

# Miquel 定理及其應用

趙文敏

國立臺灣師範大學 數學系

三角形與圓的幾何性質，早在古希臘時代，就已是數學家們的討論主題。Euclid 在他的曠世名著 Elements 中，已經整理出許多有關三角形與圓的定理。其後的數學家們又時有新的發現，直到十九世紀末年，對於三角形與圓的幾何性質，數學家們所獲得的成果，已遠遠超過 Elements 的內容。本文所要討論的，就是這段時期所獲得成果的一小部分，並做一些推廣。

## 甲、Miquel 定理及其推廣

下面的定理 1，A. Miquel 在西元 1838 年給出清楚的敘述並提出證明。不過，此定理可能在更早就已為人所知。

**定理 1：**設  $\triangle A_1A_2A_3$  為任意三角形。若點  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  分別在邊  $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_1}$  與  $\overline{A_1A_2}$  上，且點  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  都不是  $\triangle A_1A_2A_3$  的頂點，則  $\triangle A_1P_2P_3$ 、 $\triangle A_2P_3P_1$  與  $\triangle A_3P_1P_2$  的外接圓共點，而且其交點在  $\triangle A_1A_2A_3$  的外接圓的內部。

**證：**因為  $\triangle A_2P_3P_1$  與  $\triangle A_3P_1P_2$  的外接圓已有一個交點  $P_1$ ，所以，它們必有另一交點  $P$ 。我們要證明點  $A_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  與  $P$  共圓，為證明此結論，須證明：當點  $P$  與點  $A_1$  在直線  $P_2P_3$  同側時， $\angle P_2PP_3 = \angle P_2A_1P_3$ ；當點  $P$  與點  $A_1$  在直線  $P_2P_3$  異側時， $\angle P_2PP_3 = 180^\circ - \angle P_2A_1P_3$ 。我們就點  $P$  在  $\triangle A_1A_2A_3$  平面上的不同區域來討論。

(1) 設點  $P$  在  $\triangle A_1A_2A_3$  的內部，如圖 1(1)所示，則

$$\begin{aligned}\angle P_3PP_1 &= 180^\circ - \angle A_3A_2A_1, & \angle P_1PP_2 &= 180^\circ - \angle A_1A_3A_2, \\ \angle P_2PP_3 &= 360^\circ - \angle P_3PP_1 - \angle P_1PP_2 = \angle A_3A_2A_1 + \angle A_1A_3A_2 \\ &= 180^\circ - \angle P_2A_1P_3.\end{aligned}$$

(2) 設點  $P$  與點  $A_1$  在直線  $A_2A_3$  異側，如圖 1(2)所示，則

$$\begin{aligned}\angle P_3PP_1 &= \angle A_3A_2A_1, & \angle P_1PP_2 &= \angle A_1A_3A_2, \\ \angle P_2PP_3 &= \angle P_3PP_1 + \angle P_1PP_2 = \angle A_3A_2A_1 + \angle A_1A_3A_2 \\ &= 180^\circ - \angle P_2A_1P_3.\end{aligned}$$

另一方面，因為  $\angle A_2PA_3 > \angle P_2PP_3 = 180^\circ - \angle A_2A_1A_3$ ，所以，點  $P$  在  $\triangle A_1A_2A_3$  的外接圓的內部。

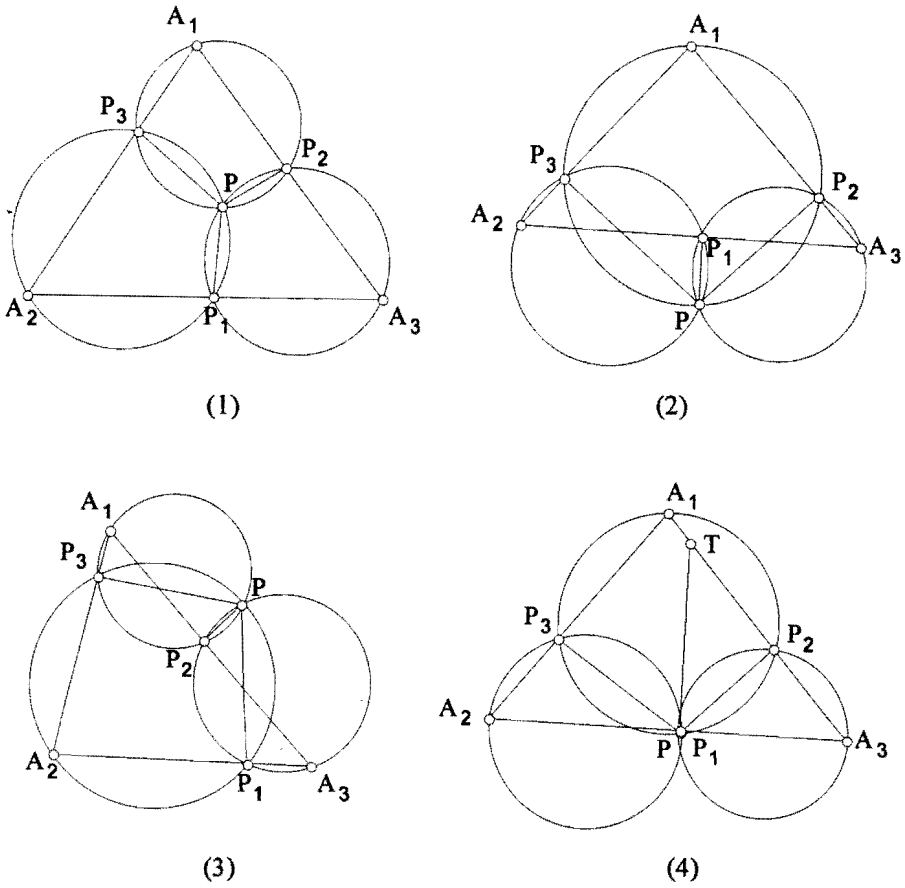


圖 1

(3) 設點  $P$  與點  $A_2$  在直線  $A_3A_1$  異側，如圖 1(3)所示，則

$$\begin{aligned} \angle P_3PP_1 &= 180^\circ - \angle A_3A_2A_1, & \angle P_1PP_2 &= \angle A_1A_3A_2, \\ \angle P_2PP_3 &= \angle P_3PP_1 - \angle P_1PP_2 = 180^\circ - \angle A_3A_2A_1 - \angle A_1A_3A_2 \\ &= \angle P_2A_1P_3. \end{aligned}$$

(4) 設點  $P$  與點  $A_3$  在直線  $A_1A_2$  異側，則仿(3)可得  $\angle P_2PP_3 = \angle P_2A_1P_3$ 。

(5) 設點  $P$  在  $\overline{A_2A_3}$  上，即  $P=P_1$ ，則  $\triangle A_2P_3P_1$  與  $\triangle A_3P_1P_2$  的外接圓相切於點  $P_1$ 。在內公切線上取一點  $T$ ，使點  $T$  在  $\angle P_2PP_3$  內部，如圖 1(4)所示，則

$$\begin{aligned} \angle P_3PT &= \angle A_3A_2A_1, & \angle P_2PT &= \angle A_1A_3A_2, \\ \angle P_2PP_3 &= \angle P_3PT + \angle P_2PT = \angle A_3A_2A_1 + \angle A_1A_3A_2 \\ &= 180^\circ - \angle P_2A_1P_3. \end{aligned}$$

(6) 若點  $P$  在  $\overline{A_3A_1}$  上，則因為  $\triangle A_3P_1P_2$  的外接圓與  $\overline{A_3A_1}$  交於點  $P_2$ 、點  $P$  與點  $A_3$ ，所以， $P=P_2$ 。於是，點  $A_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  與  $P$  共圓（因為  $P=P_2$ ）。

(7) 若點  $P$  在  $\overline{A_1A_2}$  上，則仿(6)可知點  $A_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  與  $P$  共圓。||

定理 1 中的結果，可以推廣成下面的定理。

**定理 2：**設 $\triangle A_1A_2A_3$ 為任意三角形。若相異的三個點 $P_1$ 、 $P_2$ 與 $P_3$ 分別在直線 $A_2A_3$ 、 $A_3A_1$ 與 $A_1A_2$ 上，則 $\triangle A_1P_2P_3$ 、 $\triangle A_2P_3P_1$ 與 $\triangle A_3P_1P_2$ 的外接圓共點。

請注意：當點 $P_3$ 與頂點 $A_1$ 重合時，所謂 $\triangle A_1P_2P_3$ 的外接圓，乃是指過點 $P_2$ 而與直線 $A_1A_2$ 相切於點 $A_1$ 的圓。其餘仿此類推。

定理 2 若以綜合方法來證明，所需的基本性質仍是“圓內接四邊形的對角互補”與“在同一圓上對等弧的兩圓周角相等”。但是，因為點 $P_1$ 、 $P_2$ 與 $P_3$ 分別是直線 $A_2A_3$ 、 $A_3A_1$ 與 $A_1A_2$ 上的任意點，例如，以點 $P_1$ 為例，有 $P_1=A_2$ 、 $P_1=A_3$ 、 $P_1$ 介於 $A_2$ 與 $A_3$ 之間、 $A_2$ 介於 $P_1$ 與 $A_3$ 之間、 $A_3$ 介於 $P_1$ 與 $A_2$ 之間等五種可能位置，所以，就三個點在各直線上的位置加以分類時，就可分成上百種可能的位置組合。何況在每種位置組合中，還得考慮三個外接圓的交點 $P$ 位於那個區域。例如：定理 1 中的交點 $P$ 就可分成四個區域及位於三邊上的情形。這種頗為複雜的分類考慮既繁複又容易掛一漏萬，所以，定理 2 的嚴密證明似乎只有仰賴坐標方法，才能免除分類的困擾及可能的疏漏，下面的兩個引理是使用坐標方法證明定理 2 所需的兩個定理。

**引理 3：**在直角坐標平面上，若四相異點 $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ 與 $Z_4$ 的坐標分別為 $Z_k(u_k, v_k)$ ， $k=1, 2, 3, 4$ ，且其中至少有三點不共線，則點 $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ 與 $Z_4$ 共圓的充要條件是：下述算式所表示的複數是一個實數：

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} ,$$

其中， $z_k = u_k + iv_k$ ， $k=1, 2, 3, 4$ 。

**引理 4：**在直角坐標平面上，若四相異點 $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ 與 $Z_4$ 的坐標分別為 $Z_k(u_k, v_k)$ ， $k=1, 2, 3, 4$ ，且點 $Z_1$ 、 $Z_2$ 與 $Z_3$ 不共線，則點 $Z_4$ 在過點 $Z_1$ 而與直線 $Z_2Z_3$ 相切於點 $Z_2$ 之圓上的充要條件是：下述算式所表示的複數是一個實數：

$$\frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2} : \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} ,$$

其中， $z_k = u_k + iv_k$ ， $k=1, 2, 3, 4$ 。

下面我們利用引理 3 與引理 4 來證明定理 2。

**定理 2 的證明：**

首先，在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的平面上選取一個直角坐標系，設三個頂點的坐標分別為 $A_1(x_1, y_1)$ 、 $A_2(x_2, y_2)$ 與 $A_3(x_3, y_3)$ 。令

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad z_3 = x_3 + iy_3。$$

因為點  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  分別在直線  $A_2A_3$ 、 $A_3A_1$  與  $A_1A_2$  上，所以，必有三個實數  $t_1$ 、 $t_2$  與  $t_3$  使得點  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  的坐標分別為： $P_1((1-t_1)x_2+t_1x_3, (1-t_1)y_2+t_1y_3)$ 、 $P_2((1-t_2)x_3+t_2x_1, (1-t_2)y_3+t_2y_1)$  與  $P_3((1-t_3)x_1+t_3x_2, (1-t_3)y_1+t_3y_2)$ 。以點  $P_k$  的橫坐標做為實部、縱坐標做為虛部定義一複數  $w_k$ ， $k=1, 2, 3$ ，則得

$$w_1 = (1-t_1)z_2 + t_1z_3,$$

$$w_2 = (1-t_2)z_3 + t_2z_1,$$

$$w_3 = (1-t_3)z_1 + t_3z_2.$$

我們分成四種情形來證明  $\triangle A_1P_2P_3$ 、 $\triangle A_2P_3P_1$  與  $\triangle A_3P_1P_2$  的外接圓共點。

(1) 設點  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  都是頂點。

我們設  $P_1=A_2$ 、 $P_2=A_3$  且  $P_3=A_1$ ，如圖 2(1) 所示。設過點  $A_1$  而切直線  $A_2A_3$  於點  $A_2$  的圓與過點  $A_2$  而切直線  $A_3A_1$  於點  $A_3$  的圓相交於另一點  $P(x_0, y_0)$ 。因為前一圓不過點  $A_3$  而後一圓不過點  $A_1$ ，所以， $P \neq A_3$  且  $P \neq A_1$ 。因為前一圓過點  $A_2$  的切線通過後一圓的一相異點  $A_3$ ，所以，兩圓不會相切於點  $A_2$ 。於是， $P \neq A_2$ 。由此可知：點  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  與  $P$  是四個相異點。令  $z_0 = x_0 + iy_0$ ，則依引理 4，必有二實數  $b_2$  與  $b_3$  使得

$$\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_2} = b_2 \times \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3},$$

$$\frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3} = b_3 \times \frac{z_3 - z_0}{z_3 - z_1}.$$

將後一式代入前一式，即得

$$\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_2} = b_2 b_3 \times \frac{z_3 - z_0}{z_3 - z_1}.$$

由此可知： $[(z_3 - z_0)/(z_3 - z_1)] : [(z_1 - z_0)/(z_1 - z_2)]$  是一個實數。因為點  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  不共線，所以，依引理 4，可知通過點  $A_1$ 、 $A_3$  與  $P$  的圓與直線  $A_1A_2$  相切於點  $A_1$ 。

(2) 設點  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  中恰有兩點是頂點。

我們假設  $P_1=A_2$ 、 $P_2=A_3$  但  $P_3 \neq A_1$ 。設過點  $P_3$  而切直線  $A_2A_3$  於點  $A_2$  的圓與過點  $A_2$  而切直線  $A_3A_1$  於點  $A_3$  的圓相交於另一點  $P(x_0, y_0)$ 。若  $P=P_3$ ，則點  $A_1$ 、 $A_3$ 、 $P_3$  與  $P$  當然共圓。設  $P \neq P_3$ 。因為前一圓不過點  $A_3$  而後一圓不過點  $A_1$ ，所以， $P \neq A_3$  且  $P \neq A_1$ 。因為前一圓過點  $A_2$  的切線通過後一圓的一相異點  $A_3$ ，所以，兩圓不會相切於點  $A_2$ 。於是， $P \neq A_2$ 。由此可知：點  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $P_3$  與  $P$  是五個相異點。令  $z_0 = x_0 + iy_0$ ，則依引理 4，必有二實數  $c_2$  與  $c_3$  使得

$$\frac{w_3 - z_0}{w_3 - z_2} = c_2 \times \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3},$$

$$\frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3} = c_3 \times \frac{z_3 - z_0}{z_3 - z_1}。$$

將後一式代入前一式，再將  $w_3 - z_2$  以  $(1/t_3)(t_3 - 1)(w_3 - z_1)$  代入，即得

$$\frac{w_3 - z_0}{w_3 - z_1} = -\frac{c_2 c_3 (1 - t_3)}{t_3} \times \frac{z_3 - z_0}{z_3 - z_1}。$$

由此可知： $[(w_3 - z_0)/(w_3 - z_1)] : [(z_3 - z_0)/(z_3 - z_1)]$  是一個實數。因為點  $A_1$ 、 $A_3$  與  $P_3$  不共線，所以，依引理 3，可知點  $A_1$ 、 $A_3$ 、 $P_3$  與  $P$  共圓。

(3) 設點  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  中恰有一點是頂點。

我們假設  $P_1 = A_2$  且  $P_2$  與  $P_3$  都不是頂點。設過點  $P_3$  而切直線  $A_2 A_3$  於點  $A_2$  的圓與圓  $A_2 A_3 P_2$  相交於另一點  $P(x_0, y_0)$ 。若  $P = P_2$  或  $P = P_3$ ，則  $\triangle A_1 P_2 P_3$  的外接圓當然通過點  $P$ 。設  $P \neq P_2$  且  $P \neq P_3$ 。因為前一圓不過點  $A_3$  而後一圓不過點  $A_1$ ，所以， $P \neq A_3$  且  $P \neq A_1$ 。因為前一圓過點  $A_2$  的切線通過後一圓的一相異點  $A_3$ ，所以，兩圓不會相切於點  $A_2$ 。於是， $P \neq A_2$ 。由此可知：點  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  與  $P$  是六個相異點。令  $z_0 = x_0 + iy_0$ ，則依引理 4，必有二實數  $d_2$  與  $d_3$  使得

$$\begin{aligned} \frac{w_3 - z_0}{w_3 - z_2} &= d_2 \times \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3}， \\ \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_3} &= d_3 \times \frac{w_2 - z_0}{w_2 - z_3}。 \end{aligned}$$

將後一式代入前一式，再將  $w_3 - z_2$  及  $w_2 - z_3$  分別以  $(1/t_3)(t_3 - 1)(w_3 - z_1)$  及  $(t_2/(t_2 - 1))(w_2 - z_1)$  代入，即得

$$\frac{w_3 - z_0}{w_3 - z_1} = \frac{d_2 d_3 (1 - t_2)(1 - t_3)}{t_2 t_3} \times \frac{w_2 - z_0}{w_2 - z_1}。$$

由此可知： $[(w_3 - z_0)/(w_3 - z_1)] : [(w_2 - z_0)/(w_2 - z_1)]$  是一個實數。因為點  $A_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  不共線，所以，依引理 3，可知點  $A_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  與  $P$  共圓。

(4) 設點  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  都不是頂點。

因為  $\triangle A_2 P_3 P_1$  與  $\triangle A_3 P_1 P_2$  的外接圓已有一交點  $P_1$ ，所以，它們必有另一交點  $P(x_0, y_0)$ 。我們先考慮  $P \neq P_1$  的情形。若  $P = P_2$  或  $P = P_3$ ，則  $\triangle A_1 P_2 P_3$  的外接圓當然通過點  $P$ 。設  $P \neq P_2$  且  $P \neq P_3$ 。因為  $\triangle A_3 P_1 P_2$  的外接圓不能通過點  $A_1$  與  $A_2$ ，所以， $P \neq A_1$  且  $P \neq A_2$ 。同理， $P \neq A_3$ 。於是，點  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  與  $P$  是七個相異點。依引理 3，可知必有二實數  $s_2$  與  $s_3$  使得

$$\begin{aligned} \frac{z_0 - w_3}{z_0 - w_1} &= s_2 \times \frac{z_2 - w_3}{z_2 - w_1} = s_2 \times \frac{(1 - t_3)(z_2 - z_1)}{t_3(z_2 - z_3)}， \\ \frac{z_0 - w_1}{z_0 - w_2} &= s_3 \times \frac{z_3 - w_1}{z_3 - w_2} = s_3 \times \frac{(1 - t_1)(z_3 - z_2)}{t_2(z_3 - z_1)}。 \end{aligned}$$

將兩式相乘，即得

$$\begin{aligned} \frac{z_0 - w_3}{z_0 - w_2} &= -s_2 s_3 \times \frac{(1-t_1)(1-t_3)(z_1 - z_2)}{t_1 t_2 (z_1 - z_3)} \\ &= -\frac{s_2 s_3 (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}{t_1 t_2 t_3} \times \frac{z_1 - w_3}{z_1 - w_2} . \end{aligned}$$

由此可知： $[(z_0 - w_3)/(z_0 - w_2)] : [(z_1 - w_3)/(z_1 - w_2)]$  是一個實數。因為點  $A_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  不共線，所以，依引理 3，點  $A_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  與  $P$  共圓，亦即： $\triangle A_1 P_2 P_3$  的外接圓通過點  $P$ 。

其次，考慮  $P=P_1$  的情形。所謂  $P=P_1$ ，乃是表示圓  $A_2 P_3 P_1$  與圓  $A_3 P_1 P_2$  相切於點  $P_1$ 。在兩圓的內公切線上任選異於  $P_1$  的一點  $T(u, v)$ ，並令  $w = u + iv$ ，則依引理 4，可知必有二實數  $r_2$  與  $r_3$  使得

$$\begin{aligned} \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w} &= r_2 \times \frac{z_2 - w_3}{z_2 - w_1} = r_2 \times \frac{(1-t_3)(z_2 - z_1)}{t_1(z_2 - z_3)} , \\ \frac{w_1 - w}{w_1 - w_2} &= r_3 \times \frac{z_3 - w_1}{z_3 - w_2} = r_3 \times \frac{(1-t_1)(z_3 - z_2)}{t_2(z_3 - z_1)} . \end{aligned}$$

將兩式相乘，即得

$$\begin{aligned} \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} &= -r_2 r_3 \times \frac{(1-t_1)(1-t_3)(z_1 - z_2)}{t_1 t_2 (z_1 - z_3)} \\ &= -\frac{r_2 r_3 (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}{t_1 t_2 t_3} \times \frac{z_1 - w_3}{z_1 - w_2} . \end{aligned}$$

由此可知： $[(w_1 - w_3)/(w_1 - w_2)] : [(z_1 - w_3)/(z_1 - w_2)]$  是一個實數。因為點  $A_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$  不共線，所以，依引理 3，點  $A_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  與  $P$  共圓，亦即： $\triangle A_1 P_2 P_3$  的外接圓通過點  $P$ 。||

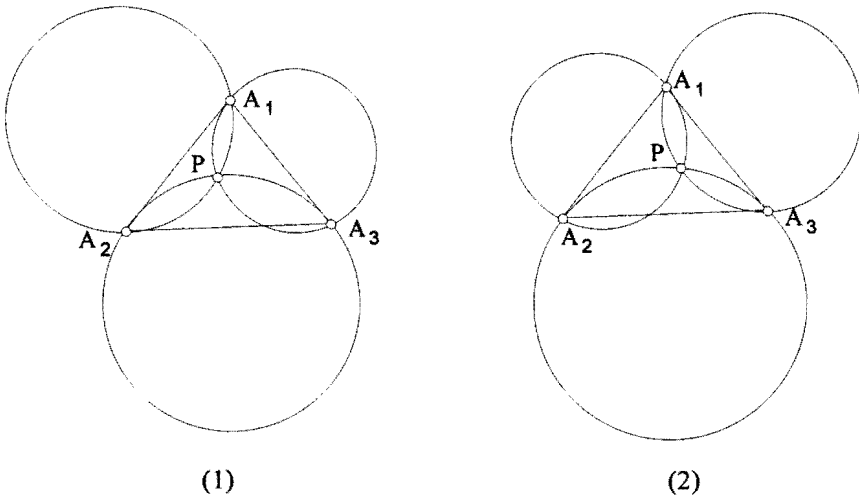


圖 2

在定理 2 的結果中，圓  $A_1 P_2 P_3$ 、圓  $A_2 P_3 P_1$  與圓  $A_3 P_1 P_2$  的交點  $P$  稱為  $\triangle P_1 P_2 P_3$  或三點集  $\{P_1, P_2, P_3\}$  對  $\triangle A_1 A_2 A_3$  的 Miquel 點， $\triangle P_1 P_2 P_3$  稱為點  $P$  對  $\triangle A_1 A_2 A_3$  的一個 Miquel 三角形，

而圓  $A_1P_2P_3$ 、圓  $A_2P_3P_1$  與圓  $A_3P_1P_2$  則稱為點  $P$  對  $\triangle A_1A_2A_3$  的一組 Miquel 圓。請注意：Miquel 三角形可能退化成三點共線的情形。

定理 2 證明中的第一種情形，可得出兩個具有特殊性質的點。當  $P_1=A_2$ 、 $P_2=A_3$  且  $P_3=A_1$  時，對應的三個圓分別是：過點  $A_1$  而與直線  $A_2A_3$  相切於點  $A_2$  的圓、過點  $A_2$  而與直線  $A_3A_1$  相切於點  $A_3$  的圓、過點  $A_3$  而與直線  $A_1A_2$  相切於點  $A_1$  的圓。這三個圓的交點稱為  $\triangle A_1A_2A_3$  的一個 Brocard 點 (Brocard point)，參看圖 2(1)。當  $P_1=A_3$ 、 $P_2=A_1$  且  $P_3=A_2$  時，對應的三個圓的交點是  $\triangle A_1A_2A_3$  的另一個 Brocard 點，參看圖 2(2)。因為過點  $A_1$  而與直線  $A_2A_3$  相切的圓不會通過與點  $A_1$  在直線  $A_2A_3$  異側的任何點，過點  $A_2$  而與直線  $A_3A_1$  相切的圓不會通過與點  $A_2$  在直線  $A_3A_1$  異側的任何點，過點  $A_3$  而與直線  $A_1A_2$  相切的圓不會通過與點  $A_3$  在直線  $A_1A_2$  異側的任何點，所以，兩個 Brocard 點都在  $\triangle A_1A_2A_3$  的內部。關於三角形的 Brocard 點及其相關的圖形，有著豐富的題材可供探討。

任意給定一個三點集  $\{P_1, P_2, P_3\}$ ，對應的 Miquel 點會位於那些可能的區域呢？這是一個既繁複又多變化的問題，本文不再討論，有興趣的讀者可自行加以探討。探討這個問題，目前已開發的一些幾何軟體可提供很好的幫助。

我們先完成引理 3 與引理 4 的證明，再討論有關 Miquel 定理的相關性質。

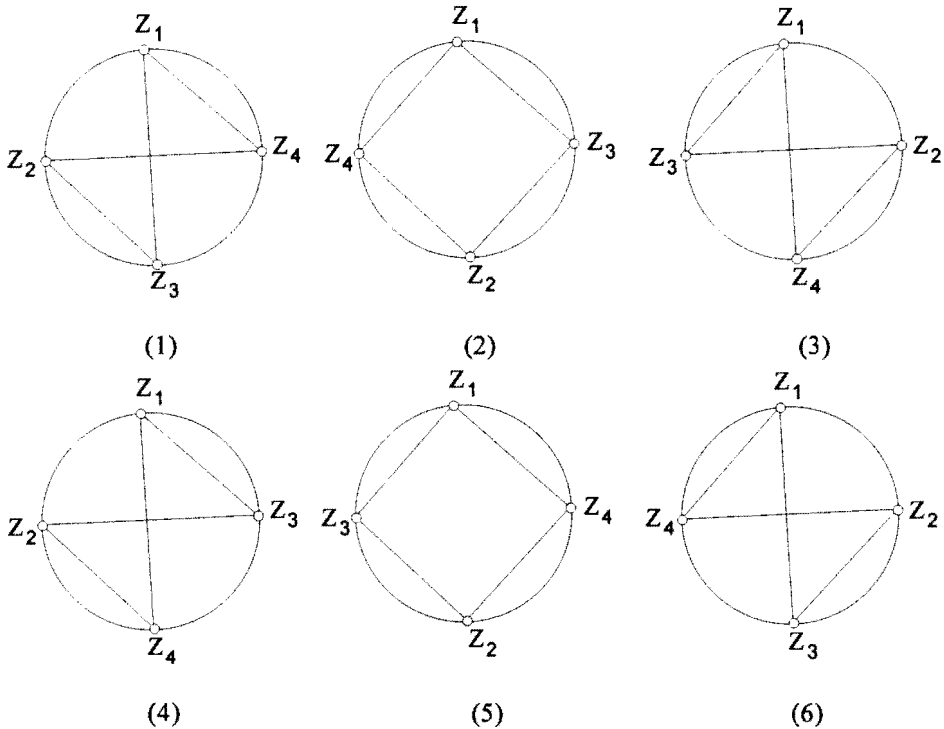


圖 3

引理 3 的證明：設  $Z_k(u_k, v_k)$  為直角坐標平面上四個相異點，令  $z_k = u_k + iv_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ 。

必要性：若  $Z_1, Z_2, Z_3$  與  $Z_4$  四點共圓，則此四點在圓上的相對位置可分成六種情形，如圖 3 所示。在圖 3(1)、圖 3(3)、圖 3(4)與圖 3(6)中，點  $Z_1$  與  $Z_2$  位於直線  $Z_3Z_4$  的同側，所以，有向角  $\angle Z_4Z_1Z_3$  與有向角  $\angle Z_4Z_2Z_3$  的方向相同且大小相等。於是，前者減去後者的差等於  $0^\circ$ 。另一方面，在圖 3(2)與圖 3(5)中，點  $Z_1$  與  $Z_2$  位於直線  $Z_3Z_4$  的異側，所以，有向角  $\angle Z_4Z_1Z_3$  與有向角  $\angle Z_4Z_2Z_3$  的方向相反且大小互補。於是，在圖 3(2)中，前者減去後者的差等於  $180^\circ$ ；而在圖 3(5)中，前者減去後者的差等於  $-180^\circ$ 。因為有向角  $\angle Z_4Z_1Z_3$  與有向角  $\angle Z_4Z_2Z_3$  分別為複數  $(z_1 - z_3)/(z_1 - z_4)$  與  $(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)$  的輻角，所以，由兩有向角之差等於  $0^\circ, 180^\circ$  或  $-180^\circ$  可知： $(z_1 - z_3)/(z_1 - z_4)$  與  $(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)$  的比值為實數，亦即： $[(z_1 - z_3)/(z_1 - z_4)] : [(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)]$  為一實數。

充分性：設  $[(z_1 - z_3)/(z_1 - z_4)] : [(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)]$  為一實數，並設點  $Z_1, Z_2$  與  $Z_3$  不共線。於是，有向角  $\angle Z_2Z_3Z_1$  不等於  $0^\circ, 180^\circ$  及  $-180^\circ$ 。因此， $(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)$  不是實數。因為  $[(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)] / [(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)]$  為一實數，所以， $(z_2 - z_4)/(z_1 - z_4)$  不是實數。於是，點  $Z_1, Z_2$  與  $Z_4$  不共線。另一方面，因為複數  $(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)$  與  $(z_1 - z_4)/(z_2 - z_4)$  的比值為實數，它們的輻角之差等於  $0^\circ, 180^\circ$  或  $-180^\circ$ 。由此可知：有向角  $\angle Z_2Z_3Z_1$  減去有向角  $\angle Z_2Z_4Z_1$  之差等於  $0^\circ, 180^\circ$  或  $-180^\circ$ 。若其差等於  $0^\circ$ ，則有向角  $\angle Z_2Z_3Z_1$  與有向角  $\angle Z_2Z_4Z_1$  的方向相同且大小相等。於是，點  $Z_3$  與  $Z_4$  位於直線  $Z_1Z_2$  的同側且  $\angle Z_2Z_3Z_1 = \angle Z_2Z_4Z_1$ 。依圓周角定理，可知點  $Z_1, Z_2, Z_3$  與  $Z_4$  四點共圓。若其差等於  $180^\circ$  或  $-180^\circ$ ，則因為有向角  $\angle Z_2Z_3Z_1$  與有向角  $\angle Z_2Z_4Z_1$  都小於  $180^\circ$  而且大於  $-180^\circ$ ，所以，有向角  $\angle Z_2Z_3Z_1$  與有向角  $\angle Z_2Z_4Z_1$  的方向相反且大小互補。於是，點  $Z_3$  與  $Z_4$  位於直線  $Z_1Z_2$  的異側且  $\angle Z_2Z_3Z_1 + \angle Z_2Z_4Z_1 = 180^\circ$ 。依圓內接四邊形的定理，可知點  $Z_1, Z_2, Z_3$  與  $Z_4$  四點共圓。||

引理 4 的證明：設  $Z_k(u_k, v_k)$  為直角坐標平面上四個相異點，令  $z_k = u_k + iv_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ 。

必要性：若點  $Z_4$  在過點  $Z_1$  而與直線  $Z_2Z_3$  相切於點  $Z_2$  的圓上，則此四點  $Z_1, Z_2, Z_3$  與  $Z_4$  的相對位置可分成四種情形，如圖 4 所示。在圖 4(1)與圖 4(4)中，有向角  $\angle Z_2Z_1Z_4$  與有向角  $\angle Z_3Z_2Z_4$  的方向相同且大小相等。於是，前者減去後者的差等於  $0^\circ$ 。另一方面，在圖 4(2)與圖 4(3)中，有向角  $\angle Z_2Z_1Z_4$  與有向角  $\angle Z_3Z_2Z_4$  的方向相反且大小互補。於是，在圖 4(2)中，前者減去後者的差等於  $-180^\circ$ ；而在圖 4(3)中，前者減去後者的差等於  $180^\circ$ 。因為有向角  $\angle Z_2Z_1Z_4$  與有向角  $\angle Z_3Z_2Z_4$  分別為複數  $(z_1 - z_4)/(z_1 - z_2)$  與  $(z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)$  的輻角，所以，由兩有向角之差等於  $0^\circ, 180^\circ$  或  $-180^\circ$  可知：兩複數  $(z_1 - z_4)/(z_1 - z_2)$  與  $(z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)$  的比值  $[(z_1 - z_4)/(z_1 - z_2)] : [(z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)]$  為一實數。



充分性：設  $[(z_1 - z_4)/(z_1 - z_2)] : [(z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)]$  為一實數。因為點  $Z_1$ 、 $Z_2$  與  $Z_3$  不共線，所以，有向角  $\angle Z_1 Z_2 Z_3$  不等於  $0^\circ$ 、 $180^\circ$  及  $-180^\circ$ 。於是， $(z_2 - z_3)/(z_2 - z_1)$  不是實數。因為  $[(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)] / [(z_2 - z_4)(z_1 - z_2)]$  為一實數，所以， $(z_1 - z_4)/(z_2 - z_4)$  不是實數。於是，點  $Z_1$ 、 $Z_2$  與  $Z_4$  不共線，亦即：點  $Z_1$ 、 $Z_2$  與  $Z_4$  共圓。其次，考慮圓  $Z_1 Z_2 Z_4$  過點  $Z_2$  的切線，設  $Z_5(u_5, v_5)$  為此切線上異於點  $Z_2$  的任意點，令  $z_5 = u_5 + iv_5$ 。因為點  $Z_4$  在過點  $Z_1$  而與直線  $Z_2 Z_5$  相切於點  $Z_2$  的圓上，所以， $[(z_1 - z_4)/(z_1 - z_2)] : [(z_2 - z_4)/(z_2 - z_5)]$  為一實數。因為  $[(z_1 - z_4)/(z_1 - z_2)] : [(z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)]$  也是實數，所以，此二實數的商  $(z_2 - z_3)/(z_2 - z_5)$  是一實數。由此可知：點  $Z_2$ 、 $Z_3$  與  $Z_5$  共線，亦即：點  $Z_4$  在過點  $Z_1$  而與直線  $Z_2 Z_3$  相切於點  $Z_2$  的圓上。||

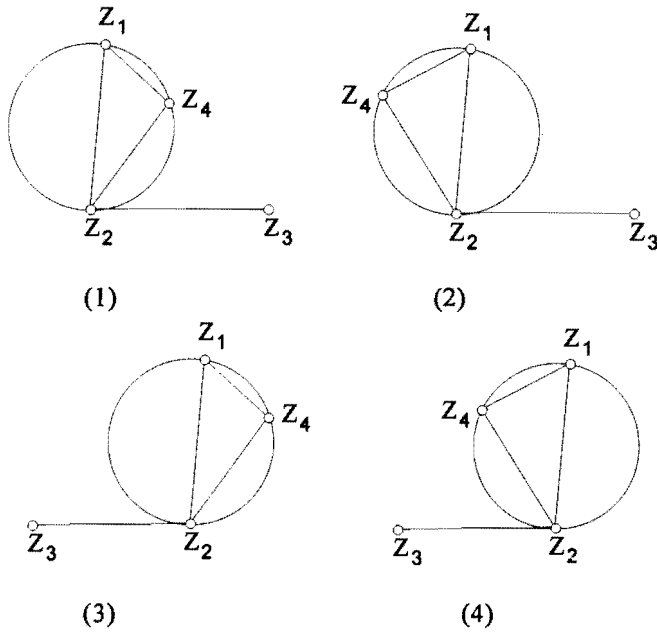


圖 4