國立臺灣師範大學數學系碩士班碩士論文

指導教授： 施茂祥　博士

論文題目

神經網際計算機器的集群神經元活躍能階分佈

研 究 生： 林育賢

中 華 民 國　102　年 7 月

首先要感謝我的指導教授施茂祥博士與蔡豐聲博士，從他們身上看到了做研究的態度，對學問的熱忱，與求真的永不妥協的態度，還有一份真正想要做出對社會有所貢獻的心。由於他們的引導，讓我對於神經網際計算機器更加的了解，遇到問題給予了我許多的建議與幫助，因此我才能順利完成這篇論文。

此外還要感謝學長許勝溢博士，在各方面都給我許多建議與幫助，也要感謝李是男博士和龐金宗博士在百忙之中抽空擔任口試委員並且給予建議，也要感謝在師大遇到的老師以及同學們，給予了我許多鼓勵以及關心。

最後要感謝我的母親方月華女士以及女朋友禕凡，在背後默默的支持著我，讓我可以無後顧之憂的寫論文。

摘要

施茂祥博士跟蔡豐聲博士於 2013 年在 *IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS AND LEARNING SYSTEMS* 提出神經網際計算機器的模型。在這篇論文的基礎之下，我們研究其神經網際計算機器的性質，改變其中刺激輸入的強弱、單一神經元影響其他神經元之連結數、以及影響神經元有序性的機率，觀察集群神經元之活躍能階的改變，並探討在何種條件下集群神經元會產生活躍能階的不穩定態。

關鍵字：非線性動力學、機器學習、族群動態。

Abstract

In 2013, Mau-Hsiang Shih and Feng-Sheng Tsai in *IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS AND LEARNING SYSTEMS* proposed Interneural Computing Machines. Base on Shih and Tasi's paper, we shall study the extent of stimulus input pattern, the linkages that neuron affects other neurons, the probability that controls the order of the linkage of neurons within the model, and shall see how the firing energy levels of ensembles of neurons change and find out under what conditions the unstable state of firing energy levels of ensembles of neurons occurs.

Keywords: nonlinear dynamics, machine learning, population dynamics.

目錄

1 導論 **1**

2 神經網際計算機器之原理 **1**

3 集群神經元活躍能階的臨界範圍 **3**

4 估計集群神經元臨界範圍之函數圖形 **7**

5 考慮刺激輸入對於集群神經元活躍能階之不穩定態的區域 **10**

6 結論 **12**

7 表格 **12**

8 參考文獻 **17**

1　導論

在 2012 年，施茂祥博士與蔡豐聲博士在 [1] 中提出了一個非線性的動態網路系統的模型，在此基礎之下於 2013 年 [2] 這篇論文中他們提出了神經網際計算機器的模型，我們將研究此神經網際計算機器模型的特性。

我們將介紹神經網際計算機器之原理，給定神經元活躍臨界值為 β，刺激活躍神經元之輸入強弱為 $inputrangeone$，單一神經元影響其他神經元之連結數為 $Linkage$，改變神經元彼此影響的有序性機率為 ρ，並試著調整以上參數值對於集群神經元活躍能階分佈的影響：

給定刺激輸入強弱 $inputrangeone = 10, 20$，$\rho = 0.00001 \sim 0.9999$，我們考慮各種不同的單一神經元影響其他神經元之連結數 $Linkage = 5 \sim 100$，與神經元活躍臨界值為 $\beta = 2 \sim 70$，研究集群神經元活躍能階的臨界範圍。

給定刺激輸入強弱 $inputrangeone = 10, 20$，$\rho = 0.00001 \sim 0.9999$，我們考慮各種不同的單一神經元影響其他神經元之連結數 $Linkage = 5 \sim 100$, 與神經元活躍臨界值為 $\beta = 2 \sim 70$，考慮刺激輸入對於集群神經元活躍能階之不穩定態的區域。

給定刺激輸入之強弱，給定有序性機率，分析在不同的單一神經元影響其他神經元之連結數時刺激輸入對於神經元活躍能階的臨界範圍之函數圖的分布，並試著估計其函數之樣貌。

2　神經網際計算機器之原理

我們模擬一個神經網際計算機器，在特定時間給予刺激進入，其神經元會對此刺激產生反應，我們將在這節說明其運作之原理。

給定神經元之個數為 $n \in \mathbb{N}$、神經元活躍臨界值為 $\beta \in \mathbb{Q}$、單一神經元

影響其他神經元之之連結數為 $Linkage \in \{0, 1, \ldots, n\}$、刺激活躍神經元之輸入強弱為 $inputrangeone$、影響神經元彼此連結的有序性機率為 $\rho \in [0, 1]$，對於第 i 個神經元其活躍臨界值為 $\beta_i \in (\beta - 0.5, \beta + 0.5)$，其中如果單一神經元受到其他神經元之影響大於其臨界值時我們定義此神經元狀態為活躍。給定時間 $t \in \mathbb{N}$，定義 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \{0, 1\}^n$ 為全部神經元在時間 t 時活躍狀態之集合，其中 $x_i(t) = 1$ 代表第 i 個神經元在時間 t 為活躍，$x_i(t) = 0$ 代表第 i 個神經元在時間 t 時不活躍。

定義神經元彼此連結權重 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$，其中 a_{ij} 為第 i 個神經元被第 j 個神經元影響之狀況，其中

$$\begin{cases} a_{ij} \in (-25, 25) \setminus \{0\} & \text{當 } d(i,j) \leq \dfrac{Linkage}{2} \\ a_{ij} = 0 & \text{當 } d(i,j) > \dfrac{Linkage}{2} \end{cases}$$

令 $d(i, j) = \min\{|i - j|, n - |i - j|\}$.

給定 ρ 為影響有序性的機率，即改變 a_{ij} 連結有序性的分佈之情況。並且定義 $\mathcal{M}(t) = (x(1), x(2), \ldots, x(t-1))$ 紀錄各個神經元在各時間的活躍情況。

接著考慮刺激進入之狀況，我們給定此機器在時間 $\sigma, 2\sigma, 3\sigma \ldots$ 時有刺激進入，每次刺激長度定為 m，且在這 m 個時間內其刺激輸入皆為相同。令 $inputrangeone$ 為神經元受刺激產生活躍反應之個數、$inputrangezero$ 為神經元受刺激產生抑制反應之個數。故每當刺激進入時，我們會有 $inputrangeone$ 個神經元受刺激產生活躍反應與 $inputrangezero$ 個神經元受刺激產生抑制反應。

給定 $s(t) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ 表示在時間 t 時調整動作之神經元，定義神經元在時間 t 之運作方程式 $x_i(t+1)$：

$$x_i(t+1) = \begin{cases} \mathbb{1}(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \times x_j(t)) - \beta_i) & \text{當} i \in s(t) \\ x_i(t) & \text{當} i \notin s(t) \end{cases}$$

其中 $\mathbb{1}$ 定義如下:

$$\mathbb{1}(u) = \begin{cases} 1 & u \geq 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$$

$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \times x_j(t))$ 之值為第 i 個神經元在時間 t 時受到其他活躍神經元影響的總和，如果其總和超過此神經元的臨界值 β_i，則此神經元會在時間 $t+1$ 的狀態為活躍，反之則不活躍。

我們將在下節探討在不同情況之下的集群神經元之臨界值。

3 集群神經元活躍能階的臨界範圍

根據我們所模擬的神經網際計算機器，給定神經元個數 $n = 300$，取 $inputrangeone = 10$，$inputrangezero = 10$，$Linkage = 5, 10, 15, \ldots, 100, \rho = 0.00001 \sim 0.9999$，探討改變神經元之連結的有序性機率對於集群神經元活躍上限之範圍。

定義集群神經元 $\eta_i \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}, i = 1, 2, 3, 4, 5$，其中每一個 η_i 都有 30 個元素，裡面的元素代表神經元之位置，且對於所有 $i \neq j$ 都有 $\eta_i \neq \eta_j$。定義 $window \in \{1, 2, \ldots, \sigma\}$ 為調節我們欲觀察 $window$ 時間內神經元的狀況。

對於 $i = 1, 2, 3, 4, 5, t \in \mathbb{N}$ 令

$$observe_i(t) = \sum_{j \in \eta_i} \sum_{k=t-window+1}^{t} x_j(k).$$

為 η_i 這組集群神經元在 $window$ 時間內的活躍之神經元的總和，令 $N\sigma$ 為程式結束之時間點，令

$$obmax_i = \max\{observe_i(t) : t = n\sigma + m + window, \\ n\sigma + m + window + 1, \ldots, (n+1)\sigma,\ n = 1, 2, \ldots, N-1\}$$

$$obmin_i = \min\{observe_i(t) : t = n\sigma + m + window,$$
$$n\sigma + m + window + 1, \ldots, (n+1)\sigma,\ n = 1, 2, \ldots, N-1\}.$$

令

$$obmax = \max_i obmax_i$$
$$obmin = \min_i obmin_i$$

當 $t \in \mathbb{N}, t > window$ 我們定義集群神經元 η_i 之活躍能階 $obcolor_i(t)$ 為在時間 $(t - window)$ 到 t 內之集群神經元的集體活躍之情況：

$$obcolor_i(t) = \left\lceil \frac{\sum_{j\in\eta_i} \sum_{k=t-window+1}^{t} x_j(k) - obmin + 1}{obmax - obmin + 1} \times 4 \right\rceil$$

$\lceil\cdot\rceil$ 為上高斯符號，可知 $obcolor_i(t) = 1, 2, 3, 4$。

且如果 $obcolor_i(t) = 4$ 時我們定義 η_i 在時間 t 的活躍能階為紅色，如果 $obcolor_i(t) = 3$ 令活躍能階為黃色，$obcolor_i(t) = 2$ 為綠色，$obcolor_i(t) = 1$ 令其活躍能階為藍色。

給定 $\beta \in \mathbb{Q}$，對於所有 $t \in \{1, 2, \ldots, n\sigma\}$，$obcolor_i(t)$ 轉變為全藍時，η_i 裡的神經元幾乎不活躍，對於每一個神經元 $j \in \eta_i$ 受到其他神經元之影響皆無法超越其臨界值 β_j，此時的 β 為集群神經元 η_i 的活躍能階之臨界值。

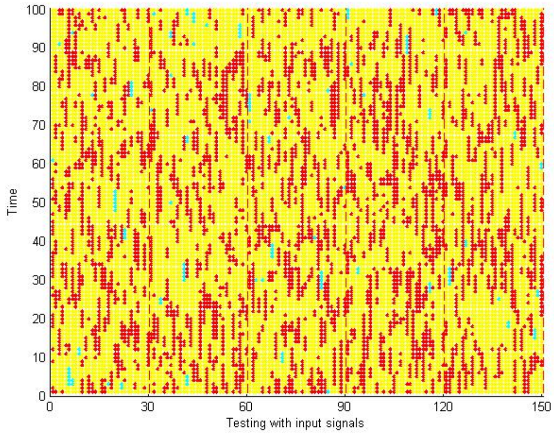


Figure 1:

圖 1 為 η_1 在 $\beta = 4$，$inputrangeone = 10$，$Linkage = 45$，$\rho = 0.5$，我們一共跑了 5 次程式，給定 $n = 1, 2, 3, 4, 5$，圖中 x 軸的 $30(n-1)+1$ 到 $30n$ 為第 n 次程式時集群神經元 η_1 之活躍能階之圖。其中第一行從上而下為第一次程式在 $m + window$ 到 σ 之 η_1 的活躍能階，第二行從上而下為第一次程式在 $\sigma + m + window$ 到 2σ 之 η_1 的活躍能階，以此類推。

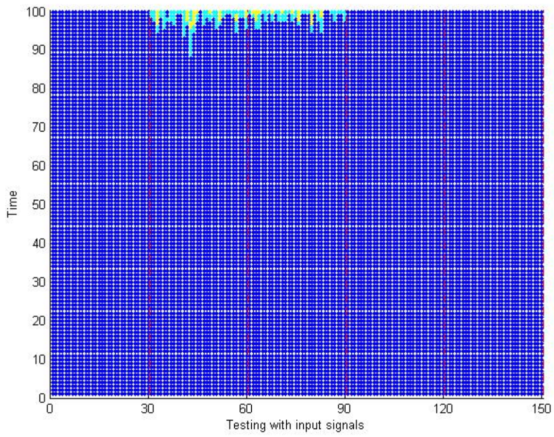


Figure 2:

圖 2 為 η_1 在 $\beta = 42$，$inputrangeone = 10$，$Linkage = 45$，$\rho = 0.5$ 時圖中五次程式之活躍能階幾乎為藍，從此圖我們可以看出這五次程式裡集群神

經元 η_1 裡的神經元幾乎都不活躍，故集群神經元之活躍能階才會顯示為藍色。

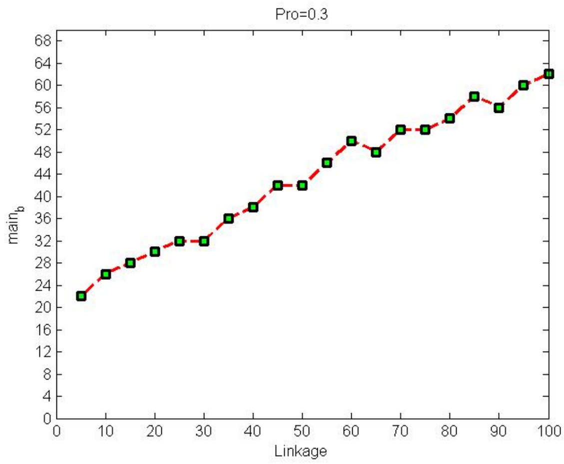


Figure 3:

在圖 3 中給定 $\rho = 0.3$ 及 $Linkage$，我們跑了五次程式，分別對 η_1 到 η_5 觀察其活躍能階，此五組集群神經元同時達到活躍能階臨界值時，記錄並畫在圖上。由此圖我們可以觀察得出當 ρ 固定時，集群神經元之活躍能階的臨界值會隨著 $Linkage$ 增加。

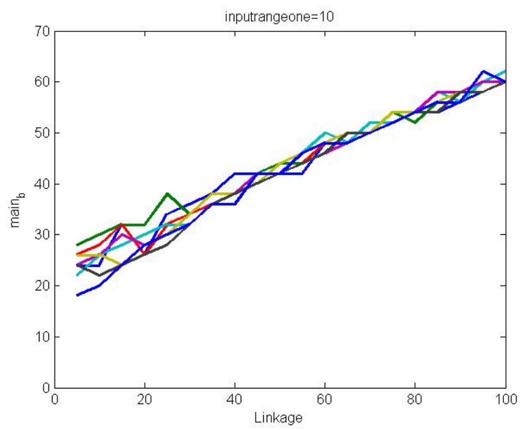


Figure 4:

在圖 4 中我們計算了當 $\rho = 0.00001, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.9999$ 之集群神經元臨界範圍的圖，可以得出當 ρ 改變，集群神經元活躍的臨界範圍沒有太大的差異。

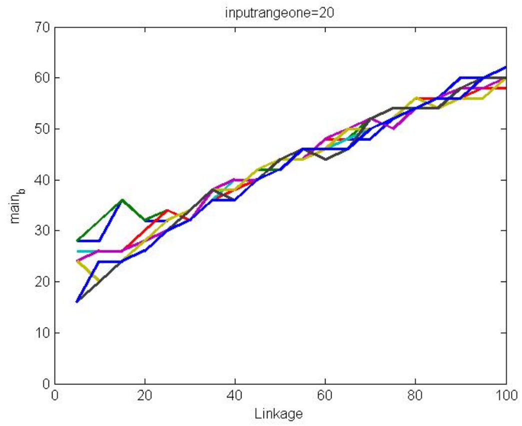


Figure 5:

在圖 5 可以得知 $inputrangeone = 20$，$Linkage = 5, 10, 15, \ldots, 100$，$\rho = 0.00001 \sim 0.9999$，集群神經元之活躍範圍可以得出當 $inputrangeone = 10, 20$ 時，活躍範圍沒有顯著差異。

4 估計集群神經元臨界範圍之函數圖形

當 $inputrangeone = 10, 20$ 時，我們計算 $Linkage = 5$ 到 100 時，集群神經元臨界範圍的函數圖形似乎為線性函數。於是試著計算在 $Linkage$ 夠大的時候，臨界範圍之函數是否會為線性函數

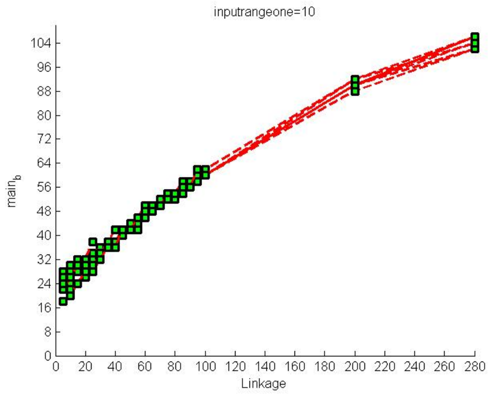


Figure 6:

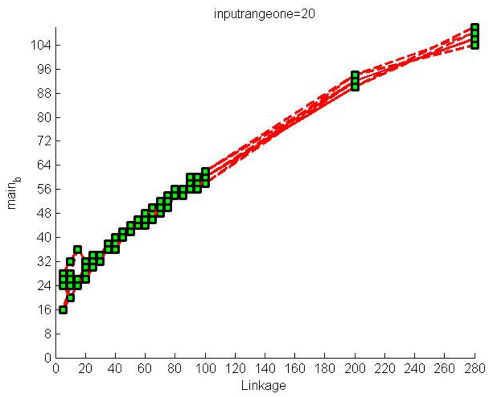
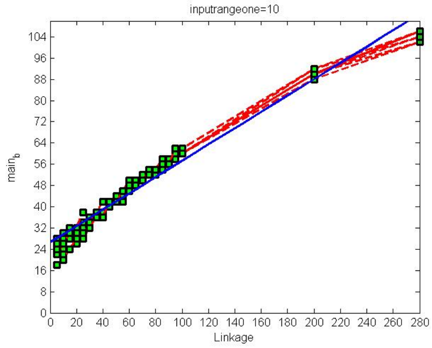


Figure 7:

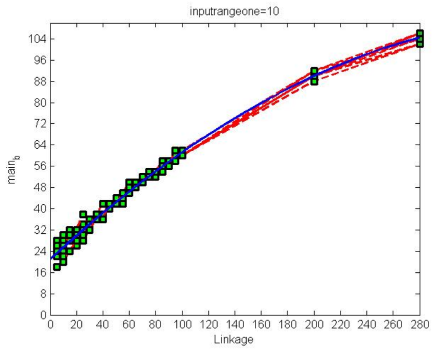
在圖 6、7 中測試了 $Linkage = 200$ 及 280 之狀況，發現此函數在超過 $Linkage = 200$ 斜率會逐漸變小，故此函數不為一次函數。且對於 $inputrangeone = 10, 20$，$Linkage$ 夠大其活躍臨界值依然差異很小。於是我們試著估計其函數樣貌，這邊採用的是 Lagrange 差值多項式

圖 8 的 (a)，(b)，(c) 依序為 1 次跟 2 次跟 4 次的差值多項式，我們可以得出集群神經元臨界範圍之函數用 2 次函數估計便相當準確。

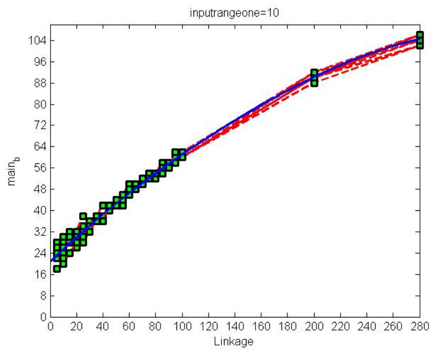
Figure 8:


inputrangeone=10
main_b
Linkage
0
8
16
24
32
40
48
56
64
72
80
88
96
104
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280

(a)


inputrangeone=10
main_b
Linkage
0
8
16
24
32
40
48
56
64
72
80
88
96
104
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280

(b)


inputrangeone=10
main_b
Linkage
0
8
16
24
32
40
48
56
64
72
80
88
96
104
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280

(c)

5 考慮刺激輸入對於集群神經元活躍能階之不穩定態的區域

我們試著觀察神經網際計算機器的刺激輸入對於集群神經元活躍能階之不穩定態的區域。定義 $*$ 為在我們跑的五次程式中，集群神經元 η_i 活躍能階產生明顯差異之符號。

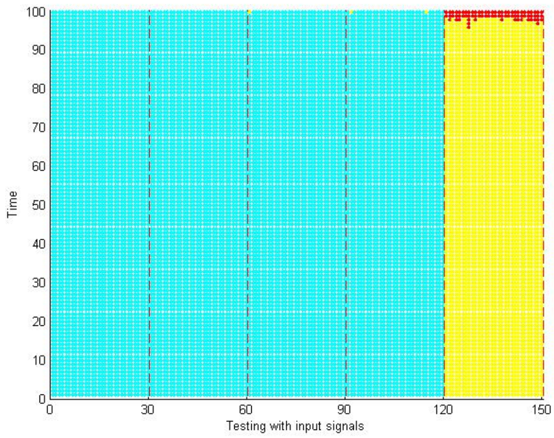
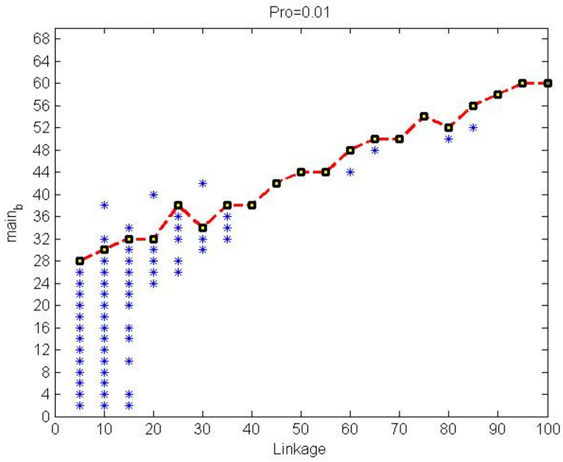


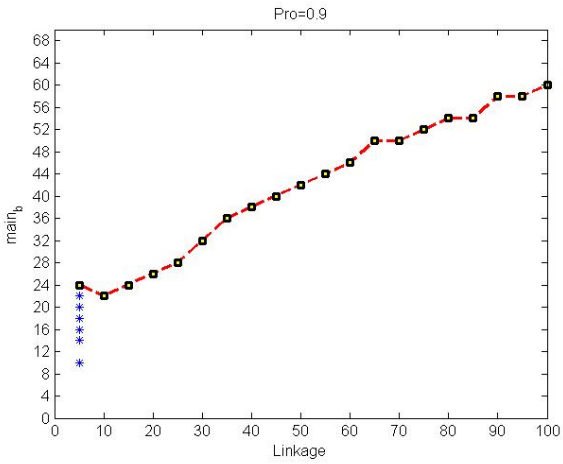
Figure 9:

在圖 9 給定 $inputrangeone = 10$，$\rho = 0.3$，$Linkage = 5$，$\beta = 16$，觀察 η_3 之活躍能階臨界範圍，此時可得知 η_3 在第五次程式當中與其他次程式中的活躍能階有明顯之不同，此種情況稱為集群神經元活躍能階的不穩定態。

Figure 10:



(a)



(b)

由圖 10 可以得知 (b) 圖 $*$ 的數量比 (a) 圖少很多。ρ 為改變神經元彼此影響的有序性機率，如果 ρ 很小，神經元連結的有序性依然會保持，故每當刺激進入時，能夠影響的神經元皆為受到刺激的神經元附近之神經元，故某些神經元會傾向於不改變自己的活躍狀態，所以會產生此不穩定態之區域。

6 結論

由以上實驗得知，不論 ρ 為何，集群神經元之活躍能階之臨界值範圍皆無太大差異，改變神經元彼此影響的有序性機率並不會影響神經元臨界範圍。也可得知 $inputrangeone = 10, 20$ 時神經元受刺激產生活躍反應之個數相差兩倍時集群神經元活躍能階之範圍也無差異，故集群神經元活躍能階之臨界範圍只跟 $Linkage$ 有關連。

根據所描繪的函數圖形，$Linkage$ 越高時，其 $Linkage$ 對於 β 的函數斜率逐漸減少，可以透過此函數估計在其他情形之下的集群神經元之活躍能階的範圍。

當 ρ 與 $Linkage$ 很小時，容易出現集群神經元活躍能階的不穩定態，因為神經元彼此能夠及時影響的範圍為附近的神經元，其活躍頻率易受到少量的局部神經元影響，因此刺激的變化便容易造成集群神經元活躍能階的改變，增加 ρ 或者 $Linkage$ 可將此不穩定態給消去，以免活躍能階的不穩定態之區域對於預測結果造成影響。

7 表格

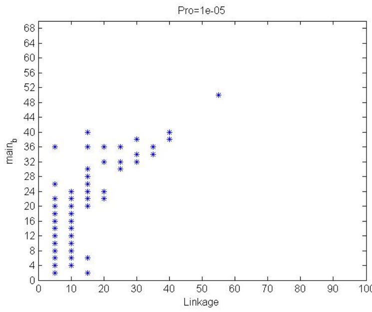
Table 1: $n = 300$，$inputrangeone = 10$，$inputrangezero = 10$ 時集群神經元活躍能階之臨界範圍

ρ / $Linkage$	0.00001	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.9999
5	24	28	26	22	24	26	24	18
10	24	30	28	26	26	26	22	20
15	32	32	32	28	30	24	24	24
20	26	32	26	30	28	28	26	28
25	34	38	32	32	30	30	28	30
30	36	34	34	32	32	34	32	32
35	38	38	36	36	36	38	36	36
40	42	38	38	38	38	38	38	36
45	42	42	42	42	42	40	40	42
50	42	44	42	42	42	42	42	42
55	42	44	44	46	44	46	44	46
60	48	48	48	50	46	48	46	48
65	48	50	48	48	48	50	50	48
70	50	50	50	52	50	50	50	50
75	52	54	52	52	52	54	52	52
80	54	52	54	54	54	54	54	54
85	54	56	56	58	58	56	54	56
90	56	58	56	56	58	58	58	56
95	58	60	60	60	60	58	58	62
100	60	60	60	60	60	60	60	60
200	90	90	88	92	90	90	90	92
280	102	106	102	106	104	106	106	104

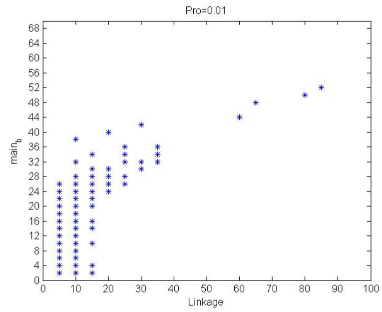
Table 2: $n = 300$，$inputrangeone = 20$，$inputrangezero = 10$ 時集群神經元活躍能階之臨界範圍

ρ / $Linkage$	0.00001	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.9999
5	28	28	26	26	24	24	16	16
10	28	32	26	26	26	20	20	24
15	36	36	26	26	26	24	24	24
20	32	32	30	28	28	28	26	26
25	32	34	34	30	30	32	30	30
30	34	32	32	32	32	34	34	32
35	38	36	36	36	38	38	38	36
40	38	38	38	40	40	38	36	36
45	42	42	40	40	40	42	40	40
50	44	42	44	44	44	44	44	42
55	44	46	44	44	44	44	46	46
60	46	46	48	46	48	46	44	46
65	48	48	48	48	50	50	46	46
70	48	52	50	50	52	50	52	50
75	52	50	52	52	50	52	54	52
80	54	54	56	54	54	56	54	54
85	56	56	56	56	56	54	54	56
90	60	56	56	56	58	56	58	56
95	60	58	58	60	58	56	60	60
100	62	58	58	62	60	60	60	62
200	92	94	92	92	92	90	90	94
280	106	104	106	106	106	110	108	108

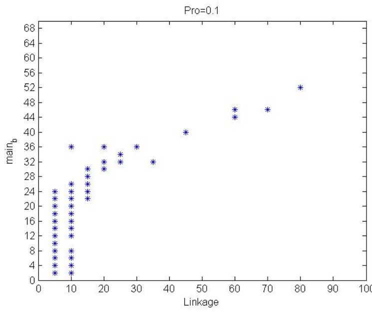
Figure 11: $n = 300$，$inputrangeone = 10$，$inputrangezero = 10$ 時集群神經元活躍能階不穩定態之區域



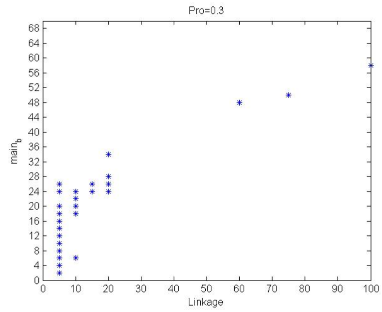
(a)



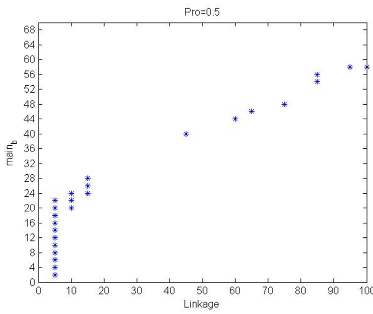
(b)



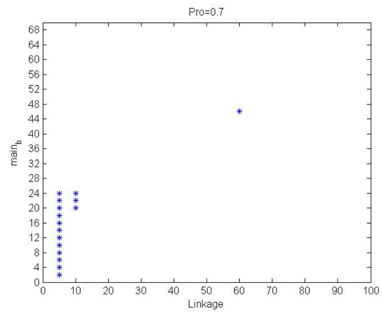
(c)



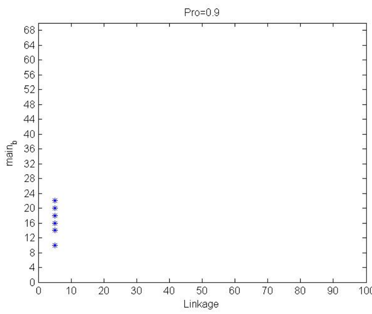
(d)



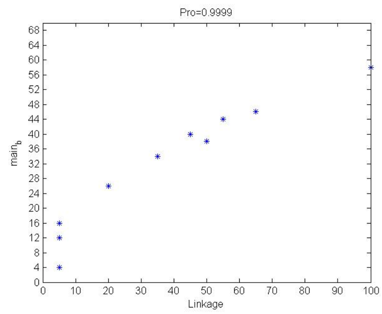
(e)



(f)

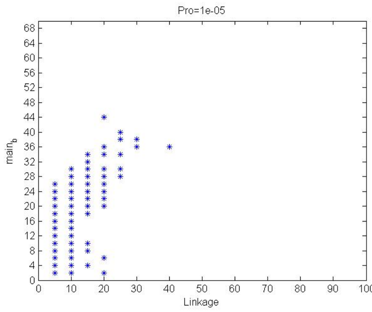


(g)

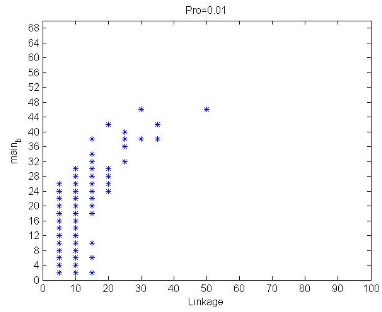


(h)

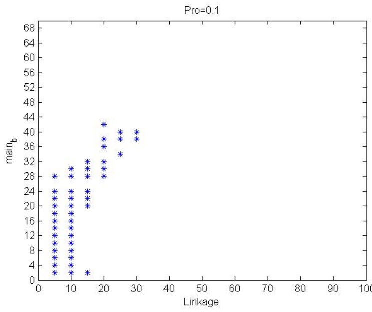
Figure 12: $n = 300$，$inputrangeone = 20$，$inputrangezero = 10$ 時集群神經元活躍能階不穩定態之區域



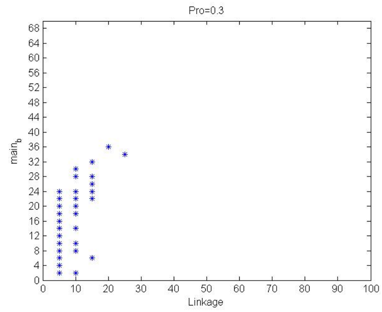
(a)



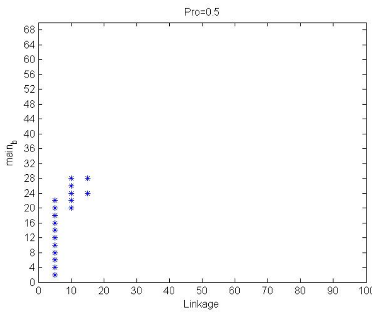
(b)



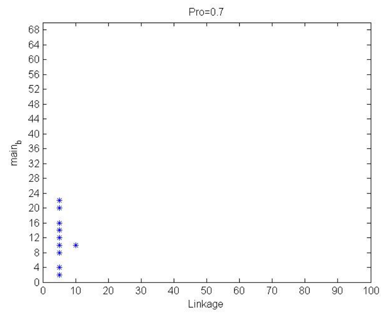
(c)



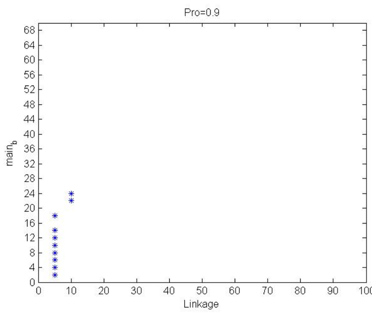
(d)



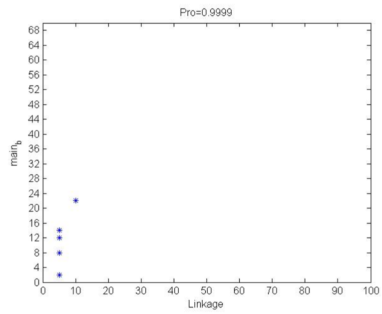
(e)



(f)



(g)



(h)

8 參考文獻

1. M.-H. Shih and F.-S. Tsai, 2012, Decirculation process in neural network dynamics, IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst., 23, 1677–1689.

2. M.-H. Shih and F.-S. Tsai, 2013, Operator control of interneural computing machines, IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst., in press.