

柯西不等式的推廣

梁順豪

國立政治大學 應用數學系

我們先回憶一下高中學過的柯西不等式：

1.1 定理

設 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i=1, 2, \dots, n$,
則我們有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

特別地，當等號成立時，

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

其中 $b_i \neq 0, \forall i=1, 2, \dots, n$

要證這個不等式並不難，我們可以分別利用
幾何(1.2)與代數(1.3)的觀點去證明它：

1.2 證明

令 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

為 \mathbb{R}^n 裡的兩非零向量(如其中有一為零向
量則原式顯然成立)

由高中內積定義： $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ，其
中 θ 為 \vec{a} 、 \vec{b} 夾角且 $0 \leq \theta \leq \pi$

及高中內積定理： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

$$\text{可得 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \cos \theta \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

($\because |\cos \theta| \leq 1$)

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

等號成立時 $\Rightarrow \cos \theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$ 或
 $180^\circ \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$

$$\text{故 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

$$b_i \neq 0, \forall i=1, 2, \dots, n$$

1.3 證明

首先，我們引入一個新的變數 $t \in \mathbb{R}$

$$\text{顯然我們有 } \sum_{i=1}^n (a_i t + b_i)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (a_i^2 t^2 + 2a_i b_i t + b_i^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) t^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) t + \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0$$

若 a_i 或 b_i 為 0, $\forall i=1, 2, \dots, n$ ，則顯
然成立。

故可設 $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$ ，則可知判別式 $D \leq 0$

即

$$D = \left(2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

等號成立時 \Rightarrow 存在一個 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t \neq 0$ ，

使得 $a_i t + b_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{即 } \frac{a_i}{b_i} = -\frac{1}{t}, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

$$b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

證明完後，來看看幾個應用的例子：

1.4 例題

設 $x, y, z \in R$ ，則 $\frac{2x+y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 之最大、最小值為何？

解：由於在題目出現了平方和與一次項和，故可試著從柯西不等式著手：

$$\therefore (x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 1^2 + 3^2) \geq (2x + y + 3z)^2$$

$$\therefore 14 \geq \frac{(2x + y + 3z)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{14} \geq \frac{2x + y + 3z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \geq -\sqrt{14}$$

故可得最大值為 $\sqrt{14}$ 、最小值為 $-\sqrt{14}$

1.5 例題

ΔABC 三邊長為 6、5、3， P 為其內部一點，且 P 點到三邊距離分別為 x, y, z ，則 $x^2 + y^2 + z^2$ 之最小值為何？

解：給定三邊長 6、5、3，可由海龍公式算出其面積：

$$\text{令 } s = \frac{6+5+3}{2} = 7, \text{ 則}$$

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \sqrt{s(s-6)(s-5)(s-3)} \\ &= \sqrt{7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4} = 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

又 ΔABC 可被 P 點分成 ΔPAB 、 ΔPBC 、 ΔPCA 三塊小三角形，

且 ΔABC 面積為三塊小三角形的面積和，

$$\text{故 } 2\sqrt{14} = \frac{1}{2} \cdot 6x + \frac{1}{2} \cdot 5y + \frac{1}{2} \cdot 3z$$

$$\Rightarrow 6x + 5y + 3z = 4\sqrt{14}$$

有了一次項和，所求又為平方和，

故可利用柯西不等式：

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)(6^2 + 5^2 + 3^2) &\geq (6x + 5y + 3z)^2 \\ &= (4\sqrt{14})^2 = 224 \end{aligned}$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{224}{70} = \frac{16}{5}$$

故所求最小為 $\frac{16}{5}$

1.6 例題

已知 $a, b, c, d > 0$ ，求證

$$\sqrt{a+b+c+d} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}{2}$$

證：本題雖無出現平方和，但出現了二次方根和與一次項和，

還是可以改變一下題目的形式，套用柯西不等式：

$$\therefore a, b, c, d > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore [(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{d})^2] &[(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)] \\ &\geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b+c+d} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}{2}$$

現在，讓我們來試著將柯西不等式做個推

廣，先看幾個簡單的情況：

1.7 引理

設 $a_i, b_i, c_i, d_i \geq 0, \forall i=1, 2, \dots, n$ ，則我們有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n c_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n d_i^4\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i d_i\right)^4$$

證：

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n c_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n d_i^4\right) \\ & \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 d_i^2\right)^2 \quad (\text{柯西不等式}) \end{aligned}$$

$$\geq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i d_i\right)^2\right]^2 \quad (\text{柯西不等式})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i d_i\right)^4$$

這是四個的情況，再來看看三個的情形：

1.8 引理

設 $a_i, b_i, c_i \geq 0, \forall i=1, 2, \dots, n$ ，則我們有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^n c_i^3\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i\right)^3$$

證：由 1.7，令 $d_i = (a_i b_i c_i)^{\frac{1}{3}}$ 代入，則

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n c_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n (a_i b_i c_i)^{\frac{4}{3}}\right) \geq \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i c_i)^{\frac{4}{3}}\right]^4$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^n c_i^4\right) \geq \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i c_i)^{\frac{4}{3}}\right]^3$$

$$\text{令 } a_i' = a_i^{\frac{4}{3}}, b_i' = b_i^{\frac{4}{3}}, c_i' = c_i^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{則 } \left(\sum_{i=1}^n (a_i')^3\right)\left(\sum_{i=1}^n (b_i')^3\right)\left(\sum_{i=1}^n (c_i')^3\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i' b_i' c_i'\right)^3$$

有了 1.7、1.8 這兩個簡單的 Lemma 後，我們發現三個和四個的情形都是對的，因此更有信心能將其推廣至 p 個的情形。眼尖的讀者或許會發現，我們在 1.7 和 1.8 中，要求所給定的數須為正數，這是因為在 1.8 中，

$$a_i^4, b_i^4, c_i^4 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a_i')^3, (b_i')^3, (c_i')^3 \geq 0$$

$$\Rightarrow a_i', b_i', c_i' \geq 0$$

故為了避免不必要的困擾，我們在此只討論正數的情況，另外，有興趣的讀者也可自行驗證一下等號成立的條件。

以下是 p 個的情況，也就是推廣柯西不等式：

1.9 定理

設 $a_{ij} \geq 0, \forall i=1, 2, \dots, p,$

$j=1, 2, \dots, n$ ，則我們有

$$\prod_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}^p \geq \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^p a_{ij}\right)^p$$

$\forall p \in \mathbb{N}$ 且 $p \geq 2$

注意到右式中的每一項乘積其實是左式中

相對應位置的 $a_{ij}^p, \forall i=1, 2, \dots, p,$

j 固定，相乘開 p 次方後所得到的。

在此，我們將分別利用數學歸納法(1.10)與算幾不等式(1.11)來證明：

1.10 證明

(1) 首先，我們證明 $p=2^m, \forall m \in \mathbb{N}$ 的情

況，由數學歸納法，

當 $m=1$ 時， $p=2$ 為一般柯西不等式，

原式成立；

設 $m=k$ 成立，即 $p=2^k$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{2^k} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{2^k} \geq \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{2^k} a_{ij} \right)^{2^k}$$

則 $m=k+1$ 時，即 $p=2^{k+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \prod_{i=1}^{2^{k+1}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{2^{k+1}} &= \left[\prod_{i=1}^{2^k} \sum_{j=1}^n (a_{ij}^2)^{2^k} \right] \cdot \left[\prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \sum_{j=1}^n (a_{ij}^2)^{2^k} \right] \\ &\geq \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{2^k} a_{ij}^2 \right)^{2^k} \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{ij}^2 \right)^{2^k} \\ &= \left[\left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{2^k} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{ij}^2 \right) \right]^{2^k} \\ &\geq \left[\left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{2^{k+1}} a_{ij} \right)^2 \right]^{2^k} = \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{2^{k+1}} a_{ij} \right)^{2^{k+1}} \end{aligned}$$

故原式亦成立，由數學歸納法得證。

(2) 接下來，考慮 $2^{m-1} < p < 2^m$ ，

$\forall m=2, 3, \dots$ ，則

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^p \right) \left(\sum_{j=1}^n a_{2j}^p \right) \cdots \left(\sum_{j=1}^n a_{pj}^p \right) \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^p a_{ij} \right)^{2^m-p} \\ &\geq \left[\sum_{j=1}^n \left(a_{1j}^{\frac{p}{2^m}} a_{2j}^{\frac{p}{2^m}} \cdots a_{pj}^{\frac{p}{2^m}} \cdot \prod_{i=1}^p a_{ij}^{\frac{2^m-p}{2^m}} \right) \right]^{2^m} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^p a_{ij} \right)^{2^m} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \prod_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}^p \geq \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^p a_{ij} \right)^p$$

由(1)(2)，我們完成了整個的證明

1.11 證明

首先，我們令

$$A_1^p = \sum_{j=1}^n a_{1j}^p, A_2^p = \sum_{j=1}^n a_{2j}^p, \dots, A_p^p = \sum_{j=1}^n a_{pj}^p$$

於是僅需證明

$$\prod_{i=1}^p A_i \geq \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^p a_{ij}$$

$$\text{即 } \frac{\prod_{i=1}^p a_{i1}}{\prod_{i=1}^p A_i} + \frac{\prod_{i=1}^p a_{i2}}{\prod_{i=1}^p A_i} + \cdots + \frac{\prod_{i=1}^p a_{in}}{\prod_{i=1}^p A_i} \leq 1$$

由算幾不等式知

$$\frac{a_{11}^p + a_{21}^p + \cdots + a_{p1}^p}{p} \geq \sqrt[p]{a_{11}^p \cdot a_{21}^p \cdots a_{p1}^p} = \frac{\prod_{i=1}^p a_{i1}}{\prod_{i=1}^p A_i}$$

$$\frac{a_{12}^p + a_{22}^p + \cdots + a_{p2}^p}{p} \geq \sqrt[p]{a_{12}^p \cdot a_{22}^p \cdots a_{p2}^p} = \frac{\prod_{i=1}^p a_{i2}}{\prod_{i=1}^p A_i}$$

⋮

$$\frac{a_{1n}^p + a_{2n}^p + \cdots + a_{pn}^p}{p} \geq \sqrt[p]{a_{1n}^p \cdot a_{2n}^p \cdots a_{pn}^p} = \frac{\prod_{i=1}^p a_{in}}{\prod_{i=1}^p A_i}$$

將以上每個式子加起來，可得

$$\frac{a_{11}^p + a_{12}^p + \cdots + a_{1n}^p + a_{21}^p + a_{22}^p + \cdots + a_{2n}^p + \cdots + a_{p1}^p + a_{p2}^p + \cdots + a_{pn}^p}{p}$$

$$\geq \frac{\prod_{i=1}^p a_{i1}}{\prod_{i=1}^p A_i} + \frac{\prod_{i=1}^p a_{i2}}{\prod_{i=1}^p A_i} + \cdots + \frac{\prod_{i=1}^p a_{in}}{\prod_{i=1}^p A_i}$$

即

$$\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{p \text{ 個}}}{p} = \frac{p}{p} = 1 \geq \frac{\prod_{i=1}^p a_{i1}}{\prod_{i=1}^p A_i} + \frac{\prod_{i=1}^p a_{i2}}{\prod_{i=1}^p A_i} + \cdots + \frac{\prod_{i=1}^p a_{in}}{\prod_{i=1}^p A_i}$$

故得證

一樣，有興趣的讀者可以更進一步檢驗等號成立的條件，在此就不再多作討論。

現在，讓我們來看看它的應用：

1.12 例題

設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}$ 之最小值為何？

解：這是多年前的一道大學聯考考題，傳統的解法是利用微分求極值，或利用兩次的算幾不等式，當然，如果有了推廣柯西不等式，那這題解起來就顯得迅速多了，現在我們將這三種解法分別列出如下，讀者們可以自己體會一下其中的巧妙之處。

(法一)：

$$\text{設 } f(\theta) = \frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta} = 2 \csc \theta + 3 \sec \theta,$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{令 } f'(\theta) = -2 \csc \theta \cot \theta + 3 \sec \theta \tan \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{3 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = 0 \Rightarrow 2 \cos^3 \theta = 3 \sin^3 \theta$$

$$\Rightarrow \tan^3 \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{故 } \sin \theta = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{1}{2}}}$$

又

$$\begin{aligned} f''(\theta) &= -2 \cdot \frac{-\sin \theta \cdot \sin^2 \theta - \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^4 \theta} \\ &\quad + 3 \cdot \frac{\cos^3 \theta - \sin \theta \cdot 2 \cos \theta (-\sin \theta)}{\cos^4 \theta} \\ &= \frac{2}{\sin \theta} + \frac{4 \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} + \frac{2}{\cos \theta} + \frac{6 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} > 0, \\ &\forall 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故

$$f(\theta) = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{1}{2}}}$$

為最小值

$$\text{(法二): } \because \frac{2}{\sin \theta} \cdot \frac{3}{\cos \theta} > 0 \quad \forall 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

我們可仿照 1.11 中的證明手法寫出以下兩個算幾不等式：

$$\frac{\frac{2}{\sin \theta} + \frac{2}{\cos \theta}}{3} \geq \sqrt{\frac{4}{\left(\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{3}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}}{3} \geq \sqrt{\frac{9}{\left(\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}\right)^2}}$$

兩式相加得

$$\frac{3}{3} = 1 \geq \frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta} \geq (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}}$$

注意到上述兩式中，兩次的等號會同時成立

(法三)：

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta, \cos \theta \text{ 均爲正}$$

\(\therefore\) 由推廣柯西不等式

$$\left(\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}\right) \left(\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}\right) (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \geq (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}\right)^2 \geq (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^3$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta} \geq (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}}$$

故最小值爲 $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}}$

1.13 例題

已知過定點 (1,8) 的某一直線交 x 軸於 $P(a,0)$ 、交 y 軸於 $Q(0,b)$ ， $a, b > 0$ ，

則 \overline{PQ} 之最小值爲何？

解：一樣，此題有不只一種的解法，但可能都相當繁雜，有興趣的讀者不妨自己動手試一試。讓我們利用推廣柯西不等式來解決這一題：

$$\text{由截距式可知 } \frac{1}{a} + \frac{8}{b} = 1, \text{ 且 } a, b > 0$$

欲求 $\overline{PQ} = \sqrt{a^2 + b^2}$ 之最小值，

由推廣柯西不等式：

$$(a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b}\right) \geq (1+4)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq 5\sqrt{5}$$

故最小值爲 $5\sqrt{5}$

瞧，利用推廣柯西不等式是不是很快呢？

1.14 例題

已知 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \forall n \in N$ ，試證：

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^p \quad \forall p \geq 2 \quad p \in N$$

證：本題其實可由 $f(x) = x^p, \forall p \geq 2$ ，爲一凸函數直接看出其結果，但從推廣柯西不等式的角度來看，卻提供了另一個簡潔又漂亮的證明。

$$\because x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

由推廣柯西不等式

$$\left(\left(\frac{x_1}{n}\right)^p + \left(\frac{x_2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{x_n}{n}\right)^p\right) \times$$

$$\underbrace{(1^p + 1^p + \dots + 1^p)}_{n \text{ 個}} \underbrace{(1^p + 1^p + \dots + 1^p)}_{n \text{ 個}} \dots \underbrace{(1^p + 1^p + \dots + 1^p)}_{n \text{ 個}}$$

$$\geq \left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right)^p$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{n^p} \cdot n^{p-1} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^p$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^p$$

看完了以上三個例子，我相信讀者對推廣柯西不等式能有更深刻的體會，還有更多的例子就留給讀者去親身體驗了。文末最後要感謝台大數學系的陳志明、徐祥峻，以及中正數研所的趙世偉，共同協助這篇文章的誕生，也希望這篇文章能夠讓讀過的人都能夠略有所得，祝福大家！