第四章　背景暴漲子和均勻且均向的宇宙背景

考慮當作物質來源的多重暴漲子作用量(Action)：

$$S=\int \mathcal{L}\ \sqrt{-g}d^4x=\int [\tfrac{1}{2}\sum_I D^\alpha\varphi_I D_\alpha\varphi_I - V(\varphi)]\ \sqrt{-g}d^4x\text{。} \qquad (4.1)$$

其中$\sqrt{-g}=\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}=a^3(t)$。對於純量場$\varphi_I$來說，其協變導數$D_\alpha=\partial_\alpha$，不需加入時空彎曲的修正。由於$S$是無因次且$dx$為能量的負一次方，所以$\mathcal{L}$為能量的四次方。要特別注意的是，這裡的$\varphi_I$指的是不含微擾的背景純量場，即暴漲子（Inflatons)。由於暴漲在空間中為均勻分佈，因此背景暴漲子的演化只與t有關$\varphi_I=\varphi_I(t)$。

接著利用最小作用量原理(Least action principle) $\delta S=0$及尤拉方程(Euler equation)

$$\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_I)}-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_I}=0\text{，} \qquad (4.2)$$

可求得φ_I的EOM

$$\partial^\mu\partial_\mu\varphi_I - V_I=0\text{，}V_I=\frac{\partial}{\partial\varphi_I}V(\varphi)\text{。} \qquad (4.3)$$

需注意的是廣義的Laplacian應為

$$D^\mu D_\mu\varphi_I=\ \Box\varphi_I=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\ \partial_\nu\varphi_I]=\frac{1}{a^3}[-a^3\dot{\varphi}_I]^*=-\ddot{\varphi}_I-3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}_I\text{，} \qquad (4.4)$$

因此(4.3)變為

$$\ddot{\varphi}_I+3H\dot{\varphi}_I+V_I=0\text{。} \qquad (4.5)$$

再來我們寫下 FRW 宇宙$\mathcal{K}=0$的 FRW 背景的時空微小線段：

$$ds^2 = {}^{(0)}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j) \quad (4.6)$$

以t來表示，背景的度規變為${}^{(0)}g_{\mu\nu} = (1, -a^2, -a^2, -a^2)$。

然後，重要的愛因斯坦方程：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}。 \quad (4.7)$$

$G_{\mu\nu}$為愛因斯坦張量（Einstein tensor）、$R_{\mu\nu}$為瑞奇張量（Ricci tensor）、R為純量曲率（scalar curvature, Ricci curvature）、$T_{\mu\nu}$為能量-動量張量（energy-momentum tensor），又暴漲子的$\mathcal{L}$與能量-動量張量的關係是

$${}^{(0)}T_{\mu\nu} = \sum_I \partial_\mu\varphi_I\partial_\nu\varphi_I + {}^{(0)}g_{\mu\nu}\mathcal{L}。 \quad (4.8)$$

將(4.6)代入(4.7)再加上(4.8)，只剩下對應到對角線部分的時間0-0方程及空間的 i-i（i=1,2,3）方程

$${}^{(0)}G_{00} = {}^{(0)}T_{00} \Rightarrow 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 3H^2 = \rho = K + V \ ， \quad (4.9)$$

$${}^{(0)}G_{ii} = {}^{(0)}T_{ii} \Rightarrow -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} = -2\dot{H} - 3H^2 = p = (K - V)， \quad (4.10)$$

其中我們定義$K = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_I^2$。另外，我們也可以從(4.9)、(4.10)得到$K$、$V$為

$$K = -\dot{H} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}， \quad (4.11)$$

$$V = \dot{H} + 3H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}。 \qquad (4.12)$$

在背景的討論中，最重要的結果就是(4.5)、(4.9)、(4.10)這三個式子（事實上，因為φ_I有N個，(4.5)其實是N個方程式），但他們彼此並非完全獨立的。式子中獨立變數只有$H(t)$（或$a(t)$）及φ_I，因此只需要三式其中的兩式，例如把(4.5)乘上φ_I後對I取和，再用(4.9)就可得到(4.10)。

目前所考慮的宇宙中只有時空幾何和暴漲子（純量場）有能量交換。從(4.5)可看出H的項造成暴漲子φ_I有阻尼振盪，因此可說暴漲子的動能轉變為宇宙時空擴張所需的能量。在下面的微擾討論也可發現時空幾何的微擾和純量場的微擾耦合在一起。