第三章、十七與十八世紀韓國勾股術之內容分析

十五世紀末印度航線被發現之後，西方商人與傳教士陸續的來訪東方，西洋文物不斷的傳入，使得東方文化受到西方文化的衝擊，而當時的朝鮮因為海禁的關係，仍無法與西洋人有接觸的機會。到了十七後期世紀時，借由中國的書籍及商人，將西方文物傳入朝鮮，這種外來文化的刺激，雖未能馬上震撼強勢的儒教文化，但也形成新的社會張力。早在宋、元(960~1368)時期，《九章算術》、《算學啓蒙》及《楊輝算法》三書即由中國傳至朝鮮，在 1419~1450 年期間，朝鮮將上述三書加以復刻。[1]在十八世紀朝鮮英、正二祖期間，正是清朝乾隆盛世，書籍的流傳更為快速，清朝賜朝鮮國書籍共三次，朝鮮文人對於書籍的搜購不遺餘力。他們購買的方式為(一)隨現隨買，(二)預先開書目，按目購求，一次不得，繼續為之，使得優秀的文人輩出。[2]

《韓國科學技術史資料大系・數學篇》(1)到(9)中，所提到的編著者，只有慶善徵及洪正夏是「中人」算學者，慶善徵著有《默思集算法》及《詳明數訣》，崔錫鼎《九數略》的參考書目中，唯一引用的東算的東算書籍為《默思集算法》。洪大容所著的《籌解需用》中，就引用慶善徵所著的《詳明數訣》(已佚)。邊彥廷所著的《籌解實用》中，就引用慶善徵所著的《詳明數訣》及朴繘的《數原》。慶善徵的算學成就和著作，在東算形成的整備期，確實有深遠的影響。[3]

本章主要討論十七、十八世紀韓國的勾股術，在這裡主要討論六本文本，它們是在這時期中，勾股互求部份論述較多者：趙泰耉的《籌書管見》、洪大容的《九一集》與作者不詳的《東算抄》、洪正夏的《籌解需用》與邊彥廷的《籌解實用》、以及黃胤錫的《算學入門》，比較分析其中的體例與算法，借此來了解韓國勾股術的風貌，進而對於其內容進行評論。

第一節、《籌書管見》中勾股術之分析

一、趙泰耉的生平與著作

趙泰耉 (1660-1723) 字德叟，號素軒，又號霞谷，楊州人氏。他出身兩班貴族，父親趙師錫 (1623-1693) 曾擔任右議政。他在肅宗九年 (1683) 成為生員，並在肅宗十二年 (1686) 別試文科丙科登第。[4]他於肅宗三十六年 (1710)擔任赴清

1、 參閱杜石然主編，《李儼錢寶琮科學史全集》第八冊，頁 561。

2、 參閱張存武，《清代中韓關係論文集》，頁 318~319。

3、參閱李建宗，《朝鮮算學家・慶善徵《默思集算法》初探》，國立臺灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2003 年，頁 119-120。

之冬使，結果，因表咨文所盛櫃在玉田縣夜宿時被偷，遂被罷官；趙泰耉在肅宗三十八年回任工曹判書與戶曹判書，戶曹更是管轄中人算學者的教育養成機關。[5] 肅宗四十三年，他又升任右參贊，景宗即位 (1720)，他更升任右議政，而成爲少論派領袖。他與『少論』同仁爲了皇位繼承之黨爭，與『老論』四大臣金昌集，李健命，李頤命，與趙泰采衝突對立，老論一派不是被賜死就是流放，此即所謂『辛壬士禍』。[6] 最後，英祖即位 (1724)，老論派重新掌權，趙泰耉身後甚至被追奪官爵。[7]

趙泰耉到底如何借由『九章』，來呈現代表朝鮮『儒學明算者』之數學觀，由其「跋文」知：

> **數所以盡物變而居六藝之一。禮言十歲學書計，周官鄉大夫賓興賢能、藝班於德，行三代教法，概可知矣！是故孔門七十子，皆成德達材之士，而必稱身通六藝。孔子為委吏，亦曰會計，當而已矣！可見不通乎此，不足以成材而適用，顧豈可之而不講哉？！**

這裡道出中國儒家孔子與數學的關係，趙泰耉指出算學不過是儒家六藝，但是若不能通算學，則無法『成材而適用』，故算學不可不通！

> **我東藝學鹵莽，於今為甚，世之學士不以為事或不識乘除為何物，其貿貿可慨也。沈君□而未弱冠，留意於此，患僻居無書，思有以啟發憤悱而不可得，餘乃為一冊子，粗述乘除諸法、九章諸問，載其切於日用、開於理致者，又**

4、參考川原秀城 (1998)。又「別試亦名重試，國有慶事，則每十年一次爲堂下官重考之考試。」引蔡茂松 (1995)，頁 227-228。

5、簡江作 (1998)，頁 249, 254。有關朝鮮數學人才養成教育，應以李朝世宗（1418-1450 在位）時期建制最爲完備。根據《李朝世祖實錄》世祖六年 (1460) 六月辛酉條記載：「世宗，概念立法之未明，博求曆算之書，幸得大明曆、回回曆、授時曆通軌及啓蒙、楊輝全集、捷用九章等書。然書雲觀、習算局算學重監等，無一人知之者。於是，別置算法校正所，命文臣三四人及算學人等，先習算法，然後推求曆法，數年之內，算書與曆理，皆能通曉。然又慮未傳後世，又設曆算所，訓導三人，學官十人，算書曆經，常時習熟，每日置簿，每旬取才，考其勤慢，獎懲鍊業，故知算法者，相繼而出。」

6、景宗朝，王多病無子，於是依「老論派」金昌集（領相）、李健命（左相）等人的建議，冊封「世弟」（英祖）代理國政；而柳鳳輝、趙泰耉等「少論派」，則猛力反對，而將金昌集等人流配，後以叛逆論罪處死。此變，正當景宗元年辛丑至二年壬寅之間，故稱「辛壬士禍」。後來少論派的勢力，在英祖時也屢遭挫折。因此英祖身經數度黨爭慘禍，痛感其害，乃禁止一般士類上疏論政以及是非國事，並兼用「老、少」兩派，以期調和，此即英祖所謂的「蕩平策」。英祖之孫正祖，承繼此意，努力「蕩平」，亦未重演往日的慘禍。參考李丙燾著（許宇成譯），《韓國史大觀》，頁 358~359。

7、參考川原秀城 (1998)。

恐初學徒得其法不知其理，則有行不著、習不察之患，於是作〈九章問答〉，演為圖說，以附其後，名之曰《籌書管見》，庶幾開卷有得，事半而功倍也。然此特其蹊逕戶牖耳，非以為足於此，而無用它求也。唯可因此權輿博洽群書，融貫而會通焉耳。

而趙泰耉又鑑於朝鮮算學的落後，遂撰此書，以〈九章問答〉來彰顯問題的重要性，並附上圖形，以便了解，進而融會貫通群書。

靜而試於餘力學問之暇、觀玩游泳於此，以適乎情而不為其所役，則所以防閑外誘、維持此心者，將見其得力矣！故或不然，而徒欲以一藝之能自多而目命，則是子夏所謂小道可觀，而致遠則泥者，非愚所以纂成是書之意也。戊戌菊秋素軒書。[8]

對他來說，算學是可以『防閑外誘、維持此心』，就值得讓他自己『操六觚譚藝藪』了。由『跋文』中所稱的『戊戌菊秋素軒書』，則本書成書於 1718 年。

趙泰耉在《籌書管見》書末，就列舉了東國明算法者如：崔致遠，南忠景、黃喜、徐花潭、李退溪、李栗谷、金始振、任濬、朴繘、慶善徵以及崔錫鼎等人。[9] 對於世宗朝盛極一時的《楊輝算法》與《算學啓蒙》，[10] 及民間數學家的《九章算法比類大全》(1450 年)與程大位的《算法統宗》(1592 年)應該是很熟悉才是。[11] 金始振(1618~1667)於 1660 年重刊的《算學啓蒙》，對於十七世紀之後的朝鮮數學，當然影響深遠，慶善徵的《默思集算法》、洪正夏的《九一集》與趙泰耉的《籌書管見》都是很好的例證。

二、《籌書管見》的體例、結構與勾股術的內容分析

《籌書管見》是一本寫本，此一書名見諸於第一節〈數名〉前的首頁第一行。在首頁之前，則有〈目錄〉，其中列出了不分章的三十七節。前二十四個中有關勾股的部份爲〈勾股名義〉，後十三節爲〈九章名義〉，〈方田〉 (24)，〈粟布〉(24)，〈衰分〉(11)，〈少廣〉(27)，〈商功〉(31)，〈均輸〉(7)，〈盈朒〉(10)，〈方程〉(10)，〈勾股〉(18) 以及〈九章問答〉，則是全書的主體部分。上述各節之後括號內之阿

8、金容雲，《籌書管見》，收入《韓國科學技術史資料大系‧數學篇(2)》，(漢城：驪江出版社，1995)，頁 195。

9、同上，頁 197。

10、李朝世宗時期的『算學取才之經書諸藝數目』，根據《世宗實錄》卷四十七（世宗十二年三月戊午，1430）的記載，就包括了高麗時代的《九章算術》、《綴術》、《三開》與《謝家》，以及《詳明算法》、《算學啓蒙》、《楊輝算法》，《五曹算經》與《地算》。請參考川原秀城 (1998)。

11、金容雲、金容局，《韓國數學史》(日文版)，槙書局，1978，頁 159。

拉伯數字表示題數。由於這九章總題數 162 遠少於中國《九章算術》，[12] 所以，作者所選擇的題目，一定有其特殊考量。由〈勾股名義〉起，〈九章問答〉爲結束，可見趙泰耇撰寫此書的目標是爲了幫助初學者學習《九章算術》及其相關的內容。書本最後的〈九章問答〉共有六十條，以自問自答形式呈現，其內容乃是針對前述九章問題的解法，提出說明或評論，應能反映趙泰耇的數學素養。按出現順序，第一則說明『九章名義』，第五十～五十七條是關於『勾股』。

此文本有關於勾股術的部份有〈勾股名義〉16 條，它是介紹與勾股問題有關的數學名詞之約定，〈勾股章〉18 題 以及〈九章問答〉第 50~57 條。其中〈勾股名義〉:「直曰股，橫曰勾，斜曰弦，**勾股相乘折半曰勾股積，勾自乘曰勾冪，股自乘曰股冪，弦自乘曰弦冪，**勾股相併曰勾股和，勾弦相併曰勾弦和，股弦相併曰股弦和，弦併勾股曰弦和和，勾減股曰勾股較，勾減弦曰勾弦較，股減弦曰股弦較，弦減勾股和曰弦和較，勾股較減弦曰弦較較，「**弦與勾股較和曰弦較和**」」。

〈勾股名義〉的內容與中算文本中，與吳敬《九章算法比類大全》(1450 年)、[13] 楊輝《詳解九章算法》(1261 年)的〈勾股生變十三名圖〉、[14] 程大位《算法統宗》(1592 年)的〈勾股名義生變一十三名〉均相同，[15] 而此書的〈勾股名義〉則增加了勾股積、勾冪、股冪及弦冪，減少了弦較和，共有十六種情形。而〈勾股名義〉這個說法最早出現在顧應祥的《勾股算術》(1533 年)中。[16] 金容雲在《籌書管見》(1718)書前，有提到口訣是參考《詳明算法》(1373)及《算法統宗》(1592)，由此可知〈勾股名義〉的部份可能是參考自《算法統宗》。

籌書管見》『勾股』章共有 18 題，如下表所示：

題號	名目及條件	術曰	勾股數
1.2.3	勾股弦互求 已知 a，b； 已知 a，c； 已知 b，c；	c=$\sqrt{a^2+b^2}$ b=$\sqrt{c^2-a^2}$ a=$\sqrt{c^2-b^2}$	(3，4，5) (3，4，5) (3，4，5)

12、《九章算術》共有 246 個問題。參考郭書春 (1998)。

13、吳敬，《九章算法比類大全》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 270。

14、楊輝，《楊輝算法》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，頁 974。

15、程大位，《算法統宗》收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 1364。

16、顧應祥，《勾股算術》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 976。

4.5.6.7	勾股與諸較及諸和求勾股弦 已知 a，c-b； 已知 b，c-a； 已知 b，c+a； 已知 a，c+b；	c+b=$\frac{a^2}{c-b}$ c+a=$\frac{b^2}{c-a}$ c-a=$\frac{b^2}{c+a}$ c-b=$\frac{a^2}{c+b}$	(3，4，5) (3，4，5) (5，12，13) (3，4，5)
8.	勾弦和、勾弦較求勾股弦 已知 c+a，c-a；	b=$\sqrt{(c+a)(c-a)}$	(5，12，13)
9.	勾、股求容方 已知 a，b	s=$\frac{ab}{a+b}$	
10.11.	比例勾股		
12.	勾、股求容圓徑 已知 a，b，c	圓徑=$\frac{4\times\frac{1}{2}ab}{a+b+c}$	(3，4，5)
13.14.	勾與股弦差求股 已知 a，c-b	c+b=$\frac{a^2}{c-b}$	(3，4，5) (5，12，13)
15.16.	立表測望		
17.18.	勾、股、弦求面積 已知 a，b，c		(3，4，5)

其中用(3，4，5)者有 1~5、7、12、13、17、18 十題，(5，12，13)者有 6、8、14 三題，趙泰耈用最簡易勾股數字來表達勾股術中的意義，解法也都是利用中算的古法求作，其中包含八種題型及測量題，前七種題型與《九章算術》及《九章算法比類大全》均相同，「弦與勾股和較求勾股」未被列入，「勾弦和較求勾股弦」(題 8)是新增，[17] 立一表、立二表三角測量問題（如題 15、16），以及已知直角三角形三邊長，求其面積之問題（題 17、18）。而本章也附錄了幾個圖形，其中最後四題之附圖還相當複雜，[18] 但作者並未提供『勾股定理』之圖形證明。第 10 題附有『歌訣』，第 15 題附有『解曰』，第 16 題『隔海望山』引『楊輝曰』，[19] 其他的類

17、參考附錄(一)

18、同 8，頁 116-119。

型都未見於《九章算術》『勾股』章。以下為第 15 題的圖形及解法，圖形並不是很正確，但仍然可以看出趙泰耆的解題方法。

15、今有立木，不知其高，從木根退至二十五尺，立一表，表高九尺，從表退五尺，復立短表高三尺，人目著短表端望木梢與前表端齊平，問木高？

荅：三十九尺。

術曰：置前表距木遠二十五尺為大句，前表減後餘六尺為小股，以乘大句為實，以兩表間五尺為小句以除實得大股三十尺即表上之高也，加表高三十九尺。

現代的解法：

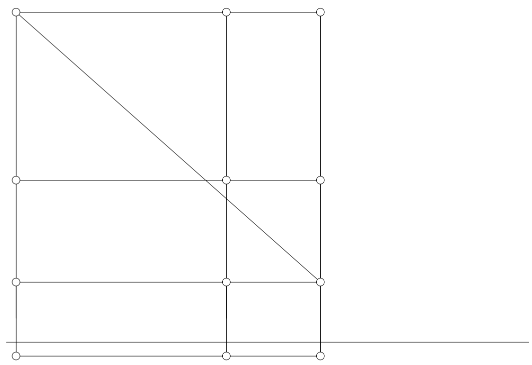
若大句 a=25 ，

小股 mb =9-3=6，小句 ma=5，

則 $\dfrac{a\times mb}{ma}=\dfrac{25\times 6}{5}=30$ =b

木高=30+9=39

解曰：勾股之法以二段求一段，此只有句，而無弦、無積不可以求股也，故退作小句股，其形與大句股相似，以異乘同除求之得大股。



另解曰：以直形補成倒順兩句股，則弦之內外各有直積一段兩積相同，以小股除之得大句，小句除之得大股。以小股乘二十五尺為容方積，以小句為餘句除之得餘股。

這裡他把把小句看成餘句，則小股× 大句=容方積，容方積/餘句=餘股。趙泰耆在這裡先說明：勾股弦法是已知二段求一段，但這裡只有句，沒有弦及句股積，故用大小相似句股形求得大股。上圖為文本中的圖形，圖形並不是很正確，但可以看出來他想用圖形來幫忙解題。

而楊輝《詳解九章算法》的基本題都是用(8，15，17)，而趙泰耆則是熱愛(3，4，5)。《九章算法比類大全》「卷九」一開始是勾股弦互求三種算法，再來是勾股弦圖、勾股生變十三名圖、古問二十四問、比類二十九問以及詩詞四十八問，比

19、《籌書管見》〈勾股〉第 15 題與楊輝《續古摘奇算法》之『遙望木竿』3 題相同。後者收入《楊輝算法》（本書含《乘除通變本末》,《田畝比類乘除捷法》與《續古摘奇算法》)，見郭書春(1993)，頁 1113-1116。

類前五題的數字是(27，36，45)即(3，4，5)來處理，由以上的資料顯示，趙泰耆《籌書管見》的「勾股章」部份，可能是以《九章算法比類大全》爲主要的參考文本。

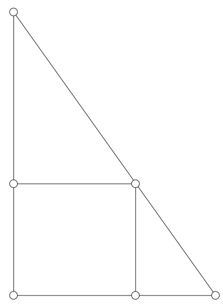
以討論『勾股』章。在第五十條中，趙泰耆利用兩個圖形來解釋本章題 1-8 的解法，這裡包括了勾股定理與『勾弦和』,『勾弦較』，求股等等所謂的『勾股之術』。[20] 針對『勾股容方』（本章題 9）與『勾股容圓』（本章題 12），趙泰耆所提供的兩個圖形不具一般性，而且他的論述並未脫離圖形之特定關係，他顯然並未有效地證明了勾股定理。以下爲題 9 及題 12 的圖形及解法：

9、今有勾股容方，只云**(句)**二十一尺，股二十九尺，問容方面？

荅：十二尺一寸八分。

術曰：句股相乘得倍積爲實，并句股爲法除實。

解法：s=$\frac{ab}{a+b}=\frac{21\times 29}{21+29}=12.18$

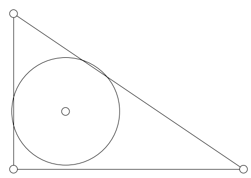


12、今有勾股容圓，只云句九尺，股十二尺，弦十五尺，問容圓徑幾何？

荅：六尺。

術曰：四倍句股積爲實，并句股弦爲法除實。

解法：D=$\frac{2ab}{a+b+c}=\frac{2\times 9\times 12}{9+12+15}=6$



文本裡的**(句)**並未被寫出來，可能是筆誤。由他的術解知道，其實他所用的方法爲中國的古法，但圖形應是解題所畫的圖形。他顯然只訴諸『以圖明之』，但這兩個

20、同 8，頁 179-180。趙泰耆所提供的兩個圖形不具一般性，而且他的論述並未脫離圖形之特定指涉，所以，他顯然並未有效的證明了勾股定理。不過。他顯然只訴諸這兩個圖形，就同時爲本章題 1-8 的解法，提供了合理的說明。

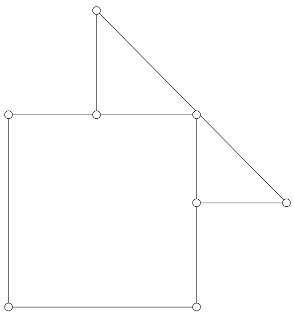
圖形都迥異於史家所還原的劉徽附圖，[21]或許是出自趙泰耈他的解題需要。

第五十三條問答是關於本章題 10：『**方城求面，以餘勾餘股求城之半面，何也？**』趙泰耈不僅以圖形解說，而且還『**以四率列之，其理尤明！**』至於理論依據，則是『**形之相似，故可以彼此相求也。**』[22]

10、今有方城不記廣狹，城之四面當中有門，東門外直距三百六十步，有一石人，自南門出行六十二步半，見其立石，問城方幾步？

答：三百步

術曰：以三百六十步爲餘股，六十二步半爲於句，以餘勾餘股相乘爲實平方開之，得容方面，即城之半廣也，倍之得全廣。容方之積與餘勾餘股相乘之積同也。



現代符號表示：

城邊長=2s

$\sqrt{(a-s)(b-s)} = s$

解法：

$$\frac{360}{s} = \frac{s}{62.5} \Rightarrow s^2 = 360 \times 62.5$$
$$\Rightarrow s = \sqrt{360 \times 62.5} = 150$$
$$\Rightarrow 2s=2\times 15=300$$

21、關於數學史家所認定的劉徽證法附圖，參考郭書春 (1998)，頁 466-472。

22、金容雲，《籌書管見》，收入《韓國科學技術史資料大系・數學篇(2)》，漢城：驪江出版社，1995，頁 183-185。22、同上，頁 188-192。

第五十五～五十七條問答是針對〈勾股〉章最後一題，亦即第 17、18 題，其內容如下：已知三角形三邊長，求其面積。由於趙泰耇所提供的解法，涉及求一邊上的高之長，利用第五十四條的『勾股之術』，自是很容易理解。[23] 在第五十五條問答中，解釋某一邊的高落在三角形內的情況：如銳角三角形，第五十六條問答中，則是萬一這樣的高落在形外：如鈍角三角形，來說明其法理，但實質上是相同的。[24] 第五十七條問答中，但若有人以不在形內的高是一種『**虛設之數**』，而認爲求得之三角形面積不爲『**真數**』，來說明『**其所用之法，所得之積，又皆真實而無妄矣！**』。[25] 這種說法是趙泰耇自己的見解，而筆者所整理分析的十本朝鮮文本中，也只有《籌書管見》有此論述。

從《籌書管見》的內容來看，趙泰耇應該有接觸到明末清初傳到中國的西算，而具體內容是無法得知，即他所指的平面、球面三角。[26] 對於他自己而言，算學是可以『防閑外誘，維持此心』，幫助自己維持道德心及修心養性。他利用〈九章問答〉來督促初學者兼顧算法與算理，貫通九章是研讀中國天元術與西洋三角學的先備需求，他要告知初學者，若要學習西算就必需要中算的算理能夠會通。因爲《九章算法比類大全》整理了楊輝及朱世傑的著作，[27] 體例上，只列出算法，算理部份則未見提及。趙泰耇編輯《籌書管見》是以《九章》爲範本，就以勾股的部份來看，體例上只有算法，題問與《九章算術》相差甚遠，[28] 筆者懷疑趙泰耇所說的《九章》比較可能是《九章算法比類大全》，這是需要整體上的比對，才可斷定的。

第二節、《九一集》與《東算抄》中勾股術之分析

一、洪正夏之生平與著作

根據《籌學先生案》的記載，洪正夏(1684-?)字汝匡，南陽人，丙戌入仕。甲辰年任訓導，庚子年改「教授」，[29] 以執事終。而根據《籌學入格案》的記載，他的父親洪載源、祖父洪敘疇、曾祖洪仁男以及他的岳父李克俊，分別擔任籌教授壽職同樞、籌教授北部主簿、營將壽職嘉善以及籌訓導等官職，他是中人學者。[30] 在 1599 年壬辰、1627 年丙子之亂與黨派之爭後，朝鮮李朝的『中人算學者』在實學思潮的衝擊下，[31] 有走向純粹算學研究之趨勢。中韓數學家在十八世紀初的一段

23、同上，頁 191-192。

24、同上，頁 193。

25、同上，頁 193。

26、同上，頁 187-188。

27、同上，頁 141-142。

28、《籌書管見》有 162 問題，《九章算術》有 246 問題。

對話，兩位主角分別是韓國的洪正夏與中國的何國柱。這段對話收錄在洪天夏的《九一集》卷之九〈雜錄〉中，以『一問一答』的形式呈現。我們可以從中讀出天朝科技大員何國柱蒞臨指導的架勢，但洪正夏顯然不甘示弱，更適時地提出極具挑戰性的問題，讓何國柱大感折服。[32] 這一段插曲，充分地顯示十八世紀初韓國數學家的自信，也是數學文化自主發展的例證之一。

二、《九一集》與《東算抄》的體例、結構及勾股術內容分析

《九一集》除了〈目錄〉與〈凡例〉外，共分九卷，前八卷總共列舉了四百三十三個問題。至於卷之九以『雜錄』題名，說明它的內容不好歸類到前面各門之中。《東算抄》除了〈目錄〉與〈凡例〉外，共分四卷，總共列舉了三百五十一題。兩本後文中各門後所列出的阿拉伯數字，是代表該門的題數。其題問主要都是以『題目－答曰－法曰－合問』的形式呈現。

在《九一集》『卷之五』的『句股互隱門』中，洪正夏總共列出了 78 個問題，爲全書各門之冠，凡是題問複雜者，洪正夏更是提供籌算圖示來協助解題，這裡總共有二十九題有籌算式。至於『望海島術門』雖然只有六題，但是作者將這兩門並在同一卷之中，顯然相信『望海島術』是『勾股術』的延伸。《東算抄》『卷之二』的『句股互隱門』(75) 中，凡是題問複雜者，亦是提供籌算圖示來協助解題。兩者比較，後書只有少了前三題的勾股弦互求而已，其餘均與前書完全相同。

在《算法統宗》(1592)的〈勾股論釋義〉中以(27，36，45)即(3，4，5)的勾股數來解釋其三十個恆等式，[33] 且書中的三十六題勾股互求中，也有多題使用上述的數字。洪正夏的《九一集》有 48 題用(24，45，51)即(8，15，17)的勾股數來處理

29、世祖五年，算學制度的形成，算學教授(從六品)一名，別提(從六品)二名，算士(從七品)一名，計士(從八品)二名，算學訓導(正九品)一名。

30、洪正夏，《九一集》，收入《韓國科學技術史資料大系・數學篇(2)》，頁 103，417。

31、李朝(1392~1910)後期十六世紀中葉到十九世紀中葉，這三百年間的知識活動，稱爲韓國歷史上的實學期。實學派的活動可分爲三期。第一期是十八世紀前半，以土地制度、行政機構等制度上的改革爲重點的「經世致用派」時代。第二期是於十八世紀後半，在工商業流通的生產器具以及一般技術面上的革新，是「利用厚生派」的時代。第三期是十九世紀前半，以經書、金石、典故的考證爲主的「實事求是派」時代。

32、洪萬生，〈十八世紀東算與中算的一段對話：洪正夏 vs.何國柱〉，《漢學研究》第二十卷第二期(2002)，頁 57-80。

33、程大位，《算法統宗》收入《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 1365。

之，開方術的部份有用「隅法」，楊輝《詳解九章算法》的基本題都是用(8，15，17)來處理勾股互求的部份，而秦九韶的《數書九章》中也用「隅」這個字，每個問題最後都以「合問」做爲結束，中算書中最早使用「合問」做爲結束的，是秦九韶的《數書九章》，《九一集》有參考《數書九章》(1247)是確知的，但可能不是直接參考《數書九章》，而是宋景昌的《數書九章札記》才是。

《九一集》卷之九〈雜錄〉中，以『一問一答』的形式呈現。
第 14 題，他們展開了一段對話，首先是何國柱的問題：

> 司曆問：今有勾、股、弦共九十六尺，問勾、股、弦各幾何？
> 答曰：勾二十四尺　股三十二尺　弦四十尺
> 司曆曰：何以解之？[34]
> 洪正夏「以併勾三、股四、弦五，得十二，以除三和得九（按：應為八才正確！），以乘各率之法」「示之」。
> 司曆曰：勾股之別術，可得而聞乎？[35]
> 余與劉生句股法共二十餘問，并法示之司曆持去。
> 司曆說：是矣！而此出勾、股、弦，係三、四、五之數。若不用三四五之數，不俱何數，其理皆同。
> 又曰：勾股變化共兩百四十條，可知否？
> 余曰：勾股推之，將至四百餘條。

洪正夏將它們紀錄成《九一集》卷九最後七題，至於其解『法』，則大都以算籌列出方程式，然後再利用中國宋元『開方術』求得正根。

洪正夏在著作「句股互隱門七十八問」時，每一題的型式爲：今有一荅曰—法曰一合問，但若是有一法者，之後就沒有「合問」，在法曰的注解過程中，他將每個算式及數字均詳細寫上，可以讓讀者容易了解運算的結果。「合問」的用法在中算首先出現在秦九韶的《數書九章》中，而《算學啓蒙》則是每個「術曰」的最後，都是用「合問」來結束。〈卷五〉中依圖布算者有 28~32、39、42、43、46~54、56~60、62~64、66~68、76 等，共有 29 題。以下爲其題例：

34、洪正夏，《九一集》，收入《韓國科學技術史資料大系・數學篇(2)》，頁 686-687。
35、同上，頁 687-688。

今有股弦和九十六尺，只云句乘弦一千二百二十四尺，問句、股、弦各若干？

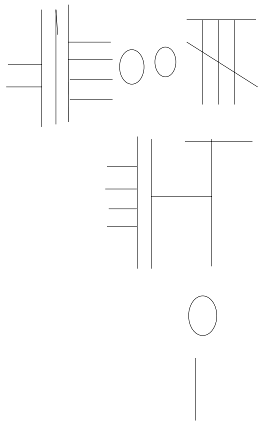
荅曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置句弦積以和乘之，而又倍之，得二十三萬五千 00 八 爲實，又和自乘 得九千二百一十六 爲從方，以一爲隅法，以帶從立方開之得句二十四尺，以句除積得弦，於和內減弦即股，合問。問句弦和若干股乘弦若干之法倣此先得股

現代的符號表示：

$$x^3+(c+b)^2x^2=2(ac)(c+b),\ x=a。$$

籌算式：



洪正夏在數字比較大的題目或複雜的題形中，都會給予籌算式來驗證數字。

再看《九一集》『卷之五』『句股互隱門』所用之勾股數：

勾股數	題號
(24，45，51)即(8，15，17)	1，2，4，5，6，7，12~42，46~51，55，60，61，63，66(共 48 題)
(5，12，13)	8，9，10(共 3 題)
(3，4，5)	11，43~45，52~54，56~59，62，64，65，67，68(共 16 題)
(20/3，8，?)	3(共 1 題)
(10，15，?)	69~76(共 8 題)
(6，12，?)	77，78(共 2 題)

洪正夏更用(24，45，51)即(8，15，17)的勾股數共有 48 題，(5，12，13)的 3 題，(3，4，5)的有 16 題，就將勾股互求 78 題介紹完成，而(8，15，17)的數字曾出現在楊輝《詳解九章算法》(1261)的「勾股生變十三名圖」中，吳敬《九章算法比類大全》(1450)的「勾股生變十三名圖」則是完全抄錄於前書，相信洪正夏對於後書，應有相當程度的涉獵。而後十一題是比例問題，因計算時，未涉及弦的部份，故未以整數勾股數來處理之，也許是沒有直接關係而未注意到，或另有其他用途，就不得而知了。

《九一集》〈卷五〉勾股互求的型式：[36]

(1)a，b	(12)c+b，c-a	(23)ac，b-a	(34)a+b，a/c
(2)a，c	(13)b-a，c-a	(24)1/2ab，ac	(35)a+c，b/a
(3)b，c	(14)b-a，c-b	(25)1/2ab，bc	(36)b+c，c/a
(4)a，c±b	(15)c-a，c-b	(26)ac，bc	(37)b-a，b/a
(5)b，c±a	(16)1/2ab，c	(27)1/2ab，a/b	(38)b-a，c/a
(6)c，b±a	(17)bc，a	(28)1/2ab，b/a	(39)b-a，a/c
(7)b+a，c±a	(18)1/2ab，b±a	(29)1/2ab，c/a	(40)c-a，a/b
(8)b+a，c±b	(19)1/2ab，c±b	(30)1/2ab，a/c	(41)c-a，b/a
(9)c+a，c±b	(20)1/2ab，c±a	(31)1/2ab，b/c	(42)c-b，a/b
(10)c+a，b-a	(21)bc，b±a	(32)1/2ab，c/b	(43)c-b，b/c
(11)c+b，b-a	(22)ac，c±b	(33)a+b，b/a	(44)c-b，a/c

《九一集》的勾股術共有五十五種型式，至於其解『法』，則大都以算籌列出方程式，然後再利用中國宋元『開方術』求得正根。其中 1~6；(勾弦較，股弦較)與(勾股積，勾)共八種型式與《九章比類大全》同。前七種題型與《籌書管見》同，已知：勾弦較，股弦較，則《九一集》沒有列入。a/c、a/b 在文本中均以「餘勾」稱之，b/a，b/c 以「餘股」稱之，c/a、c/b 以「餘弦」稱之，由題問來決定它爲何種情況。已知：勾弦較，股弦較則早在《九章算術》就有的題形，以下題列《九一集》與之前中算書的比對之下，新題型的部份有：

(1) 已知：勾弦和，股弦和則是最早出現在《算法統宗》(1592)中，其他勾、股、弦和較的題目，則是《勾股算術細草》(1806)才出現。

36、參看附錄(一)

《九一集》〈卷五〉第十七問

今有句弦和七十五尺，股弦和九十六尺，問句、股、弦各若干？

荅曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置句弦和七十五尺，以股弦和九十六尺乘而倍之得一萬四千四百爲實，平方開之得句股弦三和一百二十尺，內減股弦和得句二十四尺，又三和內減句弦和餘得股四十五尺，又三和內減句二十四尺，減股四十五尺得弦，合問。

現代符號表示：

$\sqrt{2(c+a)(c+b)}=(a+b)+c$，

(a+b)+c-(c+a)=b，

(a+b)+c-(c+b)=a，

(a+b)+c-a-b=c

c+a=75，c+b=96

2(c+a)(c+b)=2×75×96=14400

$\sqrt{2(c+a)(c+b)}=\sqrt{14400}=120$

(a+b)+c-(c+a)=120-75=45=b

(a+b)+c-(c+b)=120-96=24=a

(a+b)+c-a-b=120-45-24=51=c

一法：置句弦和自乘得五千六百二十五，又股弦和自乘得九千二百一十六，二位相併得一萬四千八百四十一爲實，又兩和相併倍之得三百四十二爲從方，以一爲隅法，以減從平方開亦得弦。

現代符號表示：

《算法統宗》

今有勾弦和七十二步，股弦和八十一尺，問勾、股、弦各若干？

荅曰：勾二十七步，股三十六步，弦四十五步。

法曰：置勾弦和七十二步，以股弦和八十一步，相乘的五千八百三十二步，倍之得一萬一千六百六十四步爲實，以開平方法，除之得勾股弦和一百令八步，以減股弦和八十一步餘勾二十七步，又置一百令八步內減勾弦和七十二步餘得股三十六步，又置一百令八步內減勾二十七步，減股三十六步得弦四十五步。

現代符號表示：

$\sqrt{2(c+a)(c+b)}=(a+b)+c$，

(a+b)+c-(c+a)=b，

(a+b)+c-(c+b)=a，

(a+b)+c-a-b=c

c+a=72，c+b=81

2(c+a)(c+b)=2×72×81=11664

$\sqrt{2(c+a)(c+b)}=\sqrt{11664}=108$

(a+b)+c-(c+a)=108-72=36=b

(a+b)+c-(c+b)=108-81=27=a

(a+b)+c-a-b=108-36-27=45=c

$-x^2+2[(a+c)+(b+c)]x=(a+c)^2+(b+c)^2$

，x=c

《算法統宗》文本內容，將「開之」寫成「除之」；洪正夏在此題的處理上，除了使用中算的方法之外，也提供了「開方法」的解法。這種說法在下一章的南秉吉也有「平方除之」的用法。

(2)已知：勾股積，(勾股和、較)，最早出現在《九章比類大全》，

《九一集》則多了勾股積，(勾弦和、較)；勾股積，(股弦和、較)四題。

(3)已知：股弦積，(股弦和、較)，最早出現在《九章比類大全》，

《九一集》則是已知：股弦積，(勾股和、較)二題。

《九一集》〈卷五〉第五十一問

今有句股和六十九尺，只云股乘弦二千二百九十五尺，問句、股、弦各若干？

荅曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置股弦積自乘得五百二十六萬七千二十五爲實，又和自乘得四千七百六十一爲乙從，正倍和得一百三十八爲丙從負，以二爲丁從正即隅，以三乘方番飛法開之得股四十五尺，列股弦積以股除之得弦五十一尺於和內減股餘二十四尺即句，合問。

現代符號的表示：

$2x^4-2(a+b)x^3+(a+b)^2x^2=(bc)^2$, x=b

$(bc)^2=56725$

$(a+b)^2=4761$

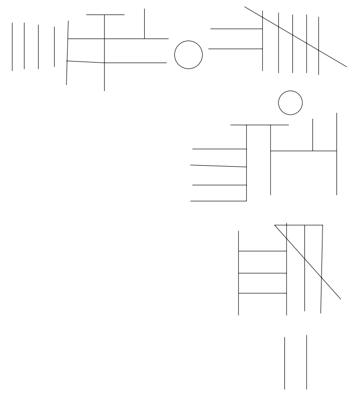
2(a+b)=138

x=b=45

bc/b=c=52

a+b-b=a=24

籌算式：



(4)已知：勾弦積，(勾弦和、較)，最早出現在《九章比類大全》，

《九一集》則是已知：勾弦積，(股弦和、較及勾股較)三題。

(5)已知：勾股積與勾弦積；勾股積與股弦積；勾弦積與股弦積三題目。

《九一集》〈卷五〉第三十四問

今有句股積五百四十尺，只云句乘弦一千二百二十四尺，問句、股、弦各若干？

荅曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置積倍之自乘得一百一十六萬六千四百尺，又云數自乘得一百四十九萬八千一百七十六，二數相減餘三十三萬一千七百七十六尺爲實，以三乘方法開之得句，以除倍積得股，合問。

現代符號的表示：

$$x^4=(ac)^2-(ab)^2,\ x=a$$

$$\frac{2\times\frac{1}{2}ab}{a}=b$$

$(ab)^2=1166400$

$(ac)^2=1498176$

$x^4=331776$

$x=24=a$

$ab/a=b=45$

$ac/a=c=51$

(6)已知：勾股積與(餘勾、餘股、餘弦)共六題。

(7)已知：(勾股和、較)與(餘勾、餘股、餘弦)共六題。

(8)已知：(勾弦和、較)與(餘勾、餘股)共三題。

(9)已知：(股弦和、較)與(餘勾、餘股、餘弦)共六題。

(10)已知：勾股積，勾股弦和一題。

《九一集》〈卷五〉第三十三問

今有句股積五百四十尺，只云句股弦和一百二十尺，問句、股、弦各若干？

荅曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置積四因得二千一百六十尺爲實，以三和一百二十爲法除之得弦和較一十八尺，以減於三和餘一百二尺折半即弦也，又三和內減弦得句股和六十九尺爲從方，列積倍之爲實，以減從平方開之得句，合問。

現代符號表示法：

$4\times\frac{1}{2}ab=4\times540=2160$

$a+b+c=120$

$$\frac{4\times\frac{1}{2}ab}{a+b+c}=\frac{2160}{120}=18=(b+a)-c$$

$$\frac{[a+b+c]-[(a+b)-c]}{2}=c=$$

$$\frac{120-18}{2}=51$$

$$\frac{120+18}{2}=69=a+b$$

$-x^2+69x=1080$，$x=24=a$。

$$\frac{4\times\frac{1}{2}ab}{a+b+c}=(a+b)-c$$ ，

$$\frac{[a+b+c]-[(a+b)-c]}{2}=c$$ ，

$$\frac{[a+b+c]+[(a+b)-c]}{2}=a+b$$ ，

$-x^2+(a+b)x=2(\frac{1}{2}ab)$，x=a。

因爲已知：勾股積，故必須求得勾股和之後，才能解一元二次方程式。

一法：置三和自乘得一萬四千四百內減四段句股積二千一百六十餘一萬二千二百四十折半得六千一百二十爲實，以三和一百二十爲法，除之亦得弦也。

現代符號表示法：

$$\frac{(a+b+c)^2-4\times\frac{1}{2}ab}{2(a+b+c)}=c$$

$(a+b+c)^2-4\times\frac{1}{2}ab=14400-2160$

$=12240$

$\frac{6120}{120}=51=c$

以上的「法曰」的做法在中算書籍出現在梅文鼎的《勾股舉隅》及《數理精蘊》中；「一法」則只有在梅文鼎的《勾股舉隅》中出現過。

『句股互隱門』七十八問中，勾股互求有 1~68 問，這些問題經過比對後，其中有 43 問爲《九一集》特有的題目。用古法處理者爲 1~17 題，開平方有 37~38、40~41 題，帶縱平方有 7、18~21，23~24、27、46、52~54、56~58 題，減縱平方、平方翻積或益積法有 17、25~26、30、33、59~60、62~68 題，帶縱立方 28~29 題，減縱立方 31~32 題，三乘方開方 34~36、44~45 題，帶縱三乘方、翻積法 39、42、43、47~49、51 題。第 22 題的解法爲東算新創，[37] 在中國的算書中，最早出現在《數理精蘊》， 55 及 61 用比值來處理之。以下爲其題例：

《九一集》〈卷五〉第二十二問

今有句弦和七十五尺，句股差二十一尺，問句、股、弦各若干？

荅曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：和差相併得股弦和九十六尺，以句弦和相乘，倍之，得一萬四千四百爲實，平方開之，得句股弦三和一百二十，內減句弦和得股，內減句股差得句，以減句弦和得弦，合問。

現代的表示法：

$(c+a)+(b-a)=(c+b)$

$\sqrt{2[(c+a)+(b-a)](c+a)}=(a+b)+c$ ，

$(a+b)+c-(a+c)=b$，$b-(b-a)=a$，$(c+a)-a=c$。

$(c+a)+(b-a)=75+21=96=(c+b)$

$2(c+b)(c+a)=14400$

$\sqrt{2(c+b)(c+a)}=\sqrt{14400}=120=a+b+c$

$120-75=45=b$

$120-96=24=a$

$120-45-24=51=c$

雖然已知不同，但經過句股和與句股差的和之後，條件就與十七問相同，解法也是相同的。

《九一集》〈卷五〉五十五、六十一問

今有句股和六十九尺，只云句除股得一尺八寸七分，問句、股、弦各若干？
荅曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置和爲實，又列云數加一尺，得二尺八寸七分爲法，除實，得句二十四尺，以減於和得股，乃用前法得弦合問。餘皆倣此

今有句股差二十一尺，只云句除股得一尺八寸七分半，問句、股、弦各若干？
荅曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置差二十一尺爲實，列餘股與一尺相減餘八寸七分五厘爲法，除實，得句二十四尺，加差即股四十五尺，合問。餘皆倣此

現代的表示法：

$a=\dfrac{a+b}{1+b/a}$ ，(a+b)-a=b。

$a=\dfrac{69}{1+1.87}=24$

69-24=45=b

$c=\sqrt{24^2+45^2}=51$

$a=\dfrac{b-a}{b/a-1}$ ，a+(b-a)=b。

以上題目中的「句除股」，在法曰用「云數」與「餘股」來表示它，五十七問前用前者，五十八後用後者，而這種「餘股」的說法，是第一次出現在東算書籍上。

《九一集》卷九「雜錄」爲「癸巳閏五月二十九日(1713 年六月二十一日)，余與劉生壽錫入館中與五官司曆何國柱論算」共有二十一問，其後九題爲何國柱的《勾股圖說》中的『勾股法一問』的題問，卷五 33 與卷九「雜錄」13 同；卷五 29 與卷九「雜錄」15 同；卷五 31 與卷九「雜錄」16 同；卷五 47 與卷九「雜錄」17 同；卷五 40 與卷九「雜錄」19 同；卷五 43 與卷九「雜錄」20 同；卷五 35 與卷九「雜錄」21 同， 這些都是同型題目。卷五 29 爲已知：句股積、股弦差，最早出現在《算法統宗》中；卷五 31 已知：句股積、股弦差，勾弦和《數理精蘊》中有此題型，在東算中是第一次出現此題型，其他如：卷五 33：句股積、句股弦和；47：句弦積、句弦差；40：句股積、餘股(b/a)；43：句股積、餘弦(c/b)；35：句股積、股弦積，這些都是東算最早出現的題型。

第 14 題已知：直角三角形勾股弦和，求勾、股、弦之值。洪正夏是用(3，4，5)的比率來解之，何國柱問可否用其他的比率？洪正夏說可以，何國柱又說勾股變化共兩百四十條，洪正夏則說自己已將勾股術推之將至四百餘條，何國柱問勾股術還有其他解法嗎？洪正夏與劉壽錫展示勾股法有二十餘種，此時何國柱就拿走了。在《韓國數學史》有將劉壽錫所寫的十餘題中，列出七題，[38] 比對這些題型與《九一集》〈卷五〉的題型，則是 1 與卷五 29 同，2 與卷五 31 同，3 與卷五 47 同，4 與卷九 18 同，5 與卷五 40 同，6 與卷五 43 同，7 與卷五 35 同，除了第六題外，所用的畢氏三數組都是(8，15，17)的題型，這就是應證了洪正夏所說的話，這些題目都是以直角三角形三邊的比率來解題的，而同樣的題目在〈卷五〉中的解法都是用開方法解之。〈卷九〉之〈雜錄〉中的第十八題已知：股弦積、句弦差，此題解法用開立方法處理之，在〈卷五〉中並未被列出來。

〈卷九〉〈雜錄〉第十八題

今有句股田一段，只云股乘弦得一千二十尺，又云句弦差一十八尺，問句股弦若干？

荅曰：句一十六尺，股三十尺，弦三十四尺。

法曰：置股乘弦數自乘爲實，另以差自乘得三百二十四爲從廉負倍差得三十六爲隅法正以立方番飛法開之，得弦三十四尺。

現代表示法：

$2(c-a)x^3-(c-a)^2x^2=(bc)^2$，$x=c$

$(bc)^2=1040400$
$(c-a)^2=324$
$2(c-a)=36$
$36x^3-324x^2=1040400$
$x=34$

〈卷五〉第四十八問爲已知：股弦積與句股差，其解法與上題一樣，相信這是洪正夏未列入此題的原因之一。

由上述的說法，筆者推想是《九一集》早已有勾股術的題目，洪正夏說自己已將勾股術推之四百餘條，那麼這七題可能是他們原本沒有的題型，從何國柱得到此抄本後，再次修改或列入的題型。在勾股術中，洪正夏的《九一集》增加很多的題型，在已傳入的中算書或當時的朝鮮書籍中，都未曾出現過，相信這是他們自己努力的結果。

37、參閱附錄(二)《九一集》之『句股互隱門』七十八問。

38、金容雲、金容局，《韓國數學史》(日文版)，槙書局，1978，頁 251。

由『勾股術』的討論中，朝鮮數學家的勾股興趣從何得來，則無從得知。我們只知道《勾股圖解》中的有兩個當時中國數學家無法解決的問題，亦即『已知勾股積、股弦較，求勾、股』和『已知勾股積、勾股和，求勾、股』，分別在洪正夏所記錄的這一段〈對話〉中的第 15、16 題解出，他都以「開方法」來處理之，由此可見洪正夏對於勾股問題之研究及算法的成熟度是很高的，因此在《九一集》後的對話中，洪正夏所說的『勾股推之將至四百餘條』，確屬可信。[39] 洪正夏的《九一集》主要訴求的對象，應該只是他的同行 —『中人算學者』，又根據金永植的研究，中人算學者是一個非常『封閉緊密的社會群體』。而洪正夏則是固守宋元算學的傳統，更將中國傳統算學失傳已久的算法：如『方程術』、『天元術』和『開方術』等精華內容，加以發揚光大，由此證明了宋元算學是沒有侷限。

由『卷之八』第 15 題與〈對話〉中的第 8 題：

> **余問：今有璞玉一塊，形如鳥卵，內容方玉。而空之殼重二百六十五斤一十五兩五錢。只云殼厚四寸五分，問玉方石徑各若干？**

令人意外地，何國柱竟然回答說：「**此術甚難，未可猝解，明日吾當解之。**」可惜，「其後終無解示！」洪正夏隨即在評論後，在『原法』項下利用『天元術』和『減從開立方法』，解得『原答』爲「玉方五寸，石徑一十四寸。」而『原法』與『原答』是否何國柱看過，就不得而知了。但由此我們可以推測：如果對話的部分內容是事實，可知《九一集》之編寫工作，在此一會面之前應已展開了。

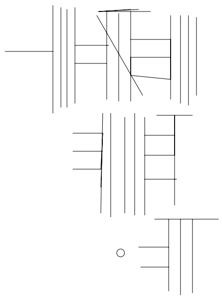
《東算抄》[40] 由於筆跡的差異很大，可能是由多人抄寫而成，因爲在『句股互隱門』(75)中，以頁 186、187；192~195；206、207 等的筆跡差異較大，觀察其筆跡，應有多人參與抄寫此書。在金容雲《九一集》的解題中，頁 3，提到『句股互隱門』有七十七個，但事實上只有七十五個題問而已。根據金容雲、金容局以及川原秀城的研究，《九一集》的體例與內容極其類似《東算抄》。而《東算抄》的『句股互隱門』(75)與《九一集》『句股互隱門』(78)的差別，在於後者加了「勾、股、弦」互求三題基本題，其他題的題目完全相同，連題序都相同，「法曰」中的注解也都完全一樣。雖然《東算抄》的作者未詳，但是，川原秀城認爲很可能是洪正夏：洪正夏先是改編《算學啓蒙》成爲《東算抄》，然後再大幅度地修訂而成

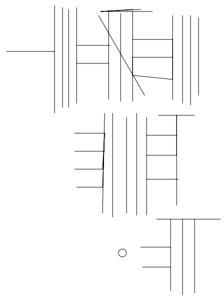
39、梅瑴成曾在《增刪算法統宗》中指出：「勾股和較相求，言算者莫不留心焉，其法可謂詳且備矣，未有以勾股積與勾股和較爲問者……昔待罪蒙養齋，彙編《數理精蘊》，意欲立法以補缺遺，乃用平方輾轉推求，皆不能御。思之累日而後得之。」轉引自李培業 (1992)。

40、金容雲，《東算抄》，收入《韓國科學技術史資料大系・數學篇(8)》，頁 2。它是寫本，三卷三冊，鍾路市立圖書館所藏。

爲《九一集》。[41]

若依古時人們對於曆法的尊重，由《東算抄》各項曆法的計算及年代的陳述，可定出《東算抄》的成書時間，是爲西元 1718 年，[42] 而《九一集》則是成書於西元 1724 年。[43] 又《東算抄》在五十五題中的籌算中如下圖：而後爲《九一集》在五十八題的籌算，可知洪正夏已經修改過了，前書的六十三題的籌算少了負號，後書的六十六題也將它補上了，由此可以推測《東算抄》可能是《九一集》的草本，因爲在 1692~1735 年的算學合格者增加很多，[44] 需要更多的算學書籍，故而洪正夏參考《算學啓蒙》的型式，編輯成《九一集》。





洪正夏《九一集》中勾股術的解法，都是使用「開方術」來處理，已開至四次。他在「開方各術門」中，[45] 用「天元術」來解題，這是朝鮮算學文本中，開始

41、洪萬生，〈十八世紀東算與中算的一段對話：洪正夏 vs.何國柱〉，《漢學研究》第二十卷第二期 (2002)，頁 57-80。

42、卷一「之分齊同門」中第十四題：

按堯典中星圖，則冬至之日，在虛昏中昴，至宋寧宗時冬至日在斗昏中壁，至元延祐時，冬至日在箕八度昏中亦壁中星不同者，蓋天度有餘歲，日不足天漸差而西，歲漸差而東，故東晉虞喜乃立差以追其變，約以五十年退一度，何承天以為太過，乃倍其年，而又反不及，至隋劉焯取二家中數，以七十五年退一度，然今冬至在何度，而昏中何星？

答曰：今冬至在箕宿二度，昏中室宿。

法曰：自延佑甲寅至今戊戌四百五年…

此「延佑」爲元仁宗之年號，甲寅時以干支計算爲延佑元年，即西元 1314 年，「至今戊戌四百五年」，則可推估成書於西元 1718 年。

43、《九一集》的卷九「雜錄」：

按堯典中星圖，則冬至之日，在虛昏中昴，至宋寧宗時冬至日在斗昏中壁，至元延祐時……

答曰：今冬至在箕宿二度，昏中室宿。

法曰：自延佑甲寅至今甲辰四百十一年…

「至今甲辰四百十一年」，則可推估《九一集》是成書於西元 1724 年。

44、金容雲、金容局共著，《韓國數學史》(日文版)，槇書店，1978，頁 229。

45、金容雲，《九一集》，收入《韓國科學技術史資料大系・數學篇(2)》，頁 598~650。

使用它來解題，洪正夏及他的同僚固守中國傳統算學失傳已久的算法如『方程術』、『天元術』和『開方術』等內容，相信這是他能夠將勾股術加以延伸的主要工具。

第三節、《籌解需用》與《籌解實用》的勾股術之分析

一、洪大容與邊彥廷的生平與著作

洪大容（1731~1783），字德保，號湛軒，又號弘之，英祖 7 年（西元 1731 年）出生於忠淸道天元郡修身面常山里。除了古書之外，他的學問涉獵廣泛，不僅善長於經史理學，同時對數學與天文等自然科學的研究亦超越朝鮮當時的水平。相傳他曾在自己的家中設置天文臺，所製作的天文儀器，在測候占時上，能夠毫釐不差，由此不難理解，他的天文知識與技術在朝鮮當時頗具有領導者的地位。[46]

英祖 41 年（1765 年）洪大容曾以軍官之名隨叔父洪檍出使北京[47]。1766 年從北京回朝鮮時著《籌解需用》，値得一提的是，他曾經冒著生命的危險造訪北京的天主教堂，與欽天監正劉松齡和副監鮑友管對談，同時也參觀了北京當時的觀象臺。出使北京歸國後，翌年（1767 年）即遭逢父喪，因而斷了科舉之念。在 1774 年才因爲祖父的功勞，[48]蔭補了一個小小的官職，也因此開始了他近十年的爲官生涯。他的任內曾任參奉、世孫翊衛司侍直、思憲府監察、泰仁縣監等職，官至榮川郡守，1783 年以母親年老爲由，辭官隱逸故里，結束了內官三年外官六年的官職生涯，正祖 7 年冬天（1783 年）突然因爲中風而別世，得年五十三歲。[49]

邊彥廷著，字伯暉，原州後人，生末年未詳，在《籌學入格案》、《籌學先生案》、《籌學八世譜》中未提到他的相關資料，金容雲在《籌解實用》的「解題」裡，說明《籌解實用》爲李朝末年的著述。[50]

二、《籌解需用》與《籌解實用》的體例結構及勾股術內容分析

《籌解需用》收錄於《湛軒書》外集卷四中，《湛軒書》原來有十五冊，[51]由南陽洪大容德保著，在 1939 年五代孫洪容善編，後學洪命熹校，共分內外編三卷，內容爲歸除、天元術及比例、勾股等中外算法，重新整理後彙編爲七冊，由新朝鮮社發刊出版，全文共分內集與外集兩部分。其中內集有四卷，全爲洪大容所作

46、參閱蔡茂松，〈韓國近世思想文化史〉，頁 499。

47、洪檍，字幼直，爲洪大容之叔父，1753 年得文科狀元。1765 年以書狀官之名出使北京，洪大容亦以軍官之名隨行。

48、洪大容的祖父爲洪龍祚，官至大司諫（司諫院之長，正三品），相當於現今的監察院院長。

49、參閱朴趾源，〈洪德保墓誌銘〉，〈湛軒書〉。

50、金容雲，《籌學實用》，收入《韓國科學技術史資料大系‧數學篇(9)》，(漢城：驪江出版社，1985)，頁 1~3。

的文集。外集部分共有十卷，包括與中國文士來往之《杭傳尺牘》三卷，數學及測量術的《籌解需用》三卷，赴中國北京（即燕京）的記行文《燕記》四卷。〈外集〉中的第四卷至六卷，是洪大容的數學著述，內容包含數學、測量、曆算、音律等知識。

這一節的另一本書是邊彥廷的《籌解實用》，[52]它是李朝末年的著述，因爲本書中『外編』上的〈句股總率〉中的「平勾股」及「比例句股」部份，其題目、排序均與洪大容的《籌解需用》相同，爲手抄本，而《籌解需用》則爲印刷字體，並有詳細的數字運算過程。

〈勾股總率〉一節是勾股概論，一方面點出勾股在中國與西方的淵源與基本性質「**勾股者出於九章，即西法之直角三角形。橫為勾，立曰股，斜為弦，勾三股四弦五為基本率，**」同時把勾股問題細分爲三類，「**蓋勾股有有三線，以兩線求一線者為平勾股；有一線借兩表，以兩小線一大線求大線者為比例勾股，併無三線虛借四表，以三小線求大線者為重比例勾股**」，以下爲平勾股及十二題的題問：

平勾股

1、勾股求弦—併兩冪開方。
2、弦股求句—弦冪減股冪開方。
3、弦句求股—弦冪減勾冪開方。
4、勾股求對直角中垂線—勾股相乘弦除之。
5、弦界垂線所分二段求大小—弦除勾冪爲小段，弦除股冪爲大段。
6、勾股求容方徑—勾股相乘併勾股除之。
7、三線求容圓徑—併勾股內減弦，又勾股相乘併三線除之得圓半徑。

在洪大容所列的勾股題之前，都會將平勾股的條例寫在上面，如：

51、參閱鄭寅普，〈湛軒書序〉，〈湛軒書〉

52、金容雲，《籌學實用》，收入《韓國科學技術史資料大系‧數學篇(9)》，頁 165~167；頁 197~122。

(弦界垂線所分二段求大小段)

5、勾二十尺，股三十尺，問中垂線分線爲二段，問大段小段各幾何？

答曰：大段二十五弱，小段一十一尺強。(強者有餘也，此爲一十一尺，而零餘不盡之數甚少，故曰十二尺弱，而十一尺強倣此。)

術曰：求大段則股自乘弦乘之(自乘得九百尺，以弦三十六尺強爲法歸除之)；求小段則勾自乘弦除之(自乘得四百尺，以弦三十六尺強爲法歸除之)。

現代表示法：

$a^2+b^2=20^2+30^2=1300$
$c^2=36^2=1296$
$c^2< a^2+b^2$
$\frac{30^2}{\sqrt{1300}}<25$

因爲這一題並不是整數勾股數，所以他以大約的數字來處理之，故在「答曰」中說明「強」「弱」之分。這種說法在東算文本中，第一次被提出來使用。

本節內容爲勾股求弦、股弦求勾、勾弦求股、勾股求對直角的中垂線、弦界垂線所分兩段求大小、勾股求容方徑、三線求容圓徑、餘勾餘股求容方徑、容方餘勾求餘股等十二題，這十二題中國很多算書都有相關內容，作者在引用及參考的同時，並未在解法上提出特殊或不同之處，這與他的編排此書的主要目標「實用」應該是有關的。[53]邊彥廷的《籌解實用》中，『外編』〈句股總率〉的「平勾股」及「比例句股」部份，其題目、排序均與《籌解需用》完全相同，是手抄本，而《籌解需用》則爲印刷字體，粗體字是洪大容《籌解需用》加入數字運算的詳解。以下爲其題問：

(**正勾股，勾求股弦法，用四率比例**)

8、正勾股勾一十五尺，問股弦各幾何？
答曰：股二十尺，弦二十五尺。

術曰：求股，則勾三爲一率，股四爲二率，今勾爲三率(**二率三率相乘得數，以一率除之，得四率二十尺**)；求弦，則弦五爲二率；

又勾三除今勾，得加幾倍之比例。

一率　勾三　三率　今勾一十五尺
圖
相乘得六十尺

《數理精蘊》的正勾股比例

假設有正勾股，知勾十二尺，求股弦各幾何？

法：以正勾股定分之勾三分爲一率，股四分爲二率，今設之勾一十二尺爲三率，推得四率十六尺爲股。仍以勾三分爲一率，弦五分爲二率，今設之勾一十二尺爲三率，推得四率二十尺爲弦也。蓋大小兩同式，形其相當，各界互相比之比例俱爲相當比例四率。

又捷法：以勾十二尺，用正勾股定分之勾三分，除之得四尺，即知今

式 二率　股四　　四率 得股二十尺

一率　勾三　三率 今勾一十五尺

相乘得七十五尺

二率　股四　四率 得股二十尺

解法：3：15=4；b
b=20

3：15=5：c
c=25

又解法：
15/3=5
b×5=20
c×5=25

所設之勾股形爲加四倍之比例，乃以正勾股定分之股四分弦五分各加四倍即得所求之股弦之各數矣

解法：3：12=4；b
b=16

3：12=5：c
c=20

又捷法：

12/3=4
b×4=16
c×4=20

洪大容是利用《數理精蘊》的正勾股比例來處理這個單元，他將《數理精蘊》中的「圖式」、「法」及「又捷法」都拿來參考，將「正勾股」的類型完整的介紹給讀者。

（正勾股求容方徑法）

9、正勾股勾一十五尺，問容方徑幾何？
答曰：九尺弱。

術曰：先推股七歸三因(**推得股二十尺為實以七尺為法歸除之得二八四又以三為法因之得八尺五寸二分故約九尺弱**)；又勾七歸四因(**以勾十五尺為實以七為法歸除之得二一三又以四為法因之亦得八尺五寸二分也**)。

解法：(1) 先用四率比例求 b，

$$\frac{3}{4}=\frac{15}{b}\rightarrow b=20$$

$$\frac{20}{3+4}=2.84，$$

s=2.84×3=8.52

(2) $\frac{15}{3+4}=2.13$，

s=2.13×4=8.52

（正勾股求容圓徑法）

10、正勾股勾一十五尺，問容圓徑幾何？
答曰：一十尺。

解法：(1) 先用四率比例求 b，

$$\frac{3}{4}=\frac{15}{b}\rightarrow b=20$$

$$D=\frac{20}{2}=10$$

術曰：先推股折半(**推得股二十尺故折其半為十尺即容圓徑也**)；又勾三歸二因(**以勾十五尺為實以三為法歸除之得五又以二為法因之亦得十尺**)。	(2) $\frac{15}{3}=5$，D=5×2=10

9、10 均與《數理精蘊》的解法相同。題 10 術曰：先推股折半(**推得股二十尺故折其半為十尺即容圓徑也**)的解法是特例，它只適合正勾股(3，4，5)的情況，並非一般性的方法，這是因爲 a+b-c=2，故弦的五分之二，股的四分之二，勾的爲三之二爲容圓徑。則容圓徑=$\frac{2}{5}\times 25=\frac{2}{4}\times 20=\frac{2}{3}\times 15=10$。

若(5，12，13)，(8，15，17)的直角三角形就不適用，前者 a+b-c=5+12-13=4，後者 a+b-c=8+15-17=6，每個的勾股數的情況不同，所乘的比值不同，只有正勾股才可以「股折半」。

《籌解需用》在該書列出了參考的中國算書有：元・朱世傑撰《數學啓蒙》即《算學啓蒙》；明・程大位撰《數學統宗》即《算法統宗》；清・蔣元誠撰《數法全書》；[54]宋・楊輝撰《摘奇數法》；西洋・利瑪竇口授、明・李之藻演《渾蓋通憲》；朝鮮慶善徵的《詳明數訣》；朝鮮朴繘的《數原》；《律曆淵源》及康熙製的《數理精蘊》。《籌解需用》對於勾股術的著墨並不多，僅有上述所提列的部份，從平勾股(頁 500 起至頁 507 止)起，在題目上有勾股互求的解法，而後比例勾股、重比例勾股及測望的部份有七十一題之多，但這不在此論文探討範圍，有興趣者可參考其文本頁 504~541。

因爲《籌解需用》是洪大容後代子孫再加以整理重印(1939)，成書可能都是寫本，以現有的韓國文本來看，只有南秉吉的書與此書爲印刷本。而「正勾股」的題型，在中算書中，是出現在《數理精蘊》中，其他有關勾股術的文本並未提出，《數理精蘊》在 1713 年起，1721 年完稿，1723 年刻印，1741 年傳入朝鮮的時間來看，《籌解需用》在引用《數理精蘊》中的勾股部份內容，除了一般勾股問題外，特別注重於勾三股四弦五的正勾股，主要是測量問題上所使用的矩尺規格是爲正勾股。筆者所整理的十本文本中，也只有此書有寫到「正勾股」的題型而已。

邊彥廷在《籌解實用》中，經過筆者的比對，勾股術的部份，它完全與《籌解需用》的題目完全相同，只是前者爲寫本，後者爲印刷本，且有小字體的詳解，除此之外，幾乎與後者可說是完全一樣。本書引用書目：元朱世傑的《數學啓蒙》、

53、洪宜亭，《從《籌解需用》看洪大容的數學與實學思想》，台北：國立臺灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2003 年。

54、蔣守誠，字光正，宜興人。參閱杜石然，《李儼錢寶琮科學史全集》第六卷，(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 673。

明程大位的《數學統宗》、清・蔣元誠的《數法全書》、宋楊輝的《摘奇數法》、明李之藻的《渾蓋通憲》、本國慶善徵的《詳明數訣》、本國朴繘的《數原》及康熙製的《數理精蘊》。他所參考的書籍除了《律曆淵源》之外，其餘均與《籌解需用》相同，[55]邊彥廷爲朝鮮末年的東算學者，而洪大容(1731~1783)則是十八世紀的東算學者，因爲勾股術的內容部份是完全相同，後來筆者再加以比對其他部份，整本書的相同度高達百分之九十以上，除了前面目錄及章節排序之外，內容是幾乎完全相同的，按筆者觀察，有理由懷疑，他可能是抄錄至洪大容的《籌解需用》。

第四節、《算學入門》的勾股術之分析

一、黃胤錫之生平與著作

黃胤錫(1729~1791)，[56]字永叟，號頤齋，自稱「西溟散人」或「雲浦主人」或「越松外史」，全羅興德人，其官至翊贊。三十一歲（英祖三十五年）生員進士試（亦稱司馬試）及第，三十八歲至五十八歲授司圃署（掌園圃、蔬菜）及典牲署主簿（掌養犧牲，從六品），在此期間，皆居微官，但卻能與當代實學大儒鄭景淳、金履安、洪啓禧、申景濬，洪大容、李家煥，徐命膺諸人交遊，因而學問廣涉易象、天文、地圖、經濟、社會、算學、歷史、音韻文字，典故等。其平生得力之著《理藪新編》就在此時完成的。此書內容有（一）性理學（二）天文、曆象學（三）幾何學、算學（四）地理、歷史學（五）經世致用學（六）音韻學（七）西歐科學。

二、《算學入門》的體例、結構與勾股術內容之分析

《理藪新編》共二十三卷，其中第二十一卷：《算學入門》。第二十二卷：《算學入門》。第二十三卷：《算學本源》。《算學入門》爲黃胤錫（1729~1791）編百科全書之《理藪新編》中之第二十一、二十二兩卷，是專門介紹數學的書籍，它是一本寫本。第二十一卷有關勾股術的內容有〈九章名數〉、〈勾股名義〉。第二十二卷有關勾股術的內容有〈方程正負法〉、〈勾股弦法〉整體來說本書可細分幾個部分，有關加減乘除的基礎問題選錄來自《詳明算法》，中級程度問題選錄來自《楊輝算法》、《算學啓蒙》，高深較難問題大抵從《算學啓蒙》節錄出來。[57]除此之外，本書也參考了《九章算術》、《五曹算經》、《詳明算法》、《指明算法》、《日用算法》(1262)、《應用算法》、《算法統宗》(1450)、《同文算指》(1614)、《數理精蘊》(1723)等算術書的方法及內容。由此可知，黃胤錫對於中西方的算數書，應是了解深刻的。

55、《數學啓蒙》即《算學啓蒙》、明程大位的《數學統宗》即《算法統宗》、宋楊輝的《摘奇數法》即《楊輝算法》的一部份。

《算學入門》是由西溟散人黃胤錫編輯，本書開始是數字系統及度量單位的換算等預備知識。換言之, 是為初學者學習算學的入門。黃胤錫以「黃帝時，肄首作算術，九章算術，漢許商、杜忠、吳陳熾、魏王粲並善之。筭之言弄也，常弄乃不誤也。其長六吋，兩百七十一枚為一握。字彙曰『筭』，本作算從具俗作筭非。」作爲本書的開端，說明籌算的重要性，由此可知，在中國已經失傳的籌算方法及工具，在朝鮮是保存的很好，而且也都能應用得宜，黃胤錫希望初學者要多練習才能減少錯誤。

以〈九章名數〉作爲《算學入門》的第一單元，黃胤錫是以中國吳敬的《九章算法比類大全》爲學習算學入門的基石。就如《算法統宗》的〈九章名義〉開宗明義即謂：「數學從來有九章，方田粟布有九詳，衰分辨別貴和賤，少廣開除圓與方。商度功程術最妙，均平輸送法最廣，贏朒德互須到位，方圓正負要排行。若要高深併廣遠，好將勾股細思量。」道出了學習九章的價値及其不失一般性的功能。

《算學入門》關於勾股的部份：

(一)〈方程正負門〉的後兩題，則是完全抄錄於《算學啓蒙》中『方程正負門』的第八、九問，如第八題：

56、在金容雲所編寫的解題中認爲其生卒年爲 1729~1791 年，然在李崇寧所編寫《理藪新編》序中說明其生卒年爲 1719~1791 年，筆者以爲李崇寧知說法較爲可信。由《理藪新編》序文開頭提及：『理藪總若干門目，是余一生精力之所在也。』得到證實。至於《理藪新編》成書年代，依據李崇寧的說法：如果依照黃胤錫寫之序文來看，《理藪新編》乃是黃胤錫在甲子菊月脫稿完成的，換算成當時的年代乃是英祖二十年（1744 年），當時才二十六歲，但是由序文中的說法：

> 『理藪』總若干門目，是余一生精力之所在也。嗟夫！余豈樂為此哉？……. 余之有志乎此者，今已四年矣，雖或有一二謏見而其未曉者，尚居其半，況是編也。……. . 廣質師友之間，益曉其所未曉，益究其所未究，用酬一生之願，則亦啟非千古之一快哉！

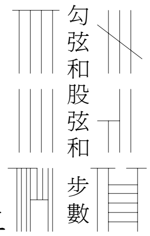
可以看出以黃胤錫當時的年紀與其序文中的說法有些矛盾，因此懷疑《理藪新編》乃是後人重新抄寫的，其因筆誤而將甲『午』菊月寫成甲『子』菊月，若以『甲午菊月』來換算當時的年代，應該爲英祖五十年，此時黃胤錫爲五十六歲，此說較爲合理。但如果序文沒有錯誤，即『甲子菊月』是事實的話，那麼即有可能是黃胤錫當時只是完成理藪新編的部分內容，而非我們今天所看到《理藪新編》的全貌。也因此《算學入門》二十一、二十二卷到底是哪一年完成的，則尚無考據得知。蔡松茂，《韓國近世思想文化史》(台北：東大出版社)，1995 年，頁 498。

57、參考周宗奎，《黃胤錫《算學入門》探源》，臺灣師範大學教學碩士班碩士論文，2003 年。

今有直田，勾弦和，取二分之一，股弦和，取九分之二，共得五十四步。又勾弦和，取六分之一，減股弦和三分之二，餘有四十二步，問勾、股、弦各幾何？

以方程布題，而其術文則是：

前分母十八乘共步得九百七十二，又後分母乘餘數得七百五十六，如方程正負入之。依圖布算



，以右行三次異減同加左行，左中得股弦和四十箇，左下得三千二百四十步，上法下實而一得股弦和八十一步。就以十二乘之得數，以減右下七百五十六，餘三百一十六，以三約之得勾弦和七十二步也。以股弦和乘而倍之得一萬一千六百六十四為實，以一為廉，平方開之得一百八步。副置上位，減股弦和即勾，下位減勾弦和即股，又勾弦和內減勾，餘即弦，合問。

術文中以一個未知數代替多個未知數，前段依方程之法將勾弦和、股弦和算出，如以現代符號表示，即：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(c+a)+\dfrac{2}{9}(c+b)=54 \\ -\dfrac{1}{6}(c+a)+\dfrac{2}{3}(c+b)=42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9(c+a)+4(c+b)=972 \\ -3(c+a)+12(c+b)=756 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 27(c+a)+12(c+b)=2916 \\ -27(c+a)+108(c+b)=6804 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 120(c+b)=9720$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c+b=81 \\ c+a=72 \end{cases}$$

再用 $2(c+a)(c+b)=(a+b+c)^2$ 得 $(a+b+c)^2=2\times72\times81=11664$ ，從而開方得 $a+b+c=108$ 。所以

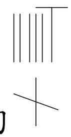
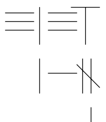
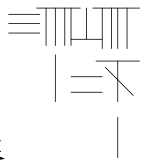
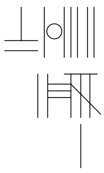
$$a=(a+b+c)-(c+b)=27$$

$$b=(a+b+c)-(c+a)=36$$

$$c=(c+a)-a=45$$

在算法中，朱世傑將勾弦和及股弦和視為兩個未知數，於是，變成了一個二元一次方式，以便了解題的過程。

第九題：「今有直田。勾弦和取七分之四，股弦和取七分之六，二數相減，餘二十二步。又股弦和取三分之一，不及勾弦和八分之五一十四步。問勾、股、弦各幾何？」中，對於由勾弦和（$c+a=56$）及股弦和（$c+b=63$）來求勾、股、弦，朱世傑還給出了用天元術的解法：

立天元一為弦，以減股弦和，餘為股；以減勾弦和，餘為勾，自之為勾冪。又列股自乘為股冪，併入勾冪，與弦冪相消，得開方式。平方開之，得弦，減股弦和即股，減勾弦和即勾，合問。

用現代代數方法表示，則為：

設弦 c 為未知數 x，則 $b=63-x$、$a=56-x$，
將三者分別代入 $c^2=b^2+a^2$
得 $x^2-238x+7105=0$
解方程式即可求得 $x=35$，即弦。

黃胤錫在這裡依題佈算及介紹天元術，相信他對於天元術亦有所了解才是。

(二)〈句股弦法〉(**出同文算指**)『**句平面之廣也，股平面之長也，句股弦三合成形錯綜立義**』。這裡所指的三合成形，應該是三線圍成三角形。黃胤錫在編寫《算學入門》時，因為他有受考證之學的影響，他都會將出處或參考的文本寫在書上，以便告知讀者。而李之藻所編譯的《同文算指》成書於 1613 年，受《算法統宗》的影響很大，主要參考書為，一是利瑪竇的老師丁先生的《實用算術概論》(1583 年)，一是明程大位所編的《算法統宗》(1592 年)。[58] 而此〈句股弦法〉與顧應祥《勾股算術》中的〈勾股論說〉幾乎相同，《算學入門》多了下表的前十種情形，十七、十九則多了開方法的運算，但少了「股弦較加股弦和，半之為弦；減股弦和，半之為股。」[59] 程大位在《算法統宗》中，

對於〈勾股論說〉的原文作了斷句，用「○」分隔，又加了算例，個別文字也有變動，略有增刪，成爲〈勾股論說釋義〉。[60]〈勾股論說釋義〉主要先解說勾股 13 率在 a=27，b=36，c=45 時的各值，接著給出 30 個恆等關係式。〈句股弦法〉多了下表的前十種情形，十七、十九多了開方法的運算，但少了「股弦較加股弦和，半之爲弦；減股弦和，半之爲股。」〈勾股論說釋義〉又多了 a+〔c+(b-a)〕=(c+b)；b+(c-a)=c+(b-a)；b-(c-a)=(b+a)-c；b+〔c-(b-a)〕=(c+a)。由此可知《算學入門》的〈句股弦法〉是參考《算法統宗》而成。將〈句股弦法〉依現代數學符號，列表如下：

〈句股弦法〉

原術文	現代符號
1.句股相減，其差曰較。	$b-a$
2 句股相併，其名曰和。	$b+a$
3.股弦之差，曰股弦較。	$c-b$
4.句弦之差，曰句弦較。	$c-a$
5.并句股與弦較，其差曰弦和較。	$(a+b)-c$
6.句股之差與弦相減，其差曰弦較較。	$c-(b-a)$
7.股弦相併，曰股弦和。	$c+b$
8.句弦相併，曰句弦和。	$c+a$
9.句股之差，併弦，曰弦較和。	$c+(b-a)$
10.句股弦併，曰弦和和。	$a+b+c$
11.句股各自乘，併之爲弦實，開之得弦。	$\sqrt{a^2+b^2}=c$
12.句弦各自乘，減餘爲股實，開之得股。	$\sqrt{c^2-a^2}=b$
13.股弦各自乘，減餘爲句實，開之得句。	$\sqrt{c^2-b^2}=a$
14.句股和自乘，倍弦實，相減，餘開之即句股較。	$\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a$
15.句股較自乘，以減倍弦實，餘開之，即句股和。	$\sqrt{2c^2-(b-a)^2}=b+a$

58、陳敏皓，《《同文算指》之內容分析》，台北：國立臺灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2002 年，頁 117-126。

59、黃胤錫，《算學入門》，收入《韓國科學技術史資料大系・數學篇(3)》，頁 180-182。

60、程大位，《算法統宗》收入《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 1365。

16.倂句弦，以除股實，得句弦較。	$\frac{b^2}{c+a}=c-a$
17.句弦較除股實，得句弦和。 （句弦較與句弦和相乘，開平方即股）	$\frac{b^2}{c-a}=c+a$ ，（ $\sqrt{(c-a)(c+a)}=b$ ）
18. 倂股弦，以除句實，得股弦較。	$\frac{a^2}{c+b}=c-b$
19.股弦較除句實，即得股弦和。 （股弦較與股弦和相乘，開平方即句）	$\frac{a^2}{c-b}=c+b$ ，（ $\sqrt{(c-b)(c+b)}=a$ ）
20.句股和自乘，減弦實，以弦較較除之，得弦較和，以弦較和除之，即弦較較。	$\frac{(b+a)^2-c^2}{c-(b-a)}=c+(b-a)$ $\frac{(b+a)^2-c^2}{c+(b-a)}=c-(b-a)$
21.句股較自乘，減弦實，以弦和和除之，得弦和較，以弦和較除之，即弦和和。	$\frac{c^2-(b-a)^2}{c+(b+a)}=(b+a)-c$ $\frac{c^2-(b-a)^2}{(b+a)-c}=(b+a)+c$
22.句乘股爲實，倂句股爲法，除得容方徑。	$\frac{ab}{a+b}=s$
23.句乘股，倍之，句股（求）弦倂之，除得容圜徑（即弦和較也）。	$\frac{2ab}{a+b+c}=$ D =a+b-c
24.句爲主，以加股弦較，即弦較較，以減股弦較，即弦和較。若加弦較和，即股弦和。	a＋（c－b）＝c－（b－a)； a－（c－b）＝（a＋b）－c； a＋【c＋（b－a)】＝c＋b
25.股爲主，以加句弦較，即弦較和，以減句弦較，即弦和較。若加弦較較，即句弦和。	b＋（c－a）＝c＋（b－a)； b－（c－a）＝（b＋a）－c； b＋【c－（b－a)】＝c＋a
26.句股較爲主，以加股弦較，即句弦較。若減股弦和，即句弦和。	（c－b）＋（b－a）＝c－a； （c＋b）－（b－a）＝c＋a
27.句股和爲主，以加股弦較，即句弦和。若減股弦和，即句弦較。	（c－b）＋（a＋b）＝c＋a； （c＋b）－（a＋b）＝c－a
28.句股較以加句股和，半之，得股，以減句股和，半之，得句。	1/2 ×【(b－a）＋（a＋b)】＝b； 1/2 ×【(a＋b）－（b－a)】＝a
29.股弦較以加股弦和，半之，得弦，以	1/2 ×【(c－b）＋（c＋b)】＝c；

減股弦和，半之，得股。	1/2×【(c＋b）－（c－b)】＝b
30.句弦較以加句弦和，半之，得弦，以減句弦和，半之，得句。	1/2×【(c＋a）＋（c－a)】＝c； 1/2×【(c＋a）－（c－a)】＝a
31.弦和較以加弦和和，半之，得和，以減弦和和，半之，得弦。	1/2×【(c＋（b＋a)）＋（(a＋b）－c)】＝a＋b； 1/2×【(c＋（a＋b)）－（(b＋a）－c)】＝c
32.弦較較以加弦較和，半之，得弦，以減弦較和，半之，得較。	1/2×【(c＋（b－a)）＋（c－（b－a))】＝c； 1/2×【(c＋（b－a)）－（c－（b－a))】＝b－a

將上述資料分類爲五類公式，依現代符號，分列如下：

1、五和與五較的說明。

2、勾 a、股 b、弦 c 互求公式：

$\sqrt{a^2+b^2}$ ＝c，$\sqrt{c^2-a^2}=b$ ，$\sqrt{c^2-b^2}=a$ 。

3、勾股容圓、容方公式：

已知勾 a、股 b、弦 c，則：勾股容圓徑 D=$\dfrac{2ab}{a+b+c}$= a+b-c ；

勾股容方邊 s=$\dfrac{ab}{a+b}$ 。

4、較求勾、股、弦公式：

(1)、股較求股：

已知勾 a、股較 c-b，則股長 b=$\left[\dfrac{a^2}{c-b}-(c-b)\right]\times\dfrac{1}{2}$ 。

(2)、勾較求勾：

已知股 b、股較 c-a，則勾長 a=$\left[\dfrac{b^2}{c-a}-(c-a)\right]\times\dfrac{1}{2}$ 。

(3)、弦較求弦：

已知勾 a、股較 c-b，則弦長 c=$\left[\dfrac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]\times\dfrac{1}{2}$

(4)、勾股較求和：

已知弦 c、勾股較 b-a，則勾股和 a+b= $\sqrt{2c^2-(b-a)^2}=b+a$ 。

5、股別勾弦、勾別股弦：

已知股長 b、勾弦和 a+c，則勾長 a= $\left[(c+a)-\dfrac{b^2}{c+a}\right]\times\dfrac{1}{2}$ 。

已知勾長 a、股弦和 b+c，則股長 b= $\left[(c+b)-\dfrac{a^2}{c+b}\right]\times\dfrac{1}{2}$ 。

在這裡黃胤錫下一個註腳：**「諸較諸和，法相因配，連綴減半，恆得所求加減乘除，環變不滯，神而明之，存乎其人，遠近高深，方圓弧矢，準此而推，亦在乎熟之而已。」**這說明學習此單元的要訣，他認爲勤加練習，作爲研究高深學問的基礎，初學者若能學會〈句股弦法〉，就可以推得學習方圜弧矢的問題了，這裡他用中算方法來解釋〈句股弦法〉的基本定義及定理。

根據徐光啓在《句股義》一開始即寫道：[61]**「....其大小相求，及其立表諸法，測量法義所論著略備矣。句股自相乘，以致容方、容圓，各和各較相求，舊九章中亦有之，第能言其法，不能言其義也。所主諸法，蕪陋不堪讀，門人孫初陽氏刪為正法十五條，稍簡明矣。余因為論撰其義，使夫精於數學者，攬圖論說，庶或為之解頤。」**即徐光啓的門人孫元化，[62]「敘曰」之後抄錄的句股爲「刪爲正法十五條」的初稿。李之藻爲之論撰成《句股略》，故《同文算指》的〈句股略〉主要承襲徐光啓的《句股義》。徐光啓認爲中算中句股諸問題，只能言其法，不能言其義，所以，他想要用西法中的《幾何原本》(前六卷 1607)，其嚴謹的邏輯體系、演譯方法及《測量法義》中的定理，來解釋中算句股問題中的「義」。徐光啓所認爲的「舊九章」指的是何書，不得而知。黃胤錫把〈句股弦法〉放在〈句股義〉之前，相信他是希望學習者對句股方面之專有名詞及算法，能先有初步的認識，作爲初學者進入學習〈句股義〉之前的準備。

其實以〈句股義〉的內容來看，它的深度及廣度都比〈句股弦法〉充實多了，黃胤錫或許是有這樣的想法：若能熟悉〈句股弦法〉的所有定義及算法，再來引入〈句股義〉中處理句股弦互求的內容，相信其深度其廣度都有所提昇，題目

61、徐光啓的《句股義》撰於 1609 年。

62、孫元化，嘉定人，字初陽，天起舉人從徐光啓游，得西洋火器法。

63、參考附錄(二)的《算學入門》之《勾股義》。

也會有延伸的意義在。但由黃胤錫所引的〈句股義〉內容來看，卻只有算法而沒有證明，這與記公式相似，他在句股方面引入「中譯西法」，對於西學的介紹或許有一些貢獻吧！我們來看一下黃胤錫〈句股義〉的內容，[63]其中有四題他有將題目延伸，筆者將它提列出來：

由下述的資料可以知道，黃胤錫他在《句股義》中也有自己的見解，

一、句弦較求句求弦。（徐光啓《句股義》的第九題）

$$\frac{b^2-(c-a)^2}{2(c-a)}=a \text{ ，(c-a)+a=c；}$$

$$\frac{b^2}{c-a}=c+a \text{ ，} \frac{(c+a)+(c-a)}{2}=c \text{ ，} \frac{(c+a)-(c-a)}{2}=a$$

《算學入門》新增：

股與弦較和求句求弦。

$$\frac{b^2}{[c+(b-a)]-b}=c+a \text{ ，} \frac{(c+a)+(c-a)}{2}=c \text{ ，} \frac{(c+a)-(c-a)}{2}=a$$

股與弦和較求句求弦。

$$\frac{b^2}{b-[(b+a)-c]}=c+a \text{ ，} \frac{(c+a)+(c-a)}{2}=c \text{ ，} \frac{(c+a)-(c-a)}{2}=a$$

二、股弦較求股，求弦。（徐光啓《句股義》的第十題）

$$\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=b \text{ ，} b+(c-b)=c \text{ ；}$$

《算學入門》新增：

句與弦和較，求股，求弦。

$$\frac{a^2}{a-[(b+a)-c]}=c+b \text{ ，} \frac{(c+b)+(c-b)}{2}=c \text{ ，} \frac{(c+b)-(c-b)}{2}=b$$

句與弦較較，求股求弦。

$$\frac{a^2}{[c-(b-a)]-a}=c+b \text{ ，} \frac{(c+b)+(c-b)}{2}=c \text{ ，} \frac{(c+b)-(c-b)}{2}=b$$

三、股弦和求股求弦。（徐光啓《句股義》的第十三題）

$$\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}=b \text{ ， } (b+c)-b=c \text{ ；}$$

《算學入門》新增：

句與弦和和，求股，求弦。

$$\frac{a^2}{[c+(b+a)]-a}=c-b \text{ ， } \frac{(c+b)+(c-b)}{2}=c \text{ ， } \frac{(c+b)-(c-b)}{2}=b$$

句與弦較和，求股，求弦。

$$\frac{a^2}{a+[c+(b-a)]}=c-b \text{ ， } \frac{(c+b)+(c-b)}{2}=c \text{ ， } \frac{(c+b)-(c-b)}{2}=b$$

四、股弦和求股求弦。（徐光啓《句股義》的第十三題）

$$\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}=b \text{ ， } (b+c)-b=c$$

《算學入門》新增：

句與弦和和，求股，求弦。

$$\frac{a^2}{[c+(b+a)]-a}=c-b \text{ ， } \frac{(c+b)+(c-b)}{2}=c \text{ ， } \frac{(c+b)-(c-b)}{2}=b$$

句與弦較和，求股，求弦。

$$\frac{a^2}{a+[c+(b-a)]}=c-b \text{ ， } \frac{(c+b)+(c-b)}{2}=c \text{ ， } \frac{(c+b)-(c-b)}{2}=b$$

由上述內容知道黃胤錫多列入八個問題，他並不是只有抄錄徐光啓之〈句股義〉而已，他將徐光啓的 9、10、12 及 13 每題多延伸出二題，希望讓題型更加的完整，讓初學者能夠更清楚的知道其中的變化。在〈句股弦法〉及〈句股義〉中，黃胤錫都會在他所給予的定義及定理，適時的加入新的見解資料，使得這些題問能夠更完整的呈現出來，筆者相信這就是他對於中西文本的「轉化」。雖然他包括了徐光啓之〈句股義〉中得十五正法，但並沒有將幾何圖形及數據列出來，在代數的運算中，實在不易處理。再看《算學入門》，此書是《頤齋全書》的一部份，若他也參考徐光啓的〈句股義〉，將圖形及證明都加以呈現出來，那《頤齋全書》

將會非常龐大，這就可以說明爲他在〈句股弦法〉及〈句股義〉中，都只是條列出定義及定理而已。黃胤錫在此段後加一註腳：**『凡句股弦之義，必以句三股四弦五為準，然物各不齊，以此法而推用焉，可也。』**可能他只是把它當成算學中的輔助工具，且其對象爲初學算學者吧！