第四章《東算抄》內容分析（中）

4.1 卷之二的內容分析

《東算抄》第二卷包括六卷，共一百二十六個問題。主要內容爲：〈盈不足術門〉有八題，其類型涵蓋「盈、不足」、「兩不足」、「盈朒雙套」之盈不足、兩盈、盈適足；〈方程正負門〉解方程式問題，共八題；〈勾股互隱門〉爲各類句股問題，共七十五題；〈望海島術門〉爲利用句股性質處理某些測望問題，共七題；〈缶瓶堆垛門〉爲較複雜的等差級數問題，共八題；〈倉囤積粟門〉體積問題的實際應用，共二十題。

此卷一百二十六題中，就有五十一題以籌算式表達運算過程，可見東算家保存中國的籌算，並於解題之中大量運用。尤其在高次方程的解題方面，如〈勾股互隱門〉和〈缶瓶堆垛門〉中可發現較多籌算式的運用。

4.1.1 盈不足術門

盈不足術主要是解決盈虧類問題，即藉由兩次試驗取數所得結果，或盈、或不足、或適足，據此而依術文求得原數。本門的八個問題，可歸納爲：第一題爲「兩不足」，第二題爲「盈，不足」，第三、六題爲「雙套盈，不足」，第四題爲「雙套兩不足」，第五、七題爲「雙套兩盈」，第八題爲「雙套盈，適足」，已經涵蓋了盈不足問題的基本的模式。

筆者今就其中有兩種解法之問題加以討論，即第二、四、五、八等四題：第二題與《算法統宗》第九卷均輸章第二十一題類型相同：

《東算抄》	《算法統宗》
〔2〕今有人車不知其數，乃三人共車，四車空；兩人共車，五人步，問人、車各若干？ 荅曰：一十七車，三十九人。 法曰：置四車以三人因之，得十二人，為不足，以五人為盈，乃併盈不足，得十七為實，以三人二人為出數，相減餘一，為法，除之，得車數十七。以三人乘之，減四車，共得三十九，即人數。	今有人車，不知其數，凡三人共車二車空，二人共車九人步，問人、車各若干？ 法曰：置二人，以三人乘之，得六，加九人，得車一十五。又以二人乘車十五，得三十，加九人得人數。

合問。
又曰：五人以二人歸之得二車半，為不足；以四車為盈，乃併盈不足，共得六車半，以三人二人相乘，得六人，為法，乘之，亦得三十九人合問。

筆者認爲《算法統宗》此題可能是假設車爲 x，以 3（x-2）=2x+9，先求得車數。東算家將此轉化爲盈不足問題，除了對問題本質的瞭解外，各展現「一題多解」的多元化靈活思維，解法一以「人數」爲「盈朒；解法二以“車數”爲「盈朒」，並出現「二車半」、「六車半」的用法，已經有純代數計算的味道了。

第四題至第八題爲「盈朒雙套」的問題，其基本類型爲：今有人共買物，若 m 個人共出錢 a_1，則盈 b_1 錢；若 n 個人共出錢 a_2，則不足 b_2 錢，問物價及人數各若干？若以盈爲正，不足爲負，則

物價＝$\dfrac{ma_2b_1+na_1b_2}{na_1-ma_2}$，人數＝$\dfrac{mn(b_1+b_2)}{na_1-ma_2}=\dfrac{b1+b2}{\dfrac{a_1}{m}-\dfrac{a_2}{n}}$

其中 mn 爲「乘人率通法」，na_1-ma_2 爲「法」。
若 m=n=1，則爲盈不足之基本「原型」。
若 $b_2=0$，則爲「盈，適足」或「不足、適足」。

以第四題爲例，可知東算家在解盈不足術問題時，是依上述規則運算，並結合籌算。

〔4〕今有買梨，每三人出七文，盈一文；每四人出八文，不足三文，問人數及梨價各若干？
荅曰：一十二人，梨價二十七文。

𝍣 人 𝍢
𝍧 出文 𝍦

法曰：依圖佈算，三人、四人相乘得十二為乘人率通法，又以四人互乘七文得二十八，三人互乘八文得二十四，二數相減餘四為法，乃盈、不足相併得四文，以通法十二乘之，得四十八為人實，以法四除之得人數十二。卻

今譯解法：
（一）4　人　3
8　出文　7
1（盈）　3（不足）

人：$\dfrac{(3+1)\times 12}{4\times 7-3\times 8}=12$

梨：$\dfrac{24\times 1+28\times 3}{4\times 7-3\times 8}=27$

（二）若設人數 x

以左下二十四乘盈一文得二十四文，以右下二十八乘不足三文得八十四文，併得一百八文為物實，以法四除，得梨價。

又曰：三人、四人相乘得十二即人數，或折半或倍之以八文乘得九十六，以三四相減餘四，除之，得二十四，加不足三文，合問。

$$\frac{x}{3}\times 7-1=\frac{x}{4}\times 8+3$$

$$\frac{7x}{3}-\frac{8x}{4}=(3+1)$$

$$\frac{4\times 7x-3\times 8x}{3\times 4}=(3+1)$$

$$x=\frac{(3+1)\times(3\times 4)}{4\times 7-3\times 8}=3\times 4=12$$

—œ™∄ $12\times\frac{8}{4}+3=12\div\frac{4}{8}+3=27$

其中由「又曰」中：「三人、四人相乘得十二即人數」，以上述解（二）看來，只是特例。「或折半或倍之以八文乘得九十六」爲乘以$\frac{8}{4}$或除以$\frac{4}{8}$的意思，「以三四相減餘四」即 3×4－8=4，此處的「四」應是每四人出八文的四，顯然也是此題的特別情形。

4.1.2 方程正負門

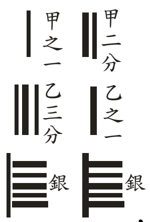
〈方程正負門〉主要爲解線性方程組的問題，共八題，每題都利用籌算式解題，以《九章算術》的直除法解題。以題目類型來看，第一題與第三題爲二色方程，第七、八爲三色方程，其餘爲四色方程。以解題方法而言，乃是以「互乘相消法」並搭配籌算爲核心，「互乘相消法」免去了「直除法」的繁瑣，「籌算式」簡化了運算的過程，就整體內容及解法而言，可看出東算家解線性方程組的功力，值得進一步仔細探討。

由第一題可瞭解係數是分數時，東算家如何運算：

〔1〕今有甲乙兩人分銀不知其數，只云甲取乙銀少半，滿一百五十兩；乙取甲銀中半，一百五十兩，問各若干？

答曰：甲：一百二十兩，乙：九十兩。

法曰：列所問數



，以右行遍乘左行，又以左行遍

今依術文將解法呈現：

解法（一）：

設甲：x　乙：y

$$x+\frac{1}{3}y=150$$

$$\frac{1}{2}x+y=150$$

（此爲依題意所列之方程組）

轉化成籌算式

乘右行，乃左右行對減，則甲空餘，乙五，銀一百五十，上法下實而一，得乙一分之率三十兩，三因得乙銀，乃甲滿數內減乙一分三十兩，得甲，合問。

又曰：置一百五十，以甲四分乘之，五歸得甲，以乙三分乘之，五歸得乙，甲四內取中半於乙三得五乙三內取少半加於甲四亦得五也，合問。

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & & 2 & 2 & & 0 & 2 \\ 3 & 1 & \rightarrow & 6 & 1 & \rightarrow & 5 & 1 \\ 150 & 150 & & 300 & 150 & & 150 & 150 \end{array}$$

（以右行遍乘左行，又以左行遍乘右行）

上述即將 x 項之係數皆化成 $\frac{1}{2}$，籌算式以整數表示即以 $\frac{1}{2}$ 爲衰。「乃左右行對減，則甲空餘，乙五，銀一百五十，」表示將 x 項消去，「上法下實而一，得乙一分之率三十兩」:「上法」乃指「乙五」,「銀一百五十」表示「下實」,「得乙一分之率三十兩」此處是指以 $\frac{1}{6}$ 爲衰，而最初是以 $\frac{1}{2}$ 爲衰，故「三因得乙銀」。

解法（二）可見東算家之「靈巧」: 先找到一組簡單整數解（4，3）滿足：

$$\begin{cases} x+\frac{1}{3}y=5 \\ \frac{1}{2}x+y=5 \end{cases}$$

再依比例計算。

第二題爲三色方程分別用「互乘相消法」及「籌算式」解題：[1]

〔2〕今有綾二尺、羅四尺、絹六尺、價皆八十四文，藏置多年，虫損，兩濕人皆不求，乃凌添羅二，羅添絹二，絹添綾二，然後各同前價，問三色各尺價若干？

答曰：綾二十四文，羅十八文，絹六文。

法曰：置左行綾二、絹六價八十四文，以八以原綾二、羅四相乘得八為法，乘之，得絹四

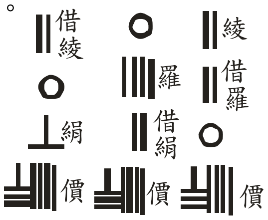
今將解法轉換成現代的書寫方式：

解法（一）: 設綾：x 文/尺、羅：y 文/尺、絹：z 文/尺

$$\begin{cases} 2x+6z=84\ldots(1) \\ 4y+2z=84\ldots(2) \\ 2x+2y=84\ldots(3) \end{cases} \Rightarrow$$

[1] 劉徽在方程章「牛羊値金」問題中創造了互乘相消法，與現代的加減消去法類似。

十八尺、綾一十六尺價六百七十二文。卻以中行羅四、絹二，四因，得羅一十六尺、絹八尺價三百六十三文，二位併得絹五十六尺、羅一十六尺、綾一十六尺價一千八文。另置右行綾二、羅二價八十四文，即八因得綾、羅各一十六尺價六百七十二文，二位對減，綾、羅盡，只有絹五十六尺價三百三十六文，上法、下實而一，得絹一尺價六文，乃於中行原價八十四文內減絹二尺價一十二文，餘七十二文，即羅四尺價，四而一，得羅尺價一十八文，又右行價內減羅二尺價，餘四十八文，即綾二尺價，半之得綾一尺價二十四文，合問。



又曰：列所問數　　　　，以左行四次直加中行，得綾八、羅四、絹二十六價四百二十，又左行一次直加右行，得綾四、羅二、絹六價一百六十八文，分左、右，以右行綾四遍乘左行，又左行綾八遍乘右行，乃左右行對減，則綾、羅空，餘絹五十六尺價三百六十三文，上法、下實而一，得絹尺價六文。

$(1)\times 8 \Rightarrow 16x+48z=672\ldots(5)$

$(2)\times 4 \Rightarrow 16y+8z=336\ldots(6)$

$(5)+(6) \Rightarrow 16x+16y+56z=1008\ldots(7)$

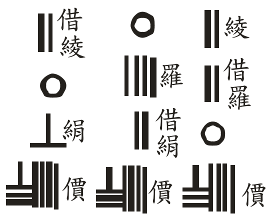
$(3)\times 8 \Rightarrow 16x+16y=672\ldots(8)$

$(7)-(8) \Rightarrow 56z=336 \Rightarrow z=6$

$y=(84-2\times 6)\div 4=18$

$x=(84-2\times 18)\div 2=24$

解法（二）：



$2x+6z=84\ldots(1)$¶s

$4y+2z=84\ldots(2)$’†s $\Rightarrow$

$2x+2y=84\ldots(3)$‰Es

$(1)\times 4+(2) \Rightarrow 8x+4y+26z=420\ldots(4)$¶

$(1)+(3) \Rightarrow 4x+2y+6z=168\ldots(5)$‰E

$(4)\times 4 \Rightarrow 32x+16y+104z=1680\ldots.(6)$¶

$(5)\times 8 \Rightarrow 32x+16y+48z=1244\ldots(7)$‰E

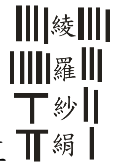
$(6)-(7) \Rightarrow 56z=336 \Rightarrow z=6$

上述解法皆展現出東算家對方程組中各式的「敏感度」。解法一由（3）之係數相同可知，埋下同時消去兩個未知數的伏筆。解法二構造出 x 與 y 的係數比爲 2：1，亦是爲消去 x、y 做好準備，此外，籌算式中以 0 表“空”，更易於做籌算式的佈算。

第五題結合「四色方程」與「齊同術」更發揮了精湛的解題技巧：

〔5〕今有絹一尺、紗二尺、羅三尺、綾四尺，共價八兩七錢二分，只云陵四尺、羅五尺、紗六尺、絹七尺之價適等，問四色尺價各若干？

答曰：綾一兩五分，紗七錢，羅八錢四分，絹六錢。



法曰：依圖佈算，以左行互相乘之於右行以左行綾四、紗六、絹七，乘右行羅三，得五百四；又以左行羅五、紗六、絹七、乘右行綾四，得八百四十；又以左行綾四、羅五、絹七、乘右行紗二，得二百八十；又以左行綾四、羅五、紗六、乘右行絹一，得一百二十。四位併之得一千七百四十四，為法。另以左行自相乘之以左行綾四乘羅五，又以紗六乘之，又以絹七乘之，得八百四十，以乘共價八兩七錢二分，得七千三百二十四兩八錢，為實，以法除之得四兩二錢此即相等之價。七歸得絹價六錢，六歸得紗價七錢，五歸得羅價八錢四分，四歸得綾價一兩五分，合問。

今將解法以現代符號表示：設綾價：x 羅價：y　紗價：s　绢價：j

依題意列式：

$4x+3y+2s+j=8.72$

$4x=5y=6s=7j$

依圖布算：

$5\times6\times7\times4=840$

$4\times6\times7\times3=504$

$4\times5\times7\times2=280$

$4\times5\times6\times1=120$

$840+504+280+120=1744$

$4\times5\times6\times7=840$

$840(4x+3y+2s+j)=840\times8.72$

$=7324.8$……..（＊）

（＊）$\div1744=4.2$…….相等之價

即 $4x=5y=6s=7j=4.2$

則 綾價：$x=1.05$　羅價：$y=0.84$　紗價：$s=0.7$　绢價：$j=0.6$

其實已將各色「齊同以通之」：

令 $4x=5y=6s=7j=r$

$$x=\frac{r}{4}\text{，}y=\frac{r}{5}\text{，}s=\frac{r}{6}\text{，}j=\frac{r}{7}$$

$840\times4x=5\times6\times7\times4\times r$…（1）

$840\times3y=4\times6\times7\times3\times r$…（2）

$840\times2s=4\times5\times7\times2\times r$…（3）

$840\times1j=4\times5\times6\times1\times r$…（4）

（1）＋（2）＋（3）＋（4）

$840(4x+3y+2s+j)=(5\times6\times7\times4+4\times6\times7\times3+4\times5\times7\times2+4\times5\times6\times1)r=1744r$

$\therefore 840\times4.2=1744r$，故 $r=4.2$

第七、八兩題爲較複雜的三色方程正負問題，使用「正負術」解方程，由籌式中可之方程組之係數出現負數，且三色需滿足特殊條件，第八題題文中有「右二問句股法」，換言之是將直角三角形的邊長關係融入題目中，惟題文未加以說明。茲以第八題爲例：

〔8〕今有昆仲季三人持金不知其數，只云昆季和取四分之三，昆仲和取五分之四，二數相減取九兩六錢；又昆仲和取二分之一以比於昆季和五分之三不足二兩四錢，問昆仲季個人持銀若干？右二問句股法

荅曰：昆四十兩，仲三十二　兩，季二十四兩。

法曰：前分母五四相乘得二十，以乘餘數得一百九十二兩是一十六箇昆仲和內減十五箇昆季和餘數，又後分母二五相乘得十，以乘不足得二十四兩是六箇甲丙和內減五箇甲乙和餘數也，乃列於左右，以右行甲丙和十五遍乘左行，得甲丙和負九十，甲乙和正七十五，金正三百六十兩。又以左行甲丙和六遍乘右行，得甲丙和正九十，甲乙和負九十六，金正一千一百五十二，仍與左右行異減同加，甲丙和盡，餘甲乙和二十一，金一千五百一十二兩，上法下實而一，得甲乙和七十二兩。以左行甲乙和五乘之，得三百六十，加入左行得金二十四兩，共得七百二十兩，以甲丙和六除之，得甲丙和六十四兩。仍以甲乙和七十二兩乘而倍之，得九千二百十六為實，以平方開之，得甲乙丙三和九十六兩，內減甲乙和七十二兩，餘二十四兩，即季金。又三和內減甲丙和，餘三十二兩，即仲金。卻於甲乙和內減仲金，餘四十兩，即昆金，合問。右二問句股法

今將解法以現代符號表示：

設昆：x　仲：y　季：z

$$-\frac{3}{4}(x+z)+\frac{4}{5}(x+y)=9.6......(1)$$

$$\frac{3}{5}(x+z)-\frac{1}{2}(x+y)=2.4.....(2)$$

$$(1)\times 20 \Rightarrow -15(x+z)+16(x+y)=192.....(3)$$

$$(2)\times 10 \Rightarrow 6(x+z)-5(x+y)=24......(4)$$

$$(3)\times 6 \Rightarrow -90(x+z)+96(x+y)=1152...(5)$$

$$(4)\times 15 \Rightarrow 90(x+z)-75(x+y)=360...(6)$$

$$(5)+(6) \Rightarrow 21(x+y)=1512 \Rightarrow x+y=72...(7)$$

(7)‘ã“ü(4) $\Rightarrow 6(x+z)-360=24$

$$\Rightarrow 6(x+z)=384 \Rightarrow x+z=64$$

【依此列籌算式】

$$\sqrt{2(x+y)(x+z)}$$

$$=\sqrt{2x^2+2xy+2yz+2xz}$$

$$=\sqrt{(x+y+z)^2}=96$$

ヲ{Ý　$x^2=y^2+z^2$Žž¬—§z

$$x+y+z=96$$

$$z=96-72=24$$

$$y=96-64=32$$

$$x=72-32=40$$

從上述解法可看出東算家解方程時，以可將變數變換，而不一定要用「損益術」合併同類項，已經可臻於現代解聯立方程組之程序。

4.1.3 句股互隱門

〈句股互隱門〉主要內容爲以勾股定理爲核心的問題，共七十五題僅次於〈開方各術門〉的八十五題，由此可見勾股問題在《東算抄》中的重要性。此外，“句股”列於“方程”之後，與《九章算術》編排的方式相同。

其實，勾股理論在中國傳統數學中亦佔有舉足輕重的地位，，關於勾股的著作不勝枚舉，廣泛的運用於測高望遠，與勾股形相關的恆等式，勾股容方，勾股容圓，以勾股形建立方程式的模型或融入勾股理論的應用問題，因相關內容頗多故在探討勾股問題時必須瞭解算學家常用的名詞定義今列舉於下：

名稱	代表符號	名稱	代表符號	名稱	代表符號
句	a	句股和	a+b	弦和和	c+（b+a）
股	b	句股較	b-a	弦和較	（a+b）-c
弦	c	股弦和	b+c	弦較較	c-（b-a）
句弦和	a+c	股弦較	c-b	勾股積	$\frac{1}{2}ab$
句弦較	c-a	弦較和	c+（b-a）		

〈句股互隱門〉的七十五題中，幾乎都和上述所題之十四率有關，[2]除了第六十六至七十五題屬於「尖田截積」問題，是關於直角三角形中比例相似問題，筆者將本節所用到的相關式歸納整理於附錄四。

本「門」勾股問題中，雖所給的已知條件互有差異，除第八題以（30，40，50），其餘都圍繞著兩組勾股數（27，36，45）、（24，45，51）設問，化簡後即（3，4，5）、（8、15、17）。「勾三、股四、弦五」自《周髀算經》以降就廣爲人知，是算家心中的「典範例」，中外皆然。《算法統宗》中勾股的佈題就多以（27，36，45）爲主。至於（8、15、17）於吳敬《九章算法比類大全》中古問一即爲此數據，[3]（24，45，51）亦被王文素《算學寶鑑》所採用。[4]

第一、二、五、六、七等四題爲不直接言明勾股的應用問題，其類型皆屬於《九章算術》勾股章中的題型，《算法統宗》則收錄於卷十二，第五題「開門去閫」，其數據恰《算法統宗》之半，是股較求股問題，但答案承襲《算法統宗》的疏忽；第六、七兩題「圓材埋壁」，屬於弦較求弦問題，與《算法統宗》皆同。第二題同「葭生池中」問題，爲股較求股之應用，乍看之下東算家以蓮佈題所得

[2] 若「勾股積」，則稱爲「勾股名義，生變十三名」，參見《算法統宗》，頁 1364。
[3]參見明．吳敬，《新集通證古今算學寶鑑》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第二分冊（鄭州：河南教育出版社，1993 年），頁 749。
[4]參見明．王文素，《新集通證古今算學寶鑑》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第二分冊（鄭州：河南教育出版社，1993 年），頁 749。

之數，似乎有些誇張，但經筆者查證，確實有一種生於沼澤的蓮花，其長度可達數十尺（見附錄三），一開始筆者的「基模」無此心像，本想否定，由此一歷程更使筆者體會到「脈絡」的重要，要避免不合理或粗略的類比或映射。

將焦點回到數學文本上，筆者先就第二題來「暖身」，此題與《算法統宗》所犯的小疏忽相同，只求出股長，未求出最後的答案--「門廣」：

〔2〕今有開門去閾五寸，不合一寸，問門廣若干？

答曰：門廣二尺四寸七分五里。

法曰：以去閾五寸為句，自乘得二尺五寸，不合一寸折半得五分為股較，自乘得二分五里，減之餘二尺四寸七分五里為實，以較五分倍作一寸為法，除之得一邊門廣，合問。

將解法以現代符號表示：

設門廣：c，去閾五寸:a 即句，令不合一寸：b=c－0.5 即 c－b=0.5

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=\frac{c^2-b^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=\frac{2b(c-b)}{2(c-b)}$$

$$b=\frac{5^2-(0.5)^2}{2\times 0.5}=24.75$$

$$c=24.75+0.5=25.25$$

答案爲「二尺四寸七分五里」有誤，此爲股，應再加 0.5 寸。故爲「二尺五寸二分五里」。

其餘之題目皆以單純勾股形爲框架，依不同的條件，做各種的變換，而東算家展現靈活的解題思維，由本門可得到驗證。其中以一題多解的方式呈現的，就佔五分之一強，解四次方的問題除了「三乘方開之」外，還運用了「二次平方開之」。在搭配籌算式運算上，也能處理係數是小數的情形；又能運用「形」的概念解題，不拘泥於現成的公式或口訣，成爲一項特色，筆者就一些題目來闡明上述的觀點：

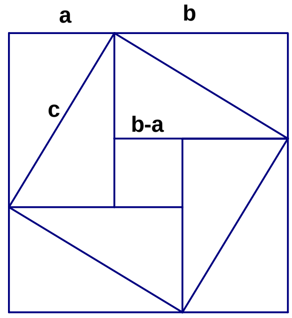
〔10〕今有弦五十一尺，只云句股和六十九尺，問句股各若干？

答曰：句二十四尺，股四十五尺。

法曰：置弦自乘倍之得五千二百二尺此四箇勾股相乘兩箇差自乘數，又勾股和自乘得四千七百六十一尺此四箇勾股相乘及一箇差自乘數，兩數相減餘四百四十一為實，以平方開之得句股差二十一尺，加和折半得股，內減差得句，合問。

此題乃利用弦圖解題：

$$c^2 = 2ab + (b-a)^2$$
$$2c^2 = 4ab + 2(b-a)^2 \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$(a+b)^2 = (b-a)^2 + 4ab \ldots\ldots(2)$$
$$(1)-(2) \Rightarrow 2c^2 - (a+b)^2 = (b-a)^2$$



〔30〕今有句股積五百四十尺，只云句股弦相和一百二十尺，問句股弦各若干？

答曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置積四因得兩千一百六十尺為實，以三和一百二十尺為法，除之，得弦和較勾股和內減弦一十八尺，以減於三和，餘一百二尺，折半，即弦也，又三和內減弦，得句股和六十九尺為縱方，列積倍之為實，以減縱平方開之得句，減句股和即股，合問。

又曰：三和自乘得一萬四千四百，內減四段句股積二千一百六十，餘一萬二千二百四十，折半，得六千一百二十為實，以三和一百二十為法，除之，亦得弦。

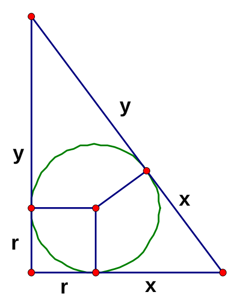
解法一先求弦和較，乃利用「以勾乘股，倍之為實，句股求弦之為法，實如法而一，勾股容圓之徑也，容圓之徑即弦和較也。」依現代符號表示如下：

x=a-r，y=b-r

c=x+y=a-r+b-r

a+b-c=2r

$$2\times\left(\frac{ab}{a+b+c}\right) = 2r = a+b-c$$



再利用「弦和較」與「勾股弦相和」求得弦，則其條件就同第二十七題。

解法二筆者認爲其運用“出入相補”之原理，試分析如下：

$$(a+b+c)^2 - 4\times\frac{1}{2}ab$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 - 2ab$$
$$= a^2 + b^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= 2c^2 + 2c(a+b)$$
$$= 2c(a+b+c)\ldots\ldots(1)$$

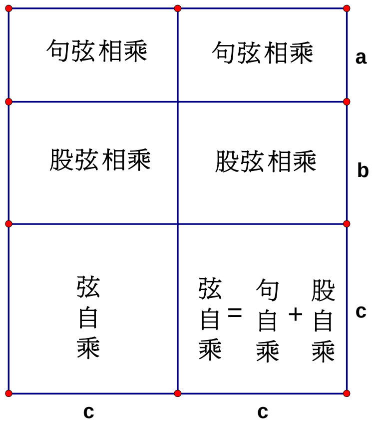
※ 右圖減去兩個勾股相乘之積，

c	b	a	
句弦相乘	句股相乘	句自乘	a
股弦相乘	股自乘	句股相乘	b
弦自乘	股弦相乘	句弦相乘	c

再重新排列後後，如右圖。

再以 $\dfrac{(1)}{2(a+b+c)}=c$

其條件亦回歸至第二十七題模式



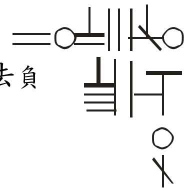
東算家於解勾股問題時融合了數與形，使得解題思維更益與視野更加開闊。

接著要探討的，是東算家如合利用基本之勾股定理：$a^2+b^2=c^2$，結合籌算及解高次方程式之技巧，處理勾股問題：

〔29〕今有句股積五百四十尺，只云股弦和九十六尺，問句股弦各若干？

答曰：句二十四尺，股四十五尺，弦五十一尺。

法曰：置積倍之得一千八十尺，以和乘之又倍之得二十萬七千三百六十為實，以和自乘得九千兩百一十六為縱方正，以一為隅法負



，以減縱立方開之得句二十四尺，以句除倍積得股四十五尺，於和內減股得弦，合問。

今先以代數符號表示，再置入已知條件：

$$
\begin{aligned}
&2\times\frac{1}{2}ab\times(b+c)\times 2\\
&=2ab(b+c)\\
&=a\left(2b^2+2bc\right)\\
&=a\left[b^2+2bc+c^2-a^2\right]\\
&=-a^3+(c+b)^2\times a
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
&-a^3+(b+c)\times a-2ab(b+c)=0
\end{aligned}
$$

‘ã“ü›ß’mžŠŒ“¾

$$-a^3+96a-207360=0$$

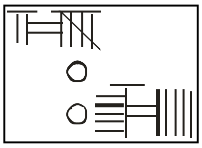
Ä˜ÈŒ¸ãsŠJ—§•û–@‹a $=24$

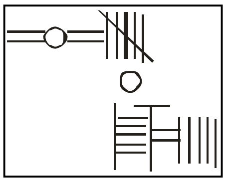
$$b=ab\div a=2\times 504\div 24=45$$

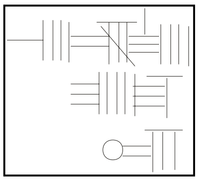
$$c=(b+c)-b=95-45=51$$

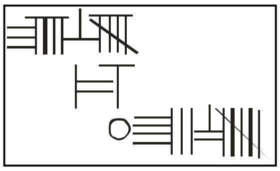
透過上述的變換得到一個一元三次方程式，並透過開方術解之，可見對於勾股弦之間的關連及式子的轉換，已能非常熟捻地運用。

另一方面，由「又曰」中又可以瞭解遇到負整數時，籌算寫法如何表示。若遇到小數或負小數時，可從 49、51、55、56 諸題的開方式得知。

〔49〕  表示 $0.5625x^2-729=0$

〔51〕  表示 $1.5625x^2-2025=0$

〔55〕  表示 $0.28x^2+35.36x-142.84=0$【負號加於個位數】

〔56〕  表示 $-0.4375x^2+126x-3969=0$
【負小數負號加在末位】

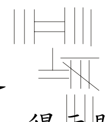
保存了籌算並加以運用，位值制的概念很明顯，其實已接近現代的運算模式，只是數碼不同，成爲當時東算相對高水平的象徵。此外對於開方式也有轉化不再單純依中算使用隅法、廉、縱方、等名詞，而使用甲縱、乙縱、丙縱、丁縱等稱呼，其實已有次數的雛形，這些在本門的 36、44、45 題可看到這類的轉化。至於開方術的探討筆者擬安排於第四章再行論述。

句股問題之後，第六十六至七十五題，緊接著是利用三角形比例相似原理來處理「尖田截積」問題，只是這邊的田皆爲句股形罷了，類似《算法統宗》之「句股截積」。[5]其實《東算抄》是以句股形爲基礎，再做推廣與延伸，譬如第七十三題就提及「圭田梯田截積亦倣此」。故今以此題爲例。

〔73〕今有句股田，積七十五步，今從尖截去，其餘長九步，餘闊四步，問元長闊各若干？

答曰：元長一十五步，元闊一十步。

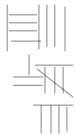
法曰：置餘長以餘闊乘之得三十六步，又以餘長乘之得三百二十四為實，另列元積七十五步內減餘長餘闊相乘數三十六步，餘三十九步倍之得七十八為縱方，

以餘闊為隅法，以減縱平方開之 ，得尖截長六步，加餘長九步即元長一十五步，以除倍積，得元闊十步，合問。

一法：置餘長以餘闊乘之，又以餘闊乘之，得一百四十四為實，另列元

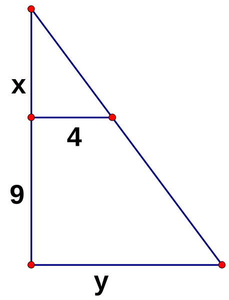
5 參見《算法統宗》，頁 1331-1333。

積內減餘長餘闊相乘數三十六步，餘三十九步倍之得七十八為縱方負，以餘長九步為隅法

正，以減縱平方開之  得六步，加餘闊四步，亦得元闊。圭田梯田截積亦倣此。

今譯解法：

解法一：設截長：x　元闊：y



$$\frac{1}{2}(x+9)y=75 \Rightarrow xy+9y=150....(1)$$

$$x:(x+9)=4:y \Rightarrow 4x+36=xy.....(2)$$

(2)‘ã“ü$(1) \Rightarrow 4x+36+9y=150$

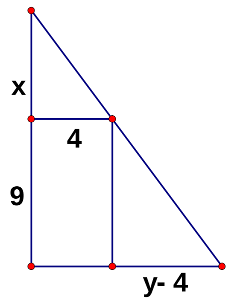
$$4x^2-114x+9(4x+36)=0$$

$$4x^2-78x+324=0$$

【減縱平方開之】

x=6，原長＝6+9=15，原闊 y=2×75÷15=10

解法二：方向不同，先求 y-4



$$\frac{1}{2}(x+9)y=75 \Rightarrow xy+9y=150....(1)$$

$$9:(x+9)=(y-4):y \Rightarrow (x+9)(y-4)=9y.....(2)$$

$(1) \Rightarrow x+9=\frac{150}{y}$‘ã“ü$(2)$

$$\frac{150}{y}(y-4)=9y \Rightarrow 9y^2=150(y-4)$$

$$9(y-4)^2+72y-144=150(y-4)$$

$$9(y-4)^2-78(y-4)+144=0$$

Œ¸ãs•½•ûŠJ”V“¾$y-4=6 \Rightarrow y=10$

法二中以不同的方向的比例關係求解，其中變數的認定上，已能把（y－4）當成新變數，變數的變換可使方程式簡化，更方便解題。相似比例關係的應用除了截積問題外，更廣泛運用於測高望遠。

4.1.4 望海島術門

〈望海島術門〉共七問主要內容爲重差類問題，蓋利用句股形的比例相似性質，應用於實際度量的測望問題上，相關的算法在中國古代數學中稱爲重差術，劉徽於《九章算術》句股章後曾編寫〈重差〉一卷，唐初獨立刊行，因其第一題

爲「望海島」，是一個測望海島山峰而推算它的高、遠問題，故後人將此部書名爲《海島算經》，《東算抄》之編排與命名可由此略知一、二。

本門七個問題中，主要地一至三題爲二望問題，利用比例相似基本性質即可解決，第四至第七題爲三望問題，需利用重差術，皆以

「$\text{Š‘ª,} = \dfrac{\text{•}\backslash\text{ŠÔ} \times \text{•}\backslash\text{,}}{\text{‘Þs·}} + \text{•}\backslash\text{,}$ 」之公式解題，惟第五、六兩題在表間的認定上承襲《算法統宗》之錯誤，今提出加以說明：

〔5〕今有海島不知其高遠，乃立表四丈，退行七十丈，又立短表四尺，人目望其二表，俱與島峯參合，復卻退行六百丈，又立表四丈，退行七十二丈，又立短表四尺，人目望其二表，亦俱與島峯參合，問海島高遠各若干？

答曰：島高六里四丈（五尺為一步三百六十步為一里），島遠一百一十六里一百二十丈。

法曰：置表高四丈減短表四尺餘三丈六尺，以兩表間相去六百丈乘之，得二千一百六十丈為實，另至後表退行七十二丈內減前表退行七十丈，餘二丈為法，除之得一千八十丈，加表高四丈，共得一千八十四丈，以每里一百八十丈除之得島高六里四丈。又置表間相去六百丈，以前表退行七十丈乘之，得四萬二千丈，亦以前法兩丈除之，得二萬一千丈，亦以每里一百八十丈除之，得島遠一百一十六里一百二十丈

今將兩解法並列以茲比較：

（1） 原解法：承襲算法統宗的錯誤以 600 丈計算

解法：

$$\text{“‡,} = \frac{6000\times(40-4)}{20}+40 = 10840(\text{ŽÛ}) = \text{˜Z—¢Žlä}$$

$$\text{“‡‰“} = \frac{700\times10800}{(40-4)} = 210000(\text{ŽÛ}) = \text{ˆê•Sˆê}\backslash\text{˜Z—¢ˆê•S“ñ}\backslash\quad\text{ä}$$

（2） 更正解法：

$$\text{“‡,} = \frac{(700+6000)\times(40-4)}{20}+40$$

$$=12100(\text{ŽÛ}) = \text{˜Z—¢}\backslash\text{ŽOä}$$

$$\text{“‡‰“} = \frac{700\times(12100-40)}{(40-4)}$$

$$=234500(\text{ŽÛ}) = \text{ˆê•SŽO}\backslash\text{—¢ŒÜ}\backslash\text{ä}$$

兩法之差別在於題文中「…乃立表四丈，退行七十丈，又立短表四尺，人目望其二表，俱與島峯參合，復卻退行六百丈，…」，術文中「…兩表間相去六百丈乘之…」，第六題亦呈現相同的差異（見附錄勘誤表），第七題中給出了開方不盡時取近似値的方法：「…不盡者，卻將所商倍之，再加一為分母命之….」，即以

$a+\dfrac{A-a^2}{2a+1}$表示$\sqrt{A}$的近似值，應是考慮到在解決實際測量情境時，所遇到的數字並非皆如數學問題中的「完美」。

4.1.5 缶瓶堆垛門

〈缶瓶堆垛門〉主要是處理高階等差級數問題。於《九章算術》、《張邱建算經》中便有等差級數問題，但伴隨著數學的發展及天文曆法的需要，等差級數問題，在宋元時代發展成高階等差級數求和問題，開創者是北宋沈括（公元1013~1095），沈括由研究《九章算術》中的體積問題提出了隙積術，南宋楊輝《詳解九章算法》、《楊輝算法》以各種果子比類，《九章算術》中的立體體積，元朱世傑《算學啓蒙》中的〈堆積還源門〉，《四元玉鑑》卷中的〈茭草形段門〉、〈如象招數門〉卷下的〈果垛迭藏門〉皆有相關問題，而「缶瓶堆垛」之名最早出現於《詳明算法》中。而以上《楊輝算法》、《算學啓蒙》、《詳明算法》等書對於東算皆影響甚深。

本門八個問題中，第一、四題爲童形果子垛；第二、三題爲三稜物，牽涉到三角形數的算法；第五至八題結合三角果垛與四角果垛問題，第七題雖有另法，但與楊輝算法相同，故其解題方式皆不逸於當時中算對同類問題的水平。

今筆者將其解題公式整理如下：

題號	公式
1，4	$S=1\times a+2\times(a+1)+3\times(a+2)+\ldots+n\times[a+(n-1)]$ $=\dfrac{1}{3}n(n+1)\left\{\dfrac{[a+(n-1)]-n}{2}+\dfrac{1}{2}+[a+(n-1)]\right\}$ $=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{2[a+(n-1)+a]\}$
2，3	$S=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n-3}{3}+2\right]\left[\dfrac{n-3}{3}+3\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n}{3}+1\right]\left[\dfrac{n+9}{3}-1\right]=\dfrac{n(n+9)}{18}+1$
5~8	※ 三角垛： $\sum\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ※ 四角垛： $\sum n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{1}{3}\left[n\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(n+1)\right]$

4.1.6 倉囤積粟門

〈倉囤積粟門〉主要內容是將體積問題應用於實際糧倉體積上，共二十題。第一題爲外角堆米問題；第二題船艙體積計算取材於《算法統宗》，數據爲原題的一半，第三、四題爲蘆席囤米問題，第五至二十題爲方倉、長倉、立方體體積問題，本質上是解三次方程式。

聚米問題可分爲平地堆米、倚壁聚米內角聚米外角聚米四類各法僅是比例上的不同《詳明算法》中有口訣「…，堆與圓倉周自行，各再以高乘見積，唯圓十二一中分，尖堆法用三十六，倚壁須分十八停，內角聚時如九一，外角三九積分明，…」，[6]此處僅列外角聚米一例，第二題雖取自《算法統宗》，但又舉出另一種算法：

〔2〕今有船艙南頭面廣一十二尺，腰廣十三尺，底廣一十尺，北頭面廣一十四尺，腰廣一十五尺，底廣一十二尺，深五尺，長一十八尺，問積米若干？

答曰：四百六十八石。

法曰：南頭腰廣倍之，併入面廣、底廣。北頭腰廣倍之，併入面廣、底廣，併二位以四歸得二十六尺，折半得十三尺，以深乘再以長乘之，得一千一百七十尺，為實，以斛法而一，合問。

又曰：併南北面廣折半得十三尺為上廣，又併南北腰廣折半得十四尺為中廣，又併南北底廣折半得十一尺為下廣用三廣田法或用二梯田法，乃併上下廣折半得一十二尺，加中廣共二十六尺，以半長乘，再以深乘之，為實，以斛法而一，合問。

解法如下：

（一）腰廣即中線，故分成兩塊高皆爲 2.5

$$\overline{AD}=a_1,\overline{EF}=a_2$$

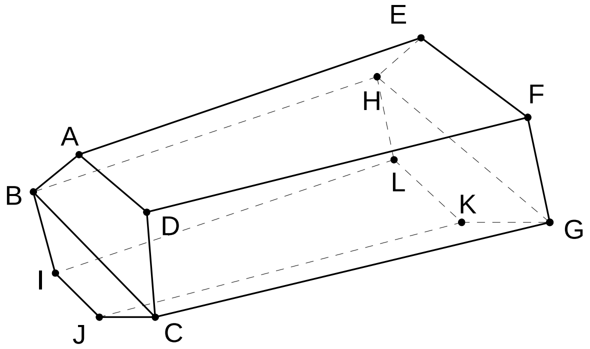
$$\overline{BC}=b_1,\overline{HG}=b_2$$

$$\overline{AE}=\overline{DF}=L$$

$$\Rightarrow V=\frac{L}{6}\left[\frac{a_1+b_1}{2}\left(2h_1+h_2\right)+\frac{a_2+b_2}{2}\left(2h_2+h_1\right)\right]$$

---

[6] 引自《詳明算法》，頁 1388。



$$V=\frac{18}{6}\left[\frac{10+13}{2}\left(2\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)+\frac{12+15}{2}\left(2\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)\right]+\frac{18}{6}\left[\frac{12+13}{2}\left(2\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)+\frac{14+15}{2}\left(2\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{(2\times13+12+10)+(2\times15+14+12)}{4}\times\frac{1}{2}\right]\times5\times18$$

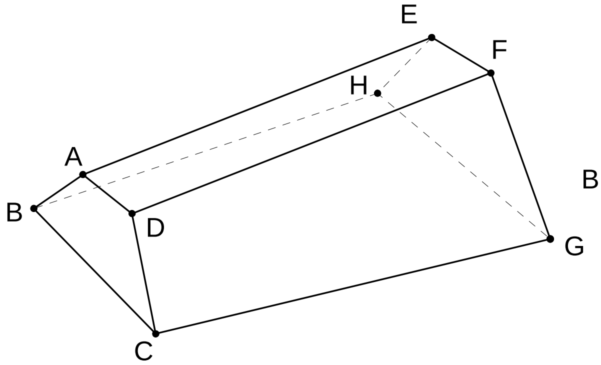
$$V\div2.5=468$$

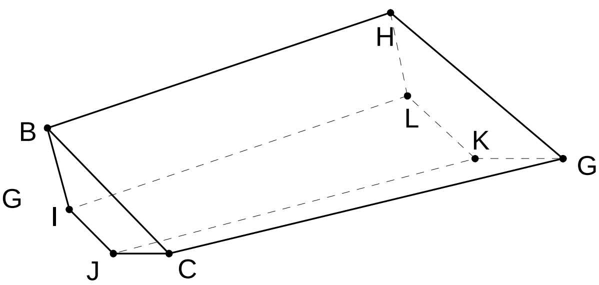
（二）

<table>
<tr><td></td><td>南</td><td>北</td><td>深：5
長：18</td></tr>
<tr><td>面廣</td><td>12</td><td>14</td><td rowspan="3">上廣＝面廣和之半
底廣＝底廣和之半
中廣＝腰廣和之半</td></tr>
<tr><td>腰廣</td><td>13</td><td>15</td></tr>
<tr><td>底廣</td><td>10</td><td>12</td></tr>
</table>

上廣：$\frac{12+14}{2}=13$　中廣：$\frac{13+15}{2}=14$　底廣：$\frac{10+12}{2}=11$

$$\left(\frac{ãœA\ \ +’êœA}{2}+’†œA\right)\times\frac{l}{2}\times’\cdot\ \ \div2.5=468$$





解法一為《算法統宗》之解法，解法二為解法一之轉化，兩者實為等價公式，其中「用三廣田法或用二梯田法」，即將船艙切割成兩個如上圖之形狀。值得注意的是，此處的公式又是正確的，有別於〈商功修築門〉第六題，由此可知此二題抄自《算法統宗》。

其餘的題目，皆可轉化為解高次方程問題，牽涉到開方術（見第四章），但並未用天元術列式，不過，可以很明顯的看出，東算家已用代數的方式來解幾何問題。

4.2 卷之二內容結論

從卷之二的內容來看，很明顯的題目的難度與變化性都增加了，這裡所要用到的數學能力有：解各色線性方程組問題、句股問題、堆垛問題，尤其是以句股問題佔大多數。此外，更要具備開方術才能解決句股問題、堆垛問題或〈倉囤積粟門〉中所出現之方程式。另一項極具特色的部分是，本卷一百二十六個問題之中，就有五十一題用籌算式表達運算過程或列式。

首先，在『方程術』方面，東算家應比中算家更為精進，於一七一三年六月二十一日（「癸巳閏五月二十九日」），洪正夏「與劉生壽錫入（賓）館中與五官司曆何國柱論算。」的對話中有這樣一段論及方程術的內容：

司曆曰：算家諸術中，方程正負之法，極為最難，君能知之乎？
余曰：方程之術，即中等之法，何難之有？

可見『方程術』亦是東算家所必備之數學能力，若解題時再輔以籌算，那更能使運算加快，而當時籌算在中國已沒落，所以何國柱才揮感到驚訝而有「中國無此算子，可得而誇中國乎？」之語。

再者，解方程式時已能對負係數直接運算，並對負數以現代的語言稱呼，這一點有別於早期慶善徵的《默思集算法》。[7]在開方術方面，只有〈句股戶隱門〉的第六十一、六十二題列有詳細的開方過程，以解題程序來看是增乘開方法，這也是讓東算家處理句股問題，列出高次方程時，能夠快速解題的因素之一，今筆者將本卷的體例算法內容上的特點歸納整理如下：

（1）本卷體例計有：
1.「今有」－「答曰」－「法曰」。
2.「今有」－「答曰」－「法曰」－「又曰」。
3.「今有」－「答曰」－「法曰」－「一法」。
4.「今有」－「答曰」－「法曰」－「一法」－「一法」。
（2）以依圖佈算列籌算式，並能以籌算式表示（負）小數。
（3）直接以負數稱呼方程式的係數。
（4）籌算式中以 0 表示空的未知數。

[7] 參見李建宗，《朝鮮算學家．慶善徵《默思及算法》初探》，頁 122。

（5）解句股問題能利用圖形作輔助。

（6）直接以籌算式表示負係數之方程組，並可用相當現代的加減消去法求解。譬如解：

$$-\frac{3}{4}(x+z)+\frac{4}{5}(x+y)=9.6\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{3}{5}(x+z)-\frac{1}{2}(x+y)=2.4\ldots\ldots(2)$$

（7）開四次方時用二次平方開之，可見對指數律及平方根的概念非常清楚。因爲是用籌算的關係，這樣亦可節省佈算空間。

譬如：勾股互隱門第二十三題的開方，就是以「二次平方開之」，分段求出。

$(x^2)^2-2601x^2+1166400=0$，先求出 x^2，再求 x。

第四十二題的方程式爲 $x^4=531441$，也是二次平方開之。

對於東算家的運　籌快速，由此可見端倪。

（8）不再單純依中算使用隅法、廉、縱方、等名詞，次數由低到高分別使用甲縱、乙縱、丙縱、丁縱等稱呼，其實已有次數的雛形。

（9）〈倉囤積粟門〉第二十題以“○”來作爲斷句，應是倣自《算法統宗》。

（10）〈缶瓶堆垛門〉之算法公式及敘述皆與楊輝之算法相同。

由句股問題所佔的份量可看出東算家對句股問題十分重視，由句股問題所給條件之變換，來訓練轉換能力，配合圖形與籌算，彰顯了東算家的靈活思維，難怪令人「驚訝」。由認知的角度來看將問題所給的條件，先「依圖佈算」列出，一方面可使算家隨時注意各已知條件間的關係，這在「方程術」中頗爲重要；另一方面，使腦中的「記憶體」可空出來處理其他相關問題。

4.3 卷之三內容分析

依題意列出了方程式，緊接著便是要將根求出，這時就需要依賴開方術，否則便無法畢盡全功。也因此開方術佔了極重要的地位，本卷只有〈開方各術門〉一門，卻是單門中題目最多的，共有八十五題。在本門之中的所有題目並未詳述開方的步驟，只能從術文中瞭解各題所用的開方方式。

在這八十五題中，所用的開方術包含帶縱開方、減縱開方、平（立）方翻積等方法，與中國所發展的開方術相同，但從本卷的題目中，可以發現東算家對於變數的變換與操作非常靈活，筆者認爲值得提出來探討。

4.3.1 善用變數變換

第 36、37、39、40 題並未直接求出答案，而是間接以某個單元列式，如此可避免較繁複的數字運算：

題號	題　文	方程式	開方術
36	今有直田，長平相乘為實，平方開之得數，加入長平差共得七十九步，只云長六十四步，問平若干？	$A^2-94A-2145=0$（A=64-y）	減縱平方
37	今有直田，長平相乘為實，平方開之，得數加入長平差，共得七十九步，只云平二十五步，問長若干？	—ßA$=x-25$ $-A^2+183A-\left(79^2-25^2\right)=0$	減縱平方
39	今有直田，長平相乘為實，平方開之，得數加入長平和，共得一百二十九步，只云長六十四步，問平若干？	—ßA$=64+y$ $-A^2+322A-20737=0$	減縱平方
40	今有直田，長平相乘為實，平方開之，得數加入長平差，共七十九步，只云和八十九步，問長、平各若干？	—ßA$=x-y$ $-5A^2+8\times79\times A-17043=0$	減縱平方

今以第四十題爲例，其解法爲「列共數自之，四因，內減和自乘數餘一萬七千四十三步為實，又共數八因得六百三十二步為縱方，以五為負隅減縱平方開之，得差三十九步，加和半之得長，減差即平，合問。」將其解題程序以現代符號表示爲：

設長：x　平：y

$$\sqrt{xy}+(x-y)=79$$

$$x+y=89$$

$$\Rightarrow xy=[79-(x-y)]^2$$

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4\times\left[79^2-2\times79\times(x-y)+(x-y)^2\right]$$

—ßA$= x-y$

$$-5A^2+8\times79\times A-\left(4\times79^2-89^2\right)=0$$

$$-5A^2+632A-17043=0$$

$$A=39\Rightarrow x=\frac{A+(x+y)}{2}=64,\ y=x-(x-y)=25$$

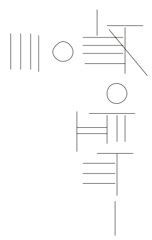
4.3.2 圓田截積問題

第十題至第十五題爲圓田截積問題，其中第十四、十五題爲構造出四次方程，與《算法統宗》卷七的「股矢內股弦求句」的問題同類。[8]今以第十五題爲例說明：

〔15〕今有圓田，從邊截賣，餘徑九步，只云截積三十二步，問所截弦使各若干？

答曰：答曰弦一十二步，矢四步。

法曰：列積倍之自乘得四千九十六為實，又積四因得一百二十八為乙縱，又餘徑四因得三十六為丙縱，以一為負丁縱即隅，以減縱三乘方開之，



得矢四步，列積倍之，以矢除之，得一十六步，內減矢得弦一十二步，合問。

又曰：列半積平方開得矢四步，以除積得八，加矢得弦，合問。

以現代符號表示解法：

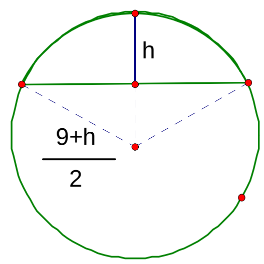
解法一：

$$\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\left(\frac{9+h}{2}\right)^2-\left(\frac{9-h}{2}\right)^2}+h\right]h=32$$

$$\left[2\sqrt{\left(\frac{9+h}{2}\right)^2-\left(\frac{9-h}{2}\right)^2}+h\right]h=64$$

$$-h^4+36h^3+128h^2-4096=0$$

$$h=4$$



至於解法二必須在矢是完全平方數的條件下才能成立，在此不多加贅述。

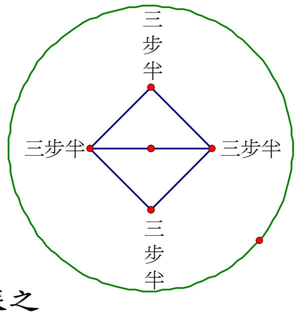
4.3.3 方田與圓田綜合佈題

第四十一題至第七十一題共三十一題，皆利用一方田、一圓田混合佈題，圓田之圓法以周三徑一，方田之面與方斜以方五斜七爲主，大至可分爲「方圓各自獨立」、「圓中有方」或「方中有圓」等三類。其中第五十八、六十七、六十八題附有題圖。今以第六十八題爲例說明。

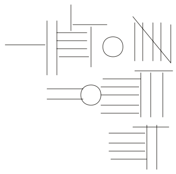
[8] 參見《算法統宗》，頁 1336。

〔68〕今有圓田，內有方池占之，下積上餘六百九十八步，只云四角徑各三步半，問圓徑池方若干？

答曰：圓徑四十二步，池方二十五步。



法曰：列餘積以一百九十六步乘之得十三萬六千八百０八步，又列云術倍之自乘，又以一百四十七步乘之，得七千二百三步，二數相減餘一十二萬九千六百０五步為實，另列倍之云數七步，又倍之以一百四十七步乘之得二千五十八步為縱方，以四十七為隅法，帶縱平方開之



，加倍角徑七步為圓徑，於斜五因七歸即池方，合問。

今以現代代數符號表示解法：

解法：設池斜：x 則池方：$\frac{5x}{7}$ 圓徑：x+7

$$\frac{3(x+7)^2}{4}-\left(\frac{5}{7}x\right)^2=698$$

$$47x^2+2058x-129605=0$$

$$x=35$$

此題另有解法二，是先求圓徑，方法類似。另在解法中有一特殊之處，即「一十二萬九千六百０五步」，０與漢字的表示法混合使用，[9]這或許是慣於列籌算式的影響，０在東算家的認知中所代表的意義，亦值得探討。

4.3.4 一題多解靈活變換

第七十五題提出四種解法，可發現對於熟捻比例關係的轉換，並知道正方形面積之比等於邊長平方比：

〔75〕今有大小方田各一段，共積一千八百七十二尺，只云小方面如大方面三分之二，問大、小方面各若干？

答曰：大方面三十六尺，小方面二十四尺。

法曰：置積九因九者及三分自之數為實，以十三十三即三分二分各自乘相並之數為隅法，平方開之得大方面，三分之二即小方，合問。

[9] 從現存的中國古算書來看，秦九韶（1209-1261）的《數書九章》（1247）與李冶的（1192-1279）《測圓海鏡》（1248）是最早在使用〇的兩本算書。

又曰：列積四因二自之數為實，十三為隅，平方開得小方，合問。

又曰：列積以十三為隅，平方開得數三因得大方，二因得小方，合問。

又曰：列積為實，以二尺二寸五分此三分之二也，加一得三尺二寸五分為隅法，平方開之得小方三因二歸得大方，合問。

以現代符號表示：

（一）設大方：x 則小方：$\frac{2}{3}x$

$$x^2+\left(\frac{2}{3}x\right)^2=1872$$

$$13x^2=1872\times 9$$

（二）設小方：x 則大方：$\frac{3}{2}x$

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=1872$$

$$13x^2=1872\times 4$$

（三）設大方：x 小方：y 則

2x=3y

$$x^2+y^2=1872$$

‘Ž‡ (ˆê)(“ñ)

$$‘å=\sqrt{\frac{1872}{13}}\times 3$$

$$¬=\sqrt{\frac{1872}{13}}\times 2$$

（四）設小方：x 則大方：$\frac{3}{2}x$直接用小數

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=1872$$

$$x^2+\frac{9}{4}x^2=1872$$

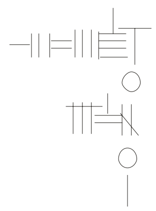
$$3.25x^2=1872$$

解法一、二分別先求大方、小方，此時必須要轉換之間的比例關係。解法三可視爲前兩個解法的綜合，亦可視爲已知邊長比爲 2：3 則面積比爲 4：9，如此面積和可視爲 13 個小單位正方形，先求小正方形邊長，再依比例求各正方形邊長。解法四可視爲將係數化爲小數形式。此種形式的解題方式並不僅以求出解答爲主，而是多元思考的產物。本題另一特殊之處，是在於用尺不用步爲單位，爲本門中僅見。

第七十九題提出三種方法解題：

〔79〕今有大、小方田二段共積八百七十二步，只云小方冪乘大方冪得十三萬二千四百九十六步，問各若干？

答曰：大方面二十六步，小方面一十四步。



法曰：列云數為實，以共積為乙縱負，以一為丁縱，即隅。 減

縱三乘方開得小方面，自之以減共積餘數，平方開得大方面，合問。

又曰：列云數為實，以共積為縱方，以一為隅減縱平方開得小方冪，平方開之得小面，合問。

又曰：列云數為實，平方開之得大小面相乘數，乃用啟蒙大方面乘小方面法，合問

將三種解法以現代符號表示：

（一）先求小方（籌算式有誤）

$$x^2+y^2=872$$
$$x^2y^2=132496$$
$$\left(872-y^2\right)y^2=132496$$
$$y^4-872y^2+132496=0$$

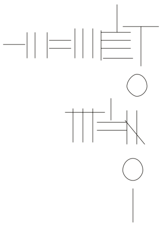
（二）求小方冪

$$x^2+y^2=872$$
$$x^2y^2=132496$$
$$\left(872-y^2\right)y^2=132496$$
$$\left(y^2\right)^2-872y^2+132496=0$$

（三）參考第 15 題

$$x^2+y^2=872$$
$$x^2y^2=132496\Rightarrow xy=364$$
$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=144$$
$$x-y=12$$
$$x=y+17$$
$$(y+12)y=364$$
$$y^2+17y-364=0$$
$$y=14$$

解法一乃直接求出小方面，解法二先求出小方面平方，開平方求出小方面。筆者認爲東算家用解法二，除了是數學解題上的感知能力外，亦可歸納出兩個優點，一方面節省列籌式的空間，另一方面簡化運算步驟，筆者以這兩個觀點做一比較：

	解法一	解法二
籌式		
開方運算	1 + 0 - 872 + 0 + 132496 （10 10+ 100 -7720-77200 1+10-772-7720+55296 10+200-5720 1+20-572-13440 10+300 1+30-272 10 1+40-272-13440+55296 （4 4+176-384-55296 1+44-96-13824+0 y=10+4=14	1 - 872 + 132496 （100 100 - 77200 1- 772 + 55296 100 1-672+55296 （90 90-52380 1-582+2916 90 1-492+2916 （6 6-2916 1-486+0 y^2=196，y=14

由解法三「用啟蒙大方面乘小方面法」，[10]可知對《算學啓蒙》的方法非常熟悉。

4.3.5 以天元術解題

第八十一題爲東算抄第三個以天元術解題的問題：

〔81〕今有大、中、小方田各一，共積四千四百九十六步，只云中面多於小面四步，少於大面四分之一，問各若干？

答曰：大六十四步，中一十六步，小一十二步。

10 參見《東算抄》，頁 321。

法曰：立天元一為小面，加四步為中面，自之為中積，又列中面四之為大面，自之為大積面十六步倍之，又以分母四乘之為縱方，又分母四自之為隅法又列小面自之為小積，三位併之得。寄左，列共積與寄左相消得開方式，以帶縱平方開得小面一十二步，加四得中面，就四之得大面，合問。

將解法用現代符號表示：

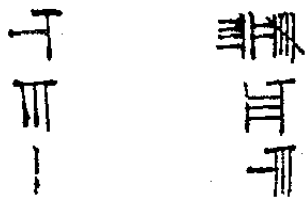
設小、中、大三面分別爲 x、x+4、4（x+4）

$$x^2+(x+4)^2+[4(x+4)]^2=4496$$

$$18x^2+136x-4224=0$$

$$x=12$$

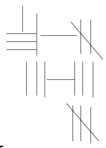
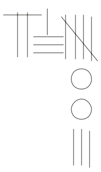
由此處可知，以此解題之東算家已非常熟悉列天元式的規則，真正具有未知數的概念，在係數爲 1 的 （即天元一），在未知道答案前因不知數值，故無位值顧慮之虞，所以可不用對齊，若係數非 1 或用於開方式，才需依位值對齊例如表示 $x^2+8x+16$，表示 $18x^2+136x-4224=0$。



$x^2+8x+16$ $18x^2+136x-4224=0$

4.3.6 帶有根號之方程式

《東算抄》中處理帶有根號的方程式，一般有兩種途徑，一種是藉由平方去根號，另一種是將其視作新變數。筆者在此以第八十四、八十五題爲例：

題號	題文	解法
84	今有圓田一段，徑為實，平方開之，得數加入周，共得五十二步，問周徑各若干？ 答曰：周四十八步，徑一十六步。 法曰：列共數自之三因為實，又共數倍之三因又加一共得三百十三為縱方，以三為負隅，以減縱平方開  之 ，得周三而一得徑，合問。	設周： x 則徑：$\frac{x}{3}$ $\sqrt{\frac{x}{3}}+x=52$ $-3x^2+313x-3\times 52^2=0$
85	今有圓田一段，徑為實，平方開之，得數加入圓積，共得一百九十六步，問周徑各若干？ 答曰：周四十八步，徑一十六步 法曰：列共數四因為實，以四為甲縱，以三為丁縱，以三乘方開之  ，得開方數四步，自之得徑，又三之得周，合問。	設徑：x $\frac{3x^2}{4}+\sqrt{x}=196$ $3x^2+\sqrt{x}-784=0$ $3\left(\sqrt{x}\right)^4+\sqrt{x}-784=0$

第八十四題經過移項平方使方程式不帶根號，第八十五題東算家將「$3x^2+\sqrt{x}-784=0$」視爲「$3\left(\sqrt{x}\right)^4+\sqrt{x}-784=0$」而以三乘方開之，先求得$\sqrt{x}$，再平方解出 x，真可說是「善巧」之變換。

對於$x^n=a\left(n=2\sim 3, a>0\right)$若開不盡時，東算抄中也給出求近似根的公式：$x^2=a^2+b\Rightarrow x=a+\frac{b}{2a+1}$及$x^3=a^3+b\Rightarrow x=a+\frac{b}{3a^2+3a+1}$，可說是對於各類問題之安排面面俱到。

4.4 卷之三內容結論

〈開方各術門〉顧名思義便是利用開方術解方程的問題，本卷的所有題目佈題皆與體積面積相關，高次方程式就依附於其中。令人不解的是，雖名之為「開方各術」卻未說明各種開方術的基本程序，僅告知要利用何種開方術求解，筆者認為很可能開方術被列為算家必備之能力，頗有「不會開方者，不得入此『門』」的味道，還好由〈句股互隱門〉第六十一、六十二題可知基本上是以「增乘開方」來運算。

筆者認為就體例、內容與方法上本卷有如下之特點：

（1） 本卷的體例有四種：

1.「今有」－「答曰」－「法曰」。
2.「今有」－「答曰」－「法曰」－「一法」。
3.「今有」－「答曰」－「法曰」－「又曰」。
4.「今有」－「答曰」－「法曰」－「又曰」－「又曰」。
5.「今有」－「答曰」－「法曰」－「又法」。

（2） 〈開方各術門〉為《東算抄》中所佔題目最多的一門，若擴大整本書來比較，共 363 個問題，需要用到開方運算的佔 201 題，約佔 55.4 %，然而在本門之中未見開方之詳細程序，可見開方術是當時東算家必備技巧。

（3） 書中所提到的開方術，相關用語：

1. 平方開之、立方開之：解型如：$x^n = A$

（1） 若開不盡則給出近似值公式：

$$x^2 = a^2 + b \Rightarrow x = a + \frac{b}{2a+1} \text{，} x^3 = a^3 + b \Rightarrow x = a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1}$$

2. 帶縱平方、立方開之：
3. 減縱平方、立方開之：
4. 平方翻（積）法、立方翻積法：
5. 帶縱（減縱）三乘方開之：
6. 三乘方開之：
7. 二次平方開之：

（4） 能利用變數變換，以簡化開方式，使係數變小，以利運「籌」。

譬如：第 37 題，—ßA$= x - 25$

$$-A^2 + 183A - 5616 = 0$$

第 40 題，

—ßA$= x - y$

$$-5A^2 + 632A - 17043 = 0$$

（5） 一題多解，雖然開方的過程較爲繁複，但東算家仍不厭其煩，尋求不同的解題方式。

（6） 將「方五斜七」應用在解題中，以「方五斜七」爲圓內接正方形之邊長和圓直徑之比。

（7） 利用「二次平方開之」解四次方程，節省運籌空間及步驟。

（8） 第六十八題在數字表述時出現０，譬如：「十三萬六千八百０八步」。

（9） 結合『方程術』、『開方術』，並利用乘法公式消去變數：開方各術門第 76 題。

$$x^2 + y^2 = 872.....(1)$$
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 480....(2)$$
$$(1)-(2) \Rightarrow 2y^2 = 392 \Rightarrow y = 14$$

（10）帶根號方程：開方各術門第 85 題。

$$3\left(\sqrt{x}\right)^4 + \sqrt{x} - 784 = 0$$ （三乘方開之）

（11）受《算學啓蒙》影響很深，對其方法非常熟悉，譬如第 79 題解法三：「用啟蒙大方面乘小方面法」。

（12）利用天元術解題，從列籌式中可發現東算家已有清晰的未知數概念。