度圖、光柵圖與偏振圖，故按照實驗架構我們可以在分光鏡(BS3)後加入偏振片，便可得到受偏振片影響的模態，帶有偏振之 LG(0,2)在通過偏振片時，如果某些區域的雷射光完全無法通過，表示該區域的偏振方向與偏振片方向垂直，而反之如果雷射光完全通過，表示該區域的偏振方向與偏振片方向平行，而模態其他位置之偏振角度則依此原則表現亮暗程度，所以模態整體會受偏振片影響而產生亮暗間格，如旋轉偏振片，則允許通過的偏振方向將會不同，便會使亮暗區域改變，Laguerre-Gaussian 模態看起來會在旋轉，圖 3-4 與 3-5 為 LG(0,2)與 LG(0,3)之實驗結果與理論對照圖。



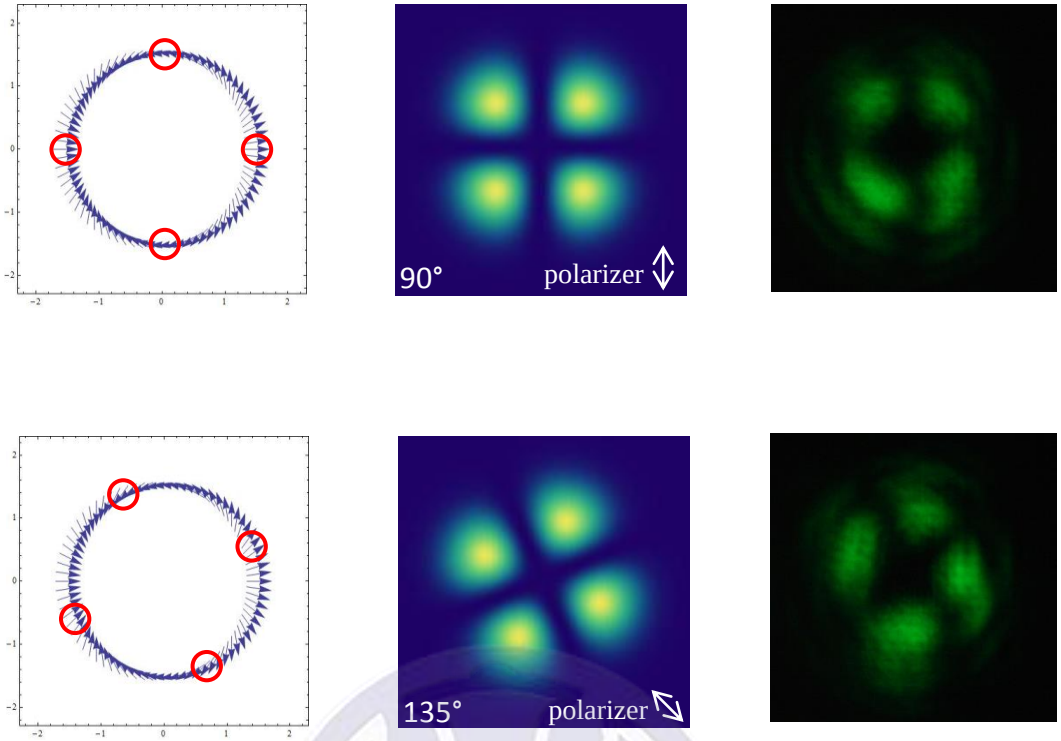
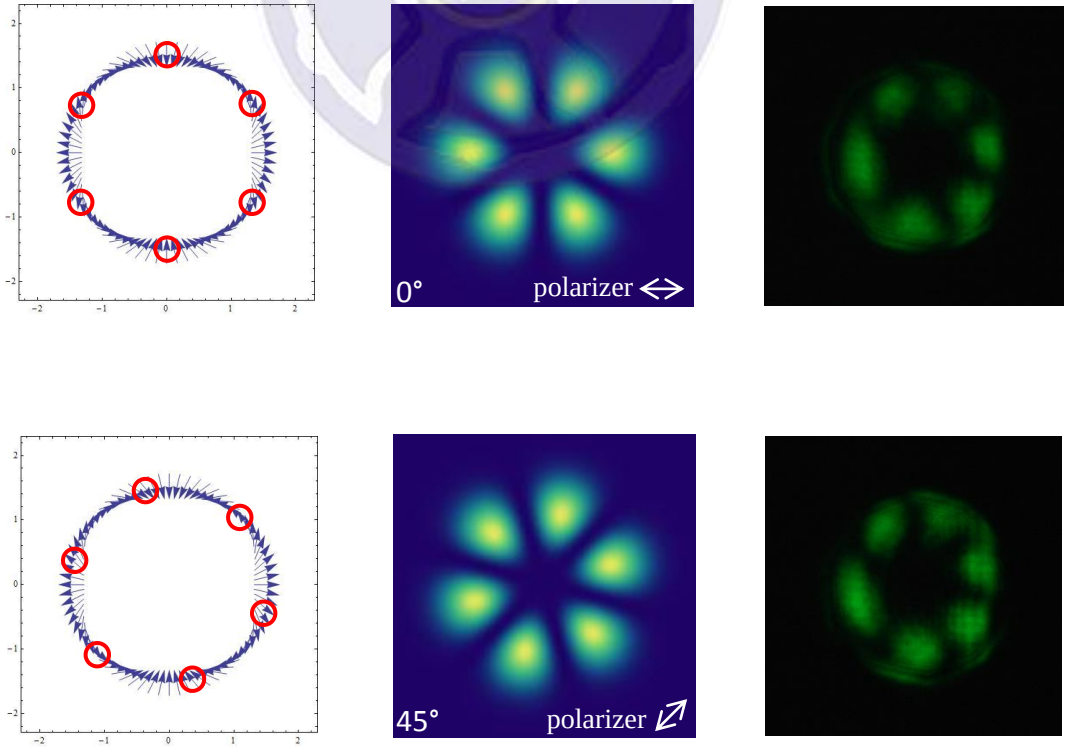


圖 3-4　Laguerre-Gaussian (0,2)

Laguerre-Gaussian (0,3)



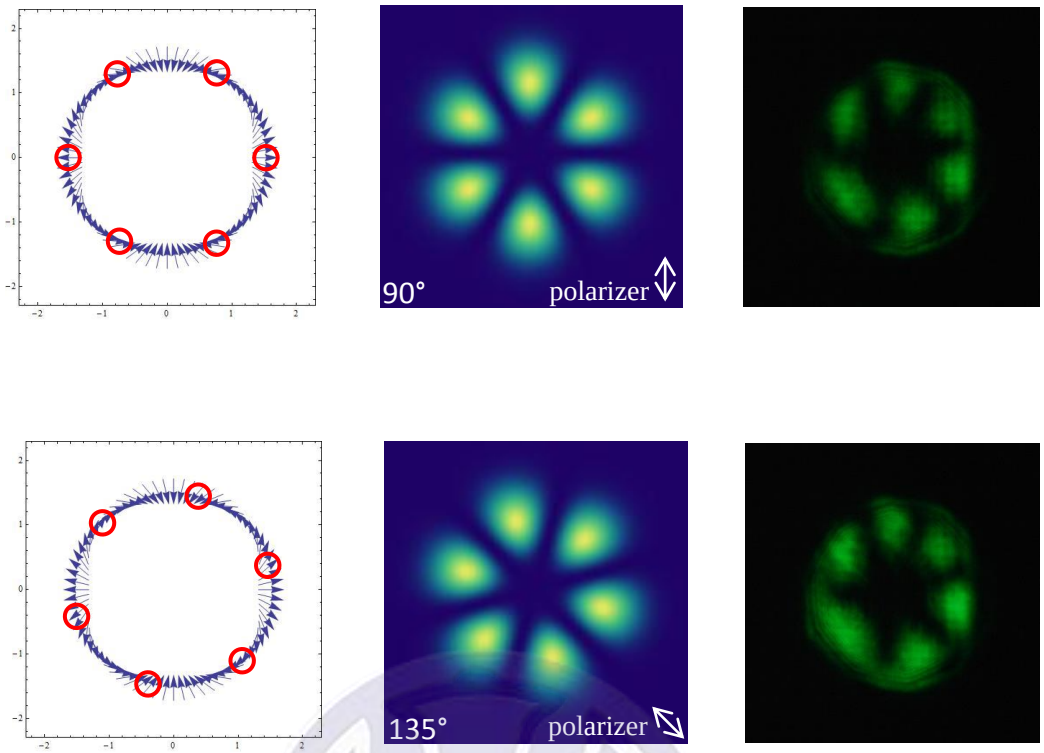


圖 3-5　Laguerre-Gaussian (0,3)

從圖 3-4 與圖 3-5 可看出紅色圈起來部分為與偏振片垂直之偏振區域，亦即紅圈位置必須是暗區，而對應到理論圖與實驗圖也都是暗區，代表我們得到理論預測的結果，接著我們將測試 l 值更高的 Laguerre-Gaussian 模態。

Laguerre-Gaussian (0,10)

我們可以從 LG(0,10)的偏振分布圖 3-6 看出，偏振已經密集到有些無法完整顯示在圖中，即表示會有很多重複相同的偏振方向出現，對應到強度分布則是會有非常多亮暗區間，故無法像 LG(0,2)與 LG(0,3)的方式圈出與偏振片角度垂直之偏振區域，我們改採取選取特定一亮區或暗區，觀察此區域隨偏振片轉動的轉動。

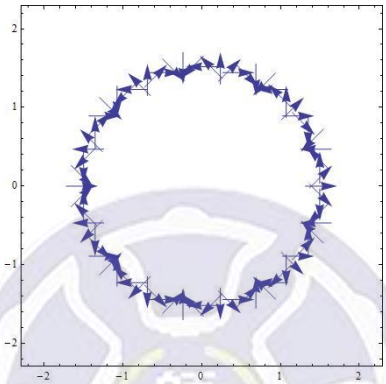
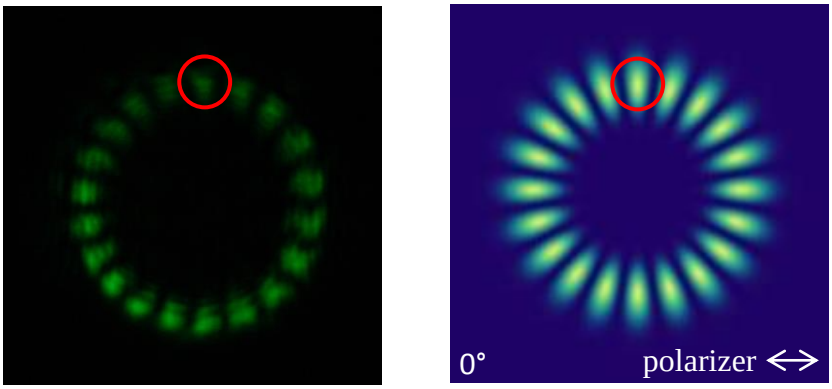


圖 3-6　Laguerre-Gaussian (0,10)偏振分布圖

圖 3-7 為 LG(0,10)之實驗結果與理論對照圖。



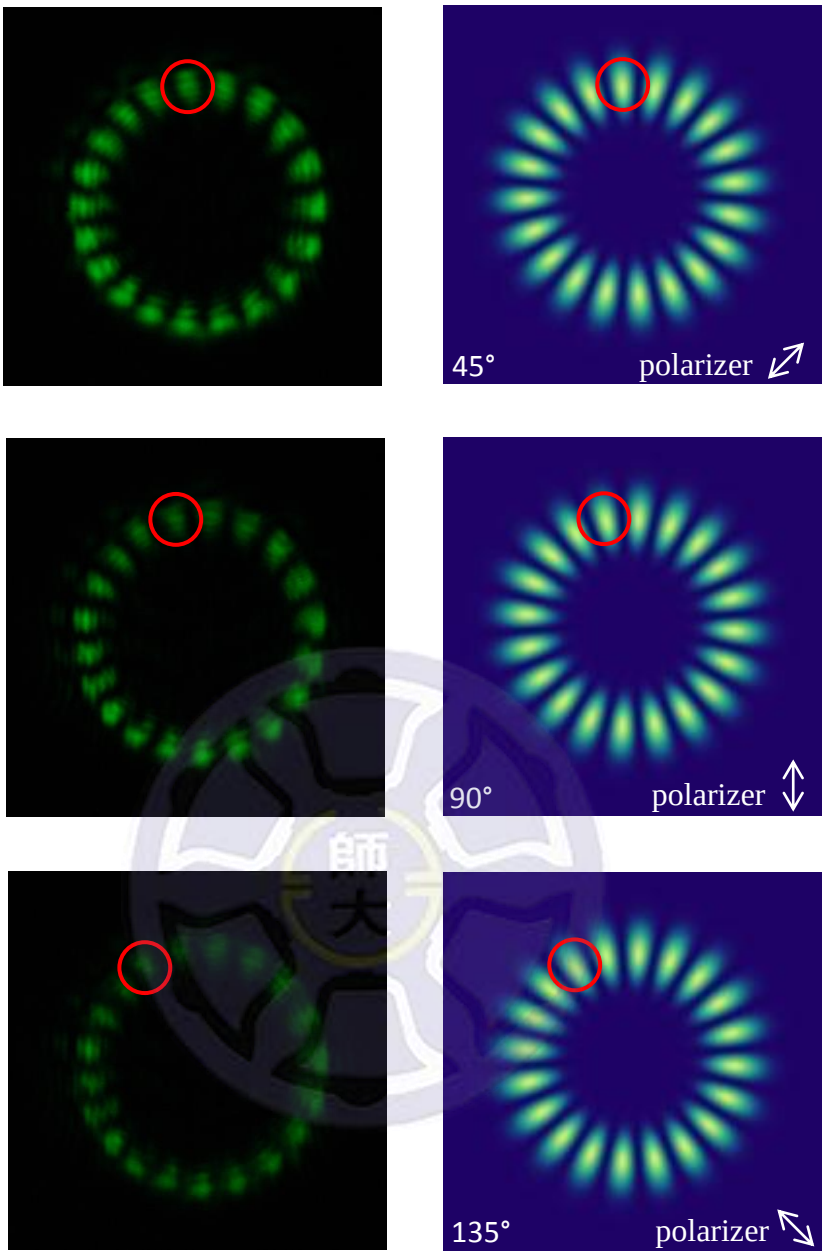


圖 3-7　Laguerre-Gaussian (0,10)

Laguerre-Gaussian (0,15)

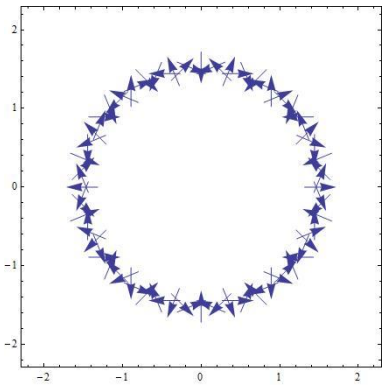
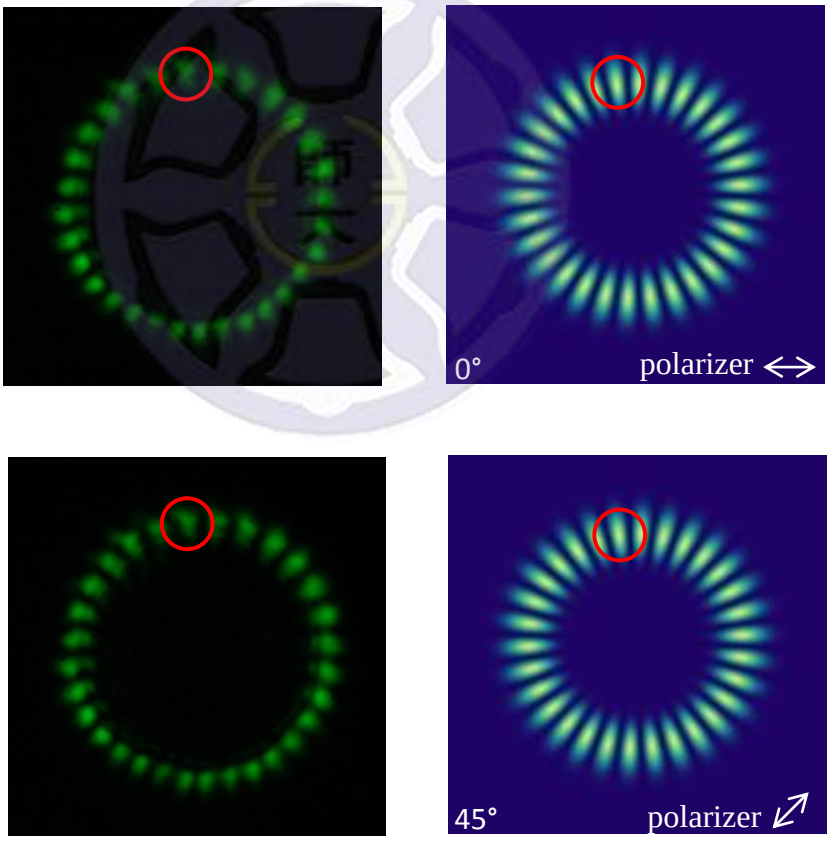


圖 3-8　Laguerre-Gaussian (0,15)偏振分布圖



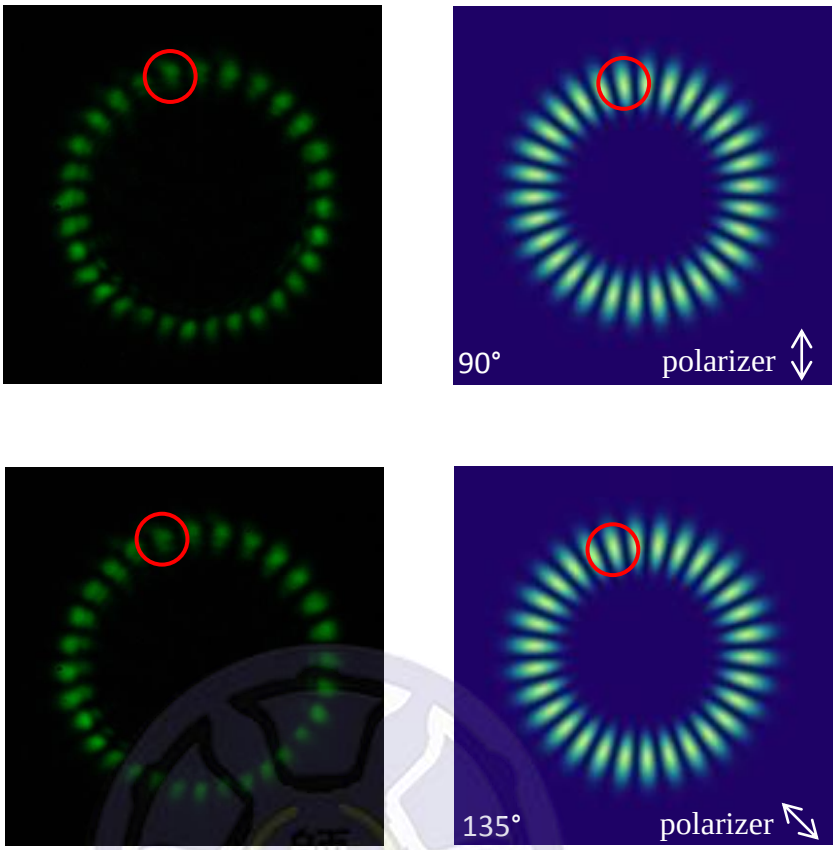


圖 3-9　Laguerre-Gaussian (0,15)

從圖 3-7 與 3-9 可看出 LG(0,10)與 LG(0,15)的亮暗區間非常密集，故我們紅圈選取一亮區觀察其轉動，發現當偏振片旋轉時，該亮區也隨著偏振片旋轉而旋轉，這現象證明了雖然偏振分布圖無法顯示完全的偏振分布，但實際上模態的偏振還是對應偏振片的角度而相互亮暗，故 l 值高的 Laguerre-Gaussian 模態也符合理論預測。

3.3 疊加的 Laguerre-Gaussian Mode 實驗結果與偏振分析

Flower type mode(2,1,0,6,1)

花形模態為疊加的 Laguerre-Gaussian 模態，從本篇第二章可知道其強度圖、光柵圖與偏振圖，但因花形模態的幾何結構比 LG 模態複雜得多，且不如 LG 模態般好預測其受偏振片影響後的強度分布。故花形模態的分析會配合模態本身具有的特性，量身打造檢驗其偏振分布是否遵照理論預測的方式表現，圖 3-10 為 flower type mode(2,1,0,6,1)之 LG 模態組成分析圖。

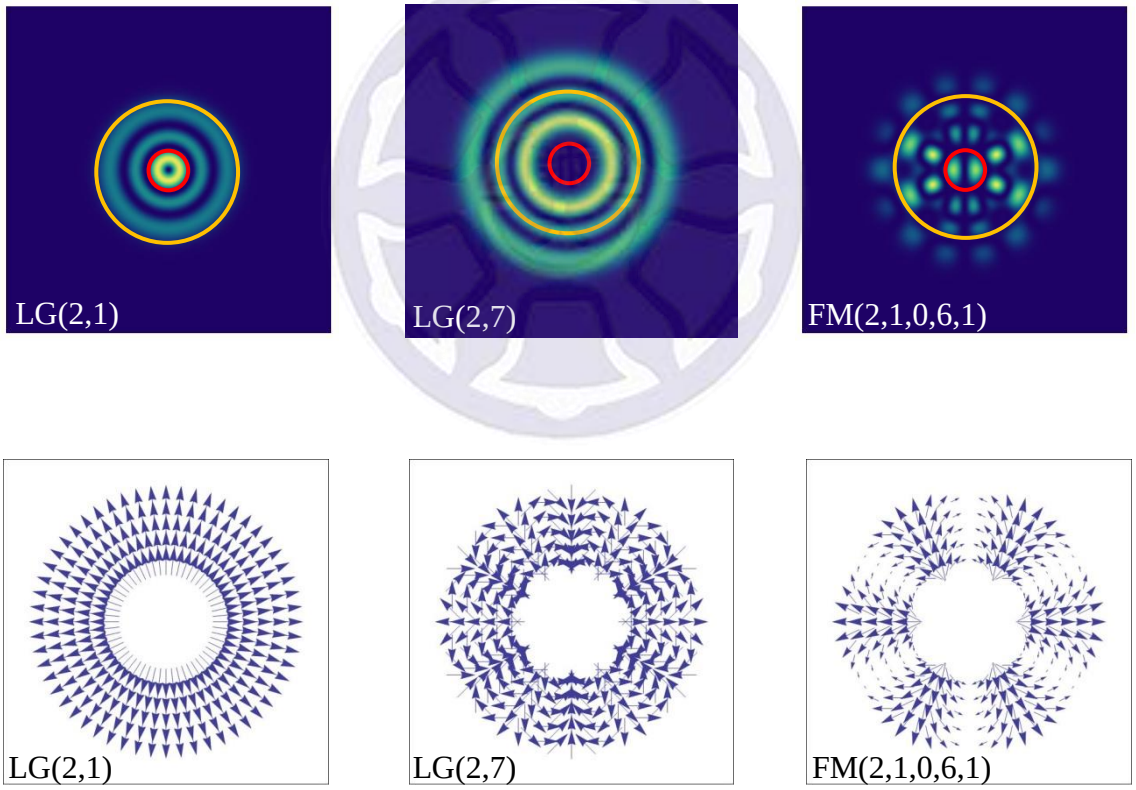


圖 3-10　花形模態與偏振組成示意圖

Laguerre-Gaussian 模態的參數不相同會使模態實際大小不同，從圖中紅圈內可看出 LG(2,1)是有強度分布的，且是 LG(0,1)的貢獻，而在 LG(2,7)則是沒有強度分布，故疊加的結果 FM(2,1,0,6,1)中間只有兩瓣的圖形。另外觀察黃圈外區域，LG(2,1)在黃圈外區域沒有強度分布，而 LG(2,7)則有強度分布，故疊加的結果在 FM(2,1,0,6,1)的黃圈外區域會表現出十四瓣的圖形。最後黃圈與紅圈之間的區域則是 LG(2,1)與 LG(2,7)互相干涉的圖形，造就了花形模態複雜的幾何結構，其中第二排為對應此組花形模態與其組成模態之偏振分布圖。

分析此組花形模態時我們針對最內圈的兩瓣與最外圈的十四瓣為觀察重點，方便我們紀錄觀察模態配合偏振片轉動時的改變。

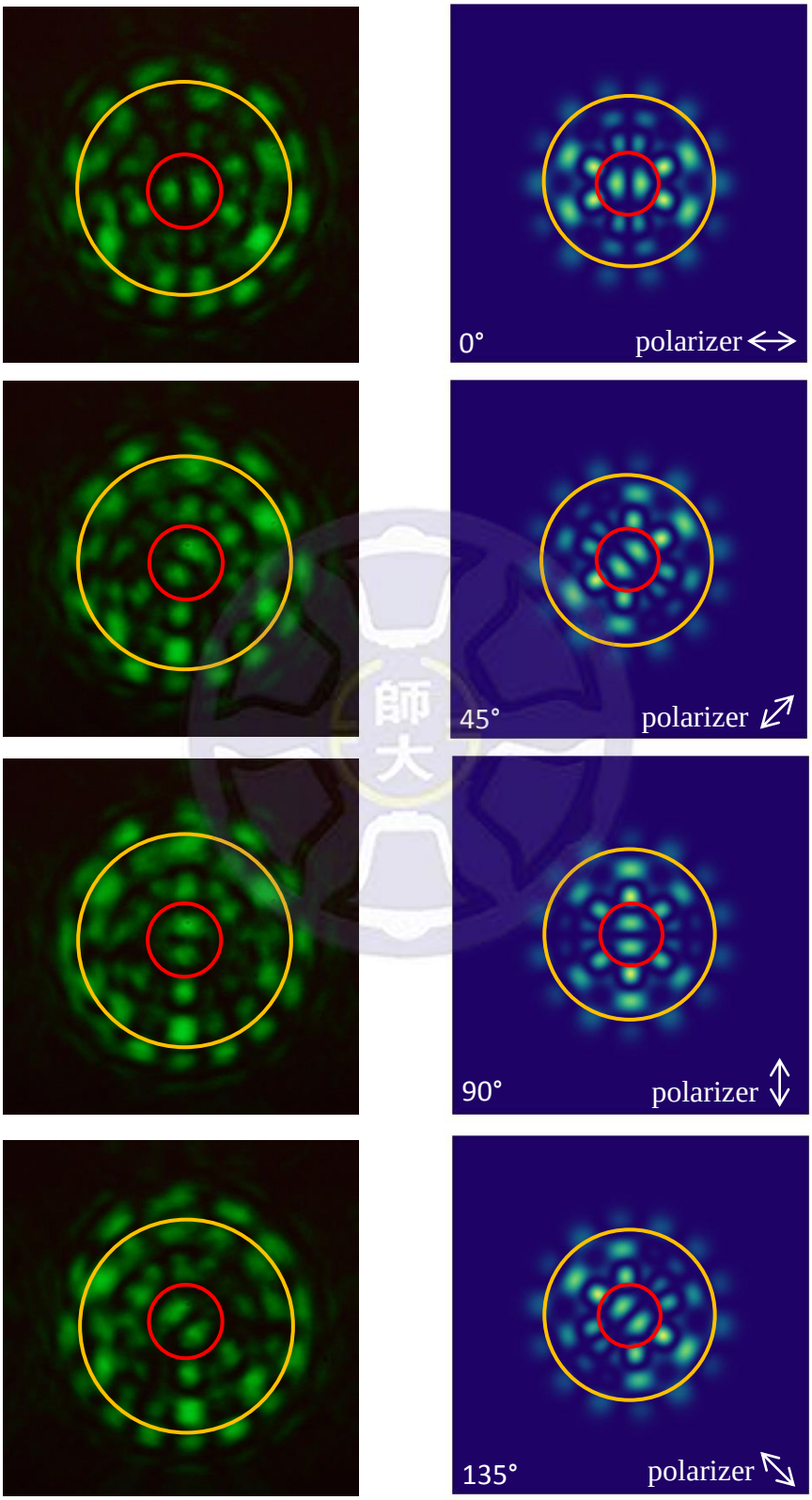


圖 3-11　花形模態實驗與理論對照圖

配合本篇第二章提到的花形模態偏振圖，從圖 3-11 可以看出模態中間的暗線垂直偏振片角度，且隨著偏振片角度改變而改變，而模態中間兩瓣部分與外圈十四瓣部分也都符合理論預期，接著我們觀察另外一組花形模態。

Flower type mode(1,0,0,6,1)

此疊加的 Laguerre-Gaussian 模態亦在本篇第二章提到強度圖、光柵圖與偏振分布圖，圖 3-12 可以看出此模態的組成。

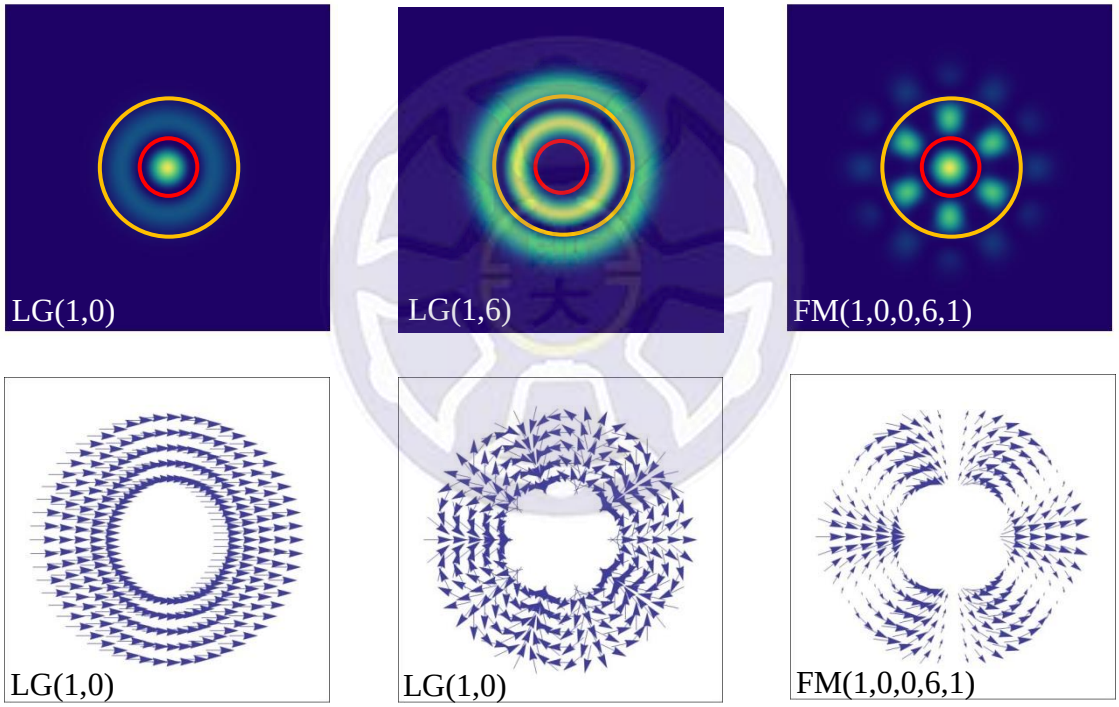


圖 3-12　花形模態組成示意圖

從圖 3-12 可以看出紅圈內只有 LG(1,0)有強度分布且為 LG(0,0)的貢獻，而 LG(1,6)在紅圈內沒有強度分布，故疊加的結果表現在花形模態時，模態中間會如 LG(1,0)的模態中間相同，而觀察黃圈外區域，在 LG(1,0)的最外圈即是黃圈外區域，但在此並無強度分布，而 LG(1,6)在最外圈即黃圈外區域有強度分布，故疊加後表現在花形模態上會是十二瓣圖樣，在紅圈與黃圈之間的區域則是 LG(1,0)與 LG(1,6)相互疊加干涉的區域，其中第二排為對應此組花形模態與其組成模態之偏振分布圖。

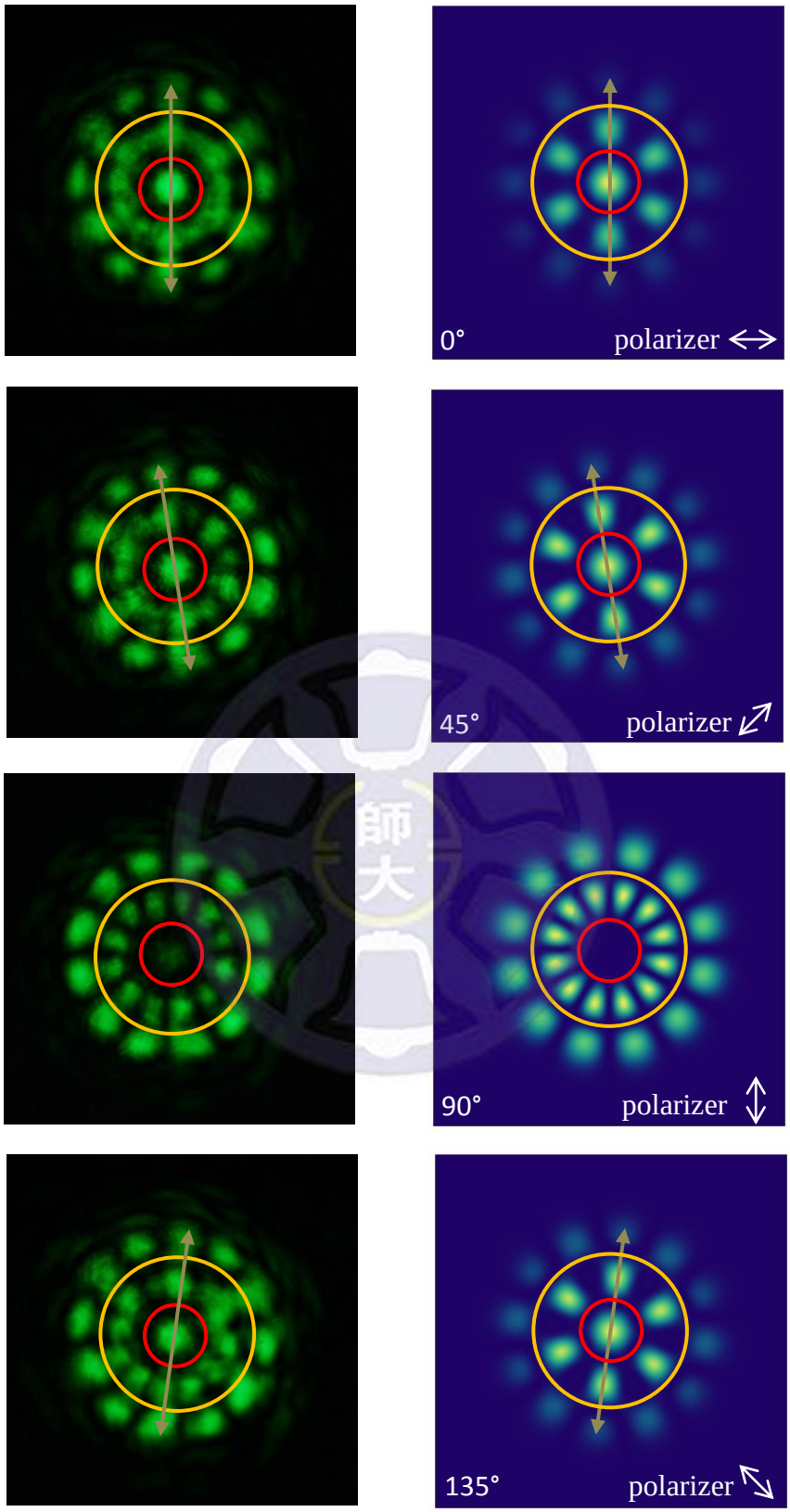


圖 3-13　花形模態實驗與理論對照圖

圖 3-13 可以看出模態中間與最外圈的十二瓣皆符合理論預測，而我們選取一亮區觀察其隨偏振片轉動的改變也對應數值模擬的結果。而在偏振片角度為垂直方向時，模態中央亮點消失，原因是模態中央完全是 LG(1,0)的強度分布，而 LG(1,0)的偏振分布為全部水平線性偏振，故此花形模態之中央亮點會完全消失，此實驗現象則我們對於花形模態組成的分析無誤最直接的證據。

第四章 結論與未來工作

帶有特定強度分布之雷射模態可使用空間光調製器(Spatial Light Modulator, SLM)之相位調製法或光柵繞射法獲得，觀察 Laguerre-Gaussian 模態之光場分布與其疊加模態之光場分布。加入干涉儀系統與四分之一玻片，配合空間光調製器可以產生具有非齊性偏振分布之 Laguerre-Gaussian 模態與其疊加模態，將之結果對應到 higher order Poincaré sphere(HOPS)，可以清楚地了解模態之非其性偏振分布與線性組合。使用偏振片輔助觀察實驗結果，可從其中看出雷射之強度分布因偏振分布與偏振片角度而改變。

帶有不同強度分布與空間非齊性偏振分布之雷射光源，不同於以往雷射的高斯分布與空間齊性分布，此類雷射光源大大的提高了光束帶有的資訊量，此種類雷射光源應用在傳輸、通訊與資訊加密等。提高雷射光源強度分與偏振分布之穩定性與複雜度，並對應到 HOPS 了解其偏振分布與組成，則可大大提高效率，更可能廣泛地發展出更多領域之應用。

參考文獻

[1] D. Psaltis, E. G. Paek and S. S. Venkatesh, “Optical Image Correlation With A Binary Spatial Light Modulator,” *Opt. Eng.* 23(6), 236698-236698-(1984)

[2] A. Ashkin, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure,” *Phys. Rev. Lett.*24, 156-159 (1970)

[3] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, T. Yamene, “Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams” *Nature* 330, 769 – 771 (31 December 1987)

[4] Steven M. Block, Lawrence S. B. Goldstein, Bruce J. Schnapp, “Bead movement by single kinesin molecules studied with optical tweezwes” *Nature* 348, 348 – 352 (22 November 1990)

[5] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw and J. P. Woerdman, “Optical angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes,” *Phys. Rev A* 45(11), 8185-8189 (1992)

[6] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O. van der Veen and J. P. Woerdman, “Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum,” *Opt. Commun.* 96(1-3), 123 – 132 (1993)

[7] T. H. Lu and Y. C. Wu, “Observation and analysis of single and multiple high-order Laguerre-Gaussian beams generated from a hemi-cylindrical cavity with general astigmatism,” *Opt. Express* 21(23), 28496-28506 (2013)

[8] N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue, Y. Ohtake, N. Fukuchi and T. Hara, “Generation of high-quality higher-order Laguerre-Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators,” *J. Opt. Soc. Am.* 25(7), 1642-1651 (2008)

[9] J. P. Kirk and A. L. Jones, “Phase-Only Complex-Valued Spatial Filter,” *J. Opt. Soc. Am.*61(8), 1023-1028 (1971)

[10] T. Ando, Y. Ohtake, N. Matsumoto, T. Inoue and N. Fukuchi, “Mode purities of Laguerre-Gaussian beams generated via complex-amplitudemodulation using phase-only spatial light modulators,” *Opt. Lett.* 34(1), 34-36 (2009)

[11] V. Lerner, D. Shwa, Y. Drori and N. Katz, “Shaping Laguerre-Gaussian laser modes with binary gratings using a digital mircomirror device,” *Opt. Lett.* 37(23), 4826-4828 (2012)

[12] A. V. Carpentier, H. Michinel, J. R. Salgueiro and D. Olivieri, “Making optical vortices with computer-generated holograms,” *Am. J. Phys.* 76(10), 916-921 (2008)

[13] R. A. Beth, “Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light,” *phys. Rev. Lett.* 24, 156-159 (1970)

[14] G. Milione, H. I. Sztul, D. A. Nolan, and R. R. Alfano, “Higher-Order Poincaré Sphere, Stokes Parameters, amd the Angular Momentum of Light,” Phys. *Rev. Lett.* 107, 053601 (2011)

[15] F. Cardano, E. Karimi, S. Slussarenko, L. Marrucci, C. de Lisio, and E. Santamato, “Polarization pattern of vector vortex beams generated by q-plate with different topological charges,” *Appl. Opt.* 51, C1 (2012).

[16] S. Z. Chen, X. X. Zhou, Y. C. Liu, X. H. Ling, H. L. Luo and S. C. Wen, “Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere,” *Opt. Lett.* 39(18) 5274-5276 (2014)