
拆、猜、看——尋找正方體十一個展開圖策略

梁立鑑* 譚寧君 楊凱翔

國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

摘 要

本研究是一個「尋找正方體展開圖課程」的前導研究，旨在透過個案觀察，以期能發現學生在尋找展開圖時可能遭遇的困難或可能的解題策略，用以提供將來發展以「學生中心」的正方體展開圖的課程時更完整的設計。個案是一名國中七年級的學生，數學成績屬於班上中上，也就是前 10%左右。最後發現，尋找正方體展開圖的策略恰為拆、猜、看三種策略，也就是可以直接拆開一個盒子來找展開圖、或是先猜猜看可能展開圖的樣子，再試試看能不能拼成一個盒子，或是拆開盒子的上方正方形來觀察可能拆出的樣貌，再做展開圖。這些策略可供想要發展以學生中心課程設計的教師做課程設計之參考。

關鍵字：正方體展開圖、教學活動

壹、緒論

立體幾何思維的教學在教育現場中一直是很大的挑戰，也就是要如何增進學生的立體幾何思維是一個重要的課題，而我們可以從文獻中發現，空間能力直接影響立體幾何推理類型的結果，因此建議立體幾何教學應結合發展空間能力的活動（Pittalis & Christou, 2010）。與空間能力相關的摺合活動，例如正方體展開圖的活動自然是可以關注的焦點。依 Piaget 的兒童認知發展理論來看，概念的發展階段植基於具體物的操作與觀察，即從對具體物的幾何特

性之認識，進而發展到抽象的結構，故有效的幾何教學設計宜從具體操作的活動連結到抽象關係的探索與調查，此亦為數學教育學者所建議的（Clements & Battista, 1992; Clements, 2003; 黃幸美, 2010）。因此如何設計一門讓學生去探索、摺合以找尋正方體十一個展開圖的課程就是研究者所希望的。然而希望以學生中心的課程設計下，要給予學生什麼樣的引導？在摺合的過程中可以提供何種策略？在遍尋不著相關的資料下，於是研究者進行了一個個案觀察的前導研究，以期能找出一些策略來進一步設計課程。

*為本文通訊作者

貳、文獻探討

一、空間能力與立體幾何學習的

鑑定空間能力的論文最早是由 Thorndike 於 1921 年所提出 (Mohler, 2008), 此後便有許多學者投入對空間能力的研究。早期心理學家以因素分析的技術發現了「空間能力」是人類心智能力之一, 此後便有學者陸續提出數種不同的空間能力因素 (張碧芝、吳昭容, 2009)。現今用來描述空間能力構成的結構基礎, 最常用的方法就是因素分析, 而空間結構有影響力的模型便是由 Lohman (1979) 提出: 空間能力就是具有產生、維持並且操作抽象的視覺心像的能力, 包含三個主要空間能力因素, 空間視覺化 (spatial visualisation)、空間定位 (spatial orientation) 和空間關係 (spatial relations)。空間視覺化 (Vz) 被複雜的空間測試來定義, 如紙張摺疊 (paper folding) 或表面展開 (surface development) 所定義; 而空間定位 (SO) 則是需要想像陣列如何從不同的視角會出現, 然後從這個想像的視角來作出判決; 空間關係 (SR) 則被操作簡單的視覺樣式, 在心理旋轉的速度來定義 (Colom, Contreras, Botella & Santacreu, 2002)。空間能力的結構又可細分: 空間視覺化 (Vz) 包含了樣版 (From Board)、表面展開 (Surface Development) 和紙張摺疊 (Paper Folding) 三個子因素; 而空間定位 (SO) 包含了物體透視 (Object Perspective)、心像透視 (Image

Perspective) 二個子因素; 空間關係 (SR) 則包含了卡片旋轉 (Card Rotataion)、立方體比較 (Cube Comparison) 和物體旋轉 (Object Rotation) 三個子因素 (Pittalis & Christou, 2010)。(茲將其關係整理如表 2-1)

表 2-1 空間能力的結構

	主要空間能力因素	空間能力再細分
空間能力	空間視覺 spatial visualisation	1. 樣版 (From Board) 2. 表面展開 (Surface Development) 3. 紙張摺疊 (Paper Folding)
	空間定位 spatial orientation	1. 物體透視 (Object Perspective) 2. 心像透視 (Image Perspective)
	空間關係 spatial relations	1. 卡片旋轉 (Card Rotataion) 2. 立方體比較 (Cube Comparison) 3. 物體旋轉 (Object Rotation)

立體幾何思維可用三維物件表徵 (representation of 3D objects)、空間結構 (spatial structuring)、概念化的數學特性 (conceptualisation of mathematical properties) 和測量 (measurement) 這四種不同的推理形式來描述 (Pittalis & Christou, 2010)。

研究結果顯示, 三個空間能力因素是立體幾何思維中四種不同的推理類型在推理時的一個強大的預測因素, 尤其是空間能力在"表徵三維形狀"這推理上有強大的迴歸係數, 也許對於在表徵和建構三

維形狀有嚴重一系列的困難的學生可以建議他們發展與這個過程密切相關的空間能力,也就是說空間能力直接影響立體幾何推理類型的結果,因此建議立體幾何教學應結合發展空間能力的活動(Pittalis & Christou, 2010)。

二、具體操作對空間能力的重要性

既然空間能力影響著幾何的學習,空間能力要如何培養呢?依Piaget的兒童認知發展理論來看,概念的發階段植基於具體物的操作與觀察,即從對具體物的幾何特性之認識,進而發展到抽象的結構,故有效的幾何教學設計宜從具體操作的活動連結到抽象關係的探索與調查,此亦為數學教育學者所建議的(Clements & Battista, 1992; Clements, 2003; 黃幸美, 2010)。而具體操作又如何增進空間能力呢?茲將這些研究成果分述如下:

老師可以利用具體教具讓學生動手操作,幫助學生建立心像,讓他們容易經驗並察覺到圖形經過平移、旋轉或分割重組等幾何變換後的面積、體積並沒有改變,這樣的教學可以促進學生的保留概念能力的發展(王儀雅、劉祥通, 2011)。

研究以「數學操作活動的教學模式」設計空間能力的教學課程,教學活動實施方式包括:智慧片的操弄、立體模型的建構及堆疊、觀察、想像、視覺記憶及繪製等,結果顯示學童空間能力增進的學習成效良好(吳明郁、張英傑, 2004)。

在「國小長方體表面積之補充教學」研究中,透過觸摸物體表面方式,物體表面積的存在性得以感受。於物體表面的塗色,確認了表面積存在的範圍。在實物操弄的過程,表面積的操作型定義得以發展,而最終明瞭表面積的意義。(江重輝、姚如芬, 2008)

參、研究設計

本研究採質性研究中的個案研究,研究對象為一名國中七年級學生,期能於研究觀察中找出孩童於尋求正方體展開圖可能會有的策略。本單元中將分別從研究者自我剖析、研究對象、活動設計、資料收集四部分來說明。

一、研究者自我剖析

研究者從事教育工作約有十年的光景,目前是數學研究所進修的學生,從小到大,數學就是最喜愛的科目,在研究所進修就是期許自己能打破自我框架,並能對於課程設計能力有所精進。

二、研究對象

個案是一個剛從小學畢業的國中七年級新生,亦是研究者的女兒,在校的數學成績算是中上,也就是前10%左右,對於學習數學這件事情不會排斥或討厭,當初在學習表面積這個單元時,有無法分辨平面具有凹面的立體形體中凹面表徵的問題。

三、活動設計

本研究的目的是要找出學生於尋找正方體展開圖時，可能會有什麼策略及可能會遭遇什麼困難的觀察研究。具體而言，就是給予個案正方體的六個面，也就是六片正方形，讓個案先自行拼成一個正方體的盒子，再經由拆解這個盒子的過程，找出正方體的十一個展開圖。這過程中，研究者儘可能不給予提示，目的就是觀察個案尋找的過程中，會遭遇什麼困難，而個案又是用什麼策略去解決。以期用這些發現的困難及策略，來設計並發展「學生中心」為主的「尋找正方體展開圖的課程」。

四、資料蒐集

資料蒐集為觀察日誌及研究札記二部分。而其編碼則分別為二字縮寫，（觀誌）就是指2012年11月17日的觀察日誌，而（研札）是指研究者2012年11月17日的研究札記。資料收集儘可能詳細及完整的詮釋。

肆、研究結果

一、教具的選擇

就單純以正方體展開圖的展開活動而言，就有著許多不同的教具可供選擇。不論是之前書商於數學附件上提供的展開圖教具或是百力智慧片，甚至自製教具，就有許多不同的選擇。首先，百力智慧片因為它可重複利用，加上許多的學生對這個教具很熟悉，此外操作上容易，因

此百力智慧片使用與否自然就會在考量的範圍之中。「你有沒有用到百力智慧片？」老師溫柔的提點，自然是在考量百力智慧片的優點後好奇的提問，而研究者一開始亦因這些特點有考慮到使用這個教具，但後來考量百力智慧片能拼成正方體的智慧片，在研究者手中僅有綠色與紅色二種，擔心會跟正方體展開圖課程之後的教學內容所採用的教具（魔粒組亦稱三色方塊是黃、藍、紅三種顏色）有所不同，而造成顏色上彼此干擾，因此而放棄。又課本所附的教具僅是正方體某一種特定的展開圖，若要使用，勢必要改造一番，而且這些教具的顏色僅有白色，因而放棄附件所提供的教具。最後，為了符合黃、藍、紅三種顏色讓學習上視覺效果會較有一致性，並且可以重複使用剪刀或是小刀切開來找出正方體的展開圖的這些條件，於是考量使用具有黃、藍、紅三種顏色的西卡紙來做實驗，但西卡紙亦有缺點，就是紙張的耗損率大，只能一次實驗就無法再使用，而這個缺點在日後方案成型之後，亦可去切割不同的壓克力片來克服。


然而要採用西卡紙來做實驗，接著要面臨的問題，就是要去考量每一個正方體展開圖的面到底要多大？大一些也許容易操作，但大而無當亦非良方，因此需要客觀的考慮可能的影響因素並從中找出一個平衡點。首先，要考量學生桌面大小有一定的範圍，在這範圍中除了要有拼出正方體的盒子空間外，尚需保有可能拼另

二個長方體的盒子活動的空間，此外亦需考量學習單記錄的空間，因此盒子自然不能太大。其次這個活動可能會回家完成，因而學生攜帶或是觀察的便利性自然亦在考量之列。再則有一個很重要的因素就是成本的考量，紙張愈大，費用亦愈高。雖然很多因素都直指不能太大，但若是太小，則操作上會有一定的困難度。因此正方體每一個面的大小，在多方嘗試之後就暫定為邊長為4公分大小，如此在這些的因素上取得一個較佳的平衡。

二、個案研究的過程

此次研究目的最大重點就是藉由個案研究來探討學生尋找展開圖會遭遇什麼困難，我們可以有什麼策略來幫助他們呢？透過此次實驗，或許可憶測學生在找展開圖可能會遇到的困難或是可協助他們的策略會有助益。研究一開始，就給了研究者一個小小的震撼：

「雖然她已經國一，應當學過展開圖，但當我詢問她正方體的展開圖可能有幾個時，她竟然回答說二個吧！一個是


 另一個則是 。剛聽到這



個答案，著實令研究者感到意外，但仔細想想現今的教材，應是理所當然，也就是正方體的展開圖，在我們現行的教材中，並沒有探討的單元（而這不正是這次請她找展開圖了解可能策略的目的），這二個圖形自然也就是她小學時所接觸到的二個圖形。然而心中也不免自問，請孩子找

這十一個展開圖，能對空間能力有多大的助益呢？這是一個不得而知的問題，但自己只能相信，多操作一定是有益處的。」（研札）

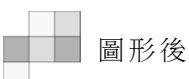

現今的教材之中，僅有一、二個展開圖的介紹，若以教師為中心的教學，學生沒有機會察覺有不同形式的展開圖，自然不知展開圖可能會有多少個，因此更確信，透過探索找十一個展開圖的摺合與展開來培養學生的空間能力，也許是值得我們去嘗試的任務。首先，先請她將六個正方形拼成一個正方體的盒子，試驗過程中，發現將面與面之間攤平、貼上膠帶，最為容易。




在觀察個案期間，研究者除了看她黏貼盒子之外，自己也嘗試組裝一個盒子的難度，主要亦擔心屆時請學生找展開圖時，學生會因黏貼盒子太困難而放棄，或者整節課都花許多時間在黏貼上，那麼就失去原本的意義了。而在女兒嘗試找展開圖的過程之前，就發現可以使用隱型膠帶，只要於膠帶的一端做一個摺角，不讓它與盒子黏死，而西卡紙本身又有光滑面，這樣就方便拆開一個盒子的連接面而找到展開圖了，而隱型膠帶可重複使用的特性，又可以很容易黏回一個盒子再找下一個展開圖。


「貼好後，開始第一個圖形，當然她是隨機剪開來，於是她得到了  這樣一個圖形，這是一個她沒看過的圖形，於是此時的她開始猜測正方體的展開圖

可能會有那些，先從她知道的  及她想像可能會有的  (觀誌)

當女兒看到第一個展開圖時，她是覺得很有趣的，原來這樣的圖形也是正方體的展開圖，她先回顧先前二個已知的展開圖，然後隨機挪動圖形成為另一個像展開圖的圖形，再拼成盒子，研究者當時心想也許這能成為上課的策略之一，就是從已知的展開圖，挪動其中一塊來找到其他的展開圖。

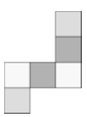


「但是當她實驗這個  圖形後她發現排不出來，於是她又轉而將一個正方體剪開的策略。但這次剪開時，她用了一個策略，就是剪開上面的之後，先觀察，如何可以使正方體的展開圖最多只有三個邊，於是她得到了  這個展開圖。這樣的策略似乎很有效，於是她又想辦法看能不能只有二個邊相連，於是又得

到了 。但她隨之發現，二個相聯的不可能有了，於是又轉為三個相連的看是不是有，剪的時候，為了不讓之前的圖形重複，她會邊剪邊比對，於是她又先後得到了  以及 。此時她覺得

可能沒有了，但還是不死心的再嘗試三個相連的，於是得到了 。」(觀誌)

哇！這個策略真是太好了，研究者從來沒想過可以這樣做，先將盒子的上方的正方形打開，然後觀察如何使三個正方體成一直線、再來使二個成一直線，如此就可以將大部分的展開圖找出來了，也就是上課時，如果學生還是找不到，可以透過這樣的策略讓他們找到最多的展開圖。

「這時她的策略又改變了，她又嘗試將六片正方形先排成沒看過的樣子

，但是失敗了。這時的她已經想放棄了。於是我鼓勵她還有一個，看看她能不能找出來。她看之前她解出來的圖形，想了很久，覺得好像沒有了，她要放棄了，於是我只好再給她提示，可能跟這個圖形  有關，於是她將六片正方形排列於地上，移動紅色的正方形，她便發現了最後一個展開圖 。」(觀誌)

讓自己的女兒做完這個實驗後，對於正方體展開圖的課程有了信心，了解了就是可以透過「拆」、「猜」、「看」這三種策略來找展開圖，也就是可以拼好一個正方體的盒子後，將它直接拆開來找展開圖，或是猜猜看展開圖可能是什麼樣貌再將六片正方形拼起來，並且摺摺看是否能拼

成一個盒子，或是先拆開正方體盒子的上方的正方形，看看如何能有四個正方形連成一線、三個正方形連成一線……等策略來找出所有的展開圖。最後，如果學生仍找不出來，可以再放上找不到的展開圖讓學生去判別是否為展開圖。這次前導研究算是收獲不少，總算可以對展開圖課程做大概的教學設計了。

伍、 結語

若從正方體的組成型態來探討，正方體可說是將四個面圍起，再加上二個底面所構成，因此展開圖中，最多只有這樣四個正方形連成一線的圖形(因為五個一連就會在摺合成正方體時，出現重合的情形)，而以這個圖形為基礎，使用排列組合及摺合來歸納整理(也就是加入二個獨立的正方形來排列並再以摺合驗證是否能成為正方體)，共可得六個圖形，其摺回正方體之分解圖如圖5-1；而相同的道理來探討三個正方形一連的形狀，從四個一連拆下的正方形，勢必僅能相連於其中一個底面上，得到像這個圖形，用相同方法加入一個正方形來排列並摺合成正方體來歸納，可得四個圖形，其摺回正方體之分解圖如圖5-2；而同樣方法來探討僅二個正方形相連的展開圖，則僅有一個，其摺回正方體之分解圖如圖5-3，因而總共恰得到了十一個展開圖。當然，像這樣歸類驗證是十一個展開圖的教學過程，需要教師去引導學生反覆驗證及探討，辯證的方式也許不夠嚴謹，然而讓學

生去學習如何追求及辨別是否趨近真實現象及於摺合過程中習得的正方體的心像是更加重要的。此外相關的延伸教學活動，更可使用六個正方形相連排列，來得到三十五種不同的圖形後，再一一摺合比對是否能成為正方體，用以再次驗證正方體恰有十一個展開圖而使教學更加完整。

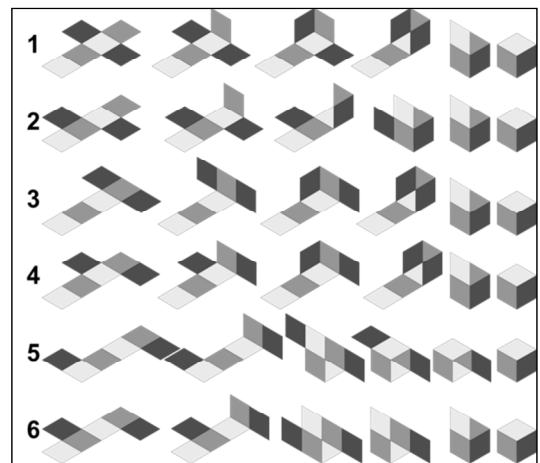


圖 5-1 四個正方形一連的展開圖摺成正方體分解圖

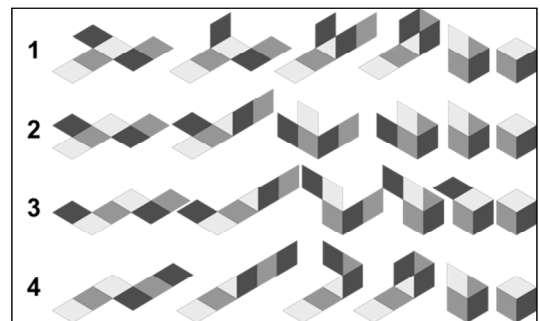


圖 5-2 三個正方形一連的展開圖摺成正方體分解圖



圖 5-3 二個正方形一連的展開圖摺成正方體分解圖

本研究旨在透過個案觀察研究，以期能對學生在尋找展開圖時可能遭遇的困難或解題策略的研究，也就是發展以學生為中心的課程設計之「尋找正方體展開圖課程」的前導研究，目的是將來發展以學生為中心的正方體展開圖的課程時，可藉由這些發現的困難或策略，提供更加完整的設計。從觀察研究過程中，恰巧發現了「拆」、「猜」、「看」三個策略可以找到展開圖，也就是藉由拆解正方體找到展開圖、使用先猜再拼合的方式來找展開圖，或是將一個完整的盒子剪開上方的正方形來觀察的策略來找到展開圖，而最後可經由教師提示來找到展開圖，這讓研究者有了可依循的方法而著手設計展開圖的教學。亦可提供對於想要進行正方體展開圖教學設計的教師做為參考。

參考文獻

- 王儀雅、劉祥通 (2011)。增進數學試題鑑別力－從分析開放式題目的解題類型著手。發表於第三屆科技與數學教育學術研討會，國立臺中教育大學數學教育學系，台中。
- 江重輝、姚如芬 (2007)。國小學童長方體表面積迷思概念之分析研究。發表於中華民國第二十三屆科學教育學術研討會，國立高雄師範大學，高雄。
- 吳明郁、張英傑(2004)。國小四年級學童空間能力學習的研究：以立體幾何展開圖為例(未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學數理教育研究，台北市。
- 張碧芝、吳昭容 (2009)。影響六年級學生立方體計數表現的因素－空間定位與視覺化的角色。*教育心理學報*，41(1)，125-145。
- 黃幸美 (2010)。美國當代小學幾何課程發展及其對台灣幾何教學之啟示。*教育資料集刊*，45，233-270。
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, 151-178. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D., Battista, M. (1992). Geometry and spacial reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420-464. New York: Macmillan Publishing Company.
- Mohler, J. L. (2008). A Review of Spatial Ability Research. *Engineering Design Graphics Journal* ,72(3), 19-30.
- Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: A review and reanalysis of the correlational literature* (Tech. Rep. No. 8), Stanford, CA: Stanford University, Aptitude Research project, School of Education. (NTIS NO. AD-A075 972).
- Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics* , 75(2), 191-212.DOI:10.1007/s10649-010-9251-8

投稿日期：102年05月25日

接受日期：102年11月08日

Split, Guess & See: A Strategy to Look for the Eleven Developments of a Cube

Li-chien Liang, Ning-Chun Tan, and Kai-Hsiang Yang

Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

Abstract

This study is a pilot study for developing the curriculum about "looking for the eleven developments of a cube". For the purpose of finding out the difficulties and strategies when looking for the eleven development of cube, and in order to develop the more complete design curriculum of "looking for the eleven developments of a cube" in the "student-centered teaching and learning" way, we plan through the case-study. The student participate in this study is a seven grades student, and math scores is upper average of the class, about top 10%. Finally, we found out the three strategies of this student when she finishes looking for the eleven developments of a cube, three strategies are split, guess and see. You can split a cube to get a development, and you also can guess what development may splice it into a cube then splice it, and you also can split the cover of a cube to see how to split the cube into different development. These strategies are available for reference to the teachers who want to develop a "student-centered teaching and learning" course about "looking for the eleven developments of a cube".

Keywords: cube development, teaching activities