選擇公設

郭汾派

在公設化的集合論中，選擇公設是一個比較不易應用的公設，而且在需用時，我們往往用與這公設對等的結果，却非這公設的本身。在本文中我們將舉出兩個常用的與選擇公設對等的結果，證明其對等，並舉例說明其應用。

選擇公設：設 $\mathbb{A}$ 是一個非空集的集。 令

$$X = \bigcup_{A \in \mathbb{A}} A$$

則存在一函數

$$c : \mathbb{A} \longrightarrow X$$

使對任一 $A \in \mathbb{A}$， $c(A) \in A$

Hausdorff 極大原則（或稱 Zorn 預備定理）：給予一個部分有序集 $(X, \leqq)$，若 X 中的任何全有序子集存在一個上界，則 X 至少有一個極大元素。

整列公設：對任何集 X 都存在一個順序 $\leqq$ 使 $(X, \leqq)$ 成一整列集。

我們將分三步證明選擇公設，Hausdorff 極大原則和整列公設是對等的。

I' 由選擇公設得到 Hausdorff 極大原則。

已給一個部分有序集 $(X, \leqq)$，其中 X 的任何有序子集存在一上界，因為空集是 X 的一個全有序子集，牠有一上界 $m_{\varphi} \in X$，因此 X 不是空集。

設 $\mathbb{A}$ 是 X 中所有非空子集的集，由選擇公設知存在一函數

$$c : \mathbb{A} \longrightarrow X$$

使對任一 $A \in \mathbb{A}$， $c(A) \in A$.

現在我們考慮 X 中滿足下列二條件的子集 A。

(1) $(A, \leqq)$ 是一整列集；

(2) 對任一$a\epsilon$A，令 $A(a)=\{x\epsilon A \mid x<a\}$。則

$$c(\{x\epsilon X \mid \text{對任一} y\epsilon A(a),\ x>y\})=a$$

這種子集 A，我們將稱為主要集。因為 $X\neq\phi$，$\{c(X)\}$ 是 X 的一個子集，因為 $\{c(X)\}(c(X))=\phi$，$c(\{x\epsilon X \mid \text{對任一}\ y\epsilon\{c(X)\}(c(X)),\ x>y\})=c(X)$. 故 $c(X)$ 是一個主要集。

記 X 中所有主要集所成的集為 S。令

$$Y=\bigcup_{A\epsilon S}A$$

我們先證明 Y 亦是一主要集，這證明將分為三步。

(1) 若 A, BϵS 而 $A\not\subset B$，則存在 $a\epsilon A$ 使 $B=A(a)$。（對任一整列集 A 及任一 A 的元素 a，$A(a)$ 定義為 $\{x\epsilon A \mid x<a\}$。下面類似的符號將不再說明。）

因為 $A\not\subset B$，$A-B\neq\phi$，於是 $A-B$ 有一最小元素 a。換言之，對任一 $x\epsilon A-B$，$x\geqq a$。隨之 $A(a)\subset B$。若 $B-A(a)=\phi$，則 $B=A(a)$ 成立。所以我們只須考慮 $B-A(a)\neq\phi$ 的情形。因 $B-A(a)\neq\phi$，牠有一最小元素 b，於是 $B(b)\subset A(a)$，而且 $A-B(b)$ 有一最小元素 $a'\leqq a$，明顯地，$A(a')\subset B(b)\subset A(a)$。若$a'=a$，則 $A(a')=B(b)$，若 $a'<a$，則 $a'\epsilon A(a)\subset B$。但 $a'\notin B(b)$，於是 $a'\geqq b$，因此 $B(b)$ 中任一元素是 A 的元素，而且小于 $b\leqq a'$，這就是說 $B(b)\subset A(a')$。所以亦得到 $A(a')=B(b)$。因 A 和 B 都是主要集，于是

$$a'=c\{x\epsilon X \mid \text{對}\ A(a')\ \text{中任一元素}\ y，x>y\}$$

$$=c\{x\epsilon X \mid \text{對}\ B(b)\ \text{中任一元素}y，x>y\}=b$$

若 $a'=a$，則 $a=b\epsilon B$，與 $a\epsilon A-B$ 相矛盾。若 $a'<a$，則 $b=a'\epsilon A(a)$，與$b\epsilon B-A(a)$ 相矛盾。這證明了 $B-A(a)\neq\phi$ 的情形不可能存在。因此完成了(1)的證明。

(2) Y 是一個整列集。

因為 Y 是一部分有序集的子集，Y 亦是一部分有序集。對任何 x，$y\epsilon Y$，存在 A，

$B\in S$ 使 $x\in A$ 及 $y\in B$，由(1)可知 $A\subset B$ 或 $B\subset A$，於是 $x，y\in B$ 或 $x，y\in A$。所以 $x\leqq y$ 或 $y\leqq x$。這證明了 Y 是一全有序集。若D是 Y 的非空子集，則 D 有一元素屬于 S 中某一集 B，於是$D\cap B\neq\phi$，因爲 B 是一整列集，$D\cap B$ 有一最小元素 b。對任一 $x\in D$，x屬于 S 中某一集 A，若 $A\subset B$，則 $x\in D\cap B$，於是 $b\leqq x$。若 $A\not\subset B$，則由(1)可知存在一 $a\in A$ 使 $B=A(a)$。所以在 $x\in A(a)$ 時，$x\in B$，於是 $x\geqq b$。在 $x\notin A(a)$ 時，$x\geqq a>b$。這證明了 Y 中任一非空子集有最小元素，因此 Y 是一整列集。

(3) Y 是一主要集。

若 $a\in Y$，則 a 屬于S中某一集 A，因爲 $A(a)\subset Y(a)$，所以欲證 $A(a)=Y(a)$，只證 $A(a)\supset Y(a)$ 卽可，對任一 $b\in Y(a)$，$b<a$ 而且 b 屬于 S中某一集 B。若 $B\subset A$，則 $b\in A$ 於是 $b\in A(a)$。若$B\not\subset A$，則由(1)可知存在一 $b'\in B$ 使 $A=B(b')$，則 $b<a<b'$，隨之 $b\in B(b')=A$，所以 $b\in A(a)$。這證明了 $A(a)\supset Y(a)$。因此 $A(a)=Y(a)$，因 A 是主要集，於是

$$a=c(\{x\in X \mid 對\ A(a)\ 中任一元素\ y，x>y\})$$

$$=c(\{x\in X \mid 對\ Y(a)\ 中任一元素\ y，x>y\})$$

又由(2)知 Y 是一整列集，因此證明了 Y 是一主要集。

由(2)知 Y 是 X 中的全有序子集，所以由假設可知 Y 有上界 m。我們說 m 是 X 中的一個極大元素，今用反證法來證明。

假定Y中存在一元素 a_0 使 $a_0>m$，則 $E=\{x\in X \mid 對\ Y\ 中任一元素\ y，x>y\}\neq\phi$。明顯地，$Y\cup\{c(E)\}$ 是個主要集，所以 $Y\cup\{c(E)\}\in S$，隨之 $Y\cup\{c(E)\}\subset Y$。但是 $c(E)\in E$ 而 $E\cap Y=\phi$，此與 $c(E)\in Y$ 相矛盾。故得 m 是 X 中的一個極大元素。這完成了本定理證明。

II. 由 Hausdorff 極大原則得到整列公設

給予任一集 X， 令

$E=\{(A, \leqq A) \mid A \subset X, \leqq_A$ 是在 A 上定義的整列次序$\}$。因空集是 X 的一個整列集，故知 F 不是空集。爲了使 F 成一部分有序集，因此我們在 F 上定義一個次序 $\leqq$ 如下：若 $A \subset B$，$\leqq_B \mid A = \leqq_A$ 及對任一 $x \epsilon B-A$ 和 $a \epsilon A$ 有 $a <_B x$ 的關係，就規定 $(A, \leqq_A) \leqq (B, \leqq_B)$。明顯地，$\leqq$ 有反身性及反對稱性，所以只要再證明 $\leqq$ 有遞移性就可證得 $(F, \leqq)$ 成一部分有序集。若 $(A, \leqq_A) \leqq (B, \leqq_B)$ 及 $(B, \leqq_B) \leqq (D, \leqq_D)$，則 $A \subset B$，$\leqq_B \mid A = \leqq_A$ 及 $B \subset D$，$\leqq_D \mid B = \leqq_B$. 隨之 $A \subset D$ 及 $\leqq_D \mid A = \leqq_A$。若 $x \epsilon D-A$，則 $x \epsilon B$ 或 $x \notin B$，假若 $x \epsilon B$，於是對任一 $a \epsilon A$，$a <_B x$，隨之 $a <_D x$。假若 $x \notin B$，則對任一 $b \epsilon B$，$b <_D x$。但 $A \subset B$，因此對任一 $a \epsilon A$，$a <_D x$。如此證得 $(A, \leqq_A) \leqq (D, \leqq_D)$ 故 $\leqq$ 有遞移性。

其次設 S 是 F 的全有序子集。 令

$$W = \cup \{ A \mid (A, \leqq_A) \epsilon S \}$$

因 S 是一全有序集，我們可以定義 W 中的次序 $\leqq_w$ 如下：

對任一 $(A, \leqq_A) \epsilon S$，$\leqq_w \mid A = \leqq_A$。我們容易證明 $(W, \leqq_w)$ 是個部分有序子集。因此只要再證明對任一W的非空子集有最小元素，就證得了 $(W, \leqq_w)$ 成一整列集。設 W' 爲 W 的任一非空子集，因此 W' 必與 S 中某一集 $(A, \leqq_A)$ 相交。隨之 $W' \cap A$ 有一最小元素 a_0，我們將證 a_0 卽是 W' 的最小元素，也是用反證法來證明。假定存在一 $a' \epsilon W'$ 使 $a' \angle_w a_0$，若 $a' \epsilon A$，則 $a' \angle_A a_0$ 與 $a_0 \leqq_A a'$ 相矛盾。若 $a' \notin A$，則S中有一集 $(B, \leqq_B)$ 使 a'，$a_0 \epsilon B$ 及 $A \subset B$。因 $a' \epsilon B-A$，於是對任一 $a \epsilon A$，$a \angle_B a'$。隨之 $a_0 \angle_B a'$ 或 $a_0 \angle_w a'$ 與 $a' \angle_w a_0$ 相矛盾。於是 W' 有最小元素，也證得 $(W, \leqq_w)$ 是個整列集。因此 $(W, \leqq_w) \epsilon F$ 。明顯地，$(W, \leqq_w)$ 爲S的上界。由

Hausdorff 極大原則知存在一極大元素 $(A_0, \leqq_{A_0}) \in \mathcal{F}$。只剩下證明 $A_0 = X$ 就可完成整列公設證明。假定存在一 $x \in X - A_0$，則 $A_1 = A_0 \cup \{x\}$ 能成一整列集使 $\leqq_{A_1} | A_0 = \leqq_{A_0}$ 及對任一 $a \in A_0$，$a <_{A_1} x$。因此 $(A_1, \leqq_{A_1}) \in \mathcal{F}$，但此與 $(A_0, \leqq_{A_0})$ 爲極大相矛盾。故證明得完成。

III. 由整列公設得到選擇公設。

設 $\mathcal{A}$ 是一個非空集的集。令

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

由整列公設知 X 可成一整列集。因 $\mathcal{A}$ 中每一個 A 是 X 的非空子集，於是 A 有最小元素 a。因此得一函數

$$C : \mathcal{A} \longrightarrow X$$

使對任一 $A \in \mathcal{A}$，$C(A)$ 是 A 中最小元素。這證明了選擇公設。

現在我們舉例來說明如何應用整列公設及 Hausdorff 極大原則。

(1) 整列公設的一個應用

定義：若一集 G，滿足下列二條件，則稱 G 爲一自由交換羣。

(i) G 是加法的交換羣；

(ii) G 中存在子集 $B = \{b_\alpha\}$，合於下列二條件：

(a) G 中任一元素恒可用 B 中的有限個元素一線性結合表之。換言之，對任一 $a \in G$。

$$a = \Sigma m_\alpha b_\alpha \quad \text{此處 } m_\alpha \text{ 表整數只有限個不爲零。}$$

(b) B 是線形無關。換言之，對 B 的任一有限子集 $\{b_{\alpha_1}, \ldots, b_{\alpha_n}\}$。若對整數 $r_1, \cdots, r_n$，$\sum_{i=1}^{n} r_i b_{\alpha_i} = 0$ 則

$$\gamma_i = O \quad i = 1, \cdots, n.$$

我們稱 B 為 G 的基底。

定理：自由交換羣 G 的任一子羣都是自由。

證明：設 $B = \{ b_\alpha \}$ 為 G 的基底。由整列公設可使 $A = \{\alpha \mid b_\alpha \in B\}$ 成一整列集 ($A, \leqq$)。H 中任一元素 h 可寫成

$$h = m_1 b_{\alpha_1} + \cdots + m_n b_{\alpha_n}$$

此處 $b_{\alpha_1}, \cdots, b_{\alpha n} \in B$，$m_1, \cdots, m_n$ 為不等於 O 的整數而$\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ 。我們特稱α_n為h 的索引， 令

$$C = \{ b_{\alpha_k} \in B \mid H \text{中至少存在一元素 } m_1 b_{\alpha_1} + \cdots + m_k b_{k_\alpha}$$
$$\text{使 } m_k > O \text{ 及 } \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \}$$

設 N 為所有自然數集。因 N 是整列集，於是對任一 $b_{\alpha_k} \in C$，$\{ m_k \in N \mid$ 存在一個$\cdots + m_k b_{\alpha_k} \in H$ 使 $m_k > O$ 及 $\cdots < \alpha_k \} \neq \phi$並有最小正整數$n_k$ 。因此由選擇公設知對每一 $b_{\alpha_k} \in C$可得 H 中一元素 b'_{α_k}使

$$b'_{\alpha_k} = \cdots + n_k b_{\alpha k}, \cdots < \alpha_k$$

我們將證明 $B' = \left\{ b'_{\alpha_k} \,\middle|\, b_{\alpha_k} \in C \right\}$ 是 H 的一個基底

對任一 $h \in H$

$$h = m_1 b_{\alpha_1} + \cdots m_{\alpha_1} + \cdots m_\gamma b_{\alpha_\gamma}, \alpha_1 < \cdots < \alpha_\gamma$$

假若h 可用 B' 中有限個元素一線性結合表之，則 $-h$ 亦可用B' 中有限個元素一線性結合表之。故可設$m_\gamma > O$，所以 $b_{\alpha_\gamma} \in C$，隨之 B' 中有一元素 b'_{α_γ} 使

$$b'_{\alpha_\gamma} = \cdots + n_\gamma b_{\alpha_\gamma}$$

設 K 是 m_γ 及 n_γ 的公因數，則存在二整數m，n 使 $m\, m_\gamma + n\, n_\gamma = K$。隨之 $mh + n\, b'_{\alpha_\gamma} = \cdots + k\, b_{\alpha_\gamma}$。由$b'_{\alpha_\gamma}$ 的定義知 $K \geqq n_\gamma$，於是$K = n_\gamma$，因此存在一整數μ_γ 使$m_\gamma = \mu_\gamma n_\gamma$。明顯地，$h_\gamma = h - \mu_\gamma b'_{\alpha_\gamma} \epsilon H$，並且$h_\gamma$ 的索引$\rho_{\gamma-1} < \alpha_\gamma$，繼續重復相同的作法，可得

$h_s = h - (\mu_s b_{\xi_s} + \cdots + \mu_\gamma b_{\alpha_\gamma}) \epsilon H$ 並且h_s 的索引$\eta_{s-1} < \xi_s < \cdots < \alpha_\gamma$。

因 A 是整列集，所以存在一個 S 使$h_s = O$，否則 $\{\cdots \eta_{s-1}, \xi_s, \cdots, \alpha_\gamma\}$ 沒有最小元素，故知 H 中任一元素恒可用中 B′ 有限個元素一線性結合表之。我們只要再證明B′ 是線形無關，就可證得 B′ 是 H 的基底。

若 $\{b_{\alpha_1}, \cdots, b_{\alpha_\gamma}\}$ 是 B′ 中任一有限子集，並且$\alpha_1 < \cdots < \alpha_\gamma$ 則

$$b'_{\alpha_{\gamma_1}} = \cdots + n_1 b_{\alpha_1} \quad \text{此處} \cdots < \alpha_1$$

$$\vdots$$

$$b'_{\alpha_\gamma} = \cdots + \ell_\gamma^{\gamma-1} b_{\alpha_{\gamma-1}} + \cdots + n_\gamma b_{\alpha_\gamma} \quad \text{此處} \cdots < \alpha_{\gamma-1} < \alpha_\gamma$$

假定 $a_1 b'_{\alpha_1} + \cdots + a_\gamma b'_{\alpha_\gamma} = O$ 此處 $a_1, \cdots, a_\gamma$ 表整數。用以上等式代入，則

$$a_1 b'_{\alpha_1} + \cdots + a_\gamma b'_{\alpha_\gamma}$$

$$= \cdots\cdots + \left(a_{\gamma-1} n_{\gamma-1} + a_\gamma \ell_\gamma^{\gamma-1}\right) b_{\alpha_{\gamma-1}} + \cdots + \left(a_\gamma n_\gamma\right) b_{\alpha_\gamma}$$

$$= O$$

因 B 是基底，所以

$$a_r n_r = 0，a_{r-1} n_{r-1} + a_r \ell_r^{r-1} = 0，\cdots$$

故得 $a_r = 0$ 隨之 $a_{r-1} = 0$，依次類推 $a_{r-2}=0，\cdots，a_1 = 0$

即 $\left\{ b'_{\alpha_1}, \cdots, b'_{\alpha_r} \right\}$ 爲線形無關，因此完成了本定理之證明。

注意：一般而論用 Hausdorff 極大原則較用整列公設方使，但這例子是一例外。

(2) Hausdorff 極大原則的一個應用

定理：若 V 爲佈於體 F 的一個向量空間，則 V 存必在一基底。

證明：若 V 只含有一個元素 O，則其基底爲空集。因此我們可設 V 至少有一個非零的元素 x，顯然地，{x} 是個線形無關。

設 $\mathbb{A}$ 是 V 中所有線形無關子集的集，則 $\mathbb{A} \neq \phi$，在 $\mathbb{A}$ 中，被包含 "C" 定一次序，明顯地，"C" 有反身性，反對稱性及遞移性，因此 ($\mathbb{A}$, C) 成一部分有序集。假若 S 是 $\mathbb{A}$ 中任一全有序子集，我們將證明 S 有上界，於是就能應用 Hausdorff 極大原則，令

$$W = \cup_{A \in S} A$$

若 $\{ x_1, \cdots, x_n \}$ 爲 W 的任一有限子集，則存在 $A_1, \cdots, A_n \in S$ 使 $x_1 \in A_1 \cdots$，及 $x_n \in A_n$。然而 S 是全有序集，故存在一 A_j，$1 \leq j \leq n$，使 $A_i \subset A_j$ $i = 1 \cdots n$ 隨之 $\{ x_1, \cdots, x_n \}$ 是 A_j 有限子集，因而 $\{ x_1, \cdots, x_n \}$ 是線形無關，這就證明W是線形無關，即 $W \in \mathbb{A}$，明顯地，W 是S的上界，由 Hausdorff 極大原則知 A 有極大元素 B。我們說 B 是 W 的基底，否則能存在一個 $x_0 \in X - \{o\}$ 使 $x_0 \notin B$，因之 $\{x_0.b \mid b \in B\}$ 是個線形無關，此與線形無關 B 爲極大相矛盾。故得 B 是所求的基底。

Axiom of Choice Synopsis

by

Fun-Pay Kuo

In axiomatic set theory, Axiom of Choice is not easier to apply than other axioms. We often use some axioms which are equivelent to Axiom of Choice. In this note we shall prove two useful axioms. Zorn's Lemma and Well-ordering Postulate which are equivalent to Axiom of Choice and give two examples to show their applications. We shall use Well-ordering Postulate to prove that any subgroup of a free abelian group is free and Zorn's Lemma to show that any vector space over a field has a basis.