

第壹章 緒論

第一節 問題背景與研究動機

在現實世界裡，我們常常面對的是比「等量關係」出現更頻繁的「不等量關係」，其反映在數學上就是不等式，因此就科學發展上的意義來說，進一步研究及釐清不等式的問題是重要且必須的，如此數學才会有更大的實用價值。綜觀當今高級中學數學課程裏，不等式出現的章節不少，在高一上有一元一次不等式(如： $5x+3>7$)、一元二次不等式(如： $x^2-2x-3<0$)、一元高次不等式(如： $(x^2-3x+5)(2x-1)(3x+1)>0$ 、 $(x-1)^8(x^2-2x-1)(x+3)<0$)，高三上數學甲、數學乙有絕對不等式(如：算幾不等式、柯西不等式)、分式不等式(如： $\frac{x-3}{2x+5}<2$)、根式不等式(如： $\sqrt{x+3}<2x-1$)、指數不等式(如： $9^x-4\cdot 3^x-5<0$)、對數不等式(如： $\log_3^{x^2-3x+2}<2$)、簡易三角函數不等式(如： $\cos^2 x-4\cos x-3<5$ 以及二元一次不等式(如： $3x-4y+5<0$)等等，可見不等式在高級中學的數學課程中佔了一個相當大的份量，因此要學好高中數學，釐清不等式的運算及概念是相當重要的。上述所談到的那些不等式，在處理上常常必須使用到一元二次不等式，因此當學生對一元二次不等式沒有建立適當且良好的概念時，必然在學習一些其它的不等式時，會覺得特別辛苦及挫折。

然而，當八十六年國民中學教材大改版以後，原本放在國民中學數學教材內容的一元一次不等式及二元一次不等式，不是改列為選修教材就是未編列於數學課程內，且不在基本學力測驗考試範圍內，所以多數國民中學在升學考量之下，也就不在課堂上教授。因此，許多高中老師發現現今高中生在處理及學習有關不等式問題的能力，似乎比起從前的學生有下降的趨勢，尤其當教到高一上一元二次不等式的章節時，根據研究者本身的教學經驗及同事之間的相互討論得知，往

往會發現學生在這個部分常出現許多學習上的錯誤及障礙。例如，有些學生面對一元二次不等式時，只會解一些基本形式的問題，如 $(x+3)(x-2) < 0$ 、 $x^2 - 3x - 4 < 0$ 這類可以因式分解的問題，然而當符號改變時，例如變成 $(x+3)(2-x) < 0$ 、 $-x^2 + 3x + 4 < 0$ 時，學生的答案竟然和先前的例子 $(x+3)(x-2) < 0$ 、 $x^2 - 3x - 4 < 0$ 的答案完全相同，顯然學生在一元二次不等式的學習上，存在著一些迷思概念。因為這些錯誤的概念，不僅阻撓了學生對一元二次不等式的學習，更妨礙其他不等式的學習。

根據吳季鴻 (2001) 對 321 名高三學生所作調查及研究，發現高三學生在一元二次不等式的解題上，存在著七大錯誤類型：

- (一) 因式分解錯誤。
- (二) 錯誤的運算規則。
- (三) 同號、異號的的處理錯誤。
- (四) 變號的處理錯誤。
- (五) 恆正恆負的判斷錯誤。
- (六) 將領導係數當作正數處理。
- (七) 過度使用無解及無限多解。

從上述錯誤類型中，的確可以看出高三學生在經過兩年高中數學學習之後，在一元二次不等式的解題中仍存在著許多錯誤，而這些錯誤類型的產生，可能是因為學生在高一上學期一元二次不等式教學課程進行時，就未能理解教學課程的內容及概念，亦或是個人對相關內容的先備知識不足所造成，因此本研究將先試著找出高一學生在一元二次不等式教學課程後，對一元二次不等式的解題有哪些主要的錯誤類型及造成這些主要錯誤類型的原因。

Ashlock (1990) 及 Brown & Burton (1978) 指出分析學生錯誤類型的過程對老師及學生是有幫助的，教師藉由這種錯誤類型的分析可以知道學生常犯哪些系統性的錯誤，以修正教師的教學。教師藉由詳實的錯誤類型分析，可發現學生的學習困難，並瞭解學生錯誤的可能原因是否是由於錯誤的思考過程，或其他原

因所造成。而當學生在「一元二次不等式」單元發生錯誤和學習困難時，教師應該適時進行補救教學，否則對於往後相關不等式的學習，必會產生更大的學習障礙及問題，影響相關數學題材的學習。而補救教學的實施，可以幫助學生克服學習上的困難，達到有效的學習目標（許天威，1986）。站在數學教育的觀點，幫助學生建立正確的數學概念是數學教育的重要課題及身為數學教師的責任。

現今的教育改革中，一個主要的訴求是，「把每一個學生帶上來」，「在教育理念與地方教育實務」研討會會議記錄中(行政院教育改革審議委員會，1996)，對於實施補救教學曾主張如下：

政府辦理國民教育，應該堅持他的普遍性與公平性特質。從學生走進學校，劃入班級時，就應該注意無論何種編班方式，都可能有其功效上的侷限。因此在設計上，應盡力使每個學生都能得到最好的照顧。此外，應發展學習診斷工具，配合以合宜的師資，規劃恰當的課程與教材。一方面使學生因為經驗與基本能力不足所造成的學習挫折，減到最小；另一方面，保證未來求知過程中不會受傷，人格得以健全發展。如果在國民教育階段，學習成果因個體的條件，而有難以短時間平的差異，政府應檢討規劃，建立完整而一貫的補救教學系統，並輔以必要之補償教育措施，使個人的學習獲得自我的改善，可以在終身的學習時程上進行。

從上面論述中顯示，補救教學在現今教育改革中，日趨重要，因此將補救教學融入實際的學校的教學中，為實踐「把每一個學生帶上來」的重要措施之一。找出學生的錯誤及迷思概念，並設計一個合適且有效的補救教學課程內容，讓補救教學的活動成功，讓學生跨越學習的瓶頸，是研究者在此篇研究主要探討的課題。

隨著時代的變遷及資訊科技的不斷發展，電腦在台灣已相當普及，使用電腦已變成台灣學生日常生活中的一部分，加上教育部更在 1999 年「資訊教育基礎建設—擴大內需方案」中大手筆的在一年內完成了校校有電腦，連線上網百分之百的基礎建設，更以「班班有電腦，人人能上網」為目標，推廣資訊教育，因此使用電腦來輔助教學，也變成老師課堂上一個強而有力的教學工具，它在數學教學上的應用也越來越多且普遍。

1983年，美國數學教師協會(NCTM)強調所有各階層的數學教師為了教導數學技能與概念，而讓學生達到有效的學習，應使用科技的工具，以促進概念的發展。國內的研究者(吳鐵雄，1983；陳英娥，1992；蕭登仲，2002；陳正明，2003)也指出電腦在數學教學及輔助教學上，可以提高學生的學習成效，改善教學品質。因此研究者嘗試搭配電腦的輔助，利用其可以重複操作練習、動態繪圖等功能，設計補救教學課程內容，將二次函數的圖形以動態方式呈現，讓學生可以將二次函數圖形和一元二次不等式建立適當的聯結，進而增進其解決一元二次不等式的能力，期能改善學生在一元二次不等式學習上的困難。

第二節 研究目的及問題

基於上述的研究動機，本研究的研究旨在探討高一學生在「一元二次不等式」的教學課程進行完畢之後，對一元二次不等式的解題出現哪些的主要錯誤類型及其錯誤的原因。當出現這些主要錯誤類型時，如何進行補救教學？進行補救教學活動後是否有成效？最後並想瞭解學對補救教學活動的看法。研究的主要問題如下：

1. 高一學生在「一元二次不等式」的教學課程進行完畢之後，對於一元二次不等式的解題有哪些主要的錯誤類型？
2. 這些主要錯誤類型的產生原因為何？
3. 針對這些主要錯誤類型進行補救教學時，教學活動應如何設計才能使補救教學具有成效？此時教學應如何進行？
4. 經過補救教學活動之後，學生對教學內容裏的問題其解題的答對率是否提高？學生在一元二次不等式解題時所犯的錯誤類型是否有改善？經補救教學活動一段時間後，其正確解題的保留情形為何？
5. 學生經補救教學後，對補救教學活動的看法為何？

第三節 電腦補救教學之理論基礎

本研究的主要目的是以電腦來輔助教學，試圖幫助在一元二次不等式有學習困難的學生克服學習障礙，並提升其學習效果。本研究係以奧斯貝(Ausubel, 1968)的教學理論及史金納 (Skinner, 1958) 的編序教學法作為電腦補救教學之理論基礎，及課程設計原則之依據，茲分別說明如下：

一、奧斯貝 (Ausubel, 1968) 的教學理論

奧斯貝(Ausubel, 1968) 重視有意義的學習，但他認為學生不一定知道什麼是重要的、或相關的，也未必能自行組織學習材料，因此，他主張「接受式學習」，亦即由教師將學習內容組織成最後的形式，並有系統地呈現給學生。從教學的觀點而言，稱之為「講解式教學法」(expository teaching)。這種方式有助於學習者在很少的時間內獲得大量的知識。

在教學設計上，奧斯貝的主張如下：

1. 考慮學生「學習準備度」：在教學前，可透過正式的「前測」或是非正式的「口頭問答」，來確定學生是否擁有適當的認知結構足以瞭解新的教材，然後據此決定教學的內容。檢查結果若無，則應透過「前導架構」，提供相關的背景知識。
2. 呈現「前導架構」：「前導架構」是指在教學前所提出的一個比學習材料本身具有較高抽象性、一般性、及涵蓋性的引介材料。簡單的說，是指在教學前對學習內容作一抽象而概括性的介紹。當學習材料是學習者陌生的內容時，可用「說明式架構」提供先備知識，以利理解和學習新的訊息。而當學習材料與學習者已有知識或經驗相關時，可用「比較式架構」使新舊知識發生關連。
3. 以「漸近分化」的原則，組織和呈現教材：奧斯貝認為教材的呈現順序一方面要能配合「前導組體」所呈現的架構，另一方面要採「漸近分化」

的方式，亦即由上而下，從教導一般性概念循序漸進到具體事例，稱之為「演繹式」的教學順序。

4. 辨別異同，以促進「統整融合」：教師在呈現教材時，應協助學生釐清學習內容中各項事例、概念和原則彼此間的關係，並對學習內容中重要相似及相異點進行比較，以便能清晰而穩定的融入學習者的原有認知結構。
5. 教學活動符合有意義學習的原則：在「漸近分化」和「統整融合」的過程中，奧斯貝相當重視「實例」的運用，包括圖示在內。除了教師講述外，奧斯貝也鼓勵班上進行分組討論及其他學生活動。他認為這些方式（包括舉例），都有助於學生透過自己的經驗來瞭解學習內容，符合有意義學習的原則。

二、史金納 (Skinner, 1958) 的編序教學法

電腦輔助教學是「一種直接運用電腦交談模式來引介教材，並控制個人化教學環境的教學過程」(Hickes & Hyde, 1973)。也由於電腦的發展，幫助了教育學者實現了 Skinner 所設計的編序教學(programmed teaching)。

對 Skinner (1958)來說，要使學習過程能有效的進行，要涵蓋下列特徵：

1. 小步驟 (small steps)：有待學習的材料，係以小步驟呈現。給學習者少量的資訊，並從某細目或資訊中的某一項，依序進入另一架構，此即直線編序(linear program)之意義。
2. 外顯反應 (overt responding)：學生被要求做明顯的反應，如此正確的反應才能得到增強，不正確的反應才能獲得改正。
3. 立即回饋 (immediate responding)：學生反應之後，立即被告知其反應是否正確，如果答案是正確的話，這種立即回饋就是一種增強物；如果答案是錯誤的話，回饋是一種更正的方法。
4. 依自我步調學習 (self-pacing)：學生依照自己的步調來進行編序學習。

因此本研究參酌上述理論，於補救教學前舉行前測，得知學生的「學習準備度」；以「漸近分化」、「統整融合」的原則，組織教材；並以 PowerPoint 為工具

「小步驟」地呈現教材，藉由電腦繪製函數圖形的輔助及標示不等式所求區域的動態圖形展示，使他們更容易了解以二次函數來求解一元二次不等式的概念，達成「教學活動符合有意義學習的學習原則」。且當學生在某方面的學習有障礙時，可透過電腦畫面的超連結給予「立即回饋」，幫助學生更正其迷思概念。特別是本研究的補救教學活動，更可以將活動的內容上網，讓學生在家裏也可自行下載，利用個人電腦進行「依自我步調學習」的編序學習。

第四節 名詞界定

一、學生易犯的錯誤類型：多數學生在數學算式中產生相同錯誤的型式，將此錯誤的型式歸為同一種錯誤類型。本研究所討論的學生易犯之錯誤類型，係指透過本研究之「一元二次不等式的解題測驗」以及與學生面談所發現之學生常犯的錯誤類型。

二、迷思概念：本研究在這裏指的是學生在解一元二次不等式時，發生與數學界所公認的數學概念相矛盾的部份。

三、一元二次不等式求解的公式：

1. α, β 為實數且 $\alpha < \beta$ ，則不等式 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ 的解為 $\alpha < x < \beta$ 。

2. α, β 為實數且 $\alpha < \beta$ ，則不等式 $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ 的解為 $x > \beta$ 或 $x < \alpha$ 。

四、代數分解法求解一元二次不等式：此方法即是將一元二次不等式的二次式，因式分解成二個一次式，利用：

1. $ab < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ 的原理來處理一元二次不等式的解。

2. $ab > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ 的原理來處理一元二次不等式的解。

五、圖解法：此法即是將一元二次不等式值和變數 x 看成一個二次函數，然後畫出二次函數的圖形，再利用代數與幾何圖形的關係來解出一元二次不等式。

六、補救教學：補救教學是教師發現學生有學習困難後，診斷出其問題所在，針對問題設計一連串合適且積極的教學活動，其目的是幫助學生克服學習障礙，達成該階段的學習目標。以本研究而言，研究者從自己先前的教學經驗中及透過「一元二次不等式的解題測驗」，瞭解許多學生對一元二次不等式的學習存在許多錯誤類型，再以此設計出「一元二次不等式的主要錯誤類型篩選測驗」，篩選出適合學生，並根據其錯誤原因設計有效的補救教學策略。