第五章　宇宙絕熱微擾理論與熵的微擾

（一）絕熱微擾[3,5,6,7]

寫下考慮純量微擾的時空微小線段：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (1+2\phi)dt^2 - 2a(t)B_{,i}dx^i dt - a^2(t)[(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j$$
$$= a^2(\eta)\{(1+2\phi)d\eta^2 - 2B_{,i}dx^i d\eta - [(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j\}$$ ，

(5.1)

如果我們取縱向規範[1]，則(5.1)被改為

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (1+2\phi)dt^2 - 2a(t)B_{,i}dx^i dt - a^2(t)[(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j$$
$$= a^2(\eta)\{(1+2\phi)d\eta^2 - 2B_{,i}dx^i d\eta - [(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j\}$$ 。

(5.2)

在純量場上也加入微擾後，全部的純量場變成時空座標函數：

$$\varphi_I(t,\vec{x}) = \varphi_I(t) + \delta\varphi_I(t,\vec{x})$$。 (5.3)

和純量場相關的能量-動量張量也因而產生微擾項

$$T_{\mu\nu} = {}^{(0)}T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} = \sum_I \partial_\mu\varphi_I(t,\vec{x})\partial_\nu\varphi_I(t,\vec{x}) + g_{\mu\nu}\mathcal{L}(t,\vec{x})$$ 。 (5.4)

同樣地，在時空度規與愛因斯坦張量會變成

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x)$$、$$G_{\mu\nu} = {}^{(0)}G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}$$。 (5.5)

接著，我們展開愛因斯坦方程(4.7)到一階（線性）微擾項

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu}$$。 (5.6)

假設在無窮遠處微擾都趨近於零，我們將所有的微擾函數取傅立葉變換（Fourier transformation）

$f(t,\vec{x}) = f(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$。 (5.7)

由於我們只考慮到一階微擾，所有相關的微擾方程式都為線性，另外因為背景為均勻且均向，所以可將時間與空間取變數分離。仿照得到(4.5)的方法，由(4.3)及(4.4)且將度規和φ_I改成(5.2)及(5.3)，則可得到考慮物質一階微擾的 EOM：

$$-\delta\ddot{\varphi}_I - 3\frac{\dot{a}}{a}\delta\dot{\varphi}_I - \frac{k^2}{a^2}\delta\varphi_I - \sum_J V_{IJ}\delta\varphi_J + 2\Phi\ddot{\varphi}_I + \dot{\varphi}_I[6\frac{\dot{a}}{a}\Phi + \dot{\Phi} + 3\dot{\Psi}] = 0。 \quad (5.8)$$

利用(4.5)我們可把(5.8)化簡為

$$\delta\ddot{\varphi}_I + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta\dot{\varphi}_I + \sum_J(\frac{k^2}{a^2}\delta_{IJ} + V_{IJ})\delta\varphi_J = -2V_I\Phi + \dot{\varphi}_I[\dot{\Phi} + 3\dot{\Psi}]。 \quad (5.9)$$

跟得到(4.9)、(4.10)一樣，我們把(5.2)代入愛因斯坦方程，再加上(5.4)就可得到下面四個方程式：

1. $\delta G_{00} = \delta T_{00}$

$$\Rightarrow \frac{2k^2}{a^2}\Psi + \frac{6\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \frac{6\dot{a}^2}{a^2}\Phi = -\sum_I(\dot{\varphi}_I\delta\dot{\varphi}_I + V_I\delta\varphi_I) + \dot{\varphi}_I^2\Phi， \quad (5.10)$$

2. $\delta G_{0i} = \delta T_{oi}$

$$\Rightarrow \frac{2}{a^2}\partial_i\dot{\Psi} + \frac{2\dot{a}}{a^3}\partial_i\Phi = \sum_I\frac{\dot{\varphi}_I}{a^2}(\partial_i\delta\varphi_I) \Rightarrow \dot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi = \frac{1}{2}\sum_I\dot{\varphi}_I\delta\varphi_I， \quad (5.11)$$

3. $\delta G_{ii} = \delta T_{ii}$　這裡的k^2由∇^2給出，k_i^2則是由$\partial_i\partial_i$給出（不用取相加）

$$\Rightarrow 2\ddot{\Psi} + \frac{(k^2 - k_i^2)}{a^2}(\Psi - \Phi) + \frac{\dot{a}}{a}(2\dot{\Phi} + 6\dot{\Psi}) + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}\Phi + \frac{4\ddot{a}}{a}\Phi， \quad (5.12)$$
$$= \sum_I(\dot{\varphi}_I\delta\dot{\varphi}_I - V_I\delta\varphi_I) - \dot{\varphi}_I^2\Phi$$

4. $\delta G_{ij} = \delta T_{ij}$，$i \neq j$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}\partial_i\partial_j(\Psi-\Phi)=0\Rightarrow \Psi=\Phi\,, \tag{5.13}$$

由獨立變數與相關的方程式來看，我們一共有φ_I、Φ、Ψ這三個純量微擾的獨立變數，因此我只需要三個式子就可以解。但目前共有(5.9)～(5.13)這五個方程式，可想而知有兩式是可以被另外三式所組合而成。由(5.13)，可得到前面所預告的結果，兩個規範不變的純量微擾Φ、Ψ，事實上是同一個。因此我們利用(5.13)把(5.9)～(5.12)化簡為：

1.(5.9)

$$\Rightarrow \delta\ddot{\varphi}_I+3H\delta\dot{\varphi}_I+\sum_J\left(\frac{k^2}{a^2}\delta_{IJ}+V_{IJ}\right)\delta\varphi_J=4\dot{\Phi}\dot{\varphi}_I-2V_I\Phi\,, \tag{5.14}$$

2.(5.10)再代入（3-9）

$$\Rightarrow -3H\Phi-\frac{k^2}{a^2}\Phi=\sum_I\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_I\delta\dot{\varphi}_I+V_I\delta\varphi_I\right)+V(\varphi)\Phi\,, \tag{5.15}$$

3.(5.11)

$$\Rightarrow \dot{\Phi}+H\Phi=\frac{1}{2}\sum_I\dot{\varphi}_I\delta\varphi_I\,, \tag{5.16}$$

4.(5.12)再代入(4.11)

$$\Rightarrow \ddot{\Phi}+4H\dot{\Phi}+\left(3H^2+\dot{H}\right)\Phi=\sum_I\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_I\delta\dot{\varphi}_I-V_I\delta\varphi_I\right)。 \tag{5.17}$$

不過，若我們把(5.16)對t做一次微分後，先用(4.5)取代$\ddot{\varphi}_I$，再用(5.16)取代$\frac{1}{2}\sum_I\dot{\varphi}_I\delta\varphi_I$，所得結果即(5.17)，由此可知(5.17)不是獨立的。這時獨立的變數只剩下$\delta\varphi_I$（N個）、Φ，而可用的方程式

還有(5.14)～(5.16)這三式（共$N+2$個方程）。之後我們會發現這三式在一些近似條件之下可以化簡成只有兩個變數的微分方程(7.6)與(7.7)。

為了讓整個方程式滿足規範不變，我們必須先找出$\delta\varphi_I$對應的規範不變形式。考慮在（3+1）維時空下某個純量場，如果這個純量場可以由只與時間有關的背景值和一階微擾合成

$$q(t,\vec{x}) = q_0(t) + \delta q(t,\vec{x})，\qquad (5.18)$$

在(3.3)的座標變換（$\tilde{x}^\mu = x^\mu + f^\mu(x)$，$f^\mu \ll 1$）下，純量場

$$q(x^\mu) = \tilde{q}(\tilde{x}^\mu) = \tilde{q}(x^\mu + f^\mu) = \tilde{q}(x^\mu) + \frac{\partial\tilde{q}(x^\mu)}{\partial x^\nu} f^\nu$$
$$= \tilde{q}(x^\mu) + f^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}[\tilde{q}_0(t) + \delta\tilde{q}(x^\mu)] = \tilde{q}(x^\mu) + \dot{\tilde{q}}_0(t) f^0 \quad 。$$

將其代入(5.18)且利用背景純量場在座標變換下不變$\tilde{q}_0(t) = q_0(t)$，可得到

$$\delta\tilde{q}(x^\mu) = \delta q(x^\mu) - \dot{q}_0(t) f^0。\qquad (5.19)$$

由於$\varphi_I(x^\mu)$也是屬於這類的純量場，因此可利用(3.14)的來取代f^0

$$\delta\tilde{\varphi}_I = \delta\varphi_I - \dot{\varphi}_I\left(\frac{\tilde{\psi}}{H} - \frac{\psi}{H}\right) \Rightarrow \delta\tilde{\varphi}_I + \dot{\varphi}_I\frac{\tilde{\psi}}{H} = \delta\varphi_I + \dot{\varphi}_I\frac{\psi}{H}，$$

如此我們便可得出$\delta\varphi_I$對應的規範不變形式[8]：

$$\delta\varphi_I^{(g-i)} = Q_I = \delta\varphi_I + \frac{\Phi}{H}\dot{\varphi}_I。\qquad (5.20)$$

上式已經取了縱向規範的條件$\psi = \Phi$。接著，將(5.15)中的$\delta\varphi_I$用Q_I取

代，過程中$\frac{1}{2}\dot{\varphi}_I^2$用(4.11)取代、$V$用(4.12)取代、$\ddot{\varphi}_I + V_I$用(4.5)取代，整理後可得到

$$-\frac{k^2}{a^2}\Phi-\left(3H^2+\dot{H}\right)\left\{\left(\frac{\Phi}{H}\right)^{\bullet}+\Phi\right\}=\sum_I\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_I\dot{Q}_I+V_IQ_I\right)。\qquad(5.21)$$

將(5.16)中的$\delta\varphi_I$用Q_I取代，過程中$\frac{1}{2}\dot{\varphi}_I^2$用(5.11)取代，整理後可得到

$$H\left\{\left(\frac{\Phi}{H}\right)^{\bullet}+\Phi\right\}=\frac{1}{2}\sum_I\dot{\varphi}_IQ_I。\qquad(5.22)$$

接著利用(5.22)把(5.21)變成

$$-\frac{k^2}{a^2}\Phi=\sum_I\frac{1}{2}\left(\frac{3H^2+\dot{H}}{H}\dot{\varphi}_IQ_I+\dot{\varphi}_I\dot{Q}_I+V_IQ_I\right)。\qquad(5.23)$$

較複雜的是轉換(5.14)，我們把推導過程留在[附錄 B.1]，所得結果為

$$\ddot{Q}_I+3H\dot{Q}_I+\frac{k^2}{a^2}Q_I+\sum_JM_{IJ}Q_J=0，\qquad(5.24)$$

其中

$$M_{IJ}=V_{IJ}-\frac{1}{a^3}\left(\frac{a^3}{H}\dot{\varphi}_I\dot{\varphi}_J\right)^{\bullet}=V_{IJ}+\frac{1}{H}\left[\left(\frac{\dot{H}+3H^2}{H}\right)\dot{\varphi}_I\dot{\varphi}_J+V_I\dot{\varphi}_J+\dot{\varphi}_IV_J\right]。\qquad(5.25)$$

我們已經將(5.14)～(5.16)改成(5.22)～(5.24)，而且這三式中都是規範不變的變數。我們再引進兩個規範不變的變數

$$\kappa=\sum_I\dot{\varphi}_IQ_I、\mu=\sum_IV_IQ_I。\qquad(5.26)$$

先把(5.26)代入(5.22)得到

$$\kappa = 2H\left\{\left(\frac{\Phi}{H}\right)^{\bullet} + \Phi\right\}。 \tag{5.27}$$

再把(5.26)代入(5.23)且用(4.5)整理，得到

$$\Phi = -\frac{a^2}{2k^2}\left\{\dot{\kappa} + \left(\frac{6H^2 + \dot{H}}{H}\right)\kappa + \mu\right\}。 \tag{5.28}$$

利用(5.27)與(5.28)，可將μ用Φ來表示

$$\mu = -\frac{k^2}{a^2}\Phi - \left(6H^2 - 4\dot{H} - \frac{\ddot{H}}{H}\right)\Phi - 7H\dot{\Phi} - \ddot{\Phi}。 \tag{5.29}$$

因此(5.22)、(5.23)就等價於(5.27)、(5.29)。

接下來我們要找出κ、μ與幾個重要物理量的關係。首先，同步曲率微擾（comoving curvature perturbation）定義為

$$\zeta \equiv \psi + \frac{H}{\rho + \pi}\sum_I \dot{\varphi}_I \delta\varphi_I = -\frac{H^2}{\dot{H}}\left\{\left(\frac{\Phi}{H}\right)^{\bullet} + \Phi\right\}, \tag{5.30}$$

其中$\sum_I \dot{\varphi}_I \delta\varphi_I$是來自於$\delta T^i_i$。在多重暴漲子的情況下，我們可得到[9]

$$\zeta = -\frac{H}{2\dot{H}}\sum_I \dot{\varphi}_I Q_I = -\frac{H\kappa}{2\dot{H}}。 \tag{5.31}$$

把ζ拿來和另一個物理量${}^{(3)}R$做比較，${}^{(3)}R$指的是能量密度固定的三維超表面曲率。在前面所提到的座標變換下，由(3.3)、(3.14)、(4.9)、(5.19)我們有

$t \to \tilde{t} = t + f^0$， $\psi \to \tilde{\psi} = \psi + f^0 H$， $\rho \to \tilde{\rho} = \rho - f^0\dot{\rho}$。

在能量密度ρ加上微擾$\delta\rho$，$(\rho + \delta\rho) \to \tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho} = (\rho + \delta\rho) - f^0\dot{\rho}$。如果選擇適當的座標系$f^0 = \delta\rho/\dot{\rho}$，就可讓$\rho$在這三維超平面$\Sigma$上維持定

值。因此在Σ上可得

$$\psi_{\Sigma}=\psi+\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}H=\zeta-\frac{1}{3\dot{H}}\nabla^2\left\{\psi+H\left(a^2\dot{E}-aB\right)\right\}=\zeta-\frac{1}{3\dot{H}}\nabla^2\Psi\,,\qquad(5.32)$$

其中$\nabla^2=\partial_i^2/a^2$且推導過程中有用到(3.15)。在這裡有兩點要注意，第一：(5.32)只是由純量微擾(3.4)出發而得到。第二：(5.32)是在三維超平面Σ上成立，因此我們還可以再選縱向規範，故$\Psi=\Phi$。然後Σ的曲率可表示為

$${}^{(3)}R=4\nabla^2\psi_{\Sigma}\,。\qquad(5.33)$$

把(5.32)與(5.33)都取空間部分的傅立葉轉換，並且省略掉下標k

$$\psi_{\Sigma}=\zeta+\frac{k^2}{3\dot{H}}\Phi\,,\ {}^{(3)}R=-4\frac{k^2}{a^2}\psi_{\Sigma}=-4\frac{k^2}{a^2}\left(\zeta+\frac{k^2}{3\dot{H}}\Phi\right)。\qquad(5.34)$$

另外，在長波長極限下$k\ll aH$會有 $\psi_{\Sigma}\simeq\zeta$。總結這部分的討論，我們找到了ζ、ψ_{Σ}、${}^{(3)}R$與Φ的關係。最後，由(5.28)可更進一步用κ和μ來表示這些重要的物理量。

（二）熵的微擾

先寫下熵總和的微擾[10]

$$S\equiv H\left(\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}-\frac{\delta p}{\dot{p}}\right),\qquad(5.35)$$

從下面的分析可看出這定義是無因次且滿足規範不變性。考慮多重暴漲子的情形，得到

$$S=\frac{2\left(\dot{V}+3H\sum_I\dot{\varphi}_I^2\right)\delta V+2\dot{V}\sum_I\dot{\varphi}_I\left(\delta\dot{\varphi}_I-\dot{\varphi}_I\Phi\right)}{3\left(\dot{V}+3H\sum_I\dot{\varphi}_I^2\right)\sum_J\dot{\varphi}_J^2}H\left(\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}-\frac{\delta p}{\dot{p}}\right)$$
$$=-\frac{2\left(\ddot{H}+3H\dot{H}\right)\mu+\left(\ddot{H}+6H\dot{H}\right)\left\{\dot{\kappa}+\kappa\left(\dot{H}+3H^2\right)/H\right\}}{6\dot{H}\left(\ddot{H}+3H\dot{H}\right)}\text{。}\quad(5.36)$$

在長波長極限下，可發現[6, 7, 10, 11]

$$\dot{\zeta}\simeq\frac{\dot{p}}{\rho+p}S\text{。}\quad(5.37)$$

如果先取下一章要討論的慢滾條件，則(5.36)近似為

$$S=-\frac{\mu+\dot{\kappa}+3H\kappa}{3\dot{H}}\text{。}\quad(5.38)$$