

第四章 《測圓海鏡分類釋術》與明代算書開方法的比較

在明朝較著名的算術書除顧應祥《測圓海鏡分類釋術》外，尚有吳敬《九章算法比類大全》、王文素《算學寶鑑》、周述學《神道大編曆宗算會》及程大位《算法統宗》，故於本章中將《測圓海鏡分類釋術》與其他算書開方法一一作比較。

第一節 吳敬《九章算法比類大全》中的開方法

一、吳敬的生平與著作

《九章算法比類大全》，¹又稱《九章詳注比類算法大全》共十一卷，明景泰元年（1450）吳敬撰。吳敬，字信民，號主一翁，明代杭州府仁和縣（今杭州市）人，「天資穎達，而博通乎算數」，²是當時錢塘一帶遠近聞名的數學家。他的生平不詳，資料不見《明史》等明代主要史書，相關史料亦甚少，只能靠著《九章算法比類大全》一書之中的片斷資料瞭解其生平，項麒為本書所撰序：

杭郡仁和之吧有良士，吳氏號主一翁者，天資穎達而博通乎算數，凡吾浙藩田疇之饒衍、糧稅之滋多與夫戶口之浩繁，載諸版籍之間者，皆于翁手是資，則無遺而無爽焉。一時藩臬重臣皆禮遇而信託之者，有由然矣。³

由此可知，吳敬曾經擔任過一些浙江地方官僚的財稅、會計工作。由於他出色的工作，深得這些人的禮遇與信任。而他所著之《九章算法比類大全》，對明朝後期的數學發展影響很大，譬如顧應祥的《勾股算術》有很大的篇幅，就與本書的卷九的〈勾股〉有關，以及顧應祥「開方法」的命名受到其書中卷十「各色開方法」的影響。

關於此書的寫作過程，吳敬以其長期出入官府的便利條件，經過多年的搜求，始終久未如願，最後總算獲得一部《九章算術》的手抄本。⁴在聶大年為《九章演算法比類大全》所做的序中提到：

¹筆者本文所根據的《九章算法比類大全》版本，為郭書春主編的《中國科學技術典籍通彙，數學》卷（二）所收《九章算法比類大全》。

²引自項麒，〈《九章算法比類大全》序〉，《九章算法比類大全》。

³同上

⁴此部手抄本可能是楊輝的《詳解九章算法》，參看下頁的卷九「勾股」內容分析。

十書今已無傳，惟《九章》之法僅存。⁵

吳敬自序亦云：

……予以草茅末學，留心算數，蓋亦有年，曆訪《九章》全書，久之未見。一日偶獲寫本，其目二百四十有六，內方田、粟米、衰分、不過乘除互換，人皆易曉。若少廣之截多益少，開平方圓，商功之修築堆積，均輸之遠近勞費，其法頗雜。至於盈朒、方程、勾股，問題深隱，法理難明，古法混淆，布算簡略，初學無所發明，由是通其述者鮮矣。⁶

可知道吳敬認為其中盈朒、方程、勾股部分「題問深隱，法理難明，古法混淆，布算簡略」，導致對初學的人不容易理解。因此，他就「采輒舊聞，分章詳注，補其遺闕，芟其紕繆，粲然明白，如指諸掌。前增乘除開方起例之法，中添詳比類、歌詩之術，後續鎖積演段還源之方，增千二百題。通古舊題，總千四百餘問，數十萬言，厘為十卷，題曰《九章詳注比類演算法大全》積功十年，才克脫稿。」⁷

在明代，除了《永樂大典》收有一些算術書的抄本外，大部分的算書都沒有流傳。為了振興古算，吳敬把他所編寫的所有應用問題按照《九章算術》的方田、粟米、衰分，少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股分類，每章則將一般方法置於卷首，然後依次分「古問」、「比類」、「詞詩」三項列出若干應用題及其解法。在古問方面，引自楊輝《詳解九章算法》，共有二百五十問，⁸其中有十四問出自賈憲。吳敬對這些問題大都作了不同程度的改寫，並在方法與題目的編排上作了一些的變動。在比類方面，是附加的同類問題或用古問的方法可以解決的問題，其中涵蓋許多應用問題，同時也保存了一些史料。此外，許多題目是結合當時人們生產、生活實踐的應用問題，有的反映了江南明中葉以後，與商業發展有關的應用數學問題。在詩詞部分，則是以詩、詞、歌訣形式呈現的問題。以詩詞設題，

⁵ 聶大年，〈《九章算法比類大全》序〉，《九章算法比類大全》。

⁶ 吳敬，〈《九章算法比類大全》序〉，《九章算法比類大全》。

⁷ 同上。

⁸ 參見郭書春，〈《九章算法比類大全提要》〉，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁1。

朗朗上口，增添了人們的興趣也便於記憶。第十卷為「各色開方」，列舉各種開方法，包括了開四、五、六次方及帶從開方的程式。全書十卷總共列題一千四百多道問題。⁹

二、《九章算法比類大全》中的開方法

在《九章算法比類大全》「乘除開方起例」中，吳敬先介紹開平方法：

一百以十定無疑 一千三十有零餘 九千九九不離十 一萬統為一百推
商實積張為下法 下法亦置上商除 除訖再依法布列 積盡方為數已知

及開立方法：

一千商實定無疑 三萬統為三十餘 九十九萬不離十 百萬方為一百推
下法自乘為隅法 三乘隅法作方除 三乘上商為廉法 退而除盡數統知

他以詩詞說明如何開平方及開立方，而在第十卷再說明各色開方法，以下就卷十「各色開方」的內容先做分析：

內容	題數	內容	題數
開三乘方	一問	帶益從方從廉開立方	一問
開四乘方	一問	帶益從廉添積開三乘方	一問
開五乘方	一問	方田三段牧米開鎖方	一問
帶從開平方	十三問	金銀銅三色開鎖方	一問
帶減從開平方	三問	常和三色酒共賣鈔開鎖方	一問
帶減積開平方	二問	方田圓田直田環田梯田共五事開鎖方	一問
帶從負隅減從開平方	四問		
方法從方乘減積除實開平方	六問	方田三段直田二段圓田一段共六事開鎖方	一問
從方益隅添實開平方	二問		
帶從減積開平方	二問	圓田直田各一段內各有方直池開	一問

⁹ 王連發，《勾股算學家—明顧應祥及其著作研究》(台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班論文，2002年)頁47-49。

減從翻法開平方	一問	鎖方	
負隅減從翻法開平方	一問	直田二段池古開鎖方	一問
帶從廉開平方	一問	大小立方三段開鎖方	一問
益隅開平方	一問	平方立方開鎖方	二問
帶從隅益積開平方	一問	大小立方平方開鎖方	一問
帶從方廉開平方	一問	方圓堦壙立方大小平方立圓共六	一問
減積隅筭益從添實開平方	一問	事開鎖方	
帶從方廉開立方	十九問	堦壙立方平方立圓陽馬鱉臚共一	一問
帶益從方廉隅筭開立方	十四問	十事開鎖方	
帶從廉開立方	二問		

從上表中可知《九章算法比類大全》第十卷中，除了開平方、開立方、開三乘方、開四乘方及開五乘方外，另一重點是開鎖方，書中並未解釋何謂開鎖方，但從題目中可發現其條件較開方複雜許多，且開鎖方亦是利用各色開方法解題，故只需討論其開方法即可。而吳敬開方法的命名法中，「從」為一次項的係數；「帶減從」為以二次項減一次項之意；「帶減積」則為先以從減積的意思；「負隅」是指最高次項係數為負數，但「負隅」均與「減從」同時出現，就代表以隅減從，則「隅」為負，「從」為正；「添實」、「益積」及「添積」都代表原積不減反增之意。因而造成各色開方法。

再來我們將比較《九章算法比類大全》與《測圓海鏡分類釋術》的各種開方法：

九章算法比類大全	現代符號方程式	測圓海鏡分類釋術
開三乘方	$x^4=s$	
開四乘方	$x^5=s$	
開五乘方	$x^6=s$	
帶從開平方	$x^2+bx=s$	帶從開平方

帶減從開平方	$-x^2+bx=s$	減從開平方
帶減積開平方	$x^2=s-bx$	
帶從負隅減從開平方	$-ax^2+bx=s$	負隅減從開平方
方法從方乘減積除實開平方	$x^2+ax=s-b(x+a)$	
從方益隅添實開平方	$bx=s+x^2$	添積帶從開平方
帶從減積開平方	$x^2-bx=s$	以從減法開平方
減從翻法開平方	$-x^2+bx=s$ (出現負積)	減從翻法開平方
負隅減從翻法開平方	$-ax^2+bx=s$ (出現負積)	負隅減從翻法開平方
帶從廉開平方	$ax^2=s$	
益隅開平方	$x^2=s+bx$	以從添積開平方
帶從隅益積開平方	$ax^2=s+bx$	負隅以從添積開平方
帶從方廉開平方	$ax^2+bx=s$	負隅帶從開平方
減積隅筭益從添實開平方	$ax^2=s+bx$ (s為減積所得的實)	負隅以從添積開平方
帶從方廉開立方	$x^3+bx^2+cx=s$	帶從方廉開立方
帶益從方廉隅筭開立方	$ax^3+bx^2+cx=s$	負隅帶從方廉開立方
帶從廉開立方	$x^3+bx^2=s$	帶從廉開立方
帶益從方從廉開立方	$x^3+bx^2=s+cx$	帶從廉以從方添積開立方
帶益從廉添積開三乘方	$x^4=s+bx^3$	

從上表的比較中，可以推測顧應祥在《測圓海鏡分類釋術》中將開方法的分類法，是從吳敬的《九章算法比類大全》的第十卷各色開方法而來的，但其命名中仍有些許的不同，如「負隅」在《九章算法比類大全》中是最高次方係數為負數，但在《測圓海鏡分類釋術》代表的只是最高次方係數為不是一的正整數；《九章算法比類大全》中的「帶從方廉開平方」將最高二次項的係數稱為「廉」，但在《測圓海鏡分類釋術》中最高次不是二次的時候，才將二次項係數稱為「廉」或「從廉」。而從運算過程中出現「負積」，則兩書均稱為「翻法」。

而在解決開方法上，雖然吳敬解出了開四乘方、五乘方，但在其他開三乘方及開立方上，就不如顧應祥的多元化了。我們從兩書的開方法比較中得知，顧應祥將開方法命名的方法是從吳敬的書中學習到的，且他將原來的開立方法及開三乘方法推廣出更多變化了，這說明了顧應祥的開方法較吳敬更進一步。

第二節 王文素《算學寶鑑》中的開方法

一、王文素的生平與著作

王文素字尙彬，山西汾州人。成化年間(1465—1487)隨父林至河北的饒陽經商。自幼涉獵書、史、諸子百家，尤長演算法。武邑杜瑾(字良玉)也長演算法，因公至清河，遇文素于旅邸，發現文素演算法出眾，看到所著《通證古今算學寶鑑》三十餘卷，深為讚賞。宋楊輝、明金陵杜文高、江寧夏源澤、金台金來朋等人的演算法書固然不錯，但藏頭露尾，難於領悟。王的演算法，可以靈活應用，且編成歌訣，便於學習。杜瑾願意出資刻版，以廣流傳。

王文素的《自序》作於十一年後的嘉靖三年(1524)。說明全書四十一卷。外附詩詞三百餘問，其時王文素設蒙館于饒陽西城課徒為業。從《集算詩》：「身世飄蓬近六旬，留心學算已年深，」知時已年近六十。自序中沒有提到杜瑾資助出版一事，而說：「欲刻於版，奈乏工資，不獲遂願。」由此可知此本是按文素經過十一年增訂補充的稿本抄出的。書中有不少抄錯的字，看來此本未經文素過目。

依據上述的年份推算，王文素生於成化元午(1465)前後。寶序稱王文素「從父林商于真定饒陽。」又說王文素「自幼涉獵書、史、諸子百家，」而本書還有詩、詞、歌訣數百首，說明王文素是在汾陽學習了一些年，不得已棄儒就商的。成化二十年(1484)山陝大旱、遭災，人相食。王文素從父外出經商，可能就在二十歲前後。寶序對王文素之父直呼其名為“林”而不諱，則王林並不富有。文素長於演算法，可能在家鄉已熟習珠算、籌算、一掌經之類的基本演算法，甚或讀過宋楊輝的《詳解九章演算法》、《乘除通變本末》、《續古摘奇演算法》，元劉汝楷的《如積釋鎖》(王著第三十九卷有“鎖積開立方”)，何子平的《詳明演算法》(第一卷小數名注中引用了何說)等。王文素經商之後，由於工作上的需要和個人的

學習興趣，自然會讀到更多的數學書，在實踐中發現了許多簡捷通變的演算法，同時發現書籍中不僅有印刷錯誤，而且原著本身有的就存在問題。於是王文素逐一鑽研論證，「推其所當者述之，誤者改之，繁者刪之，缺者補之，亂者理之，斷者續之，複增乘除圖草、定位式樣、開方演段、捷徑成術，」寫成這部巨著，稱為《新集通證古今算學寶鑒》。全書四十一卷、二百條(實際二百零三條)，三百三十七訣(歌訣)，一千二百六十七問(例題)。(參見附錄《自序》、《集算詩》。)此書由總而分，由易而難，是一部有系統的教材。特點是提出了當時出版物(包括古籍)中的許多錯誤，所以也是一部有價值的數學參考書。¹⁰

二、《算學寶鑒》中的開方法

《算學寶鑒》中的開方法主要分布在第十六卷及第三十一卷至第四十一卷，因為內容繁多，下表只列出出現的開方法與《測圓海鏡分類釋術》作比較：

算學寶鑑	分類釋術	算學寶鑑	分類釋術
$x^2=s$		$x^5=s$	
$x^2+bx=s$	帶從開平方	$x^6=s$	
$x^2-bx=s$	以從減法開平方	$x^7=s$	
$x^2=s+bx$	以從添積開平方	$x^8=s$	
$-x^2+bx=s$	減從開平方	$ax^4=s$	
$bx=s+x^2$	添積帶從開平方	$ax^5=s$	
$-ax^2+bx=s$	負隅減從開平方	$x^4+bx^3+cx^2+dx=s$	
$ax^2+bx=s$	帶從負隅開平方	$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex=s$	
$ax^2=s$	負隅開平方	$x^4-bx^3+cx^2-dx=s$	
$x^3-bx^2-cx=s$		$x^4+cx^2=s+bx^3+dx$	
$x^3+bx^2+cx=s$	帶從方廉開立方	$-ax^4+bx^3+cx^2=s$	

¹⁰ 〈汾陽數學家王文素及其巨著《新集通證古今算學寶鑒》〉，趙擊寰，汾州鄉情，2005-02-01。網頁 www.sx.xinhuanet.com/dfzx/zfwz/2005-02/01/content_3669305.htm。

$x^3 - cx = s$		$-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = s$	
$x^3 - bx^2 + cx = s$	帶從方廉以廉減從開立方	$x^4 + bx^3 + cx = s$	
$x^3 + cx = s + bx^2$	帶從方廉以廉添積開立方	$x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex = s$	
$x^3 + bx^2 - cx = s$		$x^9 + bx^8 + cx^7 + dx^6 + ex^5 + fx^4 = s$	
$ax^3 + bx^2 + cx = s$	帶從方廉負隅開立方	$x^4 - cx^2 + dx = s$	
$-ax^3 + bx^2 + cx = s$	負隅減從開立方	$x^4 + dx = s + cx^2$	
$ax^3 - bx^2 + cx = s$	帶從廉負隅以廉減從開立方	$x^4 + bx^2 = s$	
$x^3 + bx^2 = s$	帶從廉開立方	$x^4 + bx^3 = s$	
$ax^3 + bx^2 = s$	負隅帶從廉開立方	$x^5 + bx^4 + cx^3 = s$	
$ax^3 + cx = s$	負隅帶從方開立方	$ax^4 + bx^3 + cx^2 = s$	
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = s$	帶從方負隅開三乘方	$ax^4 + bx^3 = s$	
$x^4 = s$		$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx = s$	

從上表中可知，王文素《算學寶鑑》中的開方法比顧應祥的開方法多，但卻很少將其命名，必須從其運算中，才知道其係數是正或負；而其中處理的次方也較顧應祥的高，甚至有九次方程式，這是顧應祥所不及之處，但因《算學寶鑑》在明朝沒有刊行及流傳，所以顧應祥可能為接觸到該書，從而無法學習到更高次方程式的解法。

第三節、周述學《神道大編曆宗算會》中的開方法

一、周述學生平及其著作

《神道大編曆宗算會》，明朝周述學撰。周述學，字繼志，號雲淵子，山陰（今浙江紹興）人，生、卒時間均不詳。他學問淵博，對天文、曆法、數學、兵法以及航海術等都有研究。並曾經教授曆法給唐順之，¹¹也曾幫助胡宗憲抗禦倭

¹¹ 唐鼎元，《唐荆川先生年譜》卷三，頁 23，引述黃梨洲撰〈周雲淵傳〉謂「荆川曆學受之雲淵」。

寇，「述學不殫出入狂濤，卒成海上之功。」¹²

《神道大編曆宗算會》是一本數學著作，共有八冊並分成十五卷，分別為：第一冊卷一「入算」，卷二「子母分法」；第二冊卷三「勾股」；第三冊卷四「開方-平方」，卷五「開方-立方」，卷六「平圓立圓截方」；第四冊卷「弧矢經補上」，卷八「弧矢經補下」；第五冊卷九「分法-互分」；第六冊卷十「分法-總分」、卷十一「分法-各分」；第七冊卷十二「積法-平積」；第八冊卷十三「積法-立積」，卷十四「積法-隙積鎔積」、「算經聖賢姓氏」，卷十五「歌訣」。從標題來看，《神道大編曆宗算會》一書最大的特色是不用「九章」名目分類，而按照計算方法的原理來分類。

《神道大編曆宗算會》在第十四卷後附了「算會聖賢姓氏」，所列「聖賢」包括了伏羲、黃帝、隸首、商高、周公、劉徽、張倉、唐都、洛下閎、甄鸞、趙爽、祖沖之、賈憲、李淳風、邊岡、張丘建、劉恭、楊輝、李冶、松庭、郭守敬、吳敬、顧箬溪及唐荊州，¹³以及其相關著述。這部分對我們認識周述學所能學到的數學知識有極大的幫助。

二、《神道大編曆宗算會》中的開方法

《神道大編曆宗算會》對於開方法的內容主要在卷四及卷五，其中卷四有提要〈開方論〉一文，先解釋一乘、二乘、三乘的意思：

一乘之積謂之平方，二乘之積謂之立方，三乘之積長立方也，四乘之積平方之立方也，至五乘之積則立方中藏立方矣。各求方面法，用商除以開其積，為之開方。¹⁴

即現代說法的二次、三次、四次、五次及六次方程式，使用的方法是「商除開方法」。另外他亦附上「開方求廉法圖」。接著介紹基本的「開平方法」，其次是「帶從開平方」、「帶減從開平方」、「帶從負隅開平方」等一般一元二次方程式的求解

¹² (清)萬斯同《明史》卷386〈周述學〉傳。

¹³ 明朝的數學家只列入吳敬、顧箬溪、唐荊川三人，可知道對此三人的推崇。

¹⁴ 引自《神道大編曆宗算會》，頁632。

方法。在卷五亦是如此，先介紹基本的「開立方法」，再說明「帶從廉開立方」、「帶從方廉開立方」及「帶從方廉偶算開立方」等一般一元三次方程式的解法，接著介紹開三乘方、開四乘方及開五乘方，周述學認為：「方至五乘，則大小相因、巨細畢舉大哉數也，斯其至矣。又創六乘七乘不亦迂乎。」即解高次方程式是不切實際的。

再來我們將比較《神道大編曆宗算會》與《測圓海鏡分類釋術》的各種開方法：

神道大編曆宗算會	現代符號方程式	測圓海鏡分類釋術
開平方法	$x^2=s$	
帶從開平方	$x^2+bx=s$	帶從開平方
帶減積開平方	$x^2=s-bx$	
帶減從開平方	$x^2-bx=s$	以從減法開平方
負從益積開平方	$x^2=s+bx$	以從添積開平方
帶從負隅益隅開平方	$bx=s+x^2$	添積帶從開平方
帶從負隅減從開平方	$-x^2+bx=s$	減從開平方
帶從負隅減從翻法開平方	$-x^2+bx=s$ (出現負積)	減從翻法開平方
開立方法	$x^3=s$	
帶從廉開立方	$x^3+bx^2=s$	帶從廉開立方
帶從方廉開立方	$x^3+bx^2+cx=s$	帶從方廉開立方
帶從方廉偶算開立方	$ax^3+bx^2+cx=s$	負隅帶從方廉開立方
開三乘方	$x^4=s$	
開四乘方	$x^5=s$	
開五乘方	$x^6=s$	

周述學在解開方法時，會附上題圖，讓讀者清楚他的解題步驟，這是顧應祥沒有做到的。而從周述學的解開方法中可以發現，他在解一元二次方程式時，二次項

係數的絕對值都不離一，只有「帶從方廉隅算開立方」中有解到最高次方係數絕對值不是一的題目，而四次方程式就不在卷四卷五的討論範圍中，但在卷八中就有出現，但不論是解開平方、開立方或開三乘方的型式均不如顧應祥的多樣化。

第四節 程大位《算法統宗》中的開方法

一、程大位之生平及其著作

程大位，字汝思，號賓渠，新安（安徽休寧縣）人，生於明嘉靖十二年四月初十日（西元 1533 年 5 月 3 日），卒於明萬曆三十四年八月十七日（西元 1606 年 9 月 18 日）。¹⁵關於程大位的生平，從《算法統宗》的序文及其他的數學史書中或可略知一二。程大位在〈書《直指算法統宗》後〉中說：

予幼耽習是學，弱冠商由吳楚遍訪明師，繹其文義，審至成法。悔而覃思於率水之上餘二十年，一旦恍然，茲召所得遂於是乎參會諸家之法，附以一家之思，纂集成編。¹⁶

表示他二十歲之前他主要在家學習，聰穎好學，興趣廣泛。程涓說：「幼兒慧，學為儒業，既通，不復出試吏，而為儒不廢，耽墳籍科斗文字，而尤長於籌」¹⁷；程時用也說：「幼負穎敏，綜涉墳籍，耽科鬥籀留頡古文，而長於算學」。¹⁸二十多歲起「周遊吳楚之墟」就在長江中下游的江浙安徽等地從事商業活動。在商務中，他相當留意數學，「遇古奇字文及算書諸類，輒購而玩之」，認真收集並研究許多古代與當代的數學書籍。遇有人「聞有耆宿通算者，輒造訪問難，孳孳不倦」。¹⁹他四十歲後，經商有成，便回到故鄉，不再經商，「齊心一志，至忘寢食」而居家專門從事數學研究工作。期間，他還經常深入實際，搜集問題，丈量測算，還自己設計了丈量步車，這是一項重要的發明，可以知道他非常重視實際問題。

在歷經二十年的研究後，程大位開始整理一生的成果，於是「參會諸家之法，

¹⁵ 郭世榮，《《算法統宗》導讀》頁 25，湖北教育出版社，1998

¹⁶ 轉引梅榮照、李兆華，《算法宗統校釋》頁 1012，台北九章出版社，1992。

¹⁷ 程巨源〈算法宗統序〉，收錄於《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 1219。

¹⁸ 程時用〈刻直指算法統宗序〉，收錄於《中國科學技術典籍通彙》數學卷第二分冊，頁 1221。

¹⁹ 同註 14。

附以一得之愚，纂集成編。諸凡前法之未發者明之，未備者補之，繁蕪者刪之，疏略者詳之；而又爲之訂其訛謬，別其序次，清其句讀，俾上智見解於荃蹄之外，而成學亦可緣是以獲魚兔。豈敢曰立我明一代算數之宗，聊以啟後學之成式而已……」²⁰將前人已有的成果重新整理，並加上自己的體會和見解，特別是對珠算技術作一次全面的整理，於是在萬曆壬辰年（1592）寫成《算法統宗》十七卷，載 595 個數學問題，並自行刊刻。六年之後程大位根據人們使用該書的情形和不同讀者對象的要求，對《算法統宗》去其繁蕪，揭其要領，寫成《算法纂要》四卷。《算法統宗》是一部流傳極廣的著作，明清兩代成爲學習算學者必備的書籍，對後世的影響是巨大的。

《算法統宗》一書是參會諸家之法，因應當時的社會需要纂集而成的。全書共十七卷加首篇共可分爲五部分，即：卷首、卷一和卷二、卷三至卷十二、卷十三至卷十六、卷十七。

第一部分中，首篇的內容很少，但是對《算法統宗》來說是相當的重要，主要在說明數學的起源於河圖、洛書。

第二部份中，卷一和卷二這二卷主要是起例發凡，對概念和基本演算法進行闡述。卷一和卷二的重點也不同，卷一是總論，內容有「先賢格言」、「演算法提綱」、「九章名義」和「演算法節要」以及對基本概念和演算法的定義。其中前兩節主要闡述數學的重要性和學習數學的步驟。後兩節是說明古九章各篇的內容和學習珠算及各種相關法的要領。卷二是對各種基本演算法的具體說明，包括九因、乘法、約分、通分、差分……等級各種珠算的運算口訣。

第三部分從卷三至卷十二，共十卷，按方田、粟布，衰分、少廣、商功、均輸、盈朒、方程、勾股等九章分類方式排列各種演算法及問題，又在少廣章之後增加了「分田截積」一卷，所以共十卷。各卷在開頭都說明該卷的內容，並配以大量的詩詞歌訣，收集了各種題目。而卷三的〈方圓論說〉則是直接采錄自顧應

²⁰ 程大位，〈書《直指算法統宗》後〉，《算法宗統》

祥的《弧矢算術》。另外卷中還有程大位自製的丈量步車，以及對萬曆九年「休寧縣科則」的評論。²¹說明他對實際問題的重視。

第四部分從卷十三至卷十六，主要搜集了 108 個「難題」。在此之前有「新編直指演算法統宗難題雜法序」說明瞭「難題」與「雜法」的來源以及「難題」的本質和解決「難題」的關鍵，其曰：

夫難題昉於永樂四年，臨江劉仕隆公借內閣諸君預修大典，退公之暇，編成難法，附于《九章通明》之後。及錢塘吳信民《九章比類》與諸家算法中，詩詞、歌訣、口號總集名曰「難題」。難者，難也。然似難實非難。惟其詞語巧捏，使算師一時迷惑，莫知措手，不知難法皆不離于《九章》，非《九章》之外。其難題惟在乎立法，立法既明則迎刃而破，又何難之有哉？今分列九章，立法明辯，附集雜法于《統宗》之後，俾好事者共覽雲。²²

所以「難題」是難在題目用詩歌形式表達，使得「算師一時迷惑，莫知措手」。就如同是題目看不懂，又如何解題呢？如作者所言，這些問題的範圍不出九章之外，只要明白其意義，就沒有問題了。這 108 個難題分別在方田七問、粟布一十三問、衰分二十九問、少廣一十五問、商功三問、均輸一十四問、盈朒一十三問、方程四問、勾股十問。

本書最後一部分卷十七為雜法，作者收集了當時流傳的各種雜法共二十六種，其中最重要的是「算經源流」。是作者收集的古書書目 51 種，分為三類，宋刻《算經十書》、宋代算書著作 18 種、南宋楊輝到程大位的時代共 23 種，具有很高的參考價值。

《算法統宗》可以說是明代數學的代表作，流傳久遠。在明末清初之際《算法統宗》是人們瞭解古算的最主要書籍，一直有人研究其中的內容，可見其重要性。

二、《算法統宗》中的開方法

《算法統宗》的開方法主要在卷六中，所以先對卷六的內容作介紹：

²¹ 參閱《算法統宗》卷三「休寧科則 附辨畝法論」，頁二-1279。

²² 程大位〈新編直指算法統宗難題附集雜法序〉，《算法統宗》

內容	題數	內容	題數
開平方法		帶縱平方圖	一問
開方求廉率作法本源圖		長闊相差求和圖	二問
方廉隅圖	五問	減縱開平方圖	一問
一方四廉兩隅圖	一問	減縱翻法圖	
歸除開平方	二問	方圓求徑圖	一問
歸除開平方帶縱	一問	減積帶縱開平方圖	一問
帶縱平方	四問	大中小三方合一圖	一問
長闊相和	二問	開立方	四問
長闊相差	一問	立圓圖	二問
平圓	三問	歸除開立方法	二問
平方通分	二問	立方帶縱法	三問
方圓三稜圖	三圖	又二乘方法	一問
附束法	三問	立方廉隅圖	一問
演段根源圖解		米求倉窖	九問

其中「開方求廉率作法本源圖」在吳敬《九章算法比類大全》索引的相同，但程大位認為「此圖雖吳氏《九章》內有，自平方至五乘方，卻不云如何作用，注釋不明」。

接著我們將其中的開方法獨立出來，與《測圓海鏡分類釋術》的開方法作比較：

算法統宗	現代符號方程式	測圓海鏡分類釋術
開平方法(商除法及歸除法)	$x^2=s$	
帶縱開平方歌	$x^2+bx=s$	帶從開平方法
減積開平方法	$x^2=s-bx$	
減縱開平方法	$-x^2+bx=s$	減從開平方

益積開方術(積不減反增)	$bx=s+x^2$	添積帶從開平方
	$bx=s+ax^2$	帶從負隅添積開平方
	$x^2=s+bx$	以從添積開平方
	$ax^2=s+bx$	負隅以從添積開平方
翻積法	過程中常數變為負數	翻法
減積帶縱開平方	$ax^2+bx=s$ (減積為常數 項合併在一起)	負隅帶從開平方
開立方方法(商除法及歸除法)	$x^3=s$	
開立方帶縱法	$x^2(x+b)=s$	帶從廉開立方
	$x(x+b)^2=s$	帶從方廉開立方
	$x^2(x-b)=s$	
開高次方法	$x^4=s$	

《算法統宗》中的開方法，是利用珠算盤來解的，其中的「益積開方術」，《算法統宗》文中未提到，也沒有引用益積術的例子，但程大位在原文題下解釋說：「若不益積，便用減縱，或有不可益積者，須用減縱之術」。而《算法統宗》中的「歸除平方帶縱歌」、「長闊相和歌」及「長闊相差歌」，均以歌訣來說明解開方的過程，這是顧應祥望塵莫及之處；但在其他解開方的類型上，顧應祥仍是略勝一籌的。

第五節 小結

元、明時代數學的特色之一是用詩詞歌訣的形式來表達數學內容，從《四元玉鑿》、《算學啓蒙》、《九章演算法比類大全》(1450)、《算學寶鑑》(1524)到《神道大編曆宗算會》(1558)、《算法統宗》(1592)，都有許多的篇幅是用到歌訣詩詞來表達，從內容來看，明代卻是最為發達的時期。許多令人望而生畏的數學內容經採用詩詞歌訣的文學語言表達出來，使之文學化、歌訣化、趣味化後，對數學知識的傳播起了不小作用。但是顧應祥《測圓海鏡分類釋術》未曾出現，其餘

著作亦未出現，甚至連插圖亦沒有出現。顧應祥個人的文學詩詞造詣頗深，為何會出現這種狀況，是一個很大的問題。

以開方法來說，除了王文素《算學寶鑑》外，其餘三者的開方法均不如顧應祥，而這四本著作均有附上「開方求廉率作法本源圖」作為開方係數變化說明，而顧應祥應是對開方法十分熟練，係數運用也非常自如。顧應祥自吳敬的《九章算法比類大全》中學習到了開方法的命名，所以在《測圓海鏡分類釋術》加以變化，顯現出開方法的更多元化。