

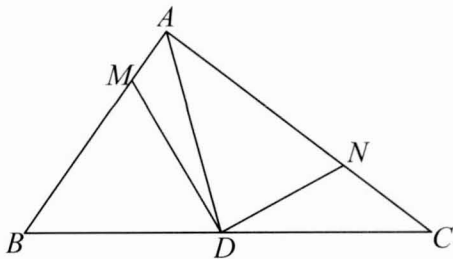
中學生通訊解題第七十九期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

7901

如圖： $\triangle ABC$ 中， \overline{AD} 是邊 \overline{BC} 上的中線，點 M 在 \overline{AB} 邊上， N 點在 \overline{AC} 邊上，並且 $\angle MDN = 90^\circ$ ，若 $\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{DN}^2$ ，求證： $\overline{AD}^2 = \frac{1}{4} (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$



參考解答：

如圖，連接 \overline{MN} ，延長 \overline{ND} 至 P ，使得 $\overline{DP} = \overline{DN}$ ，連結 \overline{BP} ， \overline{MP}

$$\because \angle 1 = \angle 2, \overline{BD} = \overline{DC}$$

$$\therefore \triangle BPD \cong \triangle CND \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \overline{BP} = \overline{CN}, \text{ 且 } \angle DBP = \angle DCN$$

$$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{BP}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \overline{MP} &= \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{DM}^2} = \sqrt{\overline{DN}^2 + \overline{DM}^2} \\ &= \overline{MN} = \sqrt{\overline{DN}^2 + \overline{DM}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{已知 } \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2} &= \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{BP}^2} \end{aligned}$$

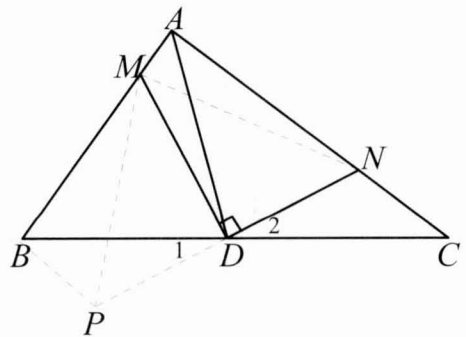
$$\therefore \angle MBP = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{BP}$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ \text{ (同側內角互補)}$$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \frac{1}{4} \overline{BC}^2 = \frac{1}{4} (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$$



解題評註：

本題作輔助線，再利用全等三角形性質與畢氏定理即可解決。大部分同學的解法相差不多。上面的解法僅供各位參考。

問題編號

7902

一袋中有紅、黃、綠三種顏色的球共 88

個，假設紅球有 x 個、黃球有 y 個、綠球有 z 個，其中 $x \geq y \geq z \geq 1$ 。已知袋中的球滿足「若從中任意取出 24 個球，則取出的球一定至少有 10 個是相同顏色」的條件，試問能夠滿足此條件的序對 (x, y, z) 有組。

參考解答：

若取出的紅、黃、綠三色球數目均為 8 個，則不符合題意，因此若 則有可能取出不合題意的結果。

$z = 1$ ， $(x, y, z) = (86, 1, 1) \cdot (85, 2, 1) \cdot \dots \cdot (44, 43, 1)$ ，有 43 組

$z = 2$ ， $(x, y, z) = (84, 2, 2) \cdot (83, 3, 2) \cdot \dots \cdot (43, 43, 2)$ ，有 42 組

$z = 3$ ， $(x, y, z) = (82, 3, 3) \cdot (81, 4, 3) \cdot \dots \cdot (43, 42, 3)$ ，有 40 組

$z = 4$ ， $(x, y, z) = (80, 4, 4) \cdot (79, 5, 4) \cdot \dots \cdot (42, 42, 4)$ ，有 39 組

$z = 5$ ， $(x, y, z) = (78, 5, 5) \cdot (77, 6, 5) \cdot \dots \cdot (42, 41, 5)$ ，有 37 組

$z = 6$ ，則 $y \leq 8$ （因為若 $y \geq 9$ ，則取出球的可能是 $(9, 9, 6)$ ），因此 $(x, y, z) = (76, 6, 6) \cdot (75, 7, 6) \cdot (74, 8, 6)$ ，有 3 組

$z = 7$ ，則 $y \leq 7$ （因為若 $y \geq 8$ ，則取出的球有可能是 $(9, 8, 7)$ ），因此 $(x, y, z) = (74, 7, 7)$ ，有 1 組

能夠滿足此條件的序對 (x, y, z) 有 $43 + 42 + 40 + 39 + 37 + 3 + 1 = 205$ 組

問題編號

7903

試證明對所有正整數 n ， $2n^2 + 1, 3n^2 + 1, 6n^2 + 1$ 等三數的乘積不是完全平方數。

參考解答：

$$\begin{aligned} & (2n^2 + 1)(3n^2 + 1)(6n^2 + 1) \\ &= 36n^6 + 36n^4 + 11n^2 + 1 \\ &= (6n^3 + 3n)^2 + (2n^2 + 1) \end{aligned}$$

又因為 $0 < 2n^2 + 1 < 2(6n^3 + 3n) + 1$ ，

所以

$$(6n^3 + 3n)^2 < (n^2 + 1)(3n^2 + 1)(6n^2 + 1) < (6n^3 + 3n + 1)^2$$

由上述可得 $2n^2 + 1, 3n^2 + 1, 6n^2 + 1$ 等三數的乘積介在兩連續整數的平方數之間，

故 $2n^2 + 1, 3n^2 + 1, 6n^2 + 1$ 等三數的乘積不是完全平方數。

問題編號

7904

已知一個六位自然數 n ，它以 p 為個位數。若把 n 的個位數 p 移到其餘各位數之前所得之新數是 n 的 4 倍。請問滿足此條件之 n 有那些？

參考解答：

設此數 $n = 10q + p$, 6 位數,

故 $39q = (10^5 - 4)p = 99996p$, 則 $q = 2564p$,
但 $n = 10q + p$ 為 6 位數, 則 q 為 5 位數, 故
 $10000 \leq q = 2564p \leq 99999$, $4 \leq p \leq 9$ 共 6 組
解,

$$p = 4, n = 102564$$

$$p = 5, n = 128205$$

$$p = 6, n = 153846$$

$$p = 7, n = 179487$$

$$p = 8, n = 205128$$

$$p = 9, n = 230769$$

答案: 102564, 128205, 153846, 179487,
205128, 230769

解題評註:

此題屬於數論簡易題。一共有十九位同學參與此題徵答。絕大多數的同學, 運用未知數的假設方式利用已知條件及運算, 解出問題的結果, 表現值得肯定。

問題編號

7905

某個數列 $\langle a_n \rangle$ 定義如下: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$,
且對於任意大於 3 的正整數 n , 皆符合
 $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ 的條件且
 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n$, 若 $a_{28} = 6090307$,
 $a_{29} = 11201821$, $a_{30} = 20603361$, 則試求 S_{28}
除以 1000 的餘數。

參考解答:

已知 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, 且對於任意正整數
 n , $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ 。

由 $a_{n+3} - a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$,

$$\text{得 } \sum_{k=1}^n (a_{k+3} - a_{k+2}) = \sum_{k=1}^n (a_{k+1} + a_k)$$

又令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 由上面式子連加推導

得 $a_{n+3} - a_3 = a_{n+1} + 2S_n - a_1$,

$$\text{即 } S_n = \frac{1}{2}(a_{n+3} - a_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_{n+2} + a_n)$$

因為 $S_{28} = \frac{1}{2}(a_{30} + a_{28}) = 13346834$,

所以 $\sum_{k=1}^{28} a_k$ 除以 1000 的餘數為 834。

解題評註:

此題屬於數論遞迴問題。由於此類問題較少在國中課程出現, 因此僅有三位同學參與此題徵答。