一位國中學生解比例問題之個案研究

陳建州[1]　　　　劉祥通[2]

[1] 嘉義市北興國中　　　[2] 國立嘉義大學數學教育所

摘　要

本文旨在探討剛升上國一的學生，在只接受過國小簡單的比例課程，且尚未學習文字符號的代數運算前，對於比例問題的解題表現。本研究採個案研究法，工作單共有三題，是採用結構式工作單，內容涵蓋了比例與連比問題，而訪談的問題是依照學生的回答適時調整。經由研究者的分析，個案解題成功的關鍵有以下幾項因素：(一)以適當的圖形表徵題意。(二)正確的選擇基準量。(三)能以相同的倍率(放大或縮小)表徵成比例的數。(四)適時的教學介入引發個案的再思考。

關鍵字：比例、連比、比例推理。

壹、緒論

一、 研究背景

與比(ratio)相關的問題對中小學生來說是比較困難的，除了需具備完整的分數概念之外，對於比(ratio)、比率(rate)及比例(proportion) 相關性質也要有所認識。在中學數學課程裡，比及比例是重要的單元，對於往後數學的學習有關鍵性的影響。事實上許多學者(Lamon, 1994；Lesh, Post, and Behr, 1988)也指出比例概念的建立是學習高等數學的重要基石。缺乏對於比例概念的理解，不僅造成數學概念基礎的不穩固，也關係到高等數學的學習。

對國中學生而言，通常只有明確的比例類型問題，才會想到用比例的方法求解。例如「15：10＝5：x，求x＝？」，至於沒有在題目中看到「：(比) 」的符

通訊作者：劉祥通 liust@mail.ncyu.edu.tw

號，往往不會想到用比例推理來解題，例如「某一天夜長是晝長的$\frac{3}{5}$，請問這一天夜長與晝長各有幾小時？」，處理這個問題，國中生習慣把晝長假設為x小時，那麼夜長就是$\frac{3}{5}x$小時，依據題意列出$x+\frac{3}{5}x=24$，再求得x=15，所以晝長 15 小時，夜長 9 小時。小學生則把晝長當成 1，再利用當量除的方法，以$24\div(1+\frac{3}{5})=15$來解題。然而有部分的小學生，會從夜長是晝長的$\frac{3}{5}$，得出夜長：晝長=3：5，再以分配的方式$24\times\frac{3}{3+5}=9$(小時)，$24\times\frac{5}{3+5}=15$(小時)，分別求出夜長與晝長的時數。如此，利用比例推理來解題，有時常常會有意想不到的效果。

連比的問題也是探討比例推理能力不可或缺的，例如：如何把兩個比例式$a:b=x_1:y_1$，$b:c=x_2:y_2$結合在一起，而得到$a:b:c$等於多少？課本的作法是將兩個比例式化為$a:b=x_1x_2:y_1x_2$與$b:c=y_1x_2:y_1y_2$，接下來就可以得出$a:b:c=x_1x_2:y_1x_2:y_1y_2$。然而，對於初學比例的學生來說，卻不是件容易的事。

一般認為學習比例相關課程應在國小高年級之後，但 Bar(1987)發現，以年幼兒童的比例推理能力，可以解決某些簡單的比例問題。Lo 與 Watanabe(1997)也認為學生不一定要先具備乘除法的概念，即可解比例問題。而某些學者(Schorn, 1989；Van den Brink, & Streefland, 1979；Clark, & Kamii,1997)也認為，年幼的孩童亦能解決簡單的比和比例問題。由此可知，比例推理能力是人們早期就具備的數學能力，然而年歲稍長，面對比例相關問題時，卻令學生感到棘手。另一方面，學生的運算技巧提升之後，雖提供更有效的解題策略，但是卻失去了用比例推理解題的簡潔與美感。

在國小六年級到國中一年級這個階段的學生，剛學過比例相關課程，對於含文字符號的代數運算尚不熟悉，因此解比例問題的時候，應該會有其自發性解法，這引發研究者進一步探討的興趣。

二、 研究目的

本研究藉由工作單的寫作及訪談，觀察個案在比例問題方面的解題表現，以瞭解底下兩項待答問題：

1、型如 $ax = by$ ，$x + y = k$ 的比例問題，隨著 a 與 b 所代表數字的不同，x 與 y 的倍數關係，個案是如何求出 x 與 y ？（工作單第一題）

2、型如 $ax = by$ ，$cy = dz$ ，$x + y + z = k$ 的比例問題，這類較具有挑戰性的連比問題，個案是如何求出 x 、y 與 z ？（工作單第二、三題）

貳、 文獻探討

一、 比例問題相關研究

(一)學童解比例問題需具備的數學知識

1、 因數與倍數的概念

學生在解比例問題時，往往會用到因數與倍數的概念。Lo 與 Watanabe(1997)強調因數與倍數是解比例問題的重要知識基礎。在劉祥通與周立勳(1999)的研究中指出解比例問題往往先做除法再做乘法，亦即為解因數與倍數的問題，因此因數與倍數的概念可說是比例概念的重要基石。

2、 熟悉乘除法情境

Vergnaud(1988)提出乘除法問題是比例問題的一個特例，例如「a 個披薩給 b 個人吃，那麼 c 個披薩可以給多少人吃？」這是一個比例問題。但是若改成「1 個披薩給 b 個人吃，那麼 c 個披薩可以給多少人吃？」這會是一個乘法的問題；如果改成「a 個披薩給 1 個人吃，那麼 c 個披薩可以給多少人吃？」則又變成除法問題了。由此可知解比例問題若能瞭解乘法與除法適用的情境，對解題是非常有幫助的。

3、 分數概念的整體發展

許多學者認為比值和比率是包含在分數的概念當中，Kieren(1980)將分數分成五個面向：部分-整體(part-whole)、商數(quotient)、測度(measure)、比值(ratio)、運算子(operator)。

若對於分數的構念瞭解並不透徹，只停留在部分-整體的觀點，則無法用分數表示彼此的倍數關係，甚至不瞭解可以用分數表示除不盡的概念(楊錦連，1999)。由此看來，分數概念的不完整會影響學生解比例問題。

4、 相對的思考能力

相對的思考是解比例問題重要的能力之一，所謂「相對的思考能力」是指瞭解情境中數量關係的相對性。舉例來說，第一段考數學成績小明考 80 分，小華考 60 分，經過幾個星期的努力，第二段考兩個人都進步了 10 分，若以絕對思考的觀點來看，兩個人都進步了 10 分，好像進步的情況一樣；但是，若就相對的觀點來說，小明進步的情況是原來的$\frac{1}{8}$，而小華是$\frac{1}{6}$，因為$\frac{1}{6}>\frac{1}{8}$，所以應該說小華進步的幅度比較大。因此，相對思考能力是解比例問題重要的基礎，亦是必要的能力。

5、 單位化與基準化的能力

單位化的能力就是在解比例問題時，先求出單位量，在利用單位量解題。至於基準化，Freudenthal(1983)提出一個例子，「將地球大小想成像一根針頭那樣大(大約 1 公釐)，然後根據這樣的定義，重新看待整個太陽系的大小。那麼太陽就變成直徑只有 10 公分的球體，而太陽與地球的距離就只有 10 公尺。」像這樣，以一個單位量來推算其他量的方法，就是一種基準化的過程。

(二)比例問題的類型

比例問題的類型可分為比值型態、語意型態以及結構型態，以下分別說明之：

1、 比值型態

比例題目中，各項的比值關係影響學生解題的難易度，依據 Noelting(1980)與林福來(1984)的研究，將比例式「$a：b＝c：x$」中數字的關係類型分為四種型式：

第一式：c 同時是 a 與 b 的整數倍。例如 3：4＝12：x

第二式：只有 b 是 a 的整數倍。例如 2：6＝7：x

第三式：只有 c 是 a 的整數倍。例如 5：8＝10：x

第四式：c 不是 a 或 b 的整數倍。例如 2：7＝9：x

2、 語意型態

Lamon(1993)依語意型態將比例問題分為合成的測度(well-chunked measures)、部分-部分-整體(part-part-whole)、關聯的集合(associated sets)、擴大與縮小(stretchers & shrinkers)等四種類型。而台灣省國民教師研習會(1997)則依對等關係的不同，將比例問題分為交換問題、組合問題、母子問題、密度問題、伸縮問題等五種類型。

3、 結構型態

以問題結構型態來看，比例問題可分為單一比例、多重比例以及連比例三種型態。所謂單一比例型如「$a：b＝c：x$」，而多重比例(multiple proportion)則涉及三個度量空間，其類型如「$a_1 \times b_1：c_1 = a_2 \times b_2：c_2$」，這種問題的概念源自於 Vergnaud(1983)的論述。至於連比則是三個以上數的比，把兩個比例式 $a:b = x_1 : y_1$，$b:c = x_2 : y_2$ 結合在一起，得到 $a:b:c = x_1x_2 : y_1x_2 : y_1y_2$ 是最基本的連比型態。

(三)比例問題的解題策略

一般學生面對比例問題所採行成功的解題策略不外乎單價法(between strategy)、倍數法（within strategy)、累加法（repeated addition)、數量分解法

（decomposing methed）以及公式法(formula strategy)，茲分述如下：

1、 單價法（between strategy）

在解比例問題的過程中，先求出單位量，再將單位量乘以單位數，這樣的解題方式稱之為單價法。

2、 倍數法（within strategy）

在比例問題「模型飛機加 40 毫升的油可飛行 70 分鐘，那麼加 120 毫升的油可飛行幾分鐘？」中，120 毫升是 40 毫升的 3 倍，因此 120 毫升的油可飛行時間也是 40 毫升的油可飛行時間的 3 倍，所以 $3\times70=210$(分鐘)。此種解比例問題的方式是以倍數來思考，而民 82 年版的數學新課程則稱這樣的解題策略為倍數策略。

3、 累加法（repeated addition）

累加法是兒童與青少年解比例問題時經常使用的策略(何意中，1988；陳英傑，1992；Lamon，1993)例如在「買 3 個氣球花 2 元，那麼買 24 個氣球花多少元？」的題目中，買 3 個氣球花 2 元，那麼買 6 個氣球花 4 元，買 9 個氣球花 6 元，如此繼續推算下去，最後可得到買 24 個氣球花 16 元。

4、 數量分解法（decomposing method）

將問題數量在計算過程中分解為兩個以上的數量，分別計算之後再加以組合，此種解題策略稱為數量分解法。Vergnaud(1983)的研究指出，有些學生在解比例問題時會採用此方法。事實上數量分解法也可視為學生的自發性解題策略之一。

5、 公式法(formula strategy)

Langrall & Swafford(2000)的研究指出，利用比例式來解比例問題是屬於形式的比例推理階段，此階段的學生能將比例情境的題目，列出比例式或是運用比值

的相等來解題，此等學生對於比例推理才有全面的瞭解。

(四)比例推理相關研究

Langrall & Swafford(2000)將學生比例推理的解題策略分為非比例推理策略(nonproportional reasoning)、非形式的比例推理(informal reasoning about proportional situations)、數量推理(quantitative reasoning)、形式的比例推理(formal proportional reasoning)等四個階段。

Hannah(2000)認為，探討學生的比例推理能力，要利用各種不同的題材。Miller & Fey (2000)則指出，若能從生活情境中建構比例推理的概念，學生會比較容易接受，而學生常常會運用單位比率來思考這些問題，亦即將其視為比值的方式來處理。

二、 連比問題相關研究

關於連比的研究相當少，國中數學課本(國立教育研究院籌備處，2006)在連比這個單元主要探討將$a:b$與$b:c$寫成$a:b:c$、連比例式$x:y:z=a:b:c$以及比例分配的相關問題。前者課本的作法是利用比的前後項同乘或除一個不為 0 的數，讓共同項b成為一樣的數，例如在$a:b=x_1:y_1$，$b:c=x_2:y_2$這兩個比例式中，將$a:b$的前後項同乘x_2($x_2\neq 0$)，即$a:b=x_1x_2:y_1x_2$，而將$b:c$的前後項同乘y_1($y_1\neq 0$)，即$b:c=y_1x_2:y_1y_2$，如此一來兩個比的共同項b都是y_1x_2，這樣就可以將$a:b$與$b:c$連結起來寫成$a:b:c=x_1x_2:y_1x_2:y_1y_2$。

參、 研究方法與設計

一、 研究方法

本研究採個案研究法，探討個案在比例問題方面的解題表現，個案研究(case study)是採用各種不同的方法以蒐集有效的完整資料，對單一的個人或社會單位

作績密而深入研究的一種方法(郭生玉，2002)。採用個案研究可以深入瞭解個案在比值及比例問題方面的解題表現，在訪談時根據個案的回答，適時調整提問的方式。然而，為避免在研究過程中，因個人主觀因素而有所偏差，資料來源及研究人員在分析資料方面必須進行三角校正，力求研究結果的客觀性。

Goldin(1998；2000)的論述中提及結構式工作單晤談(structured, task-based interviews)的技巧，亦即工作單的問題是結構式的，而訪談的問題是依照學生的回答適時調整。根據文獻探討及研究者個人教學經驗，同時參酌共同研究者的建議，設計此結構式工作單，兼顧數據的變換以及情境與措辭的調整，以瞭解個案能在不同情況之下的解題表現。在工作單的填寫上，要求個案儘量將心中的想法用不同的表徵方式呈現出來，訪談時則進一步引導個案將更深層的想法或是再一次將表達不清楚的地方重新說明白，最後再根據所蒐集到的資料整理與分析。.

二、 研究對象

本研究在個案的選擇上是採取立意抽樣，研究之初，小含是國小六年級的學生，而目前是國中一年級的學生，就讀之國中及國小皆位於嘉義市，班上成績約在前 20%，並未在校外參加數學科補習。解題時能夠詳細的將過程寫下來，訪談時則能夠清楚表達自己的想法。對於單一比例問題能夠採取單價法及倍數法解題，至於多重比例方面，亦能運用單價法的方式成功解題，

但是，若運用倍數法解題，不同項目的倍數關係無法有效的連結，以致解題不成功，例如「4 個太空人 3 天吃了 24 顆食物丸，那麼 8 個太空人 6 天吃幾顆食物丸？」(圖 1)

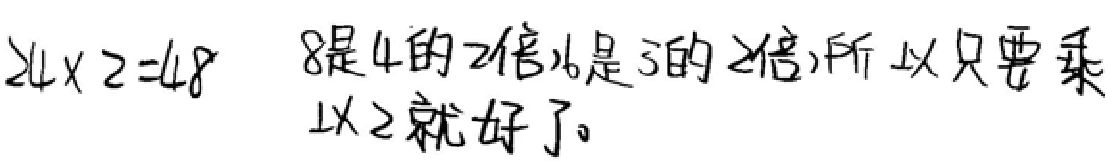

圖 1 多重比例解題結果(解題錯誤)

另外，在分數的概念發展方面，小含習慣用小數表示，例如「8÷3」，這是除不盡的，結果她用循環小數表示，但是不曾計算過含有循環小數的乘法，所以 $2.\bar{6}\times 7$ 就不知該如何表示，如圖 2，但經過引導之後，能夠正確的運用分數來計算，如圖 3。

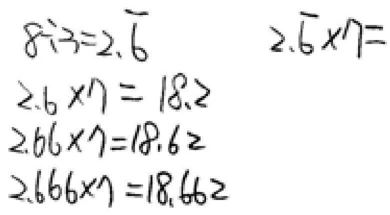

圖 2 小含的小數表徵方式

圖 3 小含的分數表徵方式

在學習方法方面，小含沒有在校外補習，不會有提前學習的現象，解題時較容易產生自發性解法；在課程學習方面，從比例相關課程的教學前到教學後，解題上會呈現不同的風貌；而在成長的歷程方面，經由國小六年級到國中一年級，跨越了不同的學習階段。為了能夠長期且深入的綜觀個案在比值與比例相關問題的解題表現，因此選擇小含為研究對象。

三、 研究工具

(一)研究者與共同研究者

在質性研究中研究者即為研究工具(Guba & Lincoln, 1981)，其所扮演的角色相當重要，因為研究者必須客觀的蒐集資料，同時在多變的質性研究過程中，需隨時調整腳步，以順應研究情境。劉祥通(2004) 認為研究者也應從教學者的角色去了解與分析學生的解題表現，此即研究者即教學者（researcher as teacher），換句話說，研究者訪談時應發揮教學者的角色，透過教學互動，才能更深入瞭解研究個案的想法。而研究者即模型的建造者（researcher as model builder），必須不斷地修正與建立自己對受試者解題的看法（Cobb & Steffe, 1983）。參與本研究

的成員包含研究者及共同研究者，茲分述如下：

1、 研究者

研究者目前在國中任教，教學年資約 20 年，根據文獻探討以及教學經驗設計相關工作單，解題時請小含盡量把作法寫得詳細，可以用算式、畫圖或文字描述來表徵。訪談時耐心的引導其將書面表達不清楚的地方，能完整的說出來。因此從解題表現裡，可以發現其思考模式，而從訪談中則能夠進一步瞭解其深層想法。除了資料的蒐集與整理分析，研究者需掌控研究流程，使研究工作能順利進行。

2、 共同研究者

共同研究者一位數學教育師資培育者。在本研究中，對於工作單上題目的設計，提供許多優質的建議；在資料的整理與分析上，與研究者共同檢驗分析的合理性，儘量顧及人員的三角校正；而在研究流程的掌控方面，時時提醒研究者做適切的修正，使整體研究工作能夠更完善。

(二)工作單

本研究在探討小含比例相關問題的解題表現，工作單是採用結構式工作單，共有三題，內容涵蓋了連比問題。第一題必須從 x 的 a 倍與 y 的 b 倍相等，找出 x 與 y 的比例關係，再利用給定的 x 與 y 的和求出 x 與 y 的值。而第二題與第三題是連比的問題，在 $ax = by$ ，$cy = dz$ 這兩個等式中，求出 x 、 y 與 z 的比例關係，再利用給定的 x 、 y 與 z 的和分別求出 x 、 y 與 z 的值。在第二題中，$b = c$ ，因此比較容易；而第三題 $b \neq c$，此時需以 b 與 c 的公倍數為橋樑，將 $ax = by$，$cy = dz$ 這兩個等式，連接成 $acx = bcy = bdz$ ，進而求出 x 、 y 與 z 的比例關係，這是比較有挑戰性的問題。對於只學過國小簡單的比例課程且未學過代數解法的小含來說，研究者可以從小含解工作單的表現，觀察其解題策略與自發性解法。

四、 資料蒐集與分析

資料的蒐集與分析，在質性研究的過程中必須要同時進行，且持續不斷的一直到研究將近完成(黃瑞琴，1991)，因此所蒐集到的資料勢必十分龐雜，必須做有系統的分類以及編碼，才能有效的運用所蒐集到的資訊。工作單上有小含的解題表現，而原案則包含訪談逐字稿及資料分析，訪談編碼為四位阿拉伯數字及一位英文字母，前兩位數字代表原案編號，末兩位數字是訪談流水號，英文字母T代表研究者說的話，S則是小含的話，例如 0103T，表示原案一訪談的第三句話，是研究者說的話。

為了研究的客觀性，研究人員對資料來源將進行三角校正，在研究人員方面分為兩部分，首先把研究者與共同研究者對小含解題表現的看法互做比較；其次是從小含的解題表現中，研究者自己認為小含可能的想法，與訪談之後小含實際的想法之間的比較。在資料來源方面則包含了工作單上的解題表現以及訪談。

肆、 研究結果與討論

本研究的題目類型包括了比例及連比相關問題，比例問題是型如 $ax = by$ ，$x + y = k$ 的題目，隨著 a 與 b 所代表數字的不同，x 與 y 彼此的倍數關係，或是整數，或是分數。而連比方面的問題是型如 $ax = by$ ，$cy = dz$ ，$x + y + z = k$ ，這類的題目。連比問題因為牽涉到三個量之間的比例關係，對於小六到國一的學生，是比較具有挑戰性的，尤其是 x 、 y 、 z 的係數變得複雜時，更不好處理。底下就三個原案來探討小含在比例問題(原案 1)及連比問題(原案 2、3)的解題表現。

一、 比例問題解題分析

原案 1

題目：兩位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 7800。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍。請問大姊每月存款有多少元？

題目分析：

這兩題是 $ax = by$ ，$x + y = k$ 的類型。在此 x 的係數是 2，y 的係數是 3，無法直接看出 x 與 y 兩者的比例(或倍數)關係。

學生初始解題分析：

小含利用畫線段圖的方式，將大姊存款的 2 倍與二姐存款的 3 倍當成 1，所以大姊的存款是 $\frac{1}{2}$ ，二姐的存款是 $\frac{1}{3}$ ，因此大姊的存款與二姐的存款的比是 3：2，由此可知小含不僅具備「部分-整體」的概念，也能用比的方式表徵。兩人的存款和是 7800 元，比是 3：2，再利用比例分配的概念可知大姊有 $7800 \times \frac{3}{5} = 4680$ (元)。

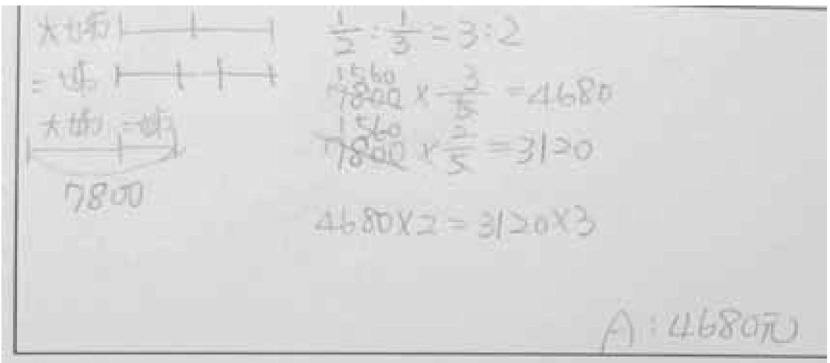

圖 4 原案 1小含的解題表現

訪談：

0101T：這一題你是如何進行的呢？

0102S：看題目的意思把圖畫出來。

0103T：從題目的意思如何把大姊及二姐畫出來？

0104S：先畫兩條一樣長的線段，因為大姊的 2 倍是二姐的 3 倍，所以大姊那一條線段分 2 等份，其中一等分是大姊，而二姐那一條線段分 3 等份，其

中一等分是二姐。

0105T：再來呢？

0106S：兩人的和是 7800，所以其中一等份合起來是 7800。

0107T：那$\frac{1}{2}$：$\frac{1}{3}$是什麼？

0108S：其中一等份分別是$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$，所以大姊比二姐是 3 比 2。

0109T：為什麼要乘以$\frac{3}{5}$呢？

0110S：因為大姊比二姐是 3 比 2，大姊佔 3 份，二姐佔 2 份，總共佔 5 份，所以大姊佔全部的$\frac{3}{5}$？

0111T：你還有驗算？

0112S：想確定一下，有沒有做對。

0113T：很好。

訪談後分析：

小含還是先利用畫線段圖來做這個題目，看到他的解法，猜測他能有效運用基準量且具備「部份－整體」的概念，在訪談時為了確認她的想法，特地再問那$\frac{1}{2}$：$\frac{1}{3}$是什麼？（00107T）以及 為什麼要乘以$\frac{3}{5}$呢？（0109T）。他將大姊存款的 2 倍與二姐存款的 3 倍當作基準量 1，且能以$\frac{1}{2}$表示大姊的存款所佔的份量、$\frac{1}{3}$表示二姐的存款所佔的份量(行號 0104S)。除了之外，也能夠將代表大姊與二姐的部份以比的方式呈現(行號 0108S)，同時能將兩者的存款按照 3：2 的比例適當的分配(行號 0110S)，由此可知，小含對於比例的運用有所瞭解。

二、 連比問題解題分析

前一節討論的是兩個量之間的關係，本節增加一個量，所要討論的是型如

$ax=by$ ，$cy=dz$ ，$x+y+z=k$ ，這類的比例題目。因為牽涉到三個量的比例關係，我們稱之為連比，這類題目必須從兩兩間的關係，擴充到三者的比例關係，對於小六到國一的學生，是比較具有挑戰性的，尤其是 x 、 y 、 z 的係數變得複雜時，更不好處理。

原案 2

題目：三位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 7800。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 3 倍是小妹存款的 4 倍。請問大姊每月存款有多少元？

題目分析：

本題是型如 $ax=by$ ，$by=dz$ ，$x+y+z=k$ ，這類的比例題目。從 $ax=by$ ，$by=dz$ ，這兩個式子中，以 by 為橋樑，找出 x 、 y 、 z 三者的比例關係。

學生初始解題分析：

學生將三人的關係用線段畫出來，同時可以用比的形式表示，最後能按比例方式將 7800 做分配。

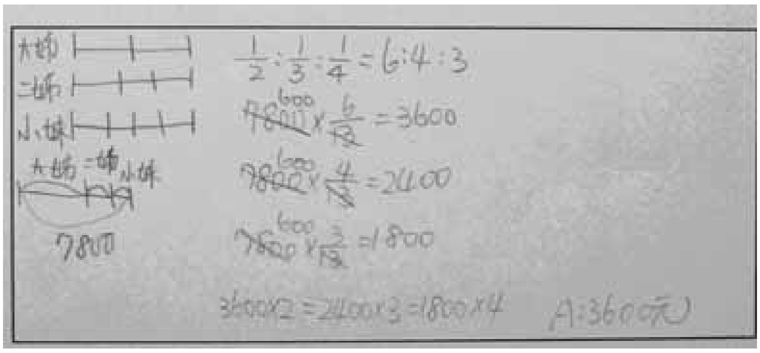

圖 5 原案 2小含的解題表現

訪談：

0201T：這一題你是如何進行的呢？

0202S：看題目的意思把圖畫出來。

0203T：為什麼要畫線段圖呢？

0204S：畫線段可以比較清楚。

0205T：從題目的意思如何把大姊、二姐及小妹畫出來？

0206S：先畫兩條一樣長的線段，因為大姊的 2 倍是二姐的 3 倍，所以大姊分 2 份，二姐分 3 份。因為二姐的 3 倍是小妹的 4 倍，所以再畫一條一樣長的線段，把它分 4 份，就是小妹的了。

0207T：那$\frac{1}{2}$：$\frac{1}{3}$：$\frac{1}{4}$是什麼？

0208S：因為大姊 2 份、二姐 3 份與小妹 4 份都一樣長，大姊是$\frac{1}{2}$、二姐是$\frac{1}{3}$，而小妹是$\frac{1}{4}$。$\frac{1}{2}$：$\frac{1}{3}$：$\frac{1}{4}$就是三人的比。

0209T：$\frac{1}{2}$：$\frac{1}{3}$：$\frac{1}{4}$是如何化成 6：4：3？

0210S：可以同時乘以 12。

0211T：12 是 2、3、4 的什麼？

0212S：最小公倍數。

0213T：為什麼要乘以$\frac{6}{13}$呢？

0214S：因為 6：4：3 總共分 13 份，大姊佔 6 份，所以大姊佔全部的$\frac{6}{13}$。

0215T：你還有驗算？

0216S：想確定一下，有沒有做對。

0217T：很好。

訪談後分析：

用畫線段圖的方式似乎是一個不錯的方法，可以比較清楚的呈現彼此的關係(行號 0204S)。將大姊的 2 倍、二姐的 3 倍及小妹的 4 倍當作 1，具備了基準量

的概念，而將大姊視為$\frac{1}{2}$、二姐視為$\frac{1}{3}$、而小妹視為$\frac{1}{4}$，對於部分－整體的概念也相當完備，同時也有能力把分數的比化為簡單的整數比(行號 0210S)。

原案 3

題目：三位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 6600。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 4 倍是小妹存款的 5 倍。請問大姊每月存款有多少元？

題目分析：

本題是型如 $ax = by$ ，$cy = dz$ ，$x + y + z = k$ ，這類的比例題目。從 $ax = by$ ，$cy = dz$ ，這兩個式子中，以 y 為橋樑，找出 x 、 y 、 z 三者的比例關係。

學生初始解題分析：

<u>小含</u>一開始不會做，無法將二姐不同的倍數，做有效的連結，經過介入教學之後(行號 0303T至行號 0322S)才能處理，底下是<u>小含</u>經介入教學之後的解題表現：

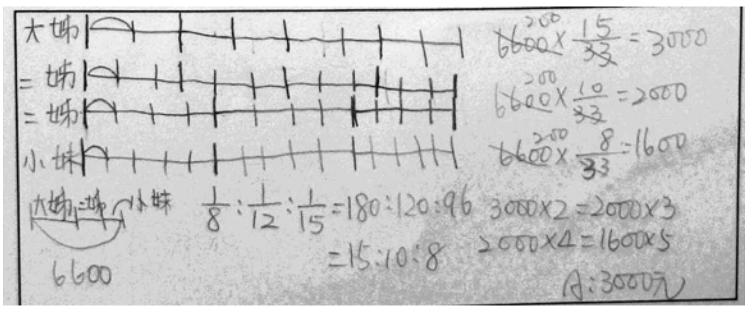

圖 6 原案 3<u>小含</u>的解題表現

訪談：

0301T：這一題不會做嗎？

0302S：想不出來。

0303T：你覺得可以從什麼地方著手？

0304S：從他們之間的倍數關係。

0305T：如果 3 個人只畫 3 個線段，就會比較清楚，但是這裡有 4 條線段，你所畫的線段有哪個重覆？

0306S：二姐的線段。

0307T：所以我們可以從那一個人著手？

0308S：二姐。

0309T：但是兩條表示二姐的線段不一樣長。

0310S：是呀。

0311T：既然是要二姐當橋樑，但是這兩條線又不一樣長，那該怎麼辦？

0312S：……

0313T：你剛剛說跟他們之間的倍數有關係，那可不可以從倍數的關係來想想看，如何才能讓表示二姐的兩條線段變得一樣長。

0314S：不太知道耶。

0315T：表示二姐的兩條線段，在上面那一段有 3 份，下面那一段有 4 份，所以兩段當然不一樣長，你可以試試看上面那一段排幾個，會跟下面那一段排幾個一樣長？

0316S：上面那一段排 4 個，下面那一段排 3 個。

0317T：不錯，我們來看大姊與二姐的部分，如果表示二姐的線段變成 4 倍，那大姊要怎麼辦才會跟二姐一樣長？

0318S：二姐 4 倍，大姊也要 4 倍。

0319T：很好，相同的方式，二姐與小妹的部分，如果表示二姐的線段變成 3 倍，那小妹要怎麼辦才會跟二姐一樣長？

0320S：二姐 3 倍，小妹也要 3 倍。

0321T：很好，那這樣表示大姊、二姐、小妹的線段都一樣長了，今天先到這裡，剩下的部分你再想想看。

0322S：好。

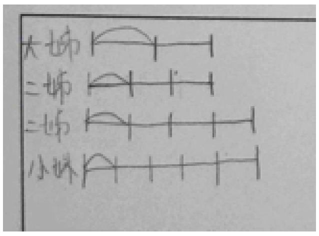

圖 7 原案 3<u>小含</u>的解題過程

(經過 3 日後…)

0323T：想出來了嗎？

0324S：這樣不知道可不可以？

0325T：我看看…，不錯喲，$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{15}$分別是什麼意思？

0326S：表示大姊、二姐、小妹的線段都一樣長後，有 8 個大姊、12 個二姐以及 15 個小妹。所以大姊就是$\frac{1}{8}$、二姐就是$\frac{1}{12}$、小妹就是$\frac{1}{15}$。

0327T：那大姊與二姐的比是多少？

0328S：$\frac{1}{8}:\frac{1}{12}$。

0329T：二姐與小妹的比又是多少？

0330S：$\frac{1}{12}:\frac{1}{15}$。

0331T：所以三個人的比就是……。

0332S：$\frac{1}{8}:\frac{1}{12}:\frac{1}{15}$

0333T：那接下來的做法就跟上一題類似了。

0334S：是的。

訪談後分析：

這一題<u>小含</u>不會做，因此研究者期能以最少的引導介入教學(行號 0303T至行號 0322S)，從 4 條線段中<u>小含</u>能夠選擇重複的二姐著手(行號 0308S)，亦即以

二姐的線段長當橋樑，連結表示大姊、小妹的線段。為了要處理表示二姐的兩條不一樣長線段，小含分別畫成 4 倍長及 3 倍長(行號 0316S)，如此一來這兩條表示二姐的線段長度就一樣了，小含是運用公倍數的概念來處理這個問題。當表示大姊、二姐與小妹的線段長都一樣之後，可以發現這個長度是大姊的 8 倍、二姐的 12 倍以及小妹的 15 倍(行號 0326S)，而兩個比，大姊：二姐＝$\frac{1}{8}$：$\frac{1}{12}$以及二姐：小妹＝$\frac{1}{12}$：$\frac{1}{15}$，也能將其表示成大姊：二姐：小妹＝$\frac{1}{8}$：$\frac{1}{12}$：$\frac{1}{15}$，此即所謂的連比。

伍、 結論與建議

一、 結論

經過這三個原案的分析，研究者分析以下的原因是解題成功的關鍵：

(一)以適當的圖形表徵題意

表徵是五個數學過程(表徵、溝通、解題、連結、推理)之一(NCTM，2000)。而Francis(2001)也提到，表徵不只是一個過程，它也是教導數學以及學習數學的途徑，它之所以重要是因為，表徵幫助學生在不同的情境中，認出共同的數學成分，對思考而言，表徵是強而有力的工具，對反思而言，可以產生更具體且可利用的數學概念。小含做這些題目的時候，剛升上國中一年級，對於文字符號的運用，代數的運算，還沒什麼概念，因此在處理這類問題時，以畫線段的方式來處理，不僅有助於理解問題，更能夠具體的呈現彼此間的比例關係。

(二)正確的選擇基準量

遇到「大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍」這種情況，一般會將大姊的存款當作 1，則二姐的存款是$\frac{2}{3}$；或是將二姐的存款當作 1，則大姊的存款是$\frac{3}{2}$，不管是哪一種情形，若要用畫線段的方式表徵，都不是很簡單。但是在原案一中，

小含將大姊存款的 2 倍與二姐存款的 3 倍當成 1，以此為基準量時，表示大姊存款 2 倍與二姐存款 3 倍的線段是一樣長的。如此大姊的存款就是將此線段二等分中的一份，也就是 $\frac{1}{2}$；而二姐的存款就是將此線段三等分中的一份，也就是 $\frac{1}{3}$。小含以畫線段的方式表徵大姊與二姐存款的關係，選擇大姊存款的 2 倍與二姐存款的 3 倍當作基準量，是不錯的選擇。而在原案三中，更將大姊的 8 倍、二姐的 12 倍以及小妹的 15 倍當作基準量來解題，可見具備基準化的能力，在解比例問題時是必要的。

(三)能以相同的倍率(放大或縮小)表徵成比例的數

比的前項與後項可以同乘或同除一個不為零的數，而不改變其比值，亦即 $a:b=ma:mb=\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$， $mn\neq 0$。這個比的運算法則小含能夠充分的運用，在將分數的比化為最簡單的整數比的過程中，不僅兩個數的比能夠處理，三個數的比也能運用得宜。

除了數字的運算能有所掌握之外，為了表徵比例關係所畫的線段，也能運用此原則，在原案三中，當表示二姐 3 倍存款的線段變成 4 倍時，表示大姊 2 倍存款的線段也要變成 4 倍(行號 0318S)。由此可知，小含能夠有效的運用成比例的數能以相同的倍率放大或縮小這個解題策略。

(四)教學介入引發小含再思考三者的關係，進而獲得成功的解題。

為了盡量呈現小含的解題想法，研究者有必要教學介入時，應該注意到只能給予最少的引導。在原案三中，大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 4 倍是小妹存款的 5 倍，因為二姐的倍數不同，小含一開始不會做。經過研究者利用訪談的機會，教學介入提示應以誰為橋樑之後，小含因此能思考如何將表示二姐的兩條不同長度的線段，運用公倍數的概念化成一樣長，再以此線段長當橋樑，表徵出大姊、小妹的線段長。如此就能找出三者的比例關係，順利的解題。

二、 建議

本研究進行的時程，個案對於含有文字符號的代數運算還不熟練，至於國中的比例課程也尚未接觸，因此無法探究 Langrall & Swafford(2000)所提出的形式的比例推理(formal proportional reasoning)的解題策略。若能繼續探討學生在國中比例問題的解題表現，相信從國小尚未學習比例相關課程，到國中運用代數解比例問題，會有較完整的資料呈現，也真正符合九年一貫的課程銜接。

參考文獻

中文部分

台灣省國民教師研習會(1997)。*國民小學數學實驗課程教師手冊第十冊*。台北：研習會出版。

何意中(1988)。國小三、四、五年級學生比例推理之研究。*花蓮師院學報，2*，387-433。

林福來(1984)。青少年的比例概念發展。*科學教育月刊，73*，7-26。

周筱亭、黃敏晃(2002)。*國小數學教材分析—比(含線段圖)*。台北：國立教育研究院籌備處。

翁宜青(2003)。*一位國小三年級學生解比例問題之研究*。嘉義，台灣：國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文(未出版)。

郭生玉(2002)。*心理與教育研究法*(十八版)。台北縣：精華。

陳英傑(1992)。台南師院學生比例概念的研究。*台南師院學報，25*，319-343。

黃瑞琴(1991)。*質的教育研究法*。台北：心理出版社。

葉建德(2005)。*一位七年級學生解速率問題之研究*。嘉義，台灣：國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文(未出版)。

楊錦連(1999)。*國小高年級兒童解決比例問題之研究*。嘉義，台灣：國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文(未出版)。

劉祥通、周立勳(1999)。國小比例問題教學實踐課程之開發研究。*國立台中師範學院數理學報*，*3*(1)。

劉祥通(2004)。*分數與比例問題解題分析—從數學提問教學的觀點*。台北：師大書苑。

魏宗明、劉祥通(2003)。兒童對數學比例問題的建構。*科學教育研究與發展季刊*，*32*，87-108。

Clark,F.B. & Kamii,C.(1997).Identification of multiplicative thinking in children in grade 1-5.載於台北市立師範學院兒童發展研究中心主編：*建構主義在國小低年級和幼稚園數學教學的應用學術研討會論文集*。台北：台北市立師範學院兒童發展研究中心。

外文部分

Bar,V.(1987).Comparison of the development of ratio concepts in two domains.*Science Education,71*(4),599-613.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T.R., & Silver, E.A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh.,& M.landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and Process*(pp.91-126). New York: Academic Press, Inc.

Chapin,S.H.,&Anderson,N.C.(2003).Crossing the Bridge to Formal Proportional Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School,8*(8),420-425.

Cobb,P.,& Steffe,L.P.(1983).The constructivism researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,14*(2).83-94.

Fennell, F. & Rowan, T.(2001).Representation：An important Process for teaching and learning mathematics.*Teaching Children Mathematics*,*7*(5).288-292.

Freudenthal, H.(1983).*Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Co.

Goldin,G.A.(1998).Observating mathematical problem solving through tasked based interviews. In A.R.Teppo(Ed.),*Qualitative research methods in mathematics education*.(pp.40-62).Reston,VA.:National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin,G.A.(2000).A scientific perspective on structured,tasked-based interviews,in mathematics education research.. In A.E.Kelly & R.A.Lesh(Ed.),*Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*.(pp.517-545).Mahwah, New Jersey:Lawrence Erlbaum Associates,Publishers.

Guba, E. G. & Lincoln, Y. S.(1981).*Effective evalution:Improving the usefulness of evalution results through responsive and naturalistic approaches*. San Francisco:Jossey-Bass.

Hannah,S. (2000).Moving to proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School,6*(1),58-60.

Hart, K. M.(1981).*Children's understanding of mathematics*(pp.11-16).London:John Murray Ltd.

Kieren, T. E.(1980). Knowing rational numbers: Ideas and symbols. In M. Lindquist(Eds.), *Selected issues in mathematics education*, Chicago:National Society for the Study of Education. Reston, VA: National Council and Teachers of Mathematics

Miller, J. L& Fey, J. T. (2000).Proporational reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School,5*(5),310-313.

Lamon,S. J.(1993).Ratio and proportion:Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,24*(1).41-61.

Lamon,S. J.(1994).Ratio and proportion:Cognitive foundations in unitizing and norming.In G. Harel and J. Confrey(Eds.),*The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*(pp.89-120).Albany N.Y.:State University of New York Press.

Lamon,S. J.(1995).Ratio and proportion:Elementary didactical phenomenology. In J.

T. Sowder,& B. P. Schappelle(Eds.),*Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*(pp.167-198).Albany N.Y.:State University of New York Press.

Langrall,Cynthia W., and Jane Swafford.(2000).Three Balloons for Two Dollars: Developing Proportional Reasoning.*Mathematics Teaching in the Middle School,6*(4)*,*254-261.

Lesh,R.,Post,T.,&Behr,M.(1988).Proportional Reasoning. In J.Hiebert & M.Behr(Eds.),*Number Concepts and Operations in the Middle Grades*(pp.93-118).Reston,VA:NCTM.

Lo,J.J.,&Watanabe,T.(1997).Developing ratio and proportion schemes:A story of a fifth grader. *Journal for research in Mathematics Education,28*(2),216-236.

Ma,Liping.(1999).*Knowing and Teaching Elementary Mathematics:Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*.Mahwah,N.J.:Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics.(2000).*Principles and Standards for School Mathematics*.Reston,VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Noelting, G. (1980).The development of proporational reasoning and then ratio concept:partⅠ-Differentiation of stage. *Education Studies in Mathematics, 11*,217-253.

Piaget,J.,＆Inhelder,B.(1975).*The origin of the idea of chance in children*.New York：W.W.Norton.

Schorn,A.C.(1989).*Proportional reasoning by young children*.Unpublished master's thesis,Cornell University,Ithaca,NY.

Van den Brink,J., & Streefland,L.(1979).Young children(6-8)-ratio and proportion. *Educational operations in the middle grades*(pp.141-161).Reston, VA:NCTM.

Vergnaud, G.(1983). Mutiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau(Eds).

Acquisition of mathematics concepts and procedures(pp.127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G.(1988). Mutiplicative structures. In J. Hievert & M. Behr(Eds). *Number concepts and operations in the middle grades*(pp.141-161). National Council and Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates.

附錄

工作單

1、兩位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 7800。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍。請問大姊每月存款有多少元？

2、三位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 7800。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 3 倍是小妹存款的 4 倍。請問大姊每月存款有多少元？

3、三位姊妹有儲蓄的好習慣，每月存款的總和為 6600。已知大姊存款的 2 倍是二姐存款的 3 倍，二姐存款的 4 倍是小妹存款的 5 倍。請問大姊每月存款有多少元？