國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士班

碩士論文

指導教授：譚克平博士

國中階段符號感意涵與評量方式之探究

An investigation on the components of symbol sense and their assessment at the junior high school level

研究生：林育萱

中華民國 102 年 7 月

中文摘要

數字是算術的重要元素，符號則是代數的重要元素。代數是國中數學課程與教學不可或缺的重要主題，然而從研究者教學經驗發現，相較於數字計算等一般化算術，國中學生較不容易掌握代數符號。九年一貫課程綱要在數與量主題中提及應培養學生的數感，且數感在國內外已累積相當多研究。那麼代數主題裡是否也應培養學生具備「某種感」呢？答案是肯定的。Arcavi(1994)指出，符號感為代數教學的重要一環(Arcavi, 1994)。雖然符號感漸漸開始受到重視，但符號感的相關研究仍十分稀少，國內更是尚未出現符號感的相關研究。因此本研究主要目的為分析符號感意涵，整理與開發出符號感構成要素，進一步設計適合國中階段的符號感評量方式。

故本研究共有兩大部份：研究一透過文獻分析、小組討論、專家審查等內容流程，探索符號感意涵，進一步整理、開發符號感的可能構成要素。研究二則依據研究一所整理的符號感構成要素，設計適合國中階段的符號感試題，經過多次試寫、小範圍施測與訪談，最後請專家審查，逐步修正試題，最後於正式施測階段找 117 位學生進行測驗，分析學生的作答表現。

從研究一結果將符號感分為三大向度，每個向度下有數個子成分，共七個子成分。從研究二的結果發現開放式問答題型較適用於符號感測驗，且學生作答表現可對比出明顯具備符號感與欠缺符號感的情形。並由此作答表現進一步呼應研究一所整理之符號感構成要素。

關鍵字：符號感

英文摘要

Number is the important element of arithmetic, while symbol is of algebra. Algebra is a major project in junior-high-school math curriculum and instruction. However, from my own teaching experience, I found that it is more difficult for the junior high school students to master algebraic symbol than to master general arithmetic. Grade 1-9 Curriculum Guidelines tells that we should develop students' number sense; also, there are a lot of studies concerning number sense whether foreign or native. Then, when it comes to algebra, should students be developed some sense? The answer is absolutely yes. Arcavi (1994) announced symbol sense is the principal key to algebraic instruction. Although we become to take focus on symbol sense, we still do much rare relative study, not to mention the internal study. Therefore, my major study propose is to analyze the meaning of symbol sense as well as sort and build the construction of symbol sense and moreover, to design a suitable symbol-sense assessment for junior high school students.

There are two parts in my study. My first part is to inquiry the meaning of symbol sense by analyzing document, panel discussion, and experts' investigation. My second part, depending on my first part, is to design a suitable symbol-sense assessment for junior high school students; through trying tests many times, testing within narrow range; and after experts' investigation, I revised my tests step by step so that on the formal stage, I found 117 students to do my tests and analyzed their answering performance.

From my first part, there are three major dimensions dividing symbol sense; each has several minor elements, and total seven minor elements. From my second part, I found that the open essay questions are proper to symbol-sense assessment, and they contrasted students who have symbol sense with those who do not. The students' answering performance may also respond to the construction of symbol sense in my first part.

Keywords：symbol sense

目錄

表次

圖次

第壹章 緒論

本章共分為四節，分別就研究動機、研究目的進行詳細說明，並針對本研究所使用的特定名詞加以界定與提出解釋，最後於第四節說明研究範圍與限制。

第一節 研究動機

談到出色的音樂家，人們除了稱讚他們的努力，也不忘提到他們具有良好的「音感」。有些人會說多國語言，學習語言的能力很強，也通常會被形容為具「語感」的人。若從教育部國語辭典的定義來看，可知音感是指「 對音色、音高等音樂現象的辨識能力」，語感則是指「對於語言文字之心理上的反應」。那麼數學領域中，是否也有某些重要元素，促使數學的學習呢?數學學習上，一些非正式的感覺，確實能幫助學習及問題推理(Arcavi, 1994)。

從研究者的教學經驗可發現，相較於數的運算或數量比較，國中學生對於符號的使用與掌控，易顯得為陌生與不安。例如看到 $(2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3})$ 與 $(2x+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y)$ 兩個式子，多數學生有把握求出第一個式子的答案，對於第二個帶有符號的式子，則多了一些不確定感。

縱使學生後來在代數領域中漸漸習得代數的相關知識與概念，並熟練符號的基本操作，但在處理問題時，仍缺乏符號彈性運用的能力。從洪萬生(1996)引用某位國一學生檢討自己的數學學習心得，可發現學生對代數符號所感到的困擾：「我對數學有困難的是，不能容忍 x、y、z 是個數字，並算出一個答案，這是自己面臨到的一個困難，無法突破。」顯示出學生對代數符號的困擾(洪萬生，1996)。

若進一步探究學生對數字與符號感受的差異，也許與課程設計因素有關。從小學到國中，數學的首要目的是將小學算術精煉成為代數學 (蔡聰明，1995)。

又從我國九年一貫課程綱要發現，國小與國中課程比較下，小學階段較強調「數與量」主題，課程目標亦提及「培養流暢的數字感」。 國中階段則較強調「代數」主題。也因為學生從小即接觸數字，自然對數的運算較為熟悉，對符號的使用較為陌生。又「代數」在數學中是個相當重要的一個主題，往往各種問題常會使用代數方法解題，那麼課綱中所提到的「數與量」主題，需培養流暢的數字感，重要的「代數」主題，是否也該培養什麼樣的能力呢?

相較於數字是算術的重要元素，符號則是代數的重要元素。「數感(number sense)」在數學教育上很早就出現許多重要討論， 「符號感(symbol sense)」議題亦漸漸開始受到重視(Bergsten, 1999)

根據美國國家研究協會（National Research Council, NRC）於 1989 年提出：「小學數學教育的主要目標應該要發展數感」(NRC, 1989)。黃毅英參考 NRC 所述，進一步提出中學數學應在於建立「符號感」(黃毅英, 1992)。中國教育部制定《全日義務教育數學課程標準(實驗稿)》亦明確提到須發展學生的數感、符號感。

其中，Abraham Arcavi可說是符號感研究先驅，於1994年透過解代數問題時的行為表現，分析並整理符號感的可能成分，認為符號感是一種對符號有著複雜且多方面觀點的感覺，和一種能快速準確地給予符號評價、理解符號或對符號產生直覺的本能(Arcavi, 1994)。爾後提到符號感，及符號感相關研究，也多會提及Arcavi所描述的符號感成分。

且由於代數是國中數學裡相當重要的主題，符號的使用推動了數學與科學的發展，節省人們大量的思維時間，故培養符號感有其必要性與價值。Arcavi(1994)認為符號感是代數教學的重要一環(Arcavi, 1994)。王宽明與何郁群(2010)明確指出符號感的重要性有以下四點：(1)展現事物數學結構的形式化特徵；(2)表達數量關係和解決數學問題的精確模式；(3)改變分析問題和解決問題的思維形式；(4)促進學生良好的個性化思維(王宽明、何郁群，2010)。此外，科技的進步，讓我們省去繁瑣的計算，並得到精確的計算結果，因此，數學教育中更應強調某些能

力，某些超越計算、記憶等制式化的能力。 例如計算機的進步讓數學教育更加明瞭數感的重要性；而電腦代數系統(CAS)的發展，凸顯流暢地使用符號及符號感的重要性(Pierce & Stacey, 2001; Sutherland, 1999; Zehavi, 2004)。

而現今各種代數主題方面的研究已經相當多，若能從另一個角度，探討學生對符號的感(sense)，相信對國中生學習代數主題有所助益。若教師能瞭解學生所具備之符號感程度，亦能進一步推測學生學習代數的困境。

故本研究想從瞭解符號感之意涵，試著勾畫出符號感的構成要素，進一步從中開發適合的符號感評量方式。

第二節 研究目的

雖然國外已有少許文獻對符號感意涵及內容有所著墨，但基本上缺乏對符號感成分作較為全面性的整理，因此本研究的主要目的為透過對文獻分析，系統地整理符號感在國中階段應包含的成分。

而本研究另一目的則是探討如何對所整理的符號感各子成分進行評量，透過研究小組的討論、學生的試寫、專家諮詢，嘗試對每一個子成分開發適合的試題，以供日後從事符號感相關研究的學者作參考。

故本研究之主要研究目的如下：

一、探討符號感構成要素。

二、根據符號感構成要素，開發適合評量國中學生符號感的評量方式。

並依上述兩個研究目的，將本研究分為兩部分進行，其中研究一主要的目的是透過深入地文獻探討以整理出符號感的成分。而研究二主要的目的是依據研究一的研究成果，研發一些可以評量符號感各子成分的題型，進行施測，以瞭解這些題目的表現。

第三節 名詞釋義

一、符號

數學符號一般可分為「代數符號」、「運算符號」、「關係符號」(古逸軒，2009)。本研究中所提及之符號，是指代數符號，也就是用來代替數字運算的記號。記號形式不拘，可以是字母(x、y、z...)、文字(甲、乙…)或圖案(□、△)。

二、符號感

本研究所指的符號感是指：解題歷程中對代數符號的感覺、體認及辨識能力。在問題處理過程中，解題者感知到符號所傳遞的訊息，進一步對符號作合適地處理，使能夠有效率解決問題。

本研究將符號感畫分為「使用」、「意義」、「結構」三大向度，再依據各向度下細分為數個子成分，其內容將於本研究第貳章詳細說明。本研究「向度」一詞亦可稱作「成分」，兩者將交錯使用。

三、符號式

泛指包含代數符號的表示式，包含一般的代數式、函數式…等。由於代數符號亦屬於數學符號的一種，本研究者為凸顯代數符號在表示式中的角色與意義，故用「符號式」稱之。

四、國中階段

本研究所指國中階段為七年級到九年級所學之課程。

第四節 研究範圍與限制

由於國內尚未有符號感的相關研究，且國外關於符號感討論亦不多，本研究嘗試從少許文獻中，整理符號感成分、開發符號感的可能構成要素，以作為後續研究之參考與依據。符號感構成要素之各向度與子成分敘述將於第貳章與第參章詳細說明。

此外，一個有符號感的人，尚須具備一定的知識與符號操作基本能力(Naidoo, 2009；顧繼玲、張新華，2010)，故本研究設計之符號感試題，尚需考量學生的先備知識或已習得的數學概念，題目設計上以國中階段教授過的課程為主。

符號感評量方式為初步發展階段，仍須不斷進行修改與施測。本研究設計的符號感試題以開放式問答題型為主要題型，少部份選擇題，正式施測前搭配深入訪談，從中觀察學生符號感的展現，以利試題的編製。但礙於符號感是比較新穎的研究領域，相關評量方式仍處與起步階段，加上研究時間有限，綜合各方面現實考量之下，本研究僅止於研發適用於評量符號感之題型，以供後續研究參考的依據。

第貳章「研究一：符號感構成要素的建構」之目的與方法：

研究一主要目的是透過深入地文獻探討以整理出符號感的成分。研究方法以文獻分析法為主，透過小組討論、學生作答表現、專家審核等過程，試圖以解題歷程角度思索，整理與建構出符號感的構成要素。

第一節 研究設計

(一)文獻蒐集

本研究在初步蒐集時，先從 Arcavi(1994) 「*Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics*」這篇符號感之經典文章開始閱讀，從中概略知道符號感一詞指代數領域中，泛指對代數符號的感覺(sense)。而此文章藉由解題時的行為表現，條例式地整理出七個符號感成分。

接著我試著使用關鍵字「symbol sense」於 google 學術搜尋網站上進行文獻蒐集，發現 Arcavi 於 2005 年再次討論符號感，以「*Developing and using symbol sense in mathematics*」一文，將符號感組成成分濃縮為六個成分(將 1994 年的其中兩個成分合併為一個)。除了 Arcavi 為符號感研究之先驅，其他深入探討符號感的相關文獻相當地少，僅有少數文獻如 Bergsten(1999)、Kinzel(2001)、Sharma(2000)、Pope 和 Sharma(2001)…等學者的文章標題具有 symbol sense 一詞。

其中較特別的是，部分研究透過電腦代數系統(CAS)或數位化環境下的工具處理代數問題，從中討論符號感的重要性與特徵。如 Pierce 和 Stacey 提出「代數洞察力(algebraic insight)」，明確指出代數洞察力是符號感的子集。而 Bokhove 和 Drijvers 則將代數專長(algebraic expertise)分為基本技能(basic skills)與符號感

(symbol sense)兩個向度。由於符號感本身文獻極少的情況下，我開始蒐集 Pierce 和 Stacey 所提到代數洞察力與 Bokhove 和 Drijvers 關於符號感研究之相關文章。

然而在 google 學術搜尋網站上無法透過「符號感」一詞找到與符號感構成要素的相關文獻。於是我從其他資料庫找到中國大陸關於符號感的相關文獻，有許多文獻談論符號感的重要性，但多限於表面、攏統的敘述。其中，中國大陸教育部發表的數學課程標準有提及符號感(符號意識)一詞，描述符號感所應展現的特徵。在我國九年一貫課程綱要中的數與量主題，明確提及「培養流暢的數字感」，卻未於代數主題中提到符號感一詞，文獻蒐集過程中也沒有看到國內有任何關於符號感的相關研究。

由於符號感一詞中所指的符號為代數符號，且符號感的相關研究也大多脫離不了學生處理代數問題時的行為表現，所以除了文獻蒐集初始階段以符號感文獻為主，文獻蒐集的中後期階段，我開始蒐集關於代數學習或數學學習方面的文獻為主，如 Kieran、Booth、Collis、Kuchemann、Sfard…等人的文獻，皆可發現學生在算術到代數的學習過程中遭遇困難，例如學生對等號概念的迷思，與文字符號使用的不恰當性。導致這些困難的主因又與學生對符號的理解程度有關，所以亦進一步搜尋關於數學符號的文獻，如 Skemp(1987)所敘述的符號功用、Kuchemann(1981)提出學生詮釋文字符號的六種層次…等文獻。

以上為文獻蒐集的過程與主要文獻蒐集之範疇，其餘文獻探討內容將於第參章報導。

(二)小組討論

有鑑於探討符號感構成要素之文獻極少，多數對符號感的描述略顯模糊與攏統，研究者除了從文獻探討過程中分析符號感成分，配合每兩周一次的小組討論，透過彼此意見交流，逐漸勾勒出符號感各子成分。而小組成員除了指導教授與研究者外，尚有四位數學背景之研究生。

研究初期，研究者在小組中發表對符號感的瞭解。研究中期，研究者就各類文獻中，初步整理符號感構成要素可劃分於三個向度，試著細分各向度下的子成分。討論過程中大家從不同角度思索何謂符號感，就研究者每個研究階段所擬定的符號感成分進行批判與修改。並透過研究者或小組成員所提供之例題，模擬解題時的想法與可能出現的情況，探索符號感的構成要素，期待藉此發展一套具體且明確的符號感構成要素。

(三)學生作答表現

符號感構成要素除了透過文獻分析，研究者以教學經驗猜測學生解題時的作答情形，從解題角度來思考符號感的可能成分。最後參考研究二之結果(學生作答表現) ，作為說明或修改符號感各子成分敘述之依據。

(四)專家審核

由一位數學教育專長的大學數學系教授擔任專家審核本研究擬定之符號感構成要素。

第二節 研究流程

研究一之研究流程，如圖 2-2-1。

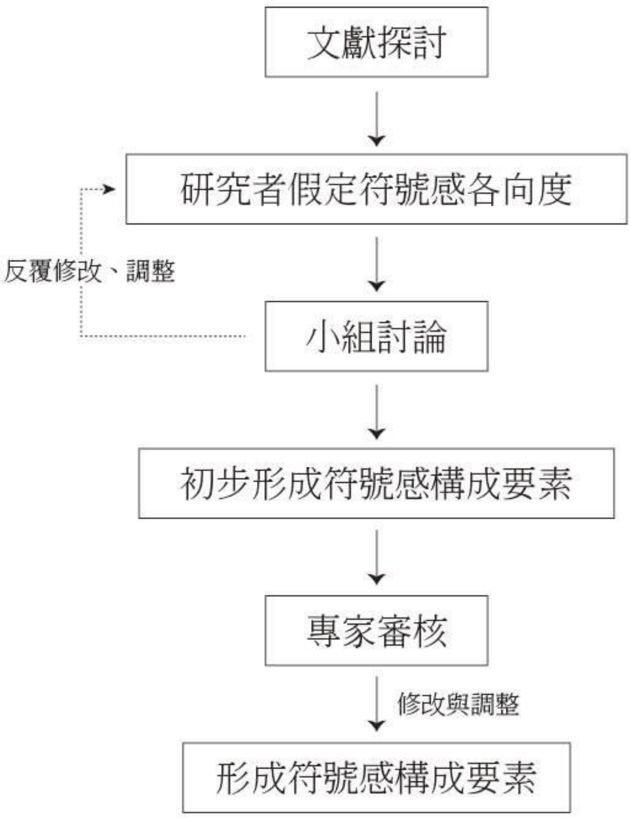


圖 2-2-1 研究一之研究流程圖

第參章「研究一：符號感構成要素的建構」之研究結果

第一節 文獻分析

本節將分別從學生從算術進入代數學習面臨的困難、符號相關理論、符號感理論研究與代數洞察力四個主要方面進行文獻探討。

一、學生從算術進入代數所面臨的學業困難

由於符號感與代數符號有關，研究者想從瞭解學生學習代數時的困難，從學生在困境的反應欠，反推符號感的可能成分。

Tall 與 Thomas(1991)認為自然語言的理解與代數的符號主義間有明顯不一致的認知情況(Tall & Thomas, 1991)。亦有許多研究指出，多數學生從算術到符號化的代數學習過程，常遇到許多困難與挫折(Herscovics & Linchevski, 1994；Linchevski & Herscovics, 1996；Kieran,1992；Sfard, 1991)。

從研究者自身的教學經驗，亦發現許多學生在初步接觸代數課程時，容易對符號感到陌生與不安。

若從我國課程面探討，小學數學強調數與量主題，重視學生的算術能力，多處理已知數的問題。小學階段經過算術的訓練後，學生習慣於等號後求出一個答案，例如問學生「11+11＝?」學生會於等號後頭寫下 22 也就是$11+11=22$。而數的排列方式，也習慣將$3\frac{1}{2}$視為$3+\frac{1}{2}$；234 視為兩百三十四。對於代數符號的觀念，則習慣將代數符號視為某物品或其縮寫，例如公克的縮寫為 g，公斤的縮寫為 kg。

國中課程則因增加許多代數主題，在等號的使用上更加突顯出等價關係的概念。此外代數中所使用的代數符號可用來代表未知數，例如 g 可代表一個未知的數，「$10g$」可能為 10 乘以 g，而不是 10 公克的意思。代數符號的表示與排列方式亦不同於數，例如 $\frac{1}{2}x$ 代表的是 $\frac{1}{2}\times x$，並非 $\frac{1}{2}+x$。

學生容易在學習代數主題時遇到困難的原因，可能與算術與代數之間存在的認知鴻溝(cognitive gap)情形有關 (Herscovics & Linchevski, 1994 ; Linchevski & Herscovics, 1996)。

一些學者透過探索算術到代數的過程中，發現算術與代數間存在著程序性(conceptual)與結構性(structual)運思的基本差異。概念的學習從程序性運思過度到結構性運思，需要經歷一段歷程。首先在已熟悉的物件上形成新的過程，然後將此過程簡化，忽略細部的操作，最後將概念形成一個實體。Sfard 將這樣的歷程分為三個階段：內化(interiorization)、濃縮(condensation)與具體化(reification) (Sfard, 1991 ; Kieran, 1992)。

Steffe 等人(1989)則提出算術與代數解題活動差異在於：算術的解題活動是透過列式與施展一些活動，進而朝向解答的獲得，其中並不彰顯量之間的關係；代數的解題活動則強調發現與表示量的關係，藉由等量公理的運作，把一個關係式變為另一個關係式 (引自陳維民，2010) 。

接著將簡單介紹「代數發展」，然後就「等號概念」在算術與代數主題間的差異，及「數字與代數符號的使用差異」上作探討。

(一)代數發展

代數是從算術精煉而來的結晶，又稱為廣義算術(generalized arithmetic)或進階算術(advanced arithmetic)。相較於算術，代數顯得抽象許多。簡單來說，以符號代替數的解題方法就是代數(蔡聰明，1995)。

「Algebra」一詞來自「al-jabr」之變形，原指「還原」(restoration)之意，由

阿拉伯數學家阿爾・花拉子模(Al-Khowarizmi)著作的書名(Hisab al-jabr w'al muqabala)而來。但當時的代數不涉及符號法則(symbolism)，僅以文字描述。直到韋達(F. Vieta, 1540-1603)創立的符號法則，不僅出現代數方程的係數以文字符號表示，並利用符號(字母)代替數作運算，譬如 $ax^2+bx+c=0$。韋達並嚴格區分算術與代數，認為算數只處理數目，而代數則更進一步處理事物的形式(洪萬生，1991，1996)。

一般來說，代數的歷史發展，可區分為「文辭代數」、「簡字代數」、「符號代數」三個階段。Sfard 與 Linchevski(1994)從歷史的演變，進一步整理出代數的發展階段，如表 3-1-1。

表 3-1-1 代數發展階段(參考自 Sfard & Linchevski, 1994)

類型	階段	焦點	表徵	歷史發展焦點
一般化算術	操作性	數的計算	口語(言辭的)	萊茵德紙草書 (Rhind papyrus) ，1650BC
			口語+符號 (簡記的)	Diophantus, 250AD
	結構性	計算後的結果 (定值代數)	符號 (字母代表未知數)	Viete(1540-1603) ，16 世紀，
		函數 (函數代數)	符號 (字母代表未知數)	Viete, Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727)
抽象代數	操作性	運用符號的過程 (運算的結合)	符號(字母無意義)	英國形式學派 ，自 1830
	結構性	抽象結構	符號	19 世紀與 20 世紀：群、環、體…等理論，線性代數

(二)等號概念

等號「＝」是數學裡極重要的符號，也是學生學習數學時常遇到的符號。NCTM(2000)提出等號(＝)概念的重要性，認為加強學生對等號的理解，能加深學生學習代數的基礎(引自 Samo, 2009)。然而仍有許多學生不能理解等號的使用是用來表示等價關係(Clement, 1982)。Seo 與 Grinsburg(2003)提出學生對於等號有兩種理解方式：關係性(relational)與操作性(operational)。關係性是指能瞭解等號兩邊是相等的；操作性是指認為等號是指產出結果(Seo & Ginsburg, 2003)。

學生算術的練習與解題經驗中，習慣於等號後得到一個答案或結果，容易將等號視為操作性的概念，例如 7+2=9 或 $6\times10=60$ 。加上由左至右的閱讀與書寫順序，易加深學生認為等號是作下一步動作(do something equal)的信號(Kieran, 1981；McNeil & Alibali, 2004)。當我們用 $10+4=$□+5 為例，問學生□等於多少時，若將等號視為產生結果之功用，會以為□=14 或 19，缺乏等號代表兩邊等價的概念。

但其實等號在算術中，不僅有操作性功用，也有關係性功用。Clement(1982)提到有些學生不懂得使用等號來表示一個等價關係，例如 $7+2=5+4$ 或 $6\times10=2\times30$ 。而在代數學習裡等號表示關係性的功用會更加突顯，也就是等號為代表兩側等價關係的概念更是重要。例如 $2x+3=6-x$，則是表達左式 $(2x+3)$ 與右式 $(6-x)$ 為等價的關係，並非要我們直接從 $2x+3=$ 中的「＝」後求出答案或做某些動作。

Booth(1984)認為因為算術課程中等號的功用較強調找出答案，進而影響學生對代數式結構的概念(引自謝孟珊, 2000)。所以學生在學習代數時，必須改變他們對等號原有的信念，這種從算術到代數對等號意義的認知調整，便是一種調適(accommodation)，而非同化(assimilation) (Mok, 2009)。

(三)數字與代數符號的使用差異

代數符號代表數在國中數學課程是由算術領域進入代數領域的重要橋樑，學生對於代數符號的概念在代數學習上有很大的影響(謝宜玲、陳英娥，2003)。也因算術與代數本質上所具備的差異，使得學生容易在學習代數時對於符號或關係產生迷思概念。Booth(1988)認為學生由算術到代數的學習，就以下四個觀點可看出差異：(1)在代數活動與答案的本質；(2)符號及規則的使用；(3)代數符號及變數的意義；(4)關係的類別與學生所使用的方法。因此造成學生使用代數符號解題過程中產生學習困難(Booth, 1988)。

而初次接觸代數的學生，容易抗拒答案或問題處理的結果有符號存在。例如，代數新手知道 3+3 的答案寫為 6，卻不能理解 $x+y$ 可作為為答案的最後形式。當問到「x 的兩倍為何?」時，有些學生無法接受帶有未知符號的 $2x$ 為最終答案。Collis(1974, 1975)將這種情況稱為缺乏「接受封閉性不足(acceptance of lack of closure, ALC)」。學生接受封閉性不足的程度，能決定處理問題的複雜程度(Collis, 1974, 1975)。

Sfard(1991)認為學生透過學習的經驗，能逐漸建構對變數的理解，與視方程式為可操作物體的能力。例如學生一開始接觸符號時，可能將 3+x 視為一個待解的問題，得經過某些處理過程(processes)才能得到答案。而經過學習後能讓他能逐步理解為 3+x 可作一個結果(objects)，並可用對此結果做某些操作或應用(Sfard, 1991)。

從概念改變觀點來看數與代數符號，代數裡代數符號的使用與學生對於數(numbers)的先備知識產生不一致的情況。有些符號的錯誤使用，起因於學生傾向使用算術裡數的知識(又尤其是自然數)來詮釋代數中的代數符號。例如多數學生理解絕對值代表正數，知道 $|5|=5$、$|-5|=5$，若將絕對值的問題寫成「對任意實數 a，a 的絕對值記作 $|a|$ 時，請問 $|a|=?$」許多學生會寫出諸如 $|a|=a$，這類的

不完整答案。當呈現正確答案為「若 $a \ge 0$，$|a| = a$；若 $a < 0$，$|a| = -a$」時，仍有許多學生無法理解「$-a$」就像是一個表示當 a 為負數時的正數符號(Christou, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007)。

又多數學生對數(number)的解釋大多環繞於自然數的使用，Christou et al. (2007)就型式(form)、標誌(sign)、符號表徵(symbolic representation)、順序-密度(Ordering-Density)、單位(Relationship to the unit) 五個方面，比較自然數與代數符號間的差異，如表 3-1-2 所述。

可從表 3-1-2 明顯看出算術裡常使用的自然數與代數所運用的代數符號間的差異性。自然數中的每個數值有特定的表徵且皆為正數。自然數有其順序性，如 1、2、3、4、5、……。任兩個連續自然數間不會再有自然數的存在，可知自然數的最小單位為 1。然而代數裡所使用的代數符號其形式有多種，例如 a、b、c、甲、乙、丙、x、y、z 等，並不是根據字母表的位置排序，也沒有如自然數般的順序性。而每一個代數符號可能代表著正數或負數，所對應的數可以是一個範圍，不同符號可能代表相同數值。且除非限定符號所代表的變數條件，否則變數沒有最小單位(Christou et al., 2007)。

從這些研究中發現，學生在學習代數時，有許多因素是由於欠缺對符號的瞭解(如變數、將符號或方程式視為可操作的物體…等)，使得在符號使用上感到困難及學習代數時產生迷思。這些種種困難，也與學生的學習經驗與先備知識有關，又尤其學生從小就接觸的算術課程，累積對數的經驗大大地影響代數中符號的使用。

表 3-1-2 自然數(算術)與代數符號(代數)差異表 (Christou , Vosniadou & Vamvakoussi, 2007)

	算術中的自然數	代數中的代數符號(變數)
型式(form)	1, 2, 3,…	*a*, *b*, *x*, *y*,…
標誌(sign)	正式出現的符號顯示為正值(Actual sign)	現像型符號(Phenomenal sign)
符號表徵 (symbolic representation)	自然數中的每個數(number)有唯一的符號表徵-也就是不同符號對應於不同的數值	代數符號所對應的是一個實數範圍-也就是不同符號可能代表相同數值
順序-密度 (ordering-density)	自然數的位置是根據數數表(count list)的排序，有一定的順序性，且沒有任何自然數在兩連續自然數之間。	代數中所表示的代數符號，並不是根據字母表的位置排序。沒有甚麼是一定排在某代數符號之前或之後的。
單位 (relationship to the unit)	單位為最小的自然數 1。	除非指定變數為何，否則變數沒有最小單位。

二、符號相關理論

萊布尼茲(Leibniz, 1646-1716)說過「符號的巧妙和符號的藝術，是人們絕妙的助手，因為它們讓思考工作得到簡約，以驚人的形式節省了思維。」符號系統的出現讓數學得以蓬勃發展。而符號亦屬眾多表徵中的一種形式，人們運用各種表徵溝通或傳遞知識。其中符號可算是最為抽象的一種表徵。

且人類在幼兒時期便已開始形成符號意識(symbol minded)，能體會用符號傳達訊息及知識(DeLoache, 2004)。也因符號感的展現，與符號脫離不了太多關係，故本節將從「表徵類型」、Skemp(1987)從數學學習觀點看待「符號的功用」，及代數中的「代數符號概念發展」三個部份作探討。

(一)表徵類型

表徵是人與人之間互相溝通的來源，從數學解題過程中可發現，表徵的功能可以記錄及連結實物與抽象的數學概念(林福來、黃敏晃，1993)。抽象的數學概念，可透過有效的表徵幫助學生理解概念。

從認知學習的觀點，Bruner(1994)認為學習是運用認知結構(cognitive structure)，經由認知表徵(cognitive representation)獲得新知識。Bruner 將認知表徵分為三種形式：動作表徵(enactive representation)、圖像表徵(iconic representation)與符號表徵(symbolic representation)。對人類而言，動作表徵是求知的基礎，透過具體實物與實際操作的活動學習，也就是靠動作來獲得知識；圖像表徵則指對物體知覺留在記憶中的心像(mental image)，不需具體實物即可憑圖片或想像獲得知識；符號表徵則指運用符號或語言文字為依據獲得知識(引自張春興，1994)。

由表徵為溝通媒介的觀點，Lesh、Post 與 Behr 修改 Lesh 於 1979 年提出的五種外在表徵，重新提出以下五種數學學習表徵：真實情境(real scripts)表徵、操作物(manipulative model)表徵、圖形(static picture)表徵、)語言表達(spoken language)表徵、書寫符號(written symbols)表徵。其中書寫符號表徵是指常用的數學式或符號系統等，例如 $x+y=10$(引自胡惠茹，2009)。

不論從認知或溝通觀點探討表徵，都可知道「符號」屬較高層次的表徵類型。因為人們常常先以真實情境中的具體物作輔助，從具體操作中形成心像，再逐漸轉換為抽象符號運思。學習上，若能熟練地進行符號運思，也較能以有效率的方式將概念內化為個體知識。

(二)符號與數學

符號廣泛運用於生活上，人們可透過符號進行抽象思維。符號在數學領域裡廣泛使用，更是必備且強大的工具。故游自達(1995)指出數學學習上，應讓學生掌握符號系統，並作有意義的操作 (引自謝孟珊, 2000)。

符號在數學概念形成過程中扮演著許多重要角色，Skemp(1987)提出符號有以下幾種功用，且這些功用彼此互有關聯，分述如下：

1. 溝通

概念是抽象的內心思維，看不到也摸不著。符號則是傳達概念的媒介，看得到也可直接操作。假定一個符號在甲、乙兩個人心目中都代表一個相同的概念，甲可將符號和概念的記憶傳遞給乙，使乙回憶起這個符號和概念。當這樣的連結建立起來，實質概念就投射在此符號之上，符號與概念兩者就被認知為一體，產生溝通的效應。然而若符號在兩人心中代表不同概念，則不能產生溝通。

此外，符號與概念本身其實是兩件不同的事物。例如「7」、「seven」、「七」，都代表同一個數字概念，而符號「7」是阿拉伯數字，「seven」是英文字，「七」是中文字。端看要表達的是符號本身還是它所代表的概念。

2. 記錄知識

記錄也是一種溝通，利用符號將知識書寫下來，讓接收者方便於長期保留資料、避免遺忘或易於回顧，且記錄的知識可以配合自己同化的速度去閱讀。

然而符號能否正確傳達所要表示的概念，則顯得相當重要。符號與概念的對應關係有以下幾種可能。如「一個符號僅對應於一個概念」，這是最能避免溝通時產生混淆的對應關係。然而實際生活中，符號與概念的對應關係卻不只是 1 對 1。可能因接受者的背景不同，而產生「一個符號對應於多種概念」的情況，此時應透過上下文的關係，使人掌握正確的概念。

3. 溝通新概念

符號有助於概念的形成，而概念的形成可藉由例子中的共通不變性或共通相似性，供學習者經驗，再靠學習者抽象以形成概念。另一種溝通新概念的方法，則是連結新概念與學習者已知的相關概念。

此外，概念的瞭解尚應包含學習者找尋適當例子的能力。因為人們在獲得某種能力後，必然地想要去使用它。例如理解某個符號所傳達的概念後，往後欲傳達此概念時，便懂得用此符號表示。

4. 使多重分類直接化

利用許多不同方式或名稱對概念做分類。也就是使用不同的表徵方式，來突顯相同概念中所著重的不同特性。例如依照題目的題意，列出 $(x+1)^2=4$ 的方程式，學生亦可進一步寫成 $x+1=2$ 或 $x+1=-2$，使能夠更清楚知道變數 x 的解。

5. 解釋

解釋也是一種溝通，可以讓他人理解之前所不知道的事物，或澄清某些事物。

6. 促成反映活動

這裡是指個人瞭解自己的概念內涵或心靈影像，瞭解彼此間的關係與結

構，並能以不同方式加以操作。

瞭解自己的概念內涵與使用符號表示概念的關係密不可分。符號雖然在我們觸知範圍內仍屬抽象的概念，卻遠比概念這看不見、摸不著的東西還具體。只要將概念與代表符號的聯結完成，符號就成了這個概念的標誌，供人們選取、操作。且透過符號讓與概念的聯結，讓人們更能深入瞭解反映的過程，增加思考的能力。

7. 有助於顯示結構

反映活動使我們瞭解自己的概念結構，便於進一步統整自己的概念結構。而利用簡潔的數學符號正可減輕思考系統的負擔。例如以下兩種作法：

2681	兩千六百八十一
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	兩數平方之差等於這兩數之和與這兩數之差之乘積

8. 使常規計算自動化

概念發展的過程中，基礎概念或理論必須變得自動化，也就是當需要使用某概念結論時，心裡或動作表現可以自動浮現出結論，不需重新深入思考。常規計算自動化，能幫助我們將大部分注意力集中於解題活動上。數學上，自動化需完成將符號與其概念分離，並依照謹慎完整建立出來的規則習慣去處理這些符號

這裡特別提醒，所謂常規計算自動化，並不是不在乎符號或運算的相關概念。一個能自動化處理符號與計算的人，有能力隨時說出處理方式的理由、符號的意義，還能依照問題要求改變符號的型式。

9. 回憶資料或理解

符號能促使我們在自己的長期記憶中，選用適合的概念或心靈影像(schema)，再放回心智結構中。此外，當我們理解符號的意義時，也較容易將符號記憶下來。數學裡常利用符號來幫助回憶資料或理解，有時會先回想符號，再回憶或推導其含意，故學習時必須同時理解概念與相關符號的

關係。

10. 一種創造性的心智活動

創造活動前通常有一段長期思考的過程，思考時許多相關概念會一一出現在心中，以不同的觀點討論、重組，希望能解決問題。在這過程之中，利用符號的操作讓我們操控自己的概念。此外，若符號選取恰當，還能助於顯示新概念的結構，促使創作活動的進展。

符號的強大功能讓人們以更有效率的方式處理問題，以系統的方式傳遞知識文化，促使人類文明發展，在數學世界裡更是不可或缺的元素。所以學習數學時，善用符號所帶來的力量，能藉以獲得更多知識與創造更多價值。

(三)代數符號概念發展

代數與算術最大的不同，在於引用符號代表數。代數領域中的符號(這裡指字母)如同語言中的單字,代數式好比句子,每個單字都代表著一個意義(戴文寶、邱守榕，1999)，進而建構出一套符號系統。使用者必須掌握符號的概念與使用的共同約定，方能達成良好溝通。本節將介紹代數符號常見的分類與說明。

Quinlan(1992)認為代數主題中，代數符號(原文是用英文字母代表代數符號)的理解，有其階層與順序性，如下所述：(1)代數符號被視為一個不帶意義的物體；(2)將代數符號視為一個數；(3)將代數符號視為不只一個數；(4)代數符號代表某一類的數，並能將代數符號視為此類中的一個數；(5) 代數符號代表某一類的數，能夠不把代數符號視為任何特定數 (引自 Bergsten, 2003) 。Bergsten(2003)提出學校代數課程裡，使用代數符號(例如 x)的三種主要概念分別為：(1)代數符號為未知的定值；(2)代數符號是可代表任何數值的參數(parameter) ；(3)代數符號是變數，可以是自變數或依變數(Bergsten, 2003)。

Collis(1975)和 Kuchemann(1981)指出學生對代數符號(原文是用英文字母代

表代數符號)的詮釋有六種方式，依符號概念的層次，由低到高依序為：

1. 代數符號被某數值替代(letter evaluated)：學生一開始即將代數符號設定為一個數值。例如「當 $x+5=15$ 時，x的值為何? 」學生藉由回憶 $10+5=15$ 的事實來解題。
2. 代數符號未被使用(letter not used)：將代數符號忽略不用，亦即代數符號存在，但未被賦予意義。例如「當 $x+y=23$，則 $x+y+2=?$」學生不用考慮x或y的值，亦可求出答案為25。
3. 代數符號被視為物體(letter used as an object)：將代數符號視為一種對物體的簡記方式，或視為物體本身。例如以$2a$代表2個蘋果，$5a$代表5個蘋果，那麼「請問 $2a+5a=?$」學生可知解為$7a$，代表為7個蘋果。
4. 代數符號被視為特定未知數(letter used as a specific unknown)：認為代數符號是一個特定的未知數值，可直接對代數符號進行操作。例如「請問3乘以 $n+5$ 為?」儘管知道n是一個特定未知數，學生仍能直接對代數符號進行運算，求得解為 $3n+15$。
5. 代數符號被視為一般數(letter used as a generalized number)：代數符號可代表許多數值，也就是有不只一個數值。例如「已知x,y為實數，當 $x+y=10$ 且x小於y，x的值為何?」學生知道x不是一個特定數值，而是一個小於5的集合。
6. 代數符號被視為變數(letter used as a variable)：學生將代數符號視為一個範圍內的非特定值，並瞭解變數會隨不同類的數值及運算關係而改變。例如「請問$2x$與 $x+2$ 哪一個數較大?」學生有能力了解x的改變會影響此題的答案，也就是瞭解當 $x>2$ 時，$2x>x+2$。

從許多研究中發現學生對符號有多種理解方式，學者將代數符號的理解程度依序劃分為許多階層，由此得知當學生初次接觸代數時，容易將符號視為一個特定數值或代表某物的記號，忽略符號可作為變數(variable)的重要概念(Collis, 1975；Booth, 1984；Stacey & MacGregor, 1997；Kuchemann, 1978 , 1981)。所以

代數學習上，應先加強學生對於符號的理解能力，發展符號的直覺感，使能夠在接觸符號時，順利察覺到某些訊息，避免誤解代數符號所傳達的意義，從中獲得解題的進展。

三、符號感理論研究

本節將說明符號感的發展，並介紹Arcavi於1994年與2005年提出符號感所具備的成分。

(一)符號感的發展

國內外數感相關研究不勝枚舉，與數感相比，符號感的研究卻非常地少，對於符號感的定義與描述亦不多。Abraham Arcavi 算是符號感研究之先驅，於 1994 年透過解代數問題時的行為表現，分析並整理符號感所展現的特徵。認為符號感是一種對符號有著複雜且多方面觀點的感覺，和一種能快速準確地給予符號評價、理解符號或對符號產生直覺的本能(Arcavi, 1994)。爾後提到「符號感」，及關於符號感的研究，也多會提及 Arcavi 所述之符號感成分。

而其實最早於 1990 年時，Fey 對符號感提出以下五點教學目標：

1. 有能力從代數式中大略判斷數字或圖像表徵所顯示的規律；
2. 有能力去比較不同的次方函數中的各種規則，如 n，n^2，n^3，…，n^k…等形式的規則或數值大小……；
3. 有能力從數值表、圖形或口頭敘述的條件中，分辨最適合用來描述此規律模式的代數規則中的可能形式；
4. 有能力檢查代數運算過程、預測結果的形式；如同演算估計，檢查結果並判斷正確計算的可能性……；
5. 有能力從一些等價形式中，決定一個最適合解決某特定問題的形式…

(引自 Arcavi, 1994)。

除了 Fey 的教學目標與 Arcavi 對符號感的研究，亦有部分學者提出符號感一詞，如黃毅英 1992 年參考 NRC(1989)文獻，指出中學數學應在於建立「符號感」。認為符號感是瞭解符號代表從具體事物抽象出的概念，且在符號操作上具有一定的能力(黃毅英，1992)。Zorn(2002)認為符號感是指從符號中提取數學的

意義和結構，讓符號能有效率地代表某事物，並經由操作符號來發現新的數學意義與結構(Zorn, 2002) 。Bergsten(1999) 參考 Picciotto 與 Wah(1993)的論文，指出符號感是能夠欣賞符號思維所帶來的力量，知道何時及理解為什麼要用符號，並擁有對數學結構化的感覺(Bergsten, 1999)。

符號感是指一種與代數相關的知識，這種知識是技術技能之外的。Pierce 和 Stacey 亦在 2001 年提到「代數洞察力 (algebraic Insight) 」，認為代數洞察力是符號感中的一部分，是符號感的子集。本研究將於後介紹何謂代數洞察力，及其中所隱含的符號感特徵。

Kinzel(2001)透過學生解題時的錯誤表現，探究符號感的意義，描述符號感所展現的特徵。提到符號感結合一種將情境代數化(algebratizing)的意識，和操作及詮釋符號的能力。而情境代數化的意識是指：能用代數式表達一個與數量相關的情境。其中使用代數式表達數量關係時，又通常需伴隨些許操作符號和詮釋符號的能力。Kinel 統整出流暢使用符號的人，應具備的能力如下：(1)辨別出哪些情境使用代數符號是有效的；(2)在物理或數學的情境裡，建構並操作代數式；(3)讀懂(read through)符號所帶來的訊息，進一步分析符號背後的關係；(4)能掌握並應用對表徵的洞察力(representational insight)，就符號形式(notational forms)做詮釋及使用(Kinzel, 2001)。

中國大陸教育部亦對符號感提出些許描述。2001 年出版的《全日義務教育數學課程標準(實驗稿)》，認為符號感主要表現在：能從具體情境中抽象出數量關係和變化規律，並用符號來表示；理解符號所代表的數量關係和變化規律；會進行符號間的轉換；能選擇適當的程序和方法解決用符號所表示的問題。2007 年在《全日義務教育數學課程標準(修改稿)》將符號感一詞修改為符號意識。指出在「數與代數」的教學中，應幫助學生建立符號意識，這種符號意識主要是指能夠理解並且運用符號代表數、數量關係和變化規律；知道使用符號可以進行一般性的運算和推理。認為建立符號意識有助於學生理解符號的使用，是數學表達和進行數學思考的重要形式(劉稀鳳，2009) 。

史炳星與馬雲鵬則對《全日義務教育數學課程標準(實驗稿)》所敘述的符號感作詮釋。認為引進字母表示，是用符號表示數量關係和變化規律的基礎；而使用字母表示數，則是學習數學符號的重要關鍵(史炳星、馬雲鵬，2002)

針對符號感一詞，鄭毓信(2002)從「語感」、「方向感」、「美感」等類似詞彙作探討，認為這些詞彙都代表著一種相關的能力，並包含一種「直感」的涵義。特別是對於某些特定事物、現象或屬性等方面的敏感性，及相關的鑒賞能力。認為使用「符號感」一詞很難想像其真正的涵義，故提出「掌握數學語言」會比「發展符號感」更為恰當(鄭毓信，2002)。

王兄(2007)從表象圖式的角度，來瞭解符號感及其發展，認為符號感是指對符號的感受和領域能力，對符號式時運用的理解以及對數學結構的感悟(王兄，2007)。

符號感是人對符號的意義和作用的理解，以及主動使用符號的意識和習慣。包括三層意思：(1)理解各種數學符號的意義，符號表示什麼意思，在什麼時候使用以及怎樣使用。(2)理解數學符號的作用與價值，為什麼使用符號，有哪些好處。(3)學習數學和應用數學時，在獨立思考和與人交流時能經常地、主動地，甚至是創造性地使用符號(李星雲，2007)。

當學習者缺乏代數文字概念和基本的符號操作，則不具符號感。因為缺乏代數文字概念者會對文字賦予新的意義，易在某些任務中造成錯誤(Naidoo, 2009)

劉雲章（2006）認為教師必須講活抽象的數學符號，藉以發展學生的符號感。提出七點教學建議，其中一點為「重視對符號的語意分析」，說明須讓學生了解符號的涵義，讓代表概念的符號被賦予具體內容。且須能讓學生從符號中感知數學信息，理解符號的涵義（劉雲章，2006）。

符號感教學應包括正確認識數學符號的涵義，也就是該符號表示什麼意思。(王寬明、何郁群，2010)

顧繼玲與張新華(2010)基於本身的體會，概括符號感內涵為：符號感是人們對符號的意義、作用的理解，以及主動使用符號的意識。具體地來說，符號感應

包括理解符號的意義，理解符號的作用，符號有什麼價值，以及能否主動是用符號、利用符號表示和符號運算解決實際問題。因此，符號感是以一定的知識和技能為基礎的主動應用符號的意識。並提出符號感的發展示一個漸進的過程，認為符號感可分為三個階段：(1)理解符號：理解符號表示的意義、價值與關係。(2)掌握符號：能進行符號運算和符號間的轉換。(3)應用符號：利用符號表示及其運算解決問題(顧繼玲、張新華，2010)。

然而不論是從 Fey 的教學目標或是其它學者對符號感的描述，雖然可知「符號感」一詞與代數主題相關，特別是指代數符號的直覺感所應具備的特徵，但多數學者對符號感的描述仍略顯攏統，並未對符號感本身作深入的研究與探討。使得符號感基本組成成分為何? 尚需要更多清楚明確的定義與釐清。

(二)Arcavi 所提的符號感

縱使某些文章中，曾提及符號感的重要性，但大多輕描淡寫帶過，沒有對符號感本身作深入的探討與詳細的說明。直到 1994 年，Arcavi 開始觀察學生或老師解代數問題時的活動，從中分析解題時的行為表現，試著對符號感作詮釋，認為符號感是一種對符號有著複雜且多方面觀點的感覺，和一種能快速準確地給予符號評價、理解符號或對符號產生直覺的本能(Arcavi, 1994)。並藉由這些行為表現，整理出符號感的可能成分。2005 年 Arcavi 再次發表關於符號感的文章，說明符號感上有一些議題需要討論：(1)符號感特徵的發展尚不完備，需透過更多例子與理論基礎探究符號感的組成成分。(2)觀察與訪談數學程度好的學生之解題歷程，除了從中發現解題時的特徵，並進一步討論符號感是與生俱來還是後天培養而得的。(3)甚麼樣的基本知識是符號感所應具備的(Arcavi, 2005)。

以下將介紹 Arcavi 於 1994 年「 *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics*」文章中所提及符號感的七個成分，並輔以例子加以說明。(備註：Arcavi 於 2005 年的文章，將 1994 年的第一個和第二個成分合併為「*Friendliness* *with symbols*」，對其成分的描述仍以 1994 年的內容為主，故以下將以 Arcavi 1994 年提出的七個成分為主軸作說明)

1.瞭解符號並能體會符號的力量： 知道何時使用符號，並知道如何使用符號將某些關係展現出來。

文中用了幾個例題說明此特徵，其中一個是矩形問題：「有一個矩形，若增加某一邊長的 10%，減少另一邊長的 10%，此矩形面積會有甚麼樣的變化?」

學生可能試著用不同方式找出此問題的答案。例如先假定此矩形的長為 100 公分，寬為 80 公分，面積為 8000 平方公分，再根據題目的要求，將長變為 110 公分，寬變為 72，面積則變為 7920 平方公分。打算試著用多個特定例子，推論出某些規律。故接著用不同長寬的矩形代入問題，從中觀察矩形面積的變化。學生在解一個不熟悉的問題時，最習慣使用實際數值代入問題裡，藉由數值的觀察推測某些規律，在研究者教學經驗中，這也是學生最常使用的方法之一。

然而，若學生使用代數符號來處理此問題，能進一步探索出更多的規律與關係。例如直接將長與寬設為 a、b，原始面積為 ab，邊長改變後的矩形面積變為 $0.99ab$。懂得運用文字符號來處理問題，表達出某些關係或規律，而非使用特定數值代表某些特定情況。故 Arcavi 認為若能立即聯想到引用符號處理問題，便是符號感的展現。

2.一種知道何時停止使用符號的感覺，轉而用其他讓問題有進展或更方便的解決方式。

簡單來說，符號感能預先察覺到用符號解題將遇到困難的感覺。Arcavi 引用兩個例題說明：

「試求 $|x-2|>|x-6|$ 的解?」

「當 a 值為何，可使方程組 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 有 0,1,2,3,4,5,6,7 或 8 個解?」

以上兩題若直接使用代數符號的運算方式處理，會顯得複雜，若從符號表示式的概念、函數或直角坐標的概念來解題，會比單純操作代數符號的運算還來得適合。當解題者發現操作代數符號的技能，無法得到有效率且合理的答案時，能夠及時停止使用符號，轉而用其他方式來處理問題。故 Arcavi 認為除了懂得引用符號處理問題，適當地放棄符號操作，也是符號感的一種展現。

3.操作符號和「讀」懂符號的能力。

將符號視為工具，暫時忽略符號背後所代表的意義，讓符號在操作上作更有效率的處理。如同 Arcavi 引自 Whitehead(1911)提到「文明藉由延伸數字的操作得以進展，省去思考關於數字代表甚麼…」就像處理問題時，將帶有眾多訊息的物體(意義、形體、眾多文字量等訊息)，用符號作代表，純粹的操作符號會比操作物體本身有效率多了，處理問題的過程中也可減少受到過多訊息產生干擾，影響效率。換句話說，Arcavi 這裡所指的操作符號的能力，包含能夠分離符號與指示對象的關連，不去聯想符號背後所隱藏的關係或意義，使能流暢地操作符號，讓問題處理上更有效率。

但 Arcavi 這裡所強調的操作符號的能力，更包含了瞭解符號背後所傳達的訊息，跳脫機械式的計算，使能夠靈活地操作與運用符號。

然而在某些情況下，讀懂符號的意義，結合符號意義間的關係，才可用簡單快速的方式得到問題的答案，或使問題處理有大幅度的進展。Arcavi 用以下例題說明何謂符號感亦包含讀懂符號的意義。

「求此方程式的解：$\dfrac{2x+3}{4x+6} = 2$」

多數熟練代數符號運算的人，會直接對符號進行操作，用等量公理求解得

$x=-\frac{3}{2}$。但 $x=-\frac{3}{2}$ 是一個錯誤答案，除了將 $x=-\frac{3}{2}$ 代回題目中驗算，發現 $x=-\frac{3}{2}$ 會使分母為零，又此題若觀察符號的意義與關係，能發現左邊整個分式應為 $\frac{1}{2}$ (分母恰為分子的兩倍)，根本不等於右邊的數值 2，也就是此方程式根本無解。

從上述例題及 Arcavi 對此成分之敘述，使研究者聯想到 Skemp 提及的符號功用之一：「符號可使常規計算自動化」。指出數學上的自動化，是將符號與其概念分離，並依照一套系新建立出來的規則習慣去處理這些符號。但 Skemp 特別強調這種慣例性工作的自動化處理，必須建立在理解符號的意義或相關概念之上。例如一個可以自動化處理符號的數學家，可以告訴你處理的理由、目的，及每個符號的含義，也能依照問題需求將符號的型式做改變(Skemp, 1987)。

Skemp(1987)提到符號的常規計算自動化需建立在理解符號的意義上，Arcavi 亦藉由例題告訴我們，符號感不僅是操作符號的能力，也必需懂得審視、檢驗符號，讀懂符號所傳達的意義及符號間的關係，才能增加答案的合理性及解題的效率。

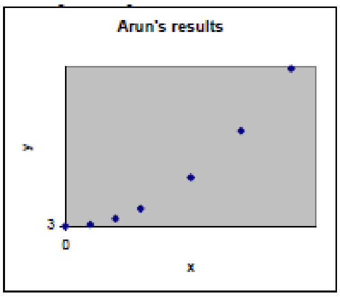
4.察覺語言或圖像資訊與符號間的關係，列出相對應的符號式，並有處理符號式的能力，使問題處理有所進展。

Dugdale & Kibbey 於 1986 年設計的電腦遊戲-Green Globs，是在直角坐標平面上展示一些隨機擺放的綠點，要求學生設計一個通過綠點(越多越好)的代數符號式。Arcavi 藉此例展現圖像與符號式連結的能力。以下將用 Pope & Sharma 參考 Arcavi 對符號感之敘述，進一步所作研究中所使用的例題來說明：

「觀察右圖，找出 x 與 y 的關係式。」

給予以下選項讓學生做選擇：

$y=5x+3$，$y=x^2+3$，$y=3x^2$，$y=4x^2+3$，



$y=(x=3)^2$ ， $y=2x^2+3$ ， $y=\dfrac{1}{x}+3$

(Pope & Sharma, 2001)。

Arcavi 認為能將圖像轉換為符號式，截取圖像中 x 與 y 的關係，創造出完全符合或接近圖像路徑的符號式，是符號感的一個特徵。換句話說，為了某些目的將圖像或語言等表徵，轉換成符號表徵，並用符號列出關係式。

5. 針對問題選擇合適的符號表徵之能力。當察覺選擇的符號表徵不夠滿意時，尋找另一個更適合的符號表徵

用符號解決問題時，不論是從真實情境直接轉換為符號，或是著重圖像、語言等表徵轉換成相同意義的符號表徵，皆會先遇到的問題就是符號的選擇，及如何用符號表示。從 Arcavi 所舉的幾個例子當中，發現這裡所欲描述的符號感成分，應根據符號本身所代表意義或結構，在眾多可選擇的符號表徵中，針對問題選取較為適合的符號表徵(仍是符號表徵的範疇)，而不是強調不同表徵與符號表徵間的聯結或轉換。

其中一例題為「選取一個奇數，將它平方後減掉 1，請問答案是甚麼樣的數字?」直接令奇數為 n，根據題意並稍做分解可列出 $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ，因為 n 為奇數，$(n-1)$ 及 $(n+1)$ 均為偶數，可得答案應為 4 的倍數。然而，若將奇數令為 2n-1，根據題意整理後可得 $(2n-1)^2-1=......=4n(n-1)=8[n\cdot\dfrac{n-1}{2}]$ ，當中因為 n 與 $(n-1)$ 為兩個連續整數，必有一數為奇數、一數為偶數，相乘必為 2 的倍數，進一步發現此答案不僅為 4 的倍數，能從中得到更多資訊發現答案可為 8 的倍數。

文中還有一個例題讓變數在選取上顯得更加重要：「John 拿一張低於$100 元的支票到銀行兌現，行員將小數點以上的數和小數點以下的數搞混了(如支票上寫$19.45，卻付$45.19 給 John)，在花了$3.5 元後，發現他現有的錢為支票上寫

的兩倍。請問這張支票原本應為多少？」若將此支票上的金額直接設為一個變數符號(例如：令此支票金額原為 x)，會發現解不出來。將支票金額上每一個位數分別設為四個變數(例如：十位數為 x、個位數為 y、小數點以下第一位為 m、小數點以下第二位為 n)，計算過程則會過於複雜。若能發現將小數點以上的數與小數點以下的數分別設為兩個變數，題目便顯得容易處理。

雖然從上述例子可知，有些時候符號的選擇具決定性的成果，然而表示問題的方式或符號的選取是有許多自由的，Arcavi 特別強調，雖然不能因為沒有選到最好的問題呈現方式或變數符號來說明缺乏符號感，但符號感應包含一種預感，也就是符號最佳選擇的預感。

6.處理問題的過程中，明瞭隨時檢查符號意義的需要。

能明白解決問題過程中，隨時檢查符號意義的必要性，將符號意義和自己的直覺或問題所預期的結果相比較。

7. 察覺符號能在不同的上下文中扮演不同的角色

Skemp 說符號有溝通與記錄知識的功用，為避免溝通發生混淆，符號與概念的對應可能是一個對應一個，或一個符號對應於多個概念(如圖 2-3-1)。為避免溝通上發生混淆，最好使用一個符號時，就只讓它對應一個概念。當然在一般情況下，很難避免符號與概念一對多的情形，故便要從上下文(context)的描述中，了解傳達者使用得符號所欲傳達的概念(Skemp, 1987) 。Skemp 所提符號與概念的對應關係，強調上下文對於符號判別的重要性，如同 Arcavi 這裡所指的符號感成分。

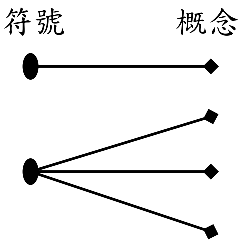


圖 3-1-1 符號與概念對應關係圖

以下為 Arcavi 用二元一次方程式與方程式在幾何上所代表的意義為例，說明此成分所表達的意思。

「求兩直線 $x=0$ 與 $y=mx+b$ 的交點，其中 m、b 為常數。」

利用解聯立方程式中的代入消去法，將 $x=0$ 代入 $y=mx+b$ 中，可得 $y=b$，亦即此交點為$(0, b)$。然而若從另一個角度來看，要找一條斜率為 0 的水平線，將 $m=0$ 代入 $y=mx+b$，可得到 $y=b$ 的水平線。雖然同樣是「$y=b$」這個符號，但在不同的情境與上下文，卻可能代表著不同的意義。

換句話說，一個相同的符號，可能有著不同的意義，要根據上下文做判斷。反之，一個不同的符號，也可能在不同的情境或上下文中，代表著相同的意義。Arcavi 認為符號感的展現，要能察覺符號在上下文中所代表的角色差異，並發展對這些差異的直覺感。

四、代數洞察力(Algebraic Insight)

計算機代數系統(Computer Algebra System，簡稱 CAS)是一種能進行符號運算的軟體統稱。可進行的符號運算如處理數學表示式的化簡、求值、展開、因式分解、方程式的求解……等。常見的軟體有 Mathematica、Maple、MATLAB……等。隨著各種計算機代數系統的發展與貢獻，科技讓代數計算變得更精準有效率，代數教學除了重視標準化地計算技巧，也應強調其他能力的培養。如教學應減少機械式的操作計算，加強學生的代數洞察力(Pierce & Stacey, 2001)。代數洞察力對於解題者是非常重要的，讓解題者在選擇解題策略及檢視自己處理問題的過程中，盡量避免錯誤(Pierce & Stacey, 2007)。

此外，Pierce 與 Stacey 提到符號感顯現於一般處理問題的過程中，而代數洞察力顯現於將數學化問題找出數學化答案的過程之間，符號感與代數洞察力的位置關係如圖 3-1-2。認為代數洞察力是符號感中的一部分，也就是代數洞察力是符號感的子集(Pierce & Stacey, 2001)。故本研究者欲從了解代數洞察力的過程，探索符號感的可能構成要素。

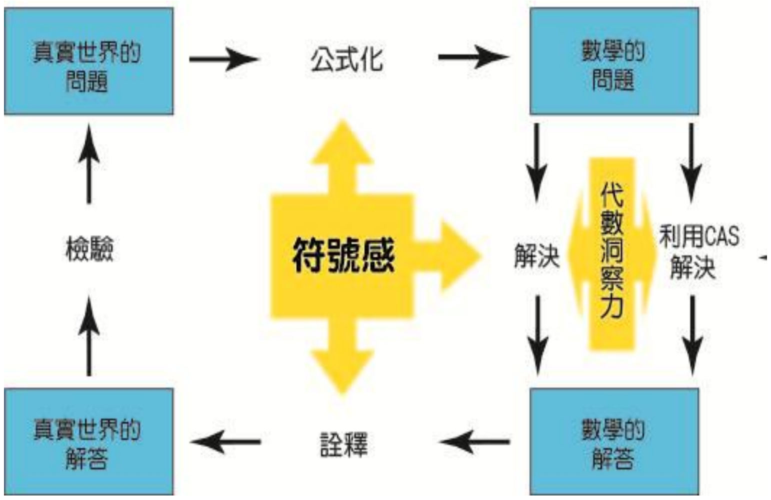


圖 3-1-2 符號感與代數洞察力的位置關係圖 (參考自 Pierce & Stacey, 2001)

本節將介紹 Pierce 與 Stacey 所謂的代數洞察力。表 3-1-3 為代數洞察力之基本架構。

表 3-1-3 代數洞察力基本架構(參考自 Pierce & Stacey, 2001)

面向(Aspects)	**元素(Elements)**
1. 代數預期	1.1 常規和基本性質的了解
(Algebraic expectation)	1.2 結構的辨識
	1.3 辨識關鍵特性
2. 表徵連結的能力	2.1 符號表徵與圖像表徵的連結
(Ability to link representations)	2.2 符號表徵與數值表徵的連結

(一)面向 1：代數期待(Algebraic expectation)

代數期待是指思考歷程中，對於代數的處理結果有某些預期想法。學生應該發展從表示式中看到線索、預測規律和對符號運算有所感覺(Pierce & Stacey, 2004)。若用算術中的估計法比喻代數期待，知 295×6880 大約為百萬位數，而看到 $(2-x+x^2)(x^5-x^3+27x-63)$ 可預期這是一個七次多項式，或預期展開後 x 的最高次方為 7。代數期待不強調準確的計算，但重視表示式的常規(conventions)、結構性(structure)、關鍵特性(key features) (Pierce & Stacey, 2007) 。

1.1 常規和基本性質的瞭解 (Recognition of conventions and basic properties)

文字(letters)在代數上的使用廣泛，常用文字符號代表數，但其意義仍有所不同。例如 $y=ax^2+bx+c$ 中出現了許多文字符號，其中 a、b、c 代表參數，x 和 y 代表變數(Pierce & Stacey, 2001)。

在數學語言的使用上，有許多符號的選定只是習慣或常規，像是習慣以 x 當自變數，y 當應變數；x 軸為水平軸，y 軸為垂直軸。除了習慣性常規，尚有其特定的基本性質。有些學生會因為看到某些符號，便直覺認定一切，忽略了符號本身的基本性質。我們可從以下 Pierce 和 Stacey 提的例子看出常規與基本性質的差異。例如 $f(y)=\dfrac{y+3}{2y-3}$，當中的 y 為自變數，而非應變數；而將此函數作圖時，水平軸所代表的變數為 Y，亦非習慣上的變數 X。 (Pierce & Stacey, 2007) 。此外，常見的分配律 $a(b+c)=ab+ac$ ，亦有許多學生容易錯誤套用於 $(a+b)^2=a^2+b^2$ (Pierce & Stacey, 2001)。

而數學語言的表達方式亦有特定方式，符號書寫的位置通常有特別意涵，某些數學符號的書寫位置是二維方式，例如次方的書寫方式：a^b ，其中 a 為底數，b 為指數。Pierce 和 Stacey 舉一個例子：將一杯咖啡拿到室外放置 t 分鐘後的溫

度(℃)，用 $T(t)=(100-12)e^{-0.2t}+12$ 表示。探究其中的「$e^{-0.2t}$」，能知道與「$e-0.2t$」有著不同意義(Pierce & Stacey, 2007)。。由此可知數學符號書寫的位置與相對位置是很重要的，縱使使用一樣的符號，書寫位置不同，意義也就跟著不同。

1.2 結構的辨識(Identification of structure)

表示式的編排可從各面向探究不同的結構。思考 $\dfrac{a(x+1)^5+b(x+1)^2}{(x+1)}$ 整體結構，中間那條線將式子劃分為分子與分母。亦可將 $(x+1)$ 視為單一個體，是這個表示式中的共同項。或從 $(2x+1)^2-3x(2x+1)$ 中，一眼發現 $(2x+1)$，為此表示式中的一個因式，且能以括號整體看到 $(2x+1)^2-3x(2x+5)$ 中的 $(2x+1)$ 與 $(2x+5)$ 的不同(Pierce & Stacey, 2001)。

此外，創造多元的等價表示式，亦是看出結構的方法。若將上面所陳述的例子，$T(t)=(100-12)e^{-0.2t}+12$ 重新排列為 $T(t)-12=(100-12)e^{-0.2t}$，則是關注咖啡與室外溫度的差異，隨咖啡置於室外的時間指數倍地減少。此式用 (100-12)形式編寫，不用 88 取代，則欲藉由某些形式透露特定意涵(Pierce & Stacey, 2007)。

1.3 辨識關鍵特性(Identification of key features)

閱讀報章雜誌或看書時，總容易在文章中看到某些明顯的特徵，進而了解文章中的大意。如標題、人或事物的名字、附圖的說明、偉人名言…等等，如同利用關鍵字中瞭解文章大意，來形容此元素所欲表達的意涵。辨識關鍵特性意指能從數學式中看到主要特徵、關鍵特性，進一步推得某些訊息或線索。

「請問 x^5-y^5 與 $(x^2+y^2)(x-y)(x+y)$ 兩式是否相等」

如果能看到兩式未知數的最高次方是不相等的，就可省去將式子做展開核對的過程。又如上面所陳述例子 $T(t)=(100-12)e^{-0.2t}+12$，可看到 $T(0)=100$，而不論過了幾分鐘(t)，咖啡的溫度都會比 100℃低，比 12℃高。以上都是藉由主要特徵或關鍵特性，看到某些訊息或線索的例子(Pierce & Stacey, 2001, 2007)。

(二)面向 2：表徵連結的能力(Ability to link representations)

能用代數方面的資訊來表達圖像表徵、數值表徵，進一步得到更多資訊。或將圖像表徵或數值表徵用符號式加以表達或連結，看出更多訊息。Fey(1990)提及代數的理解會顯現於學生在代數表徵、數值表徵、圖像表徵間的轉換(Pierce & Stacey, 2001)。

亦可用以下類似例題，探討表徵連結的能力：

「已知 y 與 x 的關係為 $y=x^2+5$，此方程式像什麼樣的圖形呢?能否預測此方程式圖形與 X 軸相交?又若將此方程式所對應的 y 與 x 值製成表，可從中看到甚麼訊息加以利用?」 (Pierce & Stacey, 2004)

這種表徵間的轉換與連結能力，尤其是與代數表徵的連結，正是 Pierce 與 Stacey 所謂「表徵連結的能力」。

2.1 符號表徵與圖像表徵的連結(Linking symbolic and graphical representations)

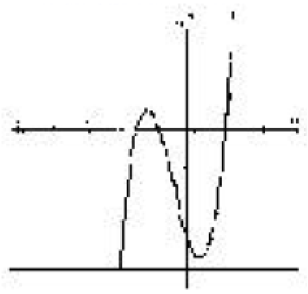
察覺表示式與坐標平面上圖形所透露之訊息，讓表示式與坐標平面上圖形做合理的對應、連結，即是「符號表徵與圖像表徵的連結」所欲表達的概念。將用以下幾個例子作說明。

「請試著畫出 $f(y)=\dfrac{y+3}{2y-3}$ 的圖形」

若察覺 $f(y)=\dfrac{y+3}{2y-3}$ 是一個兩線性函數的比值，能預期此函數圖形會是一個雙曲線，且瞭解 $y=\dfrac{3}{2}$ 代入時所出現的情形(分母為零)，能提供線索讓作圖或函數圖形判準上有一定的幫助(Pierce & Stacey, 2007) 。

「給定一坐標平面上圖形，如下圖，請學生判斷此圖形最可能對應於選項

中的哪一個函數。」(參考 Pierce & Stacey, 2001)



(a) $f(x)=4x-12$

(b) $f(x)=2x^2+3x-2$

(C) $f(x)=e^x-12$

(d) $f(x)=x^3+3x^2-4x-12$

此題主要希望學生藉由圖形在直角坐標平面上的特徵，觀察 x 軸的交點數、圖形樣式…等，推測最可能的表示式。

2.2 符號表徵與數值表徵的連結(Linking symbolic and numerical representations)

在此用以下幾個例子說明何謂符號表徵與數值表徵的連結。

「有一表格列出 x 與其對應的函數值，如下表，請試著否出 x 與 $f(x)$ 間的關係。」

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

可發現 $4=(-2)^2$、$1=(-1)^2$、$0=0^2$、$1=1^2$、$4=2^2$、$9=3^2$，進一步得 $f(x)=x^2$、函數值皆為平方數。

此外，當探討應變數與自變數所對應的數值時，應變數的選取、增加的幅度、區間等，也應留意表示式特徵，觀察數值與表示式的關聯。如 $f(y)=\dfrac{y+3}{2y-3}$，若將 $y=\dfrac{3}{2}$ 代入，則會造成分母為零，故應變數 y 之定義域中不應包含 $\dfrac{3}{2}$。而三角函數 $r(\theta)=\sin(2\pi\theta)$，若只以整數代入表示式中(如表 3-1-4)，會發覺函數值皆為 0，這樣的數值表並無法提供太多訊息，頂多大略知道函數值有某些循環。故

選用合適的數值，才能得到更多與表示式相關的資訊(Pierce & Stacey, 2001, 2007)。

表 3-1-4 某數值表格

θ	$f(\theta)$
-2	0
-1	0
0	0
1	0
2	0
3	0

第二節 符號感構成要素

文獻探討過程中發現，數感很早就受到重視，除了有許多相關研究，亦有許多學者從各個面向提出對數感的定義與具體說明。相較於數感，對於符號感基本成分、符號感定義之文獻甚少。Fey 雖於 1990 年提出符號感合理的教學目標，但並沒有直接對符號感提出定義(引自 Arcavi, 1994)。Arcavi 於 1994 年藉由分析解決問題時的行為表現，試著描述符號感的特徵；2005 年的研究透過課程設計觀察學生反應，提出培養符號感可具備的教學策略，亦觀察數學程度不錯學生解題時的表現，分析學習或處理問題上是如何展現符號感(Arcavi, 1994, 2005)。Kinzel 分析學生的解題歷程並搭配訪談，文章中提到符號感的定義，及符號使用流暢者應具備的特徵(Kinzel, 2001)。Pope 和 Sharma 則透過解題表現、問卷、訪談，了解學生或老師對於符號感的理解程度(Pope & Sharma, 2001 ; Sharma, 2000)。

綜合相關研究發現，探討符號感構成要素時，大多以解題時的表現探討，從中觀察學生解題的特徵，分析出符號感的可能成分。此外，本研究除了從文獻分析的過程中初步探索符號感之意涵，並以一個解題者進行解題歷程的角度(如圖 3-2-1)，探索符號感成分。故本研究的重要貢獻即為提出適合台灣國中階段的符號感構成要素。

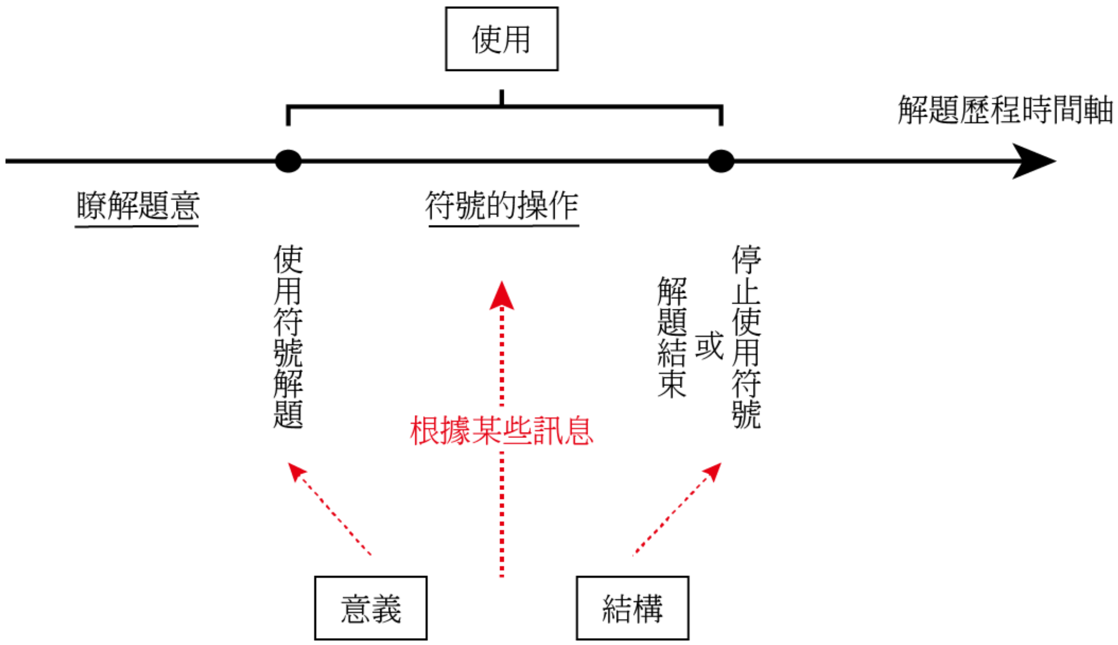


圖 3-2-1 解題歷程之符號感的展現

圖 3-2-1 則為研究者假定一個具備符號感的人，於解題歷程的思維表現。當我們欲從解題歷程中了解符號感的構成要素時，則關注於解題者面對問題時會出現的可能狀況為：「是否傾向採用代數解題方式，引用符號幫助思考?」、「當他決定使用符號處理問題，將如何安排及操作符號?」、「若使用標準化的解題步驟反而使題目變複雜，甚至無法解決問題時，他能否察覺這不便性?」、「能否毅然決然停止使用當前的解題策略及選用的符號?」、「能否進一步透過其他訊息，以多元角度來審視問題，及其他方法解決問題?」......等。

所以若以解題活動角度思考，整個解題歷程從開始解題到結束，最先直接觀察得到便是解題者使用的工具(例如：符號)，再來是探討整個解題歷程中如何運用工具，或如何搭配各種策略處理問題。

當解題者開始使用符號處理問題時，過程中不論是如何對符號進行操作，亦或根據某些因素而停止使用符號，都脫離不了「使用」符號的範疇。

然而，除了將符號作為解題工具，每個人處理問題的方式亦不同，解題者可能根據題目或符號所透露的訊息，影響他操作符號與解題的方式。故本研究進一步著重解題者根據符號傳達的訊息而影響解題策略的角度，來思考符號感的其他

主要成分。並參考符號感、數學學習、代數主題或符號相關理論…等文獻，假定解題過程中，解題者所根據的訊息應與符號所傳達的「意義」與符號形式的「結構」有關。

本章將依序介紹由本研究所提出的符號感三大向度：「使用(Using)」、「意義(Meaning)」、「結構(Structure)」與其子成分之說明。

一、符號感構成要素-使用向度

從第貳章第二節的文獻探討可發現，不論是 Arcavi 或其他談到符號感的學者，在論述符號感的意涵時皆可發覺「使用符號」的共同概念。

以 Arcavi 所描述的成分為例，他認為能知道何時引用符號，會是符號感的一種展現。其中自然包括將問題中的關係，轉換為相對應的符號式，使能夠進一步使用符號，處理符號式。而「停止使用符號的感覺」則透露出符號感關係著解題者後設認知的能力。解題者一定是先使用符號解題，察覺到使用符號解題時的不便性，才作停止使用符號的解題策略，轉用其他方式處理問題。雖然 Arcavi 在這裡主要於強調停止使用符號的動作。然而停止使用符號之前，也一定是先將符號作為解題工具，使用符號後，才會有接著停止使用的動作。「操作符號和『讀』懂符號的能力」雖然著重在察覺符號背後傳達訊息的能力，使能夠跳脫機械式的計算，靈活地操作與運用符號。其中操作符號的動作仍包含到使用符號的意涵。

然而，Arcavi 的某些成分描述，除了具備「使用符號」的概念，亦同時夾雜了其他層面的想法。例如「瞭解符號並能體會符號的力量：知道何時使用符號，並知道如何使用符號將某些關係展現出來」、「操作符號和『讀懂(read through)』符號的能力」兩句對符號感描述中的「瞭解符號」與「讀懂符號」透露出與「使用符號」不同的另一個層面。

除了文獻探討，研究者從解題歷程角度思索符號感成分，認為在解題活動的從開始到結束必然有符號出現，並將符號作為解題工具之一(如圖 2-3-1)。故研究者假定符號感之構成要素，可從「使用(Using)」此一向度作探討，將「使用」向度，定義為使用代數符號的能力。也就是在解題活動中，使用代數符號為解題工具，包含操作、運用、組織符號等情形。

以下再逐一介紹在此向度下所畫分為兩個子成分。並於最後介紹一個研究初期所擬定的子成分，但在文獻探討後期與多次小組討論下決定刪除的原因。

(一) U-1 傾向使用符號處理問題

Driscoll(1999)綜合多位學者觀點，認為學生使用文字符號的三項困難點，其中之一是將問題轉換代數式。而代數的其中一個目的便是將真實情境中的語言用代數式(algebraic expression)表示(Driscoll, 1999)。我國九年一貫課綱能力指標中明確指出「能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出」、「能把情境中與數學相關的資料資訊化」(教育部，2008)。可從中得知使用代數符號處理問題的重要性。

在此研究者用一個國中課程常見的比例問題，從解題活動思索不同解題者可能出現的各種解題方式。

> 「300c.c.的紅茶加 50 c.c.鮮奶，是嬛嬛最喜歡的鮮奶茶比例。
>
> 若今日恰有 450c.c.的紅茶，嬛嬛需要加多少鮮奶，才能調置她
>
> 喜歡的鮮奶茶比例?」

以下是三種可能的解題方式：

(A) 因為 $450 \div 300 = 1.5$，

所以應加入 1.5 倍的鮮奶，

$1.5 \times 50 = 75$。得 450c.c 紅茶應加入 75 c.c.鮮奶。

(B) 因為 450 c.c. 的紅茶比 300c.c.的紅茶多 150 c.c.，

增加的紅茶(150c.c.)是原本紅茶(300c.c)的一半，

所以增加的鮮奶也應為原本鮮奶(50c.c)的一半。

故 450c.c 紅茶應加入 $50 + 50 \div 2 = 75$ (c.c.)鮮奶。

(C) 假設需加入 x c.c.鮮奶

$300 : 50 = 450 : x$

$300x = 50 \times 450$

$x = 75$

得 450c.c 紅茶應加入 75 c.c.鮮奶。

上述三種解題方式，明顯看出最大的差異在於(A)、(B)僅使用數字作運算，而(C)引用了未知數 x 來處理問題。而一個具符號感的人，應該會有使用符號處理問題的傾向。

故研究者在此假定符號感於「使用」向度下應包含一子成分「傾向使用符號處理問題」。意指一個解題者在解題活動中，會傾向引用符號來處理問題，並能夠藉由符號的使用進一步得到更多資訊，讓解題過程有所進展。

(二) U-2 將事物展現的規律以符號表示或從給定資料判斷出其對應的符號式

除了第貳章第二節文獻探討中 Fey(1990)、Kinzel(2001)、Pierce 與 Stacey 提及代數洞察力中的「表徵連結的能力」…等學者，對符號感所論述之觀點皆明確提及符號感教學應包含將表徵或問題所述的條件，列出相對應的代數式。尚有學者認為提高學生數學建模的能力，應包括讓學生用簡約的數學語言將實際問題所呈現的內在規律表示出來(范建芬，2008)。Lesh(1981)認為個體若能在不同表徵型式中自由轉譯(translation)，代表著對其概念意義的掌握程度 (引自陳霈頡，2005；胡惠茹，2009) 。中國大陸 2001 年出版的《全日義務教育數學課程標準(實驗稿)》，認為符號感主要表現在：能從具體情境中抽象出數量關係和變化規律，並用符號來表示。我國九年一貫課綱能力指標中則明確指出「能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出」(教育部，2008)。從文獻中可窺知許多學者皆重視學生有能力將不同表徵的規律以符號式表示，與表徵間的轉換。

在此用兩例題說明，U-2 子成分所欲表達的想法。

「已知 x 與 y 為實數，觀察下列表格中 x 與 y 的數值，寫出符合此表格中 x 與 y 的關係式? 」

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

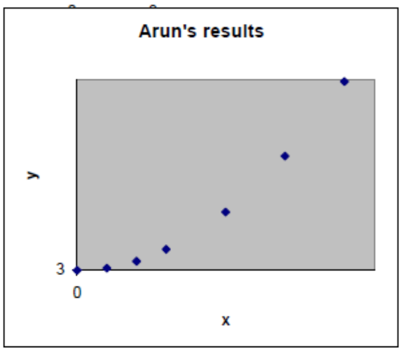
此題能輕易察覺表格中 $4=(-2)^2$ 、$1=(-1)^2$ 、$0=0^2$ ……等數值所展現的規律，還要有能力使用符號，寫出 x 與 y 的關係式為 $y=x^2$ 。

Pope 與 Sharma(2001)引用以下一道例題，希望學生能透過視覺或圖像的資訊，找出相對應的符號式：

「Arun 操作一個科學實驗，她將結果畫下來(如下圖)，並希望從中找出 x 與 y 間的關係。請問你覺得哪一個方程式較適合表示圖中 x 與 y 的關係?

$y=5x+3$ 、$y=x^2+3$ 、$y=3x^2$ 、$y=4x^2+3$ 、$y=(x+3)^2$ 、

$y=x^3+3$ 、$y=2x^3+3$ 、$y=\frac{1}{x}+3$ 」



綜合文獻與例題說明，不論是透過數值規律，列出適合的關係式；或是從圖像中找出適合的關係式，都表現出表徵轉換的概念。故研究者在此假定符號感於「使用」向度下應包含的另一子成分「將事物展現的規律以符號表示或從給定資料判斷出其對應的符號式。」。意指能將問題(包含數值或圖像表徵)展現的規律以合適的符號式呈現，並有能與正確的符號式作等價連結。

(三)研究初期擬定之子成分

研究過程中原本參考 Arcavi 於 1996 年與 2005 年均提到符號感成分包含：「一種知道何時停止使用符號的感覺,轉而用其他讓問題有進展或更方便的解決方式(Arcavi, 1994, 2005)」。研究者研究初期頗認同 Arcavi 的觀點，認為一個有符號感的人，在看到問題之初或處理問題時，能察覺到不適合使用代數符號的直覺感，並能毅然決然地停止使用符號。進而初步擬定符號感在「使用」向度下的其中一個子成分：「當察覺到目前所使用的符號之不恰當性，停止使用符號的代數運算，轉用其他方式處理問題」。也就是解題者使用符號的過程中，察覺目前所使用的代數運算或符號反而讓問題變得複雜、顯得不便，甚至無法用以解決問題,而停止使用符號的代數運算,轉而用其他角度審視問題、其他方式處理問題。

然而，在多次小組討論與文獻探索過程中，研究者漸漸認為符號感不該只從表面看是否停止使用符號之結果,而應該進一步探討符號怎麼影響別人的思維。所以將此指標刪除，改從符號影響解題者的因素，進一步發展符號感的其他向度與指標。

由於本研究者認為當解題者有停止使用符號的感覺，必然是因為接收到某些訊息或察覺到某些線索，才會想停止使用代數符號，並試著用別的角度來解決問題，而不是盲目地停止使用符號。故符號感應該從解題者「為何」要停止使用符號作探討，而不是看停止使用符號的行為結果。

至於「為何」要停止使用符號，研究者將從符號本身是否帶有某些訊息或其他因素(納入本研究中的其他向度「意義 Meaning」、「結構 Structure」)來探討符號感的成分。故最後決定刪除研究初期擬定之的此子成分：「當察覺到目前所使用的符號之不恰當性，停止使用符號的代數運算，轉用其他方式處理問題」。

二、符號感構成要素-意義向度

除了部分文獻得知符號感強調瞭解符號意義的重要性之外，還可從代數學習或符號使用方面的文獻來思索符號感的可能構成要素。

學習代數需要了解符號使用的意義。符號使用上，如果不了解符號的意義，將無法發展對代數的理解。特別是在教導學生抽象概念時，若沒有一併傳達意義，將無法發展學生的理解能力。(Foster, 2007)。

代數符號的意義亦會隨情境不同而改變，但學生常機械式地操作符號而不去思考符號的意義(Sfard, 1994)，而容易於學習時產生迷思。

代數語言是帶有意義且可操作的，也就是代數可被形容為一個雙重工具：問題解決工具(problem solving tool)和教導工具(didactical tool) (Bergsten, 2003)。代數語言涵蓋符號的使用，理解符號的意義，才能恰當使用符號。

我國九年一貫課綱能力指標亦指出「能理解數學語言(符號、用語、圖表、非形式化演繹等)的內涵」、「能理解數學語言與一般語言的異同」、「能理解數學語言與一般語言的異同」、「能用一般語言及數學語言說明解題的過程」(教育部，2008)。從課程綱要之能力指標，得知我國重視學生對於數學語言的理解能力，與學生在一般語言和數學語言間的轉換能力。由於數學語言之廣泛，符號又是數學語言的一種，所以當我們強調數學語言的理解能力時，自然同時包括理解符號的意義。

綜合許多文獻可發現，符號感應具備瞭解符號意義之重要特性。又不論在數學學習或代數學習上，尤其重視符號的意義。縱使機械式的演練能快速解決一般性問題，仍須建立在瞭解符號意義的前提下，進行有意義地操作，使能夠達到有效學習。又尤其解題過程中，若不懂符號的意義，反而容易導致解題過程使用到錯誤的訊息、錯誤的方式，浪費更多了精力與時間。因此，研究者探討符號感為何時，便從解題歷程中符號意義所發揮的影響力開始思索，假定符號感之構成要

素包括「意義(Meaning)」此一大向度，意指了解符號所代表的意義。

以下再逐一介紹在此向度下所畫分為三個子成分。

(一)M-1 明瞭符號所代表的物件與傳達的訊息

使用符號不了解其意義，是無法發展學生對於代數關係的理解。若教師希望學生在代數上有良好的學習，需要加深學生對於符號使用的理解(Foster, 2007)

以下用兩個例題，說明此子成分的重要性。

> 「已知上衣一件 s 元，褲子一件 p 元。若買了 3 件上衣、2 件褲子，那麼 $3s+2p$ 代表什麼意思?」(Kuchemann, 1981)

雖然能猜想符號的選取原因是取「shirts」與「pants」的「s」與「p」，但在處理此問題時，不見得每個學生能正確詮釋 $3s+2p$ 的意思，有的學生會誤解為「3 件上衣與 2 件褲子」，而不能理解此題 $3s+2p$ 的意思為「買 3 件上衣與 2 件褲子總金額」(Samo, 2009)。

> 「已知藍筆一支 5 元，紅筆一支 6 元，同時買了一些藍筆與紅筆共花了 90 元。若 b 代表購買的藍筆數量，r 代表購買的紅筆數量，請問能否將 b 與 r 的關係寫下來?」(Kuchemann, 1981)

最常見的錯誤答案為 $b+r=90$。反應出學生習慣將文字符號視為標示物體的記號。學生必須調適以前在算術中對文字符號的使用經驗，重新對文字符號賦予代數的概念(Samo, 2009)

從透過文獻探討與例題模擬學生作答表現中，研究者整理、開發符號感子成分描述時，原先將 M-1 子成分訂為「明瞭符號所代表的事物與傳達的訊息」，最後經一位大學數學系教授的建議，認為應將「事物」一詞改為「物件(Object)」。研究者與指導教授討論後，認為數學相關文獻中較常使用「物件」，故贊同此建議，將 M-1 子成分之敘述略作修改。

故綜合文獻、例題與專家的建議，研究者最後假定符號感於「意義」向度下

應包含一子成分「明瞭符號所代表的物件與傳達的訊息」。意指知道符號所代表的指示對象及其意義，並能從符號式中，得到符號所傳達的訊息。

(二)M-2 從上下文中辨別相同符號所代表的意義

從研究者教學經驗中發現，學生容易搞混符號的意義，常因相同的符號隨情境的不同而有不同的涵義。

Kieran(1992)指出學生在代數中出現的迷思概念(misconceptions)與常犯錯誤(common errors)，與符號的意義有很大的關聯。因為許多符號在不同上下文中代表著不同的意義(引自 Samo, 2009)。每個數 (例如 1、2、3…等)都有唯一的符號表徵，學生這種對數的經驗與信念，容易在代數學習上造成迷思：不同的符號對應於不同的數值。代數中，不同的符號仍可能賦予相同數值的意義(Christou et al., 2007)。Driscoll(1999)綜合多位學者觀點，認為學生使用文字符號的三項困難點，其中之一為符號被賦予多重意義。符號可作為特定未知數，如 $8n-7=33$；一般數，如 $8n-7$，或函數，如將 n 用 $8n-7$ 取代。

Bergsten(2003)明確指出相同的符號能代表不同的意義，容易造成代數初學者的困擾與混淆(Bergsten, 2003)，這裡用 Bergsten 所提的例子作說明。

「若用一條長 40 公分的繩子圍成一矩形，請問：

(a)矩形的長與寬為多少時，使矩形面積恰為 36 平方公分?

(b)所圍成的矩形面積最大可為多少?」

若設矩形的長為 x，寬必然為 20-x，根據(a)題意可列方程式為

$x \cdot (20-x)=36$ ……①

①式中的 x 所代表的意義為一個未知數值。為了求出此方程式中 x 值，可能出現以下的解題過程，先將等號左邊的 $x \cdot (20-x)$ 展開為 $20x-x^2$，也就是

$x \cdot (20-x)=20x-x^2$ ……②

此時②式中的 x 所表達意義為一個任意數。

接著回答(b)的問題，由於矩形面積為矩形的長乘以寬，在不確定長與寬的情形下，矩形面積會隨著長、寬不同而改變。若用函數的概念來定義，可知 $0<x<20$，矩形面積 $f(x)=x\cdot(20-x)$……③

③式中的 x 此時所代表的是變數的概念，矩形面積 $f(x)$ 會隨 x 的不同而改變。

上述 3 個式子中可明顯比較出 x 雖為一相同的符號，卻帶有不同的涵義 (Bergsten, 2003)。

綜合文獻探討與試題分析，研究者假定符號感於「意義 (Meaning)」向度下應包含「從上下文中辨別相同符號所代表的意義」。意指相同的符號可能代表不同意義，需從問題情境或上下文來判斷符號所代表的意義

(三)M-3 能不受符號改變的影響，從中察覺不同符號表徵下所代表的相同意涵

代數洞察力為符號感的子集，其中一個元素「1.1 常規和基本性質的瞭解」明確說明透過數學語言的特性與數學概念下的基本性質，從中瞭解符號所代表意義之重要性(Pierce & Stacey, 2001)。而數學符號有許多是公認使用的記號，如數字(1、2、3…)、運算符號(＋、－、×、÷…)等。許多時候人們在符號的使用上會選用個體自創符號，透過自創符號進行表達與交流，形成符號感(范建芬，2008)。好比文字(letters)在代數上的使用廣泛，人們常用文字符號代表數，但其意義仍有所不同。縱使每個人使用的自創符號不同，基於對數學知識的客觀認識，仍可透過概念與數學基本性質，了解不同符號所代表的意義，與他人形成溝通與交流。

這裡可用一例題說明，例如 $y=ax^2+bx+c$ 中出現了許多文字符號，其中 a、b、c 代表參數，x 和 y 代表變數。又 $f(y)=\dfrac{y+3}{2y-3}$，當中的 y 為自變數，而非應變數；而將此函數作圖時，水平軸所代表的變數為 Y，亦非習慣上的變數 X (Pierce

& Stacey, 2001)。

故綜合文獻探討與試題的說明，研究者假定符號感於「意義」向度下應包含另一子成分為「能不受符號改變的影響，從中察覺不同符號表徵下所代表的相同意涵」。意指隨符號使用習慣的差異，能不受符號改變的影響，仍瞭解符號的意涵。也就是能明瞭不同符號可能表達相同的概念或意涵。

三、符號感構成要素-結構向度

除了從符號感相關文獻可探知，察覺符號外在結構的形式會是符號感的一個重要特徵之外，尚有其他學者提出結構感(structure sense)一詞。Linchevski 與 Livneh(1999)認為學生在初期學習代數時會遇到困難是因為缺乏結構感(structure sense)。Novotna 與 Hoch(2008)則認為中學代數的結構感建立於符號思維，中學學生應展現的結構感如下：(1)在最簡化的形式中察覺相似的結構；(2)將複合的項視為單一實體(entity)，並透過適當替換，在複雜形式中察覺相似的結構；(3)選用適當操作，以利於創造一個最佳結構的使用(Novotná & Hoch, 2008)。

劉雲章（2006）提出七項將抽象的數學符號講活的方法，藉以發展學生的符號感。其中一項為「發展學生的直覺洞察力」，說明學生從符號中感知數學信息，是需要一種直覺性的洞察力（劉雲章，2006）。而符號往往從所呈現的形式或表面結構，透露出某些協助解題的訊息。一個有符號感的人，應能輕易從符號之外在形式或表面結構中看出解題的關鍵之處。

所以研究者推知一個有符號感的人，有能力從符號的表面性結構察覺助於解題的資訊。進一步假定符號感包括「結構(Structure)」此一大向度，並於此向度下作進一步深入探討。而本研究所定義之「結構」向度，意指透過符號所呈現的形式與表面性的結構，從中獲得解題相關訊息。

以下將逐一介紹本研究於結構向度下所研發的兩個子成分。

(一) S-1 以宏觀的角度將多個符號視為單一個體

在許多代數學習方面的文獻可探知，許多學者重視靈活解題。例如 Tall 與 Thomas(1991)鼓勵學生在代數領域展現全方面思維能力，並用例題說明多元解題方式。「因式分解 $(2x+1)^2-3x(2x+1)$。」一般中學學生處理此問題的標準作法：「將括號展開」、「合併同類項」、「因式分解整理後的二次函數」。若以「整體性

(global/ holistic)」角度處理問題，將 $(2x+1)$ 視為一個共同因式，直接將 $(2x+1)$ 提出，得到 $(2x+1)(-x+1)$ 的答案，便可節省許多步驟(Tall & Thomas, 1991)。或透過使用另一符號簡化問題，透過新的符號取代原複雜形式，能協助釐清解題時思緒。如同 Skemp(1987)提到符號功用之一包含「助於顯示結構」(Skemp,1987)。

而靈活(flexibility)通常是指有能力隨著特殊情況作調整與改變。Star 與 Seifert(2005)認為一個靈活的解題者應具備以下兩點特質：(1)具備多種解題程序的知識。(2)有發明創新解題程序的能力。我們可用表 3-2-1 為例，說明靈活解題者處理方程式求解問題的可能情況(Star & Seifert, 2005)。

表 3-2-1 較靈活與較不靈活解題者之象徵性解法 (Star & Seifert, 2005)

例題	較靈活解題者之象徵性解法	較不靈活解題者之象徵性解法
$4(x+1)=8$	$4(x+1)=8$ $x+1=2$ $x=1$	$4(x+1)=8$ $4x+4=8$ $4x=4$ $x=1$
$4(x+1)+2(x+1)=12$	$4(x+1)+2(x+1)=12$ $6(x+1)=12$ $x+1=2$ $x=1$	$4(x+1)+2(x+1)=12$ $4x+4+2x+2=12$ $6x+6=12$ $6x=6$ $x=1$
$4(x+1)+3x+7=8+3x+7$	$4(x+1)+3x+7=8+3x+7$ $4(x+1)=8$ $x+1=2$ $x=1$	$4(x+1)+3x+7=8+3x+7$ $4x+4+3x+7=3x+15$ $7x+11=3x+15$ $4x=4$ $x=1$

文獻探討過程中，研究者初步將 S-1 定為「S-1 以宏觀的角度將多個符號視為單一個體」，以「將多個符號視為單一個體(一個新的單位)，使能夠順利解決問題，增加問題處理時的效率。」加以說明此子成分的涵義。但於專家審核階段時，專家建議應明確說明「宏觀」一詞的意涵為何。故在收集專家意見，並與指導教授討論後，決定修改此子成分所搭配的說明如下：「宏觀意指能全面性地從一堆符號中，辨認出有意義的部分符號，將多個符號整合為一新的符號或視為單一個體(一個新的單位)，讓問題簡化使能夠順利解決問題，增加問題處理時的效率。」強化說明宏觀的意義，又不失原研究者欲表達 S-1 子成分的意涵。

(二) S-2 改變符號原有結構，重新組織或拆解符號，以期待看出更多資訊

解題時常需藉由改變符號表徵的外在形式，以進一步從中得到更多訊息。例如解題時常需要視情況將符號作等價的改寫，如同 Mok(2009)提到某個解題情境時，解題者是否要將「$2a$」改寫成「$a+a$」則需看情境與上下文的需要 (Mok, 2009)

在此用研究者所設計之例題加以說明：

「已知 $(2x-5)^2+(-2x+5)-12=0$，求 x 的解」

部分學生習慣直接將方程式展開，整理成 $4x^2-22x+18=0$ 這樣的形式，才進一步去求出 x 的解。然而若能從此符號式觀察到特有的結構，將符號作適當拆解與重組，更能輕易看出訊息，使有效率地解題。例如將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$，便能輕易看出 $(2x-5)$ 的共同項，再結合應用 S-1 子成分的特徵解題，會比直接將方程式展開求解還有效率，亦能減少展開、化簡時出現錯誤的機率。

最後研究者在此假定符號感於「結構(Structure)」向度下應包含另一個子成分「S-2 改變符號原有結構，重新組織或拆解符號，以期待看出更多資訊」。意

指為了從符號中透視更多資訊，根據符號本身特性，改變符號結構，重新組織(排列)或拆解符號，創造新的等價關係，使能夠順利解題。

四、總結

研究者從教學經驗中思索學生解題過程中符號感的展現，結合文獻探討的結果，將符號感分為三大向度，共七個子成分，統整如表 3-2-2。

表 3-2-2 符號感構成要素架構表

<table>
<tr><th></th><th>成分</th><th>說明</th></tr>
<tr><td rowspan="2">使
用
(Using)：
使用代數符號的能力。也就是在解題活動中，使用代數符號為解題工具，包含操作、運用、組織符號等情形。</td><td>U-1
傾向使用符號處理問題</td><td>傾向引用符號處理問題，藉由符號的使用進一步得到更多資訊，讓解題過程有所進展。</td></tr>
<tr><td>U-2
將事物展現的規律以符號表示或從給定資料判斷出其對應的符號式。</td><td>能將問題(包含數值或圖像表徵)展現的規律以合適的符號式呈現，並有能與正確的符號式作等價連結。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">意
義
(Meaning)：
了解符號所代表的意義。</td><td>M-1
明瞭符號所代表的物件與傳達的訊息</td><td>知道符號所代表的指示對象及其意義，並能從符號式中，得到符號所傳達的訊息。</td></tr>
<tr><td>M-2
從上下文中辨別相同符號所代表的意義</td><td>相同的符號可能代表不同意義，需從問題情境或上下文來判斷符號所代表的意義</td></tr>
<tr><td>M-3
能不受符號改變的影響，從中察覺不同符號表徵下所代表的相同意涵。</td><td>隨符號使用習慣的差異，能不受符號改變的影響，仍瞭解符號的意涵。也就是能明瞭不同符號可能表達相同的概念或意涵。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">結
構
(Structure) ：
透過符號所呈現的形式與表面性的結構，從中獲得解題相關訊息。</td><td>S-1
以宏觀的角度將多個符號視為單一個體</td><td>宏觀意指能全面性地從一堆符號中，辨認出有關係的部分符號，將多個符號整合為一新的符號或視為單一個體(一個新的單位)，讓問題簡化使能夠順利解決問題，增加問題處理時的效率。</td></tr>
<tr><td>S-2
改變符號原有結構，重新組織或拆解符號，以期待看出更多資訊</td><td>為了從符號中透視更多資訊，根據符號本身特性，改變符號結構，重新組織(排列)或拆解符號，創造新的等價關係，使能夠順利解題。</td></tr>
</table>

第肆章 「研究二：探索符號感評量方式」之目的與方法

研究二主要的目的是依據研究一的研究成果,研發一些可以評量符號感各子成分的題型，進行施測，以瞭解這些題目的表現。

第一節 文獻探討

九年一貫課程綱要－國中代數主題

符號感是代數教學重要的一環 (Arcavi,1994)，因為本研究施測對象為國中學生，欲瞭解符號感的成分及發展適合國中生的符號感評量工具，本研究者從課程標準中瞭解學生所學習的代數知識，從中探究學生應具備的先備知識與基本能力。

我國將九年國民教育之數學學習領域區分為四個階段，國小(1-6 年級)劃分於第一階段至第三階段；國中(7-9 年級)則劃分於第四階段。另依數學內容分為「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」、「連結」等五大主題。本章節主要參考教育部(2008)出版之<<國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域>>一書，介紹各階段代數主題之能力指標，與國中(第四階段)代數主題之分年細目。

(一)代數主題之能力指標

依照各年級階段，整理我國九年一貫課程綱要所列之代數主題能力指標 如下表 4-1-1 其中代數主題能力指標以三碼編排，第一碼表示主題，代數主題為「A」；

第二碼表示階段，分別以 1、2、3、4 表示第一、二、三、四階段；第三碼流水號表示該細項下指標的序號。

表 4-1-1 各階段代數主題能力指標

階段與年級	指標編碼	指標內容
第一階段 (1-2 年級)	A-1-01	能在具體情境中，認識等號兩邊數量一樣多的意義與＜、＝、＞的遞移律。
	A-1-02	能在具體情境中，認識加法的交換律、結合律、乘法的交換律，並運用於簡化計算。
	A-1-03	能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。
第二階段 (3-4 年級)	A-2-01	能理解乘除互逆，並應用於驗算與解題。
	A-2-02	能在具體情境中，理解乘法結合律，並運用於簡化計算。
	A-2-03	能在四則混合計算中，運用數的運算性質。
第三階段 (5-6 年級)	A-3-01	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律與其他乘除混合計算之性質，並運用於簡化計算。
	A-3-02	能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題並解決問題。(N-3-18)
	A-3-03	能認識等量公理。
	A-3-04	能用含未知數符號的算式表徵具體情境之單步驟問題，並解釋算式與情境的關係。
	A-3-05	能解決用未知數列式之單步驟問題。
	A-3-06	能用符號表示簡單的常用公式。
第四階段 (7-9 年級)	A-4-01	能用符號代表數，表示常用公式、運算規則以及常見的數量關係(例如：比例關係、函數關係)。
	A-4-02	能理解數的四則運算律，並知道加與減、乘與除是同一種運算。
	A-4-03	能用 x、y、…符號表徵問題情境中的未知量及變量，並將問題中的數量關係，寫成恰當的算式(等式或不等式)。
	A-4-04	能理解生活中常用的數量關係(例如：比例關

		係、函數關係)，恰當運用於理解題意，並將問題列成算式。
	A-4-05	能理解等量公理的意義，並做應用。
	A-4-06	能理解解題的一般過程，知道解出方程式或不等式後，還要驗算其解的合理性。
	A-4-07	能熟練一元一次方程式的解法，並用來解題。
	A-4-08	能理解一元一次不等式解的意義，並用來解題。
	A-4-09	能理解二元一次方程式的意義。
	A-4-10	能理解直角坐標系，並能計算坐標平面上兩點間的距離。
	A-4-11	能在坐標平面上，畫出一次函數或二元一次方程式的圖形。
	A-4-12	能熟練二元一次聯立方程式的解法，並用來解題。
	A-4-13	能熟練乘法公式。
	A-4-14	能認識多項式，並熟練其四則運算。
	A-4-15	能理解畢氏(勾股)定理，並做應用。
	A-4-16	能用因式分解或配方法，解出二次方程式，並用來解題。
	A-4-17	能利用配方法，計算二次函數的最大值或最小值。
	A-4-18	能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。
	A-4-19	能用反例說明一敘述錯誤的原因。能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同。(S-4-18)
	A-4-20	能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。(S-4-19)

從表 4-1-1 中發現，國小一至二年級的學生要能在具體情境中認識等號的意

義(指標 A-1-01)。國小五至六年級開始未知數符號的出現，學生有初步探索未知數符號的機會，用含有未知數符號的算式，處理單一步驟的問題，並利用符號來表示簡單且常用的公式(指標 A-3-04、A-3-05、A-3-06)。到國中階段，代數課程方面開始加深加廣，增加許多代數方面的能力指標。國中更廣泛使用文字符號(未知數)，學生需善用等量公理解方程式、熟練符號的運算，運用符號配合代數性質處理各類問題。

(二)國中代數主題分年細目

雖然第四階段能力指標包含整個國中三年範圍，但授課方式依序為七年級、八年級直到九年級，因應實際教學需要，能力指標需採取更明確、具體的分年細目，方能掌握教學目標。

表 4-1-2 為七年級到九年級代數主題之分年細目表，對照國中生應具備的能力指標，描述每個年級所應學習的重點。

表 4-1-2 代數主題之分年細目表

分年細目(代數主題)			對照指標
七年級	7-a-01	能熟練符號的意義，及其代數運算。	A-4-01 A-4-02
	7-a-02	能用符號算式記錄生活情境中的數學問題。	A-4-03 A-4-04
	7-a-03	能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。	A-4-03 A-4-06 A-4-07
	7-a-04	能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。	A-4-05 A-4-07
	7-a-05	能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。	A-4-07
	7-a-06	能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。	A-4-03 A-4-09
	7-a-07	能理解二元一次聯立方程式，及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次聯立方程式。	A-4-03 A-4-12
	7-a-08	能熟練使用代入消去法與加減消去法解二元一次方程式的解。	A-4-12
	7-a-09	能認識函數。	A-4-01 A-4-04
	7-a-10	能認識常數函數及一次函數。	A-4-01 A-4-04
	7-a-11	能理解平面直角坐標系。	A-4-10
	7-a-12	能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。	A-4-11

	7-a-13	能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。	A-4-11
	7-a-14	能理解二元一次聯立方程式解的幾何意義。	A-4-11 A-4-12
	7-a-15	能理解不等式的意義。	A-4-08
	7-a-16	能由具體情境中列出簡單的一元一次不等式。	A-4-03 A-4-08
	7-a-17	能解出一元一次不等式，並在數線上標示相關的線段。	A-4-08
	7-a-18	能說明 $a \leq x \leq b$ 時 $y=cx+d$ 的範圍，並在數線上圖示。	A-4-11
八年級	8-a-01	能熟練二次式的乘法公式。	A-4-13
	8-a-02	能理解簡單根式的化簡及有理化。	N-4-12
	8-a-03	能認識多項式及相關名詞。	A-4-14
	8-a-04	能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。	A-4-14
	8-a-05	能理解畢氏定理（Pythagorean Theorem）及其應用。 (同 8-s-08)	S-4-05 A-4-15
	8-a-06	能理解二次多項式因式分解的意義。	A-4-16
	8-a-07	能利用提公因式法分解二次多項式。	A-4-16
	8-a-08	能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。	A-4-16
	8-a-09	能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義。	A-4-06 A-4-16
	8-a-10	能利用因式分解來解一元二次方程式。	A-4-16
	8-a-11	能利用配方法解一元二次方程式。	A-4-16
	8-a-12	能利用一元二次方程式解應用問題。	A-4-16
九年級	9-a-01	能理解二次函數的意義。	A-4-04
	9-a-02	能描繪二次函數的圖形。	A-4-18
	9-a-03	能計算二次函數的最大值或最小值。	A-4-17
	9-a-04	能解決二次函數的相關應用問題。	A-4-17 A-4-18

由以上分年細目得知，國中七年級到九年級代數教材安排有以下幾個重點：

1. 代數主題在七年級安排最多課程，而七年級正是國小進入國中的第一個時期。
2. 重視學生理解符號與其表示式(如方程式、多項式、不等式、函數…等)的意義。
3. 要求熟練代數運算，與操作符號的能力，如解方程式、解不等式、因式分解、求函數之值…等。並能從具體情境中使用符號列式。
4. 符號的引入由單元漸增為多元；從簡單到複雜。例如一元一次方程式，到二元一次方程式；一次函數到二次函數。
5. 結合符號與其表示式(如方程式、多項式、不等式、函數…等)在數線或直角坐標平面上的圖形。能從描繪表示式的圖形與瞭解其幾何意義，亦能從圖形中判斷符合的表示式。

不論是包含一個未知數或兩個未知數的方程式、不等式、多項式或函數，符號皆是構成這些表示式的主要元素。國中階段的代數訓練，從瞭解符號意義開始、熟悉代數運算，漸漸加入多個未知數符號，再進一步將符號與圖形作連結。

從此可發現代數學習上，掌握符號運用確實是個重要關鍵。

第二節 研究設計

根據研究者假定之符號感構成要素，各子成分下皆設計數道符號感試題，試題形式不拘，以開放式問答為主，部分選擇題型亦要求學生詳細記錄解題時的想法與計算過程，期待從中瞭解學生符號感之展現。

試題發展各階段，透過多次小組討論、試寫、小範圍預試、深入訪談、諮詢國中數學教師與專家(數學系教授)的意見，將修正後的意見與結果與指導教授討論，逐步形成本研究初步開發之符號感評量工具。

第三節 研究對象

由於本研究編制之符號感試題，試題所需先備知識包含國中數學課程內容。其中以七、八年級所學知識為主，如方程式、函數、因式分解等概念。有少數幾題用到九年級所學概念，如二次函數的意義與圖形。為瞭解學生符號感展現之特徵，與驗證符號感之構成要素，研究者開始思索什麼樣的研究對象適合本研究。倘若學生是因為沒學過相關概念才導致作答錯誤，那麼作答錯誤的因素，就不見得是因為欠缺符號感，而是先備知識的不足。為避免此情況發生，研究者設定研究對象至少對國中數學課程有基本之認識。

研究初期將施測對象設定為九年級學生。然而在正式施測(九年級)後發現，回收試卷多數空白或未詳細描述其作答過程或理由。研究者猜測回收樣本之資訊不足的可能原因為，正式施測選在九年級下學期課程結束之際，部分學生已透過免試入學方式得知錄取學校，另一部分學生則尚需透過基本學力測驗進行申請入學，導致多數學生施測意願不高。故研究者決定重新進行正式施測，將正式施測研究對象從九年級學生改為高一學生。

於進行正式施測前，研究者先進行試寫、預試 1、預試 2，搭配數位學生作深入訪談，各階段研究對象將敘述如下：

(一)試寫+訪談

試寫階段的研究對象為新北市某公立國中(甲校)九年級學生，經由該班導師推薦數學程度不錯的三位學生，進行符號感試題之試寫測驗。研究者依據符號感三大向度畫分，分別給予三位學生試寫不同向度下的試題。紙筆測驗結束後，發現學生在符號感測驗上的紙筆記錄，無法完全確切地透露作答原因與想法，故決定分別與三位學生就符號感試題進行深入訪談。

(二)預試 1+訪談

此階段研究對象來自台北市某公立國中(乙校)九年級的某班學生。在施測學

校與教學現場能配合的情況下，研究對象為該班免試入學已有錄取學校的學生，共 23 位。

訪談則由研究者挑選作答表現較特殊之學生，並綜合該班導師推薦(導師推薦表達能力佳且願意配合訪談的學生)，從中選取三位男同學與三位女同學，共六位學生，針對數道符號感試題進行深入訪談。

(三)預試 2

透過預試 1 後的結果，發現有些題目對多數國中學生過於困難，有些題意敘述不清楚、造成混淆。在配合小組討論與諮詢某位國中數學老師的意見後，研究者修改、刪除部分符號感試題，並加入幾道新題目，進行預試 2。

此階段研究對象來自於同為預試 1 學校之其他班級學生，台北市某公立國中(乙校)九年級學生。在施測學校與教學現場能配合的情況下，研究對象為該班免試入學已有錄取學校的學生，共 22 位。

(四)正式施測

正式施測對象皆為高一學生，來自新北市某公立高中與桃園縣某公立高中，共 117 位學生。從上述兩所學校老師得知，該校學生入學 pr 值大部分落於 70 上下。故研究者以此假設兩所學校學生程度相近。

第四節 研究工具

(一)試題架構

根據研究一所擬定之符號感構成要素，符號感可畫分為三大向度，共七個子成分。依據各個子成分設計數道試題，其中某些試題亦同時包含數個子成分。試題編製過程將依以下規準作試題編碼：「向度-子成分-題號-修改次序」。例如「U-2-2-1」：意指歸屬使用(Using)向度下第 2 個子成分中，編號 2 且修改過一次的例題；「M-3-3-0」意指歸屬意義(Meaning)向度下第 3 個子成分中，編號 3 且未經修改的例題。

考量研究對象(高中一年級學生)所屬學校及該班老師所能配合的時間限制下，研究者從自行編製的符號感試題題本中，挑選經專家審查與小組討論通過後之試題，於各子成分下選取 2 道左右之試題，共計 14 題組成「符號感測驗」試卷，其中第 6(1)題與其中第 14(1)題之測驗目的在於測試學生是否瞭解題意以便於進行該題之第二小題的符號感評量。

「符號感測驗」試卷詳見附錄 1。下表 4-4-1 為此試題架構。

表 4-4-1 符號感測驗試題架構

	子成分	試題編碼	題號
使用 (Using)	U-1 傾向使用符號處理問題	U-1-1-2 U-1-4-0	1 14(2)
	U-2 將事物展現的規律以符號表示或與符號作等價連結。	U-2-2-1 U-2-2-1	3 9
意義 (Meaning)	M-1 明瞭符號所代表的物件與傳達的訊息	M-1-2-0 M-1-3-1	2(1) 2(2) 2(3) 2(4) 4(1) 4(2)
	M-2 從上下文中辨別相同符號所代表的意義	M-2-1-3	10
	M-3 能不受符號改變的影響，從中察覺不同符號表徵下所代表的相同意涵。	M-3-3-0 M-3-1-2	8 12
結構 (Structure)	S-1 以宏觀的角度將多個符號視為單一個體	S-1-6-1 S-1-3-0	7(1) 7(2) 11
	S-2 改變符號原有結構，重新組織或拆解符號，以期待看出更多資訊	S-2-1-0 S-2-3-1 S-2-4-0	5 6(2) 13

(二)試題發展過程

本研究設計之符號感試題涵蓋國中數學課程內容，初期找了新北市某公立國中(甲校)三位國三學生分別就「使用」、「意義」、「結構」三大向度之試題進行練習與訪談，主要目的為澄清題意。此階段於後簡稱為「試寫」。

試寫後，針對學生作答表現、訪談回饋，對試題作調整與修改，於台北市某公立國中(乙校)的一個九年級班級進行小範圍施測，收集共 23 位九年級學生之作答表現，從中挑選作答表現較特殊的學生，綜合該班導師推薦(導師推薦表達能力佳且願意配合訪談的學生)，共計三位男同學與三位女同學進行深入訪談。此階段於後簡稱「預試 1」。

透過預試 1 後的結果，發現有些題目對多數國中學生過於困難，有些題意敘述不清楚、造成混淆。配合小組討論與諮詢某位國中數學教師之意見後，研究者修改、刪除部分符號感試題，並加入幾道新題目，重新於同為預試 1 學校的其他九年級班級進行小範圍施測，收集共 22 位九年級學生之作答表現。此階段於後簡稱「預試 2」。

根據上述「試寫」、「預試 1」、「預試 2」之結果，並透過小組討論、諮詢國中數學教師之意見後，研究者逐步修改試題、增加或刪除符號感題本中的試題，最後挑選共 19 道題目，邀請一位數學教育專長的大學數學系教授擔任專家審核此份試題，此階段於後簡稱「專家審核」

符號感評量工具開發的試題，命題範圍以不超出國中數學課程所學內容為主，並依據研究一所制定之符號感構成要素設計試題。試題編製過程參考國內外文獻、基測試題、國中課本與參考書……等，其中亦有許多題目為研究者自行創造。試題開發過程中，定期與研究小組與指導教授討論、請學生試寫作為修改題目的依據，並向國中數學老師、數學教育專家諮詢試題的修改建議。將從符號感子成分中各挑選一題，共七題試題修改過程說明，涵蓋原設計理念、修改理由、專家建議、國中數學教師建議、小組討論、研究者的想法與決定…等，詳見表 4-4-2~

表 4-4-8。

表 4-4-2 試題修改過程 第 1 題

原題目 ● 試題編碼 U-1-1-0

「某家糕餅店慶祝新開幕，舉辦「套住一路發」活動：店家準備一張由數字 1~36 整齊排列如下圖的海報，只要顧客能用規定矩形 圍住圖中八個數(圍法如下圖所示)，使其和為 168，當日消費金額一律打 8 折。請問此矩形所圍的八個數為何，才能使矩形內的數字和為 168?」

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

以下為大仁與小青的解題方式，當你嘗試解此問題時，是用哪一個人的解題方式?或有其他作法?皆請描述理由。

(A)大仁

1 先檢查題目中矩形中的八個數總和是否為 168。

2	3	4	5
11	12	13	14

$2+3+4+5+11+12+13+14=64$

發現 $64 \neq 168$

2 試著用矩形圍住其他數字，試到正確答案出現為止：

11	12	13	14
20	21	22	23

$11+12+13+14+20+21+22+23=136$

發現 $136 \neq 168$

⋮

15	16	17	18
24	25	26	27

$15+16+17+18+24+25+26+27=168$

得矩形內的八個數字分別為 15、16、17、18、24、25、26、27。

(B) 小青

1 將矩形中的數字用 x 表示，如下圖

x	x+1	x+2	x+3
x+9	x+10	x+11	x+12

2 依據題意列方程式：

$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+9)$
$+(x+10)+(x+11)+(x+12)=168$

3 解方程式得 $x=15$

4 將 $x=15$ 代回矩形，得到矩形內的八個數字分別為 15、16、17、18、24、25、26、27。

(C)我有其他作法

說明 1. 題目敘述上，指導教授與國中數學教師(黃老師)皆反應「用規定矩形 圍住圖中八個數(圍法如下圖所示)」此句敘述不夠清楚，學生可能無法瞭解題目意思。故修改方式為，提供一個沒有矩形圍住的數字表(U-1-1-2 中的圖一)，並告知 U-1-1-2 中的圖二僅為其中一種圍法。

2. 預試 1 時，有學生詢問：「矩形能否旋轉?」意指用下圖方式，使用形如 的矩形圍住八個數字。根據學生的提問，讓研究者發現題目敘述應做更詳盡的說明。因為此題主要測 U-1，並非測試學生解題的細心程度(詳盡考慮各種情形)。故為了減少學生處理此問題還須考慮各種矩形的旋轉方式，而於題目中明確告知矩形不能作旋轉。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

3. 指導教授建議也許可嘗試提供作法讓學生選擇，並請學生回答理由，看看能否測出傾向使用符號的意涵，故設計選項，提供作法給學生做選擇。

但根據試寫後的訪談得知，學生反應看到題目時，會先看題目直接嘗試作答。當寫不出來答案時，才開始參考下列選項，從選項中選答案。研究者進一步追問選填選項(B)的原因時，學生反應因為覺得選項(B)的作法較快，所以選填(B)這個答案。

一位國中數學教師(黃老師)對此試題的建議，認為提供作法會導致學生不「主動」嘗試解題，而是「被動」從中得知解答。看到別人的作答結果來選擇答案，容易影響自己本來的想法，這與自行設法解決問題求出答案來在程度上是有某種差異的，故建議拿掉附有解題作法的選項。

綜合學生試寫反應與某國中數學教師的建議，本研究者認為，當學生處理一題多解的問題時，若能自發性地使用符號處理問題，會比提供作法讓她們選填，更能反應出學生採用符號解題之傾向。故最後將選項拿掉，以開放式試題，直接看學生作答表現。

正式版

- 試題編碼 U-1-1-2

某家糕餅店慶祝新開幕，舉辦「套住一路發」活動：店家準備一張由數字 1~36 整齊排列海報(如圖一)，只要顧客能用規定矩形 圍住圖中任意八個數(圖二為其中一種圍法)，使其和為 168，當日消費金額一律打 8 折。請問此矩形所圍的八個數為何，才能使矩形內的數字和為 168?

註：矩形不能旋轉。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

(圖一)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

(圖二)

表 4-4-3 試題修改過程 第 4 題

原題目	● 試題編碼 M-1-3-0 A(1 , 1)、P(a , b)、Q(m , n)為直角坐標平面上的三個點，其中 a , b , m , n 為實數。 已知 $\sqrt{a^2+b^2}=3$、$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=5$、$\sqrt{m^2+n^2}=7$、 $\sqrt{(m-1)^2+(n-1)^2}=9$，請問 P 點到原點的距離與 Q 點到 A 點的距離總和為?
說明	1.設計理念： 「P 點到原點的距離」與「Q 點到 A 點的距離」數學上習慣以 $\overline{PO}$ 與 $\overline{QA}$ 表示。此題刻意避開 $\overline{PO}$ 與 $\overline{QA}$ 這種表示兩點距離的記號，用意在於希望學生能從題目中，看到符號($\sqrt{a^2+b^2}=3$、$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=5\ldots$等)所欲透露的訊息。 2. 修改理由： 國中未出現實數一詞，但八年級上學期教二次方根時有提到有理數與無理數，故將「實數」一詞改為「有理數」一詞。
正式版	● 試題編碼 M-1-3-1 A(1 , 1)、P(a , b)、Q(m , n)為直角坐標平面上的三個點，其中 a , b , m , n 為有理數。 已知 $\sqrt{a^2+b^2}=3$、$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=5$、$\sqrt{m^2+n^2}=7$、 $\sqrt{(m-1)^2+(n-1)^2}=9$。請回答以下問題： (1)P 點到原點的距離為何? (2)Q 點到 A 點的距離為何?

表 4-4-4 試題修改過程 第 5 題

原題目	● 試題編碼 S-2-1-0 已知 $(2x-5)^2+(-2x+5)-12=0$，求 x 的解
說明	若照一般方程式的解題步驟，多數學生習慣將式子直接展開、化簡進而解題。然而此題設計理念主要在於探究學生能否從符號式中察覺到某些結構，並藉由符號的重新組織，有效地處理問題。 例如將 $(2x-5)^2+(-2x+5)-12=0$ 改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$，再視 $(2x-5)$ 為一新的單位，例如令 $Y=2x-5$，先求出 Y 再進一步求出 x。
正式版	● 試題編碼 S-2-1-0 已知 $(2x-5)^2+(-2x+5)-12=0$，求 x 的解

表 4-4-5 試題修改過程 第 7 題

原題目	● 試題編碼 S-1-6-0 方程式 $\dfrac{4x-2}{2x-1}=4$,求 x 的解為何?
說明	1. 此題改編自 Arcavi(1994)的試題，雖然 Arcavi 欲用此例題說明符號感包含讀懂符號的意義，然而，研究者認為此題主要可由符號式所展現外在結構，進一步察覺出某些訊息協助解題。故研究者改編此題，並將其納入符號感結構(structure)向度下之試題。 2. 研究者猜測以原題目之考法，會有許多學生直接以等量公理求解，根據試寫結果，亦為如此。而本試題設計之目的在於瞭解符號感中的結構向度(以 S-1 為主，亦可能涵蓋 S-2)，若能以宏觀的角度察覺整個左式中的分母為分子的兩倍，不等於右式的 4，便可輕易發現此題無解。故在重視學生對符號的直觀感，而非解題正確與否下，經小組多次討論後，將試題修改如試題編碼 S-1-6-1。
正式版	● 試題編碼 S-1-6-1 陳老師在黑板上出了一道數學問題，內容如下： 解方程式 $\dfrac{4x-2}{2x-1}=4$ 並問同學如何解題。小明舉手發言，回答:「因為 $2\neq4$，所以這一題無解。」 請問： (1)請猜測小明回答 $2\neq4$ 的理由為何? (2)你認為小明的回答正確嗎?若正確，請說明原因。若不正確，請提供其他作法。

表 4-4-6 試題修改過程 第 9 題

原題目	● 試題編碼 U-2- 5-0

熱愛繪畫的小莫，將某天夜晚在天空看到的景象畫下來(如右圖)。圖中有月亮與七顆星星，其中最靠近月亮的星星，正位於月亮上方 2 公分處。請問若將圖片裡的月亮當作直角坐標的原點，下列哪個方程式，最能表示出這些星星的位置? 」

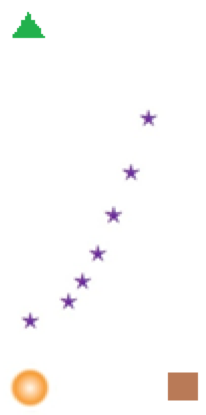
(A) $y=2x$	(B) $y=x+2$	(C) $y=\frac{1}{2}x+2$	(D) $y=x^2+2$
(E) $y=\frac{1}{2}x^2+2$	(F) $y=(x+2)^2$	(G) $y=\frac{1}{x}+2$	

說明

1. 經由小組討論與一位國中數學教師的提醒下，建議題目敘述應強調直角坐標 x 軸與 y 軸上的單位長相等，且需告知 x 軸與 y 軸的正向方向，否則會有多種可能答案。故研究者參考基本學力測驗試題，於圖中增加三角形與正方形，以便於告知 x 軸與 y 軸的正向方向。
2. 考慮題目敘述的合理性，將原題目情境「把天空看到的景象畫下來」改為「創造一幅畫作」。
3. 選項中，因 $y=x^2+2$ 與 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 開口大小過於相近，故大幅修改誘答選項的 x^2 項係數，使拋物線開口大小明顯不同。並增加一個 x^2 項係數為負的選項，藉此瞭解學生能否判斷圖形的特徵(開口方向)與所對應方程式之關係。

正式版 ● 試題編碼 U-2- 5-1

熱愛繪畫的小莫，創造一幅名為「星夜狂想」的畫作，如右圖。已知圖中有圓形、三角形、正方形與七顆星星，最靠近圓形的星星位於圓形正上方 2 公分處，其中圓形、三角形、最靠近圓形的星星三點共線。若小莫想用函數式描述星星的位置，以圓形為原點作一直角坐標平面，其中圓形到正方形的方向為 x 軸正向，圓形到三角形的方向為 y 軸正向，x 軸與 y 軸單位長皆取 1 公分，則下列哪個函數式最能表示星星的位置?



(A) $y=2x$	(B) $y=-x+2$	(C) $y=\frac{1}{2}x+2$	(D) $y=(2x)^2+2$
(E) $y=\frac{1}{2}x^2+2$	(F) $y=-x^2+2$	(G) $y=(x+2)^2$	(H) $y=\frac{1}{x}+2$

表 4-4-7 試題修改過程 第 10 題

原題目	● 試題編碼 M-2-1-0 小寶向老師請教作業裡的一題練習題：「求兩直線 $2x+y=24$ 與 $3x-y=-9$ 的交點坐標」。下圖為老師處理此問題時的部分計算過程： $\begin{cases}2x+y=24 \ldots\ldots ① \\ 3x-y=-9 \ldots\ldots ②\end{cases}$ ①+②：$5x=15$ $x=3$ 將 $x=3$ 代回① 得 $2\times3+y=24$ $y=18$ ⋮ 請問圖中 $x=3$ 與 $y=18$ 在此題中所代表的意思為何? (A) $x=3$ 表示交點的 x 坐標； $y=18$ 表示一條水平線。 (B) $x=3$ 為一條鉛直線； $y=18$ 表示交點的 y 坐標。 (C) $x=3$ 表示交點的 x 坐標； $y=18$ 表示交點的 y 坐標。 (D) $x=3$ 為一條鉛直線； $y=18$ 表示一條水平線。
說明	1. 試寫階段，學生表示因為題目中是問兩條線的交點坐標，所以題目中給的 x 與 y 自然會是那個交點的坐標。 研究者從試寫結果發現，題目中「交點坐標」一詞，容易提示答案，影響學生的作答。為了確定學生能從上下文中辨別符號所代表的意義，故研究者決定將題目中「交點坐標」一詞拿掉，重新修改題目敘述。 2. 專家審核階段，專家建議加上「此兩直線」交點，較為清楚。例如： (A) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標； $y=18$ 表示一條水平線。 (B) $x=3$ 為一條鉛直線； $y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。 (C) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標； $y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。

研究者贊同此建議，並於正式試題時將選項之敘述作修改。

3. 小組討論時，有成員認為可將「坐標平面」改成「直角坐標平面」，因為課綱分年細目是使用「直角坐標平面」一詞。

研究者贊同此建議，並於正式試題時將選項之敘述作修改。

正式版 ● 試題編碼 M-2-1-3

已知 $2x+y=24$ 與 $3x-y=-9$ 為直角坐標平面上的兩直線，<u>小寶</u>想在直角坐標平面上畫出此兩直線，下圖為小寶的部分計算過程：

$$\begin{cases} 2x+y=24 \ldots\ldots ① \\ 3x-y=-9 \ldots\ldots ② \end{cases}$$

①+②：$5x=15$

$x=3$

將 $x=3$ 代回①

得 $2\times3+y=24$

$y=18$

⋮

請問 $x=3$ 與 $y=18$ 在此計算過程中所代表的意思為何?

(A) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標； $y=18$ 表示一條水平線。

(B) $x=3$ 為一條鉛直線； $y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。

(C) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標；$y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。

(D) $x=3$ 為一條鉛直線； $y=18$ 表示一條水平線。

表 4-4-8 試題修改過程 第 12 題

原題目	● 試題編碼 M-3-1-0 求 a 的一元二次方程式 $xa^2+a+z=0$ 的解，其中 x、z 為實數且 $x\neq 0$。 ● 試題編碼 M-3-1-1 求 a 的一元二次方程式 $xa^2+a+z=0$ 的解，其中 x、z 為有理數且 $x\neq 0$。
說明	1. 此題設計理念源自於國中課程「一元二次方程式」。多數課本皆以「$ax^2+bx+c=0\,(a>0)$」表示 x 的一元二次方程式。研究者刻意使用與多數習慣不同的符號，測驗學生能否從數學概念中，察覺出不同符號所代表的相同意涵。 2. 國中沒有提到「實數」一詞。八年級上學期課本在教平方根時，有提到「有理數」與「無理數」，故於試寫後的預試 1 階段將「實數」一詞改為「有理數」一詞。但於預試 1 階段的結果發現，絕大多數的學生對此題感到困難，而從訪談中發現，學生反應因為忘了「有理數」是什麼意思，反而容易因為這樣搞混題意。 研究者推測因為此題目對多數學生較困難，所以學生容易因為題目中的敘述影響其作答表現。研究者與某國中數學老師討論後，皆認為可將「有理數」一詞改為「已知數」，在不影響題目敘述之完整性下，亦能減少學生被題目中的某些字詞混淆。
正式版	● 試題編碼 M-3-1-2 求 a 的一元二次方程式 $xa^2+a+z=0$ 的解，其中 x、z 為已知數且 $x\neq 0$。

(三)評分方式

「符號感測驗」試卷共計 14 大題(試題架構請參見表 3-1-1)。評分編碼方式為雙碼，第一碼為答案的正確度，第二碼為作答類型。

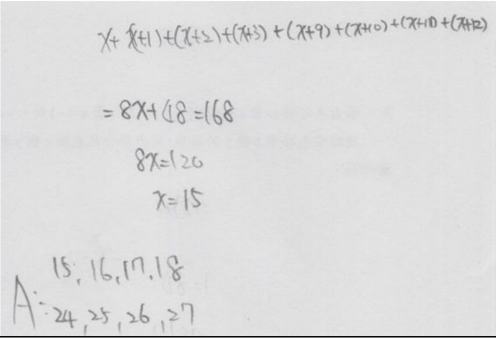
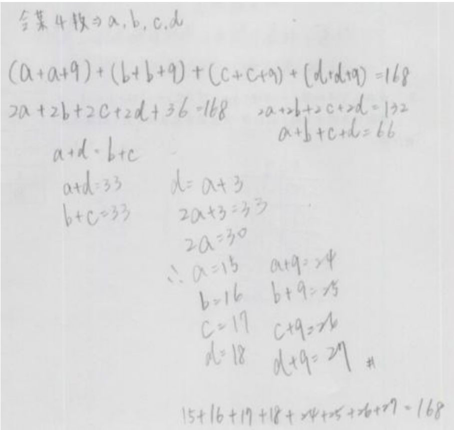
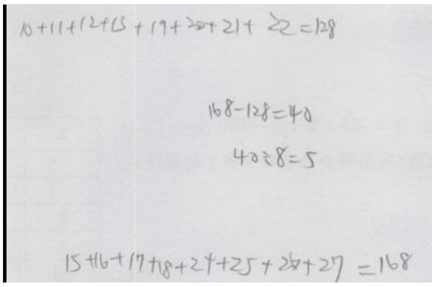
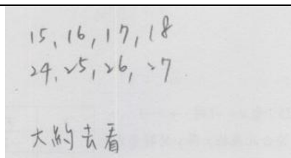
第一碼依正確度分為四大類：「正確作答情況」記作「2□」、「部份正確作答情況」記作「1□」、「不正確作答情況」記作「7□」、「無作答」記作「9□」。

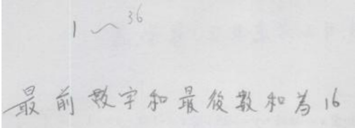
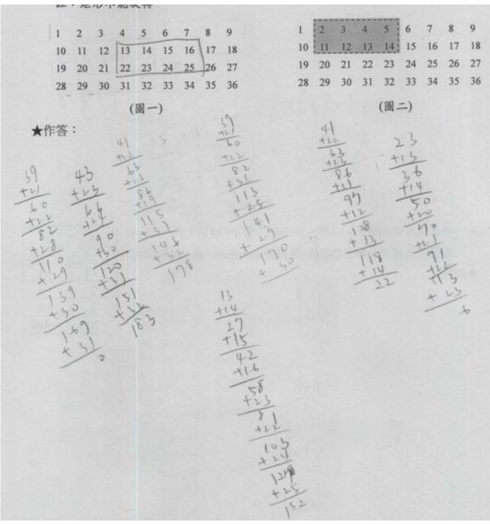
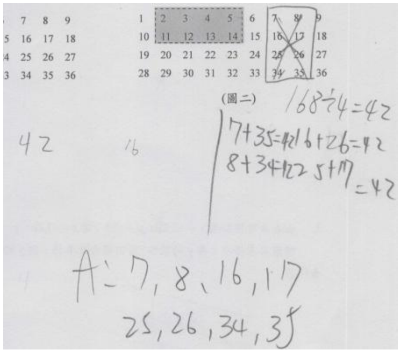
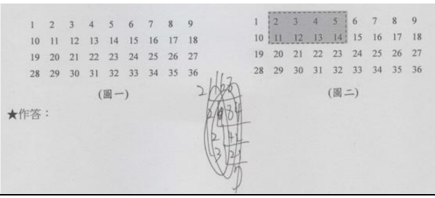
第二碼則依作答類型編碼。若第一碼為「正確作答情況(1□)」、「部份正確作答情況(2□)」或「不正確作答情況(7□)」此三大類時，皆從 0 開始以流水號記錄，第二碼訂為 9 者代表「其他」，主要是為了避免某些作答情況未列於評分規準中。例如某一題「部份正確作答情況(1□)」之作答類型共可分為三類，則記作「10」、「11」、「12」，「19」則代表「其他」。

「無作答(9□)」部分，則記作 「90：嘗試解題，但又塗掉或劃掉」、「91：直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西」、「99：空白」。

以下提供四題評分規準與學生作答表現作為參考，如表 4-4-9 ~ 4-4-12。其餘評分規準請參見附錄 2。

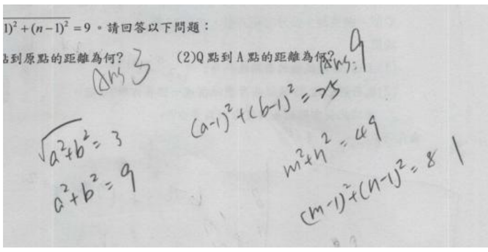
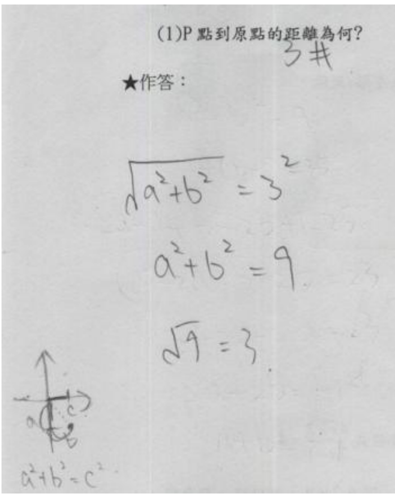
表 4-4-9 【第 1 題：試題編碼 U-1-1-2】評分規準

【第 1 題：試題編碼 U-1-1-2】 **答案：**15，16，17，18，24，25，26，27	
編碼	**作答情況**
	正確作答情況
20	使用一個代數符號解題，並合理推導出正確答案 
21	使用兩個以上的代數符號解題，並合理推導出正確答案。 
	部份正確作答情況
10	透過數字的運算，湊出正確答案。 
11	解題過程中使用代數符號解題，但未寫出正確答案。
12	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。 (包含無法判斷的解釋或推導) 

13	使用代數符號解題，但誤解題意，使答案錯誤。例如：將矩形作旋轉。
19	其他
不正確作答情況	
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。 
71	僅透過數字的運算，但未能列出正確答案。 
72	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
73	沒有使用代數符號解題，且誤解題意。例如：將矩形旋轉成垂直。 
79	其他
無作答	
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉 

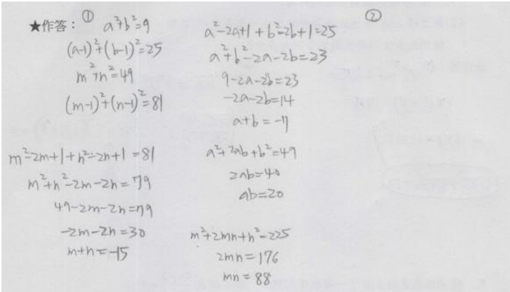
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

表 4-4-10 【第 4 題：試題編碼 M-1-3-1】評分規準

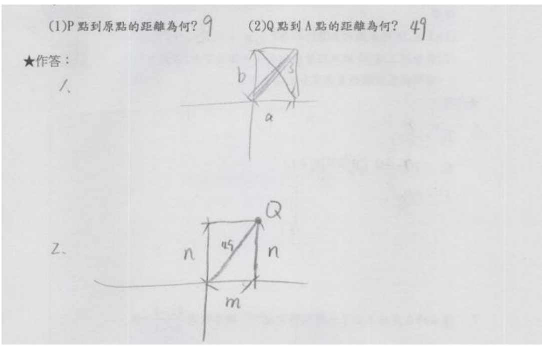
答案： (1) 3　　(2) 9	
編碼	**作答情況**
(1)、(2)	**正確作答情況**
20	察覺符號所透露的訊息(例如：距離公式)，寫出正確答案。 
21	畫圖並配合符號所透露的訊息，寫出正確答案。 
(1)、(2)	**部份正確作答情況**
10	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。 (包含無法判斷的解釋或推導) 範例：402_16
19	其他
(1)、(2)	**不正確作答情況**
70	欲透過解方程式，分別將題目中的未知數一一求出。 例如：嘗試解出聯立方程式$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=3\\ \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=5\end{cases}$中的 a、b；或

<table>
<tr><td></td><td>

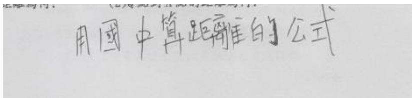
$$\begin{cases}\sqrt{m^2+n^2}=7\\ \sqrt{(m-1)^2+(n-1)^2}=9\end{cases}$$ 中的 m、n。



</td></tr>
<tr><td>71</td><td>圖解法，但未能寫出正確答案。



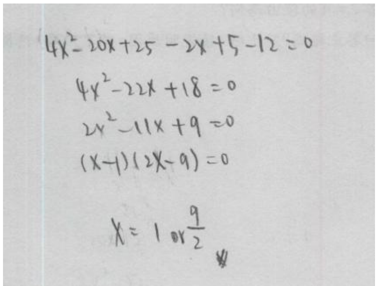
</td></tr>
<tr><td>72</td><td>無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。



</td></tr>
<tr><td>73</td><td>僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。</td></tr>
<tr><td>79</td><td>其他</td></tr>
<tr><td>(1)、(2)</td><td>無作答</td></tr>
<tr><td>90</td><td>嘗試解題，但又塗掉或劃掉</td></tr>
<tr><td>91</td><td>直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。</td></tr>
<tr><td>99</td><td>空白</td></tr>
</table>

表 4-4-11 【第 5 題：試題編碼 S-2-1-0】評分規準

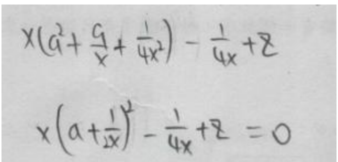
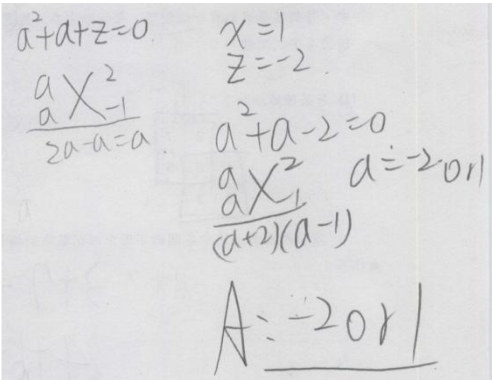
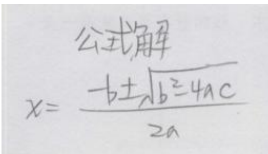
答案： $x=\frac{9}{2}$，1

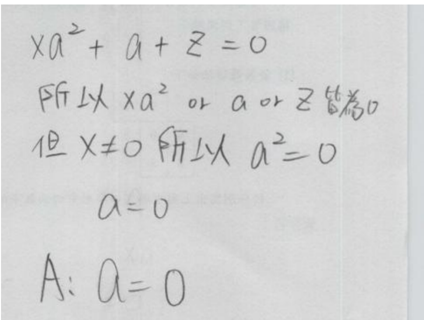
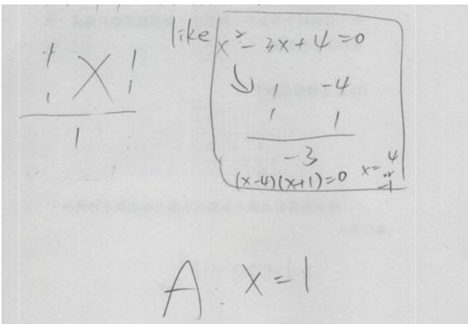
編碼	作答情況
	正確作答情況
20	透過符號的拆解或重組，進一步合理推導寫出正確答案。例如：先將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$，再進一步求出 x。
21	透過符號的拆解或重組，並重新定義為一新的符號，透過此自訂的符號解題，進一步求出正確答案。例如：將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$，並令 $A=(2x-5)$，先求 $A^2-A-12=0$ 中 A 的解，再進一步求出 x。
	部份正確作答情況
10	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
11	直接將式子展開解題，寫出正確答案。 
12	透過符號的拆解或重組，但未能寫出正確答案。例如：將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$，但未能進一步求出 x。
13	透過符號的拆解或重組，並重新定義為一新的符號，透過此自訂的符號解題，但未能寫出正確答案。例如：將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$，並令 $A=(2x-5)\ldots$，但未能進一步求出 x。
19	其他
	不正確作答情況
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
72	未能正確拆解或重組符號，而是直接將 $(2x-5)^2+(-2x+5)-12=0$ 視為 $A^2+A-12=0$。
73	直接將式子展開解題，但未能寫出正確答案。

79	其他
無作答	
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

表 4-4-12 【第 12 題：試題編碼 M-3-1-2】評分規準

答案： $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4xz}}{2x}$

編碼	作答情況
	正確作答情況
20	但能辨別 a、x 與 z 在此式所代表的意義，進一步合理推導寫出正確答案。例如：x、1 與 z 分別為 a^2 、a 與常數項的係數。
	部份正確作答情況
10	雖未能寫出正確答案，但能辨別 a、x 與 z 在此式所代表的意義。例如：能分辨 x、1 與 z 分別為 a^2 、a 與常數項的係數。 
11	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
19	其他
	不正確作答情況
70	將 a、x 或 z 隨意以數字代入。 
71	提到公式解，但未能應用於此題將正確答案寫下。 

<table>
<tr><td>72</td><td>將題目左式中的每項視作 0。
例如：$xa^2=0$、$a+z=0$ 或 $a=0$、$z=0$。

</td></tr>
<tr><td>73</td><td>無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。

</td></tr>
<tr><td>74</td><td>列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。</td></tr>
<tr><td>79</td><td>其他</td></tr>
<tr><td colspan="2">無作答</td></tr>
<tr><td>90</td><td>嘗試解題，但又塗掉或劃掉</td></tr>
<tr><td>91</td><td>直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。</td></tr>
<tr><td>99</td><td>空白</td></tr>
</table>

(四)工具之效度與信度

1. 效度

本研究工具的效度採內容效度。請指導教授與一位數學系教授審核試題之合宜性。專家審核 19 道試題，其中 19 道試題皆可保留，僅微修改 1 道試題，如表 4-3-13。研究者從中挑選 14 道試題作為正式施測試題，組成「符號感測驗」試卷。

表 4-4-13 專家審核意見

原題目	已知 $2x+y=24$ 與 $3x-y=-9$ 為坐標平面上的兩直線，小寶想在坐標平面上畫出此兩直線，下圖為小寶的部分計算過程： $\begin{cases} 2x+y=24 \ldots\ldots ① \\ 3x-y=-9 \ldots\ldots ② \end{cases}$ ①+②：$5x=15$ $x=3$ 將 $x=3$ 代回① 得 $2\times 3+y=24$ $y=18$ ⋮ 試問 $x=3$ 與 $y=18$ 在此計算過程中所代表的意思為何? (A) $x=3$ 表示交點的 x 坐標； $y=18$ 表示一條水平線。 (B) $x=3$ 為一條鉛直線； $y=18$ 表示交點的 y 坐標。 (C) $x=3$ 表示交點的 x 坐標； $y=18$ 表示交點的 y 坐標。 (D) $x=3$ 為一條鉛直線； $y=18$ 表示一條水平線。
專家意見	建議加上「此兩直線」交點，較為清楚。 例如： (A) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標； $y=18$ 表示一條水平線。 (B) $x=3$ 為一條鉛直線； $y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。 (C) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標；$y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。

除上述專家效度，研究者亦邀請六位數學背景的研究生與中學教師協助檢視試卷之題目與目標的一致性(Rovinelli & Hambleton, 1977)，期望以題目與目標的一致性係數判定題目與目標符合之程度關係。請參見表 4-4-14 至表 4-4-16。

表 4-4-14 使用向度試題之題目與目標一致性係數

向度	題號	題目與目標一致性係數
使用(Using)	1	0.55
	3	0.5
	9	0.21
	14(2)	0.67

表 4-4-15 意義向度試題之題目與目標一致性係數

向度	題號	題目與目標一致性係數
意義(Meaning)	2(1)	0.75
	2(2)	0.75
	2(3)	0.75
	2(4)	0.67
	4(1)	0.71
	4(2)	0.59
	8	0.75
	10	0.87
	12	0.71

表 4-4-16 結構向度試題之題目與目標一致性係數

向度	題號	題目與目標一致性係數
結構(Structure)	5	0.46
	6(2)	0.59
	7(1)	0.21
	7(2)	0.17
	11	0.5
	13	0.46

2. 信度

本研究正式施測的整份試題之 *Cronbach's* α=.75；使用向度試題(第 1、3、9、14 題)之 *Cronbach's* α=.27；意義向度試題(第 2、4、8、10、12 題)之 *Cronbach's* α=.62；結構向度試題(第 5、6、7、11、13 題)之 *Cronbach's* α=.62。

本研究開發符號感試題之目的不在於建立題本，而是提供一種評量方式，試圖從試題與學生作答表現中看出符號感的展現，以便供日後從事符號感相關研究的學者作參考，

第五節 研究流程

研究二之研究流程，如圖 4-5-1。

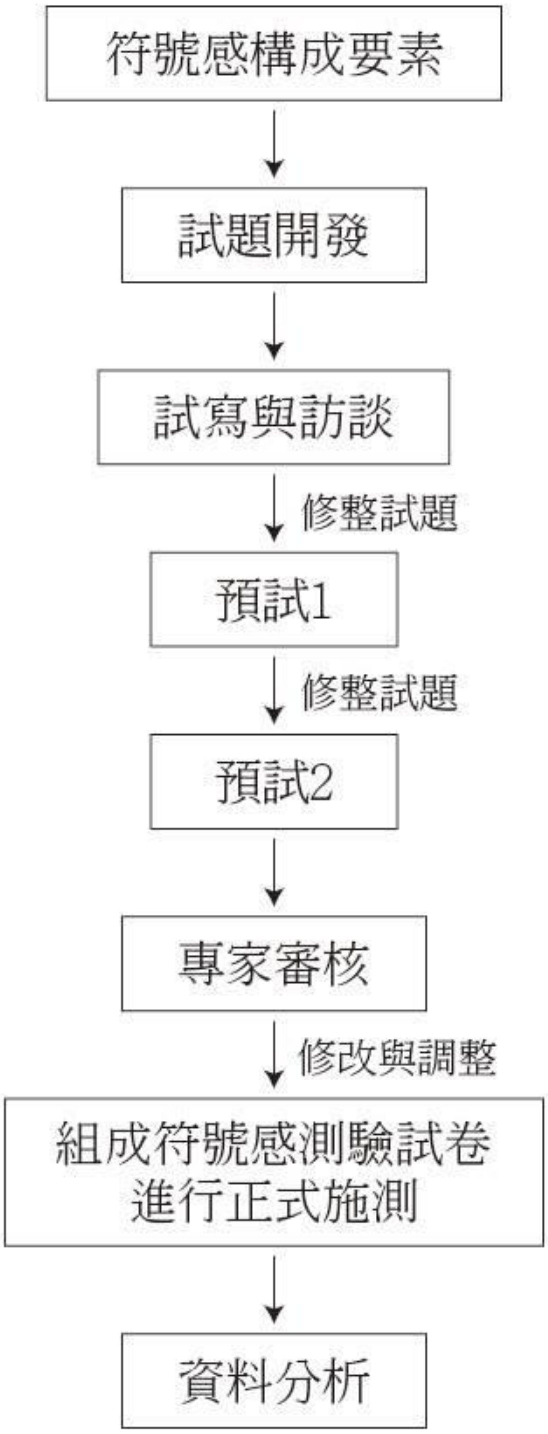


圖 4-5-1 研究二之研究流程圖

第伍章 「研究二：探索符號感評量方式」之資料分析

本章分三節，分別針對符號感三大向度「使用」、「意義」、「結構」之測驗表現作詳細說明。將依序探討搭配於各子成分下之試題表現與學生的實際作答情況。其中試題表現中所呈現之難度、鑑別度計算方式參考郭生玉（1988）提供之論文題試題分析方法，鑑別度評鑑標準可參考表 5-0-1。雖然鑑別度可做為試題優劣的參考，但鑑別度低者不代表試題有缺點，若試題為測驗重要的學習結果，仍應保留(郭生玉，1988)。學生實際作答情況之分析，則可搭配附錄二的評分規準作探討。

表 5-0-1 鑑別度的評鑑標準 (郭生玉，1988)

鑑別度	試題評鑑
.40 以上	非常優良
.30-.39	優良，但可能需修改
.20-.29	尚可，但通常需修改
.19 以下	劣，須淘汰或修改

第一節 使用向度之測驗表現

使用向度下有兩個子成分，分別為「U-1 傾向使用符號處理問題」與「U-2 將事物展現的規律以符號表示或與符號作等價連結」。

(一)U-1 傾向使用符號處理問題

1. 試題表現

搭配 U-1 之試題為第 1 題與第 14 題。其中第 14(1)題的主要目的在確保學生是否瞭解題意，第 14(2)題的主要目的才是測試 U-1。而 U-1 試題的作答人數比例、鑑別度與難度整理如表 5-1-1 所示。

表 5-1-1 U-1 試題作答人數比例、鑑別度與難度

試卷題號	評分編碼類別	總樣本(n=117) 人數(比例)	鑑別度	難度
1	正確作答情況 (20、21)	17 (14.53%)	.27	.33
	部份正確作答情況 (10、11、12、19)	57 (48.72%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、73、79、90、91、99)	43 (36.75%)		
14(1)	正確作答情況 (20)	84 (71.79%)	.33	.73
	不正確作答情況或無作答 (70、90、91、99)	33 (28.21%)		
14(2)	正確作答情況 (20、21)	3 (2.57%)	.05	.08
	部份正確作答情況 (10、11、12、13、19)	13 (11.11%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、73、79、90、91、99)	101 (86.32%)		

從上表可知第 14(2)題鑑別度.05 與難度.075 均非常低。研究者在試題開發階段時，希望能透過試題反應出學生直觀的符號感，而非僅呈現學生知識層面或僵化練習的效果，故設計此一創新試題。第 14(2)題需具備敏銳的觀察力及對數字、符號靈活運用的能力，才有可能順利求出答案，而試題設計主要目的為緊扣「U-1 傾向使用符號處理問題」之意涵，故在評分規準上不僅僅是要看出學生的答案正確與否，尚需看學生作答表現是否符合 U-1，來給予評分之依據。這可能是造成第 14(2)題鑑別度與難度過低的主要原因。

2. 學生作答情況

搭配評分規準作探討，第 1 題編碼「20」、「21」、「11」與第 14(2)題編碼「20」、「21」、「12」者，總括來說皆帶有使用代數符號解題(U-1)之意涵，編碼間的差異則在於答案的完整度或是解題方式之不同。

以第 1 題為例，編碼「20」、「21」者皆符合「U-1 傾向使用符號處理問題」，並經合理推導寫出正確答案，如圖 5-1-1。

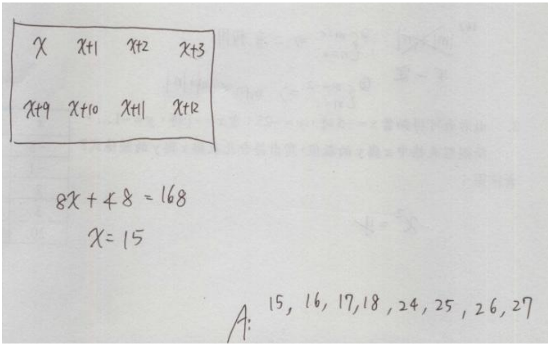


圖 5-1-1　具備 U-1 之作答範例(第 1 題，評分編碼「20」)

而有些學生雖未能寫出正確答案，但能從作答過程中能看到 U-1 的特徵，故將其列為部分正確，依作答方式編碼為「11」，如圖 5-1-2。

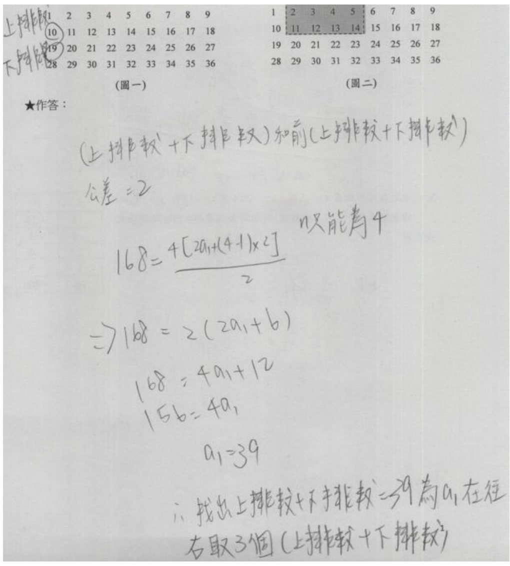


圖 5-1-2　具備 U-1 之作答範例(第 1 題，評分編碼「11」)

第 1 題在「預試 1」階段時，便發現會有許多學生使用數字的運算，不斷嘗試直到求出正確答案，如圖 5-1-3。

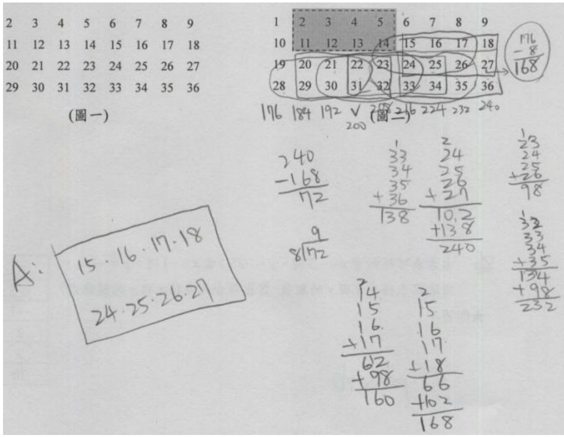


圖 5-1-3 欠缺 U-1 之作答範例(第 1 題，評分編碼「10」)

此解題方式雖能正確求出答案，但卻欠缺 U-1 特徵，解題效率也較差。從「預試 1」訪談過程中，更可明確得知學生嘗試多次才求出正解。以下節錄自「預試 1」的學生(S4)與研究者的訪談：

S4：我用八個八個去推，然後加起來等於 168。

R ：八個八個去推，可以再講清楚一點嗎？什麼叫八個八個去推？

S4：這邊是八個，然後在往旁邊數八個，然後再往這邊數八個。

R ：所以你總共試了幾次？

S4：大概五次吧。

R ：大概試了五次，然後算出最後的答案。

(二)U-2 將事物展現的規律以符號表示或與符號作等價連結

1. 試題表現

搭配 U-2 試題為第 3 題與第 9 題。其中第 9 題希望學生能從圖像的軌跡判斷出相對應的代數式，以達成評量 U-2 之目的。而 U-2 試題的作答人數比例、鑑別度與難度整理如表 5-1-2 所示。

表 5-1-2　U-2 試題作答人數比例、鑑別度與難度

試卷題號	評分編碼類別	總樣本(n=117) 人數(比例)	鑑別度	難度
3	正確作答情況 (20、21)	16 (1.71%)	0.33	0.38
	部份正確作答情況 (10、11、12、13、14、19)	53 (57.26%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、79、90、91、99)	48 (41.03%)		
9	正確作答情況 (20、21)	9 (7.69%)	0.23	0.2
	部份正確作答情況 (10、11、12、13、14、19)	36 (30.77%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、79、90、91、99)	72 (61.54%)		

從上表可得知第 3 題鑑別度 0.33 屬於優良，第 9 題鑑別度 0.23 尚可。其中第 9 題題型是提供多個選項，讓學生自行選擇答案。雖試卷於第一頁有說明提醒需將作答理由寫下，但此題仍有許多學生僅列出答案，未說明理由，可能是造成此題鑑別度與難度略低之因素。

2. 學生作答情況

搭配評分規準作探討，第 3 題編碼「20」、「21」、「12」與第 9 題編碼「20」、「21」、「10」、「11」者，總括來說皆帶有 U-2 之意涵，編碼間的差異則在於答案的完整度或是解題方式的不同。

以第 3 題為例，編碼「20」、「21」不僅符合「U-2 將事物展現的規律以符號表示或與符號作等價連結」，並能順利寫下正確答案，如圖 5-1-4。

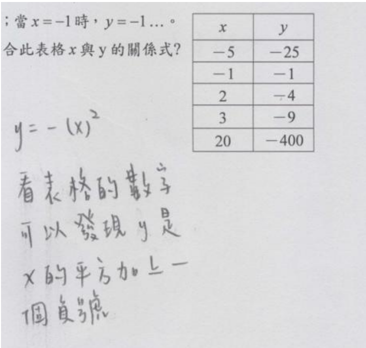


圖 5-1-4 具備 U-2 之作答範例(第 3 題，評分編碼「20」)

有少許學生察覺到數據的規律，但以不完整的符號式表示答案(評分編碼 12)。雖答案不完全正確，仍可從其作答過程看出具備欲將數值規律以符號表示的能力，含有部分 U-2 特徵。如圖 5-1-5。

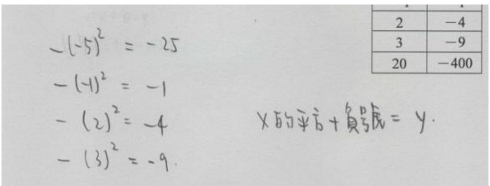
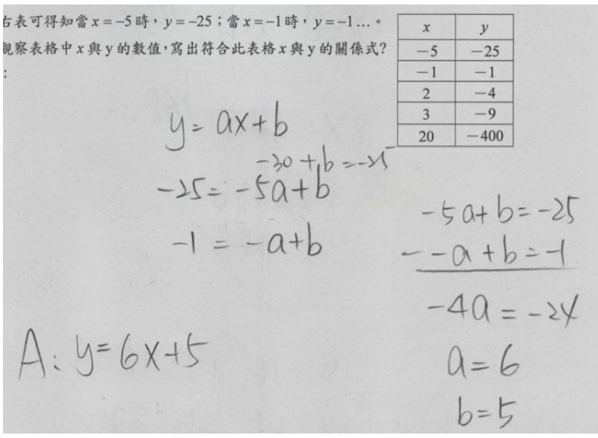


圖 5-1-5 具備 U-2 之作答範例(第 3 題，評分編碼「12」)

第 3 題有許多學生未觀察數值的規律，而是直接假設 x 與 y 的關係式為一次函數，隨意選取兩組點坐標代入，明顯與 U-2 不符合。如圖 5-1-6 範例。



右表可得知當 $x=-5$ 時，$y=-25$；當 $x=-1$ 時，$y=-1$…。
觀察表格中 x 與 y 的數值，寫出符合此表格 x 與 y 的關係式？

x	y
−5	−25
−1	−1
2	−4
3	−9
20	−400

$y=ax+b$

$-30+b=-25$

$-25=-5a+b$

$-1=-a+b$

$-5a+b=-25$

$-\ -a+b=-1$

$-4a=-24$

$a=6$

$b=5$

A: $y=6x+5$

圖 5-1-6 欠缺 U-2 之作答範例(第 3 題，評分編碼「70」)

第二節 意義向度之測驗表現

意義向度下有三個子成分，分別為「M-1 明瞭符號所代表的物件與傳達的訊息」、「M-2 從上下文中辨別相同符號所代表的意義」與「M-3 能不受符號改變的影響，從中察覺不同符號表徵下所代表的相同意涵」

(一)M-1 明瞭符號所代表的物件與傳達的訊息

1. 試題表現

搭配 M-1 試題為第 2 題與第 4 題。其中第 2 題有四個子題，第 2 題有兩個子題。M-1 試題的作答人數比例、鑑別度與難度整理如表 5-2-1 所示。

表 5-2-1 M-1 試題作答人數比例、鑑別度與難度

試卷題號	評分編碼類別	總樣本(n=117) 人數(比例)	鑑別度	難度
2(1)	正確作答情況 (20、21)	44 (37.61%)	.27	.67
	部份正確作答情況 (10、19)	66 (56.41%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、79、90、91、99)	7 (5.98%)		
2(2)	正確作答情況 (20、21)	30 (25.64%)	.37	.55
	部份正確作答情況 (10、19)	62 (52.99%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、79、90、91、99)	25 (21.37%)		

2(3)	正確作答情況 (20、21)	27 (23.07%)	.23	.55
	部份正確作答情況 (10、19)	76 (64.96%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、79、90、91、99)	14 (11.97%)		
2(4)	正確作答情況 (20、21)	4 (3.42%)	.18	.44
	部份正確作答情況 (10、11、12、13、14、19)	100 (85.47%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、79、90、91、99)	13 (11.11%)		
4(1)	正確作答情況 (20、21)	84 (71.79%)	.33	.17
	部份正確作答情況 (10、19)	0 (0%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、73、79、90、91、99)	33 (%)		
4(2)	正確作答情況 (20、21)	6 (%)	.27	.13
	部份正確作答情況 (10、19)	7 (%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、73、79、90、91、99)	104 (%)		

第 2 題的四個子題難度皆適中(皆落於.04~.08)，但第 2(4)題鑑別度.18 較差，從試題與多數學生的答案作分析，可能原因為多數學生在此題未能全面性考慮到符號 m、n 所代表的整數意義包含 0 這個值，使得多數學生只憑藉正整數或負整數的概念思考此題，回答$|m|+|n|$一樣大，忽略 m=n=0，則$m+n$與$|m|+|n|$一樣大的情況，導致絕大多數學生被歸類於部分正確的情況。

第 4 題中的兩個子題都在於考驗學生能否從符號式探知距離的意涵。第 4(1)題正確作答有 84 人與第 4(2)題正確作答有 6 人，這之間的差異可能原因為第 4(1)題是問 P 點與原點的距離，第 4(2)題則是問平面上兩點的距離(Q 點與 A 點)。學生在學習直角平面上兩點的距離公式時，多是從某一點與原點的距離開始學習，對任一點與原點間的距離所展現的符號式通常較容易察覺，而造成這兩小題答對人數的差異。

2. 學生作答情況

搭配評分規準作探討，第 2(1)題、第 2(2)題、第 2(3)題、第 2(4)題編碼「20」、「21」與第 4(1)題、第 4(2)題編碼「20」、「21」者，總括來說均符合 M-1 意涵，編碼間的差異則在於答案的完整度或是解題方式的不同。

以第 4 題為例，編碼為「20」與「21」者，除了符合 M-1 特徵，並順利寫下正確答案。圖 5-2-1 為符合 M-1 特徵的學生作答表現，從中發現學生察覺符號所傳遞的訊息。

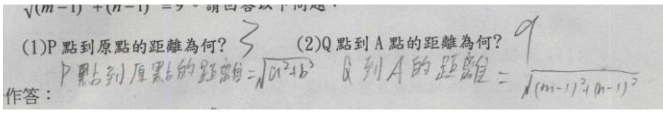


圖 5-2-1 具備 M-1 之作答範例(第 4 題，評分編碼「20」)

明顯欠缺 M-1 特徵的學生，容易忽略符號所傳達的訊息，而是欲將每一個未知數精確地求出來，如圖 5-2-2。

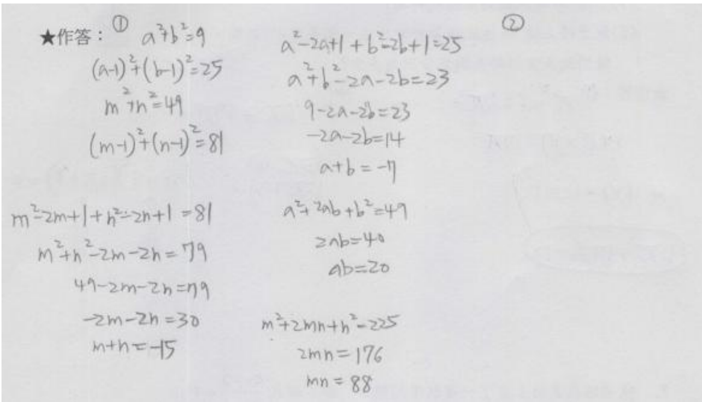


圖 5-2-2 欠缺 M-1 之作答範例(第 4 題，評分編碼「70」)

(二)M-2 從上下文中辨別相同符號所代表的意義

1. 試題表現

搭配於 M-2 試題為第 10 題。M-2 試題的作答人數比例、鑑別度與難度整理如表 5-2-2 所示。

表 5-2-2 M-2 試題作答人數比例、鑑別度與難度

試卷題號	**評分編碼類別**	**總樣本(n=117)**		
		人數(比例)	**鑑別度**	**難度**
10	正確作答情況 (20)	14 (11.96%)	.28	.38
	部份正確作答情況 (10、19)	63 (53.85%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、79、90、91、99)	40 (34.19%)		

從表中可明顯看出第 10 題正確作答人數僅有 14 人。雖然試卷第一頁有說明需記錄作答過程或理由，但由於此題為選擇題型，且此題所涉及概念頗直觀，學生可能不知如何說明選填答案的理由，導致多數寫出正確選項的學生被歸類於部分正確。

2. 學生作答情形

搭配評分規準作探討，第 10 題編碼「20」者，符合 M-2 意涵。例如能以文字或圖像說明解聯立方程式過程中所出現的 $x=3$ 與 $y=18$ 並非代表鉛直線或水平線，而是代表兩直線交點坐標的 x 坐標與 y 坐標。圖 5-2-3 為某學生作答範例。

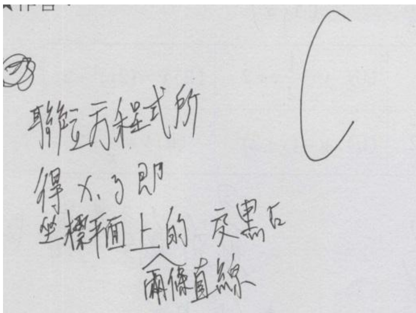


圖 5-2-3 具備 M-2 之作答範例(第 10 題，評分編碼「20」)

欠缺 M-2 者，容易忽略相同的符號代表不同意義的可能，未從上下文中了解題目所代表的意義。欠缺 M-2 者在此題易選擇(D)選項，誤以為任何時候 $x = 3$ 皆代表鉛直線；$y = 18$ 皆代表水平線。

(三)M-3 能不受符號改變的影響，從中察覺不同符號表徵下所代表的相同意涵

1. 試題表現

搭配 M-3 的試題為第 8 題與第 12 題。M-3 試題的作答人數比例、鑑別度與難度整理如表 5-2-3 所示。

表 5-2-3　M-3 試題作答人數比例、鑑別度與難度

試卷題號	評分編碼類別	總樣本(n=117) 人數(比例)	鑑別度	難度
8	正確作答情況 (20、21)	95 (81.2%)	.40	.80
	部份正確作答情況 (10、11、12、19)	9 (7.69%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、79、90、91、99)	13 (11.11%)		

12	正確作答情況 (20)	2 (5.98%)	.13	.07
	部份正確作答情況 (10、11、19)	7 (1.17%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、73、74、79、90、91、99)	108 (92.31%)		

第 8 題正確作答人數 95 人、難度.80、鑑別度.40，可得知此題對多數學生而言是簡單的，從試題分析可能的原因為第 8 題在國中教導函數單元時，常出現此一類型試題。

而第 12 題正確作答人數僅有 2 人，難度、鑑別度亦不佳。此題所需先備知識為解一元二次方程式的解，很可能學生連課本常出現的形式「$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$」，也不熟悉如何求 x 的解，在符號的刻意轉換下，更無法合理寫出正確答案。

2. 學生作答情形

搭配評分規準作探討，第 8 題編碼「20」、「21」、「10」與第 12 題編碼「20」、「10」者，總括來說均符合 M-3 意涵，編碼間的差異則在於答案的完整度或是解題方式的不同。

以第 12 題為例，編碼「20」者明顯符合 M-3，且答案正確。而編碼「10」者，雖未能寫出正確答案，但能察覺新符號與習慣的符號所存在的共同意涵。如圖 5-2-4，學生雖未能寫出正確答案，但能分辨 x、1 與 z 分別為 a^2、a 與常數項的係數，仍具備 M-3 特徵。

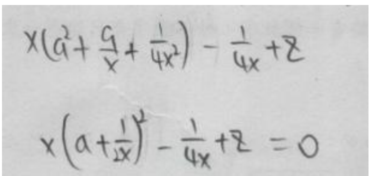


圖 5-2-4 具備 M-3 之作答範例(第 12 題，評分編碼「10」)

第三節　結構向度之測驗表現

結構向度下有兩個子成分，分別為「S-1 以宏觀的角度將多個符號視為單一個體」與「S-2 改變符號原有結構，重新組織或拆解符號，以期待看出更多資訊」。

(一)S-1 以宏觀的角度將多個符號視為單一個體

1. 試題表現

搭配於 S-1 試題為第 7 題與第 11 題。S-1 試題的作答人數比例、鑑別度與難度整理如表 5-3-1 所示。

表 5-3-1　S-1 試題作答人數比例、鑑別度與難度

試卷題號	評分編碼類別	總樣本(n=117) 人數(比例)	鑑別度	難度
7(1)	正確作答情況 (20、21)	55 (9.4%)	.75	.51
	部份正確作答情況 (10、19)	11 (47.01%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、79、90、91、99)	51 (43.59%)		
7(2)	正確作答情況 (20、21、22、23)	19 (16.24%)	.42	.28
	部份正確作答情況 (10、11、19)	13 (11.11%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、90、91、99)	85 (72.65%)		

11	正確作答情況 (20、21)	36 (30.76%)	.50	.43
	部份正確作答情況 (10、11、12、13、14、19)	33 (28.21%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、79、90、91、99)	48 (41.03%)		

搭配於 S-1 的試題鑑別度均大於.40，除了第 7(2)題難度略低，其餘題目難度均接近.50，顯示 S-1 這裡得試題品質優良。

2. 學生作答情形

搭配評分規準作探討，第 7(1)題編碼「20」、「21」、第 7(2)題編碼「20」、「21」「23」與第 11 題編碼「20」、「21」、「10」、「11」者，總括來說均符合 S-1 意涵。編碼間的差異則在於答案的完整度或是解題方式的不同。

以第 11 題為例，編碼「20」、「21」除了展現 S-1 特徵，且答案正確。能將一堆符號如 $\sqrt{x+1}$ 或 $x+1$ 視為一個新的單位解題，使讓問題能以有效率的方式順利解決。圖 5-3-1 為一具備 S-1 的作答範例。

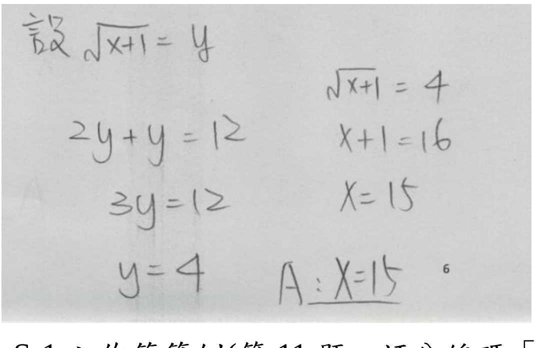


圖 5-3-1 具備 S-1 之作答範例(第 11 題，評分編碼「20」)

欠缺 S-1 者，傾向將題目中出現的文字符號個別求出來。圖 5-3-2 範例即為學生欲將根號去掉，直接將左右兩式平方，透過仔細的計算得到正確答案。雖但

得正確答案，但缺少「S- 1 以宏觀的角度將多個符號視為單一個體之特徵」。

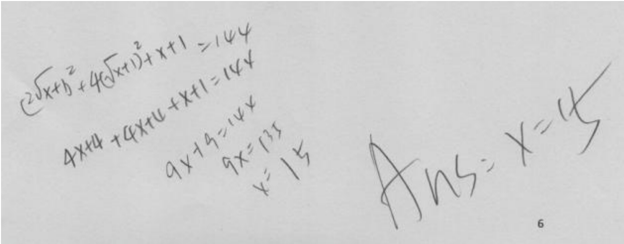


圖 5-3-2 欠缺 S-1 之作答範例(第 11 題，評分編碼「12」)

圖 5-3-3 為欠缺 S-1 特徵之作答範例，除了欲將根號去掉而直接將左右兩式平方，但平分後卻出現錯誤，推測原因可能是錯誤使用乘法公式，將 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 計算成 $(a+b)^2=a^2+b^2$。

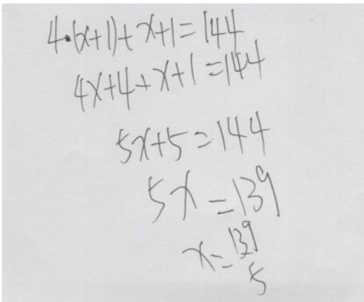


圖 5-3-3 欠缺 S-1 之作答範例(第 11 題，評分編碼「70」)

(二)S-2 改變符號原有結構，重新組織或拆解符號，以期待看出更多資訊

1. 試題表現

適用於 S-2 試題為第 5 題、第 6 題與第 13 題。其中第 6 題有兩個子題，第 6(1)題的主要目的為確保學生是否瞭解題意及多項式加法的概念。第 6(2)題才是主要評量 S-2 的試題，必須透過改變符號外在形式結構得到答案。S-2 試題的作答人數比例、鑑別度與難度整理如表 5-3-2 所示。

表 5-3-2　S-2 試題作答人數比例、鑑別度與難度

試卷題號	評分編碼類別	總樣本(n=117) 人數(比例)	鑑別度	難度
5	正確作答情況 (20、21)	16 (58.97%)	.37	.40
	部份正確作答情況 (10、11、12、13、19)	69 (13.68%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、73、79、90、91、99)	32 (27.35%)		
6(1)	正確作答情況 (20)	98 (83.67%)	.37	.78
	不正確作答情況或無作答 (70、90、91、99)	19 (16.33%)		
6(2)	正確作答情況 (20、21)	38 (32.48%)	.65	.41
	部份正確作答情況 (10、11、19)	4 (3.42%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、73、74、90、91、99)	75 (64.1%)		
13	正確作答情況 (20、21、22、23)	6 (5.13%)	.27	.13
	部份正確作答情況 (10、11、12、13、19)	5 (4.27%)		
	不正確作答情況或無作答 (70、71、72、73、79、90、91、99)	106 (90.6%)		

S-2 試題中的第 13 題正確作答人數低於其他兩題許多，且難度.13 也不盡理想。分析其可能原因為此題雖帶有 S-2 特徵，但對許多學生而言太困難，對於化簡完的式子應為一個數值或是符號式感到困惑。

2. 學生作答情形

搭配評分規準作探討，第 5 題編碼「20」、「21」、「12」、「13」與第 6(2)題編

碼「20」、「21」、「11」與第 13 題編碼「20」、「21」、「22」、「23」、「10」、「11」、「12」者，總括來說均符合 S-2 意涵。編碼間的差異則在於答案的完整度或是解題方式的不同。

以第 6 題為例，編碼「20」、「21」、「22」除了帶有 S-2 意涵，並寫出正確答案。圖 5-3-4 與圖 5-3-5 為具備 S-2 的學生作答範例。

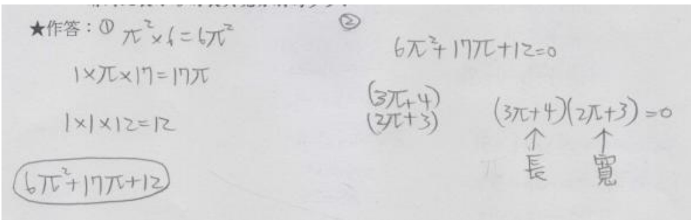


圖 5-3-4 具備 S-2 之作答範例 1(第 6 題，評分編碼「20」)

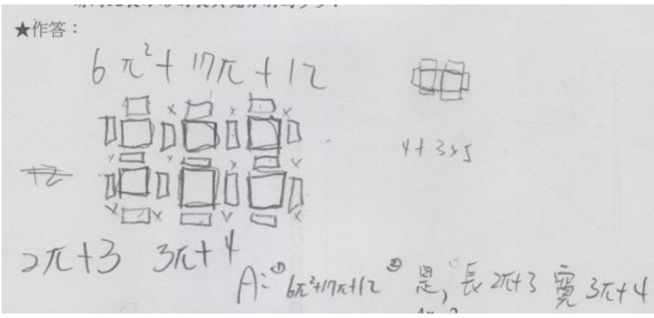


圖 5-3-5 具備 S-2 之作答範例 2(第 6 題，評分編碼「20」)

第 6 題的編碼「11」表示學生有嘗試將多項式分解為兩式乘積的意圖，亦包含 S-2 意涵，但可能在計算上出現小疏失而導致答案錯誤。

若以 13 題為例，學生能從所求問題的符號式中觀察到符號外在結構的特性，進一步改寫已知條件之符號式，合理推導寫出正確答案。而改寫符號式的解題方式有許多種，圖 5-3-6 與圖 5-3-7 為明顯具備 S-2 的學生作答範例。

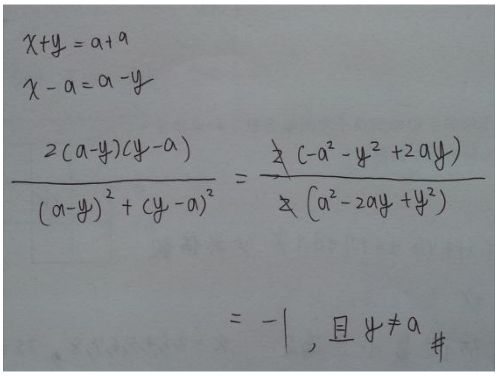


圖 5-3-6 具備 S-2 之作答範例 1(第 13 題，評分編碼「20」)21

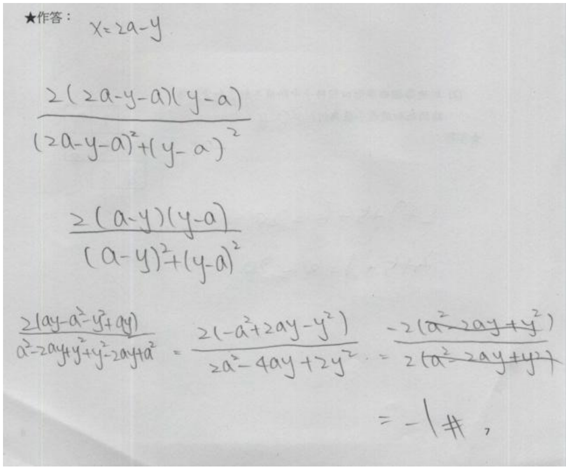


圖 5-3-7 具備 S-2 之作答範例 2(第 13 題，評分編碼「21」)

然而絕大多數的同學在第 13 題的表現欠佳，許多學生使用錯誤相消、展開後未進一步合理推導、誤解乘法公式…等。如圖 5-3-8 為欠缺 S-2 特徵之作答範例。

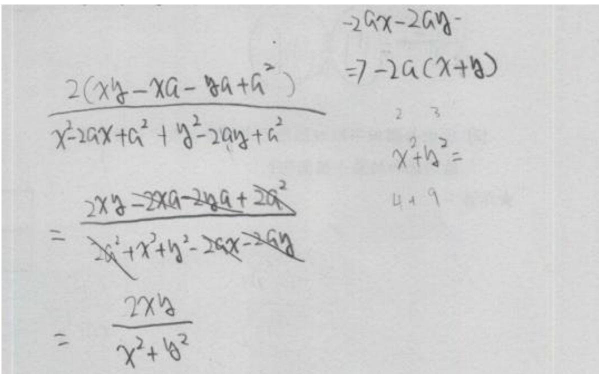


圖 5-3-8 欠缺 S-2 之作答範例(第 13 題，評分編碼「70」)

第陸章 結果討論與建議

本章分成兩節，依序對本研究的發現提出討論與建議。

第一節 結果討論

以下就研究一與研究二的研究結果進行討論：

一、符號感構成要素

根據本研究一的文獻探討、小組討論、專家審核…等研究過程，並從解題歷程之角度思考符號感的可能構成要素，提出國中階段之代數符號感可視為包括「使用(Using)」、「意義(Meaning)」、「結構(Structure)」三大向度，各向度下並可再細分為數個子成分。扼要整理如下：

(一)使用(Using)：

這是指學生具基本使用代數符號的能力，也就是在解題活動中，使用代數符號為解題工具，包含操作、運用、組織符號等情形。

此向度包括兩個子成分，分別為：

U-1 傾向使用符號處理問題。

U-2 將事物展現的規律以符號表示或從給定資料判斷出其對應的符號式。

(二)意義(Meaning)：

這是指國中生能從數學題目所給的情境瞭解符號所代表的意義。

此向度包括三個子成分，分別為：

M-1 明瞭符號所代表的物件與傳達的訊息。

M-2 從上下文中辨別相同符號所代表的意義。

M-3 能不受符號改變的影響，從中察覺不同符號表徵下所代表的相同意涵。

(三)結構(Structure)：

這是指學生能透過符號所呈現的形式與表面性的結構，從中獲得解題相關訊息。

此向度包括兩個子成分，分別為：

S-1 以宏觀的角度將多個符號視為單一個體。

S-2 改變符號原有結構，重新組織或拆解符號，以期待看出更多資訊。

二、符號感測驗的研發

(一)評量方式

根據研究一所整理的符號感構成要素，本研究進而研發一些符號感評量方式，進行的方式是以開放式問答為主，題目設計與選擇上傾向採用容許多種解法的試題，並設計出該等題目的雙碼評分方式，從學生解題過程中探索符號感之展現，亦能從不同作答類型比較符號感之落差，試圖從不同解題方式中分析學生對符號的感覺、體認與辨識能力。

(二)部分題目有改善空間

1. 雖然本研究所設計之符號感測驗，各向度 *Cronbach's* α 值不高，但從學生作答表現仍可比較出符號感的差異性，且本研究主要目的不在於開發題本，而是討論可能的評量方式提供日後符號感相關研究作參考。

2. 部分試題雖鑑別度不佳，雖然解題所需先備知識或數學概念不難，但研究者所設計之創新試題須對數字或符號有敏銳的觀察力與靈活運用的能力，才能

順利求得答案，故多數學生容易感到困難。且評分主要目的為測量學生符號感的程度，並非答案正確即可，尚須看學生作答表現是否符合各子成分之要求，來給予評分之依據，可能為導致部分試題難度與鑑別度過低之因素。

若從學生各種作答表現中，確實可看出具備符號感與較為欠缺符號感的作答類型。郭生玉(1988)提出鑑別度低者不代表試題有缺點，若試題為測驗重要的學習結果，仍應保留(郭生玉，1988)。由於本研究目的並非開發一完整的符號感評量工具，僅初步探索符號感可能的評量方式，而且部分學生作答十分認真，因此資料仍具相當可參考的價值，故研究二的結果仍可提供部分題目供後續研究者做參考。

以下根據學生再研究二所研發的試題表現，初步觀察到學生在符號感三個向度下的表現如下：

(三) 使用向度的表現

1. 以文字思考時比較不方便，只能解決部分問題，用符號則較能有系統地處理問題。從這裡可再次看出要求學生從算術思維進階到代數思維的重要性。

2. 符號感測驗表現較弱的學生，習慣以數字取代符號處理問題，例如隨意選取數字代入問題，檢驗是否符合題意，不斷嘗試直到求得正確答案。

3. 有些學生能以文字或口語描述所觀察到的數值規律或圖像規律，卻無法使用正確的符號式表示其規律。

(四) 意義向度的表現

1. 容易忽略瞭解符號所代表意義的重要性。

2. 符號感測驗表現較弱的學生，容易受符號表徵的影響，而忽略符號為一種溝通的媒介，會隨代表物件的不同而改變其符號所代表的意義。

(五) 結構向度的表現

1. 大部分學生有能力以宏觀的角度，將多個符號整合為一個新的符號或視

為單一個體，簡化問題使能夠有效率地解決問題。

2. 部分學生習慣將多個符號拆解至習慣的形式，處理單一符號的問題。

三、討論影響學生符號感表現的可能因素

在多數學校課程設計下，教師受限於教學時間與趕進度的因素，學生則過於注重解題結果與答案之正確與否，因此在教與學皆不重視代數符號的情況下，導致學生很容易忽略符號的選擇使用、符號意義以及符號表面結構所帶來的訊息，這是在教學上應該反思的。縱使某些概念教學方式有其標準流程，但過於機械式或只著重模仿教師與教科書的求解方式，便顯得格外容易壓抑學生發散性思考的可能，更甚的是剝削了學生探討及瞭解代數符號的功能與意涵。所以在知識傳遞的同時，符號感的培養變顯得格外重要。教師可透過本研究探討的符號感意涵與所提出的構成要素，引導學生發展其對符號的感覺、體認與辨識能力。雖然符號感是屬於整體性及綜合性的能力，因此學生並不容易學生直接在這方面得到成長，然而藉由本研究初步獲得的結果顯示，教師可由符號的使用、意義及結構三個向度出發，逐漸培養學生的符號感，並在檢驗此方面教學成效時，更可參考本研究所開發的題型。

第二節 建議

一、符號感評量方式的建議

1. 符號感評量方式以開放試題為佳，較能從學生作答反應中，分析其是否具備符號感的各種向度。

2. 符號感試題的設計上,解題所需的數學概念應以學生學習過的概念為主，避免學生因為沒學過相關概念而導致作答錯誤。

3. 評分以雙碼方式較佳，可透過雙碼同時得知學生的得分與作答方式或錯誤類型。

二、對本研究的檢討

為了提供相關研究更客觀、詳細的資訊，以下提供幾點本研究有待改進之檢討意見如下：

1.符號感構成要素

由於符號感相關文獻極少，研究者試圖從代數學習、數學教育、符號功能等相關文獻，結合解題歷程探索符號感的可能構成要素，初步制定出符號感構成要素架構表，尚需更多理論與實徵資料，以利逐漸形成更加完善之符號感構成要素架構表。

2.本研究在試題設計上，有些試題雖具創意，但幾乎沒學生寫出正確答案，因為此類試題對大部分學生而言可能過於困難，反而降低學生作答意願，無法從作答反應看出是否具備符號感。

3. 符號感各向度下的子成分試題題數不均，有的子成分僅有一道題目，往後符號感評量方式應平均增加各子成分試題，以利分析及探討資料。

4. 由於某子成分所選試題皆為九年級所學課程，需在學生學完此部分課程後方能進行預試、修改試題、正式施測，時間十分緊迫，且越接近基本學力測驗，

學校教師與學生配合施測的意願越低，導致正式施測時的回收樣本反應不佳，進而將施測對象改為高一學生。故在符號感題目設計上，若能平衡國中各年級所學概念，便能同時針對七年級或八年級學生進行施測。

三、對未來研究的建議

1.為瞭解學生解題錯誤的因素，可設計與符號感試題所需之概念知識題作為前測，以確保能掌握學生作答錯誤的原因是否是由於先備知識之不足，還是由於欠缺符號感所導致。

2.在確保試題所需先備知識為學生學習過的情況下，可作不同年級學生的作答反應比較，以分析不同年級學生的符號感表現是否有程度上的差異。

3. 相較於數感本身已有相當多的研究，符號感的研究正於此進行初步探索，往後研究也許可同時對學生在數感與符號感表現上進行比較。

參考文獻

中文部分

中國大陸教育部（2001）。全日義務教育數學課程標準（實驗稿）。中國：教育部。

王兄（2007）。數學教學中的符號感：表像圖式意義下的理解。**中國教育學刊**，1， 019。

王寬明、何郁群（2010）。初中數學教學中的符號感培養，**教育科學論壇(4)**，42-44。

史炳星、馬雲鵬、唐復蘇（2002）。在解決問題的過程中發展學生的符號感。**數學教育學報，11(2)**，57-60。

李星雲（2007）。小學數學教學培養策略之二：數學符號感的認識及其培養策略。**廣西教育(11A)**，9-10。

林福來、黃敏晃（1993）。分數啟蒙課程的分析，批判與辯證，**科學教育學刊，1(1)**，1-27。

胡惠茹（2009）。**不同二次函數表徵問題對國三學生解題影響之探究**。國立台南大學碩士論文，未出版。

洪萬生（1996）。數學史與代數學習，**科學月刊，319 期**。

洪萬生（1991）。清初西方代數之輸入，收入《孔子與數學》，臺北明文書局。

范建芬(2008) 。如何培養學生的符號感。**江西教育**，9，38。

黃毅英（1992）。九十年代的學校數學教育，**數學傳播，64 期**，79-87。

陳霈頡、楊德清（2005）。數學表徵應用在教學上的探究。**科學教育研究與發展季刊，40**，48-61。

劉稀鳳（2009）。**初中生符號意識的調查研究**。東北師範大學碩士論文，未出版。

劉雲章（2006）。講活符號，發展學生的符號感。**湖南教育(教育綜合)**，*3*，004。

蔡聰明（1995）。代數是什麼？（下）。**科學月刊，302 期**。

鄭毓信（2002）。 「數感」、「符號感」 與其它－《課程標準》大家談。**數學教育學報，11(3)**，30-32。

謝孟珊（2000）。**以不同符號表徵未知數對國二學生解方程式表現之探討**。國立臺北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版。

顧繼玲、張新華（2010）。再談「符號感」。**中國數學教育**，7，5-7。

戴文寶、邱守榕（1999）。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。**科學教育(10)**，148-175。

教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要－數學學習領域**。台北：教育部。

郭生玉（1988）。**心理與教育測驗**，第三版。台北：精華書局。

英文部分

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.

Bergsten, C. (1999). From sense to symbol sense. *European Research in Mathematics Education*, II, 126-137.

Bergsten, C. (2003). A classification of algebraic tasks. A paper presented at the seminar New trends in mathematics education research: An international perspective. Bologna, February 27, 2003.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The Ideas of Algebra*, K-12, 20-32.

Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, X. Vamvakoussi, & A. Baltas (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 283-297). Amsterdam: Elsevier Science.

DeLoache, J. S. (2004). Becoming symbol-minded. *Trends in Cognitive Sciences,* 8(2), 66-70.

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking.* Westport, CT: Heinemann.

Foster, D. (2007). Making meaning in algebra: Examining students' understandings and misconceptions. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing mathematical proficiency* (pp.163-175). New York, NY: Cambridge University Press.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59–78.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kinzel, M.T. (2001). Linking task characteristics to the development of symbol sense. *Mathematics Teacher*, 94(6), 494-499.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. In: Hart, K.M. (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11 - 16 , 102 -119*. London: John Murray.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive Science, 28,* 451-466.

Naidoo, K. S. K. (2009). *An Investigation of Learners' Symbol Sense and Interpretation of Letters in Early Algebraic Learning*. Unpublished Masters dissertation. University of Witwatersrand, Edenvale.

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School* Mathematics.

National Research Council (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Novotná, J., y Hoch, M. (2008). How Structure Sense for algebraic Expression or Equations is related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 93-104.

Pierce, R., & Stacey, K. (2001). A framework for algebraic insight. In: J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Eds.), *Numeracy and Beyond. Proceedings of the 24th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney, Vol 2 (pp 418-425)*. Sydney, Australia: MERGA.

Pierce, R., & Stacey, K. (2004). Monitoring progress in algebra in a CAS active context: Symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *11*(1), 3-11.

Pierce, R., & Stacey, K. (2007). Developing algebraic insight. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, 203, 12-16.

Pope, S., & Sharma, R. (2001). Symbol sense: Teacher's and student's understanding. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *21*(3), 64-69.

Rovinelli, F. J., & Hambleton, R. K. (1977). On the use of content specialists in the assessment of criterion-referenced test item validity. *Dutch Journal for Educational Research, 2*, 49–60.

Sutherland, R. (1999). Algebra and symbol sense in the formation of engineers. *Teaching Mathematics and its Applications, 18*(4), 179-184.

Samo, M.A. (2009). Students' Perceptions about the Symbols, Letters and Signs in Algebra and How Do These Affect Their Learning of Algebra: A Case Study in a Government Girls Secondary School Karachi. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Seo, K. -H., & Ginsburg, H. P. (2003). "You've got to carefully read the math sentence. . . ": Classroom context and children's interpretations of the equal sign. In A. J. Baroody & A. Dowwker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification- the case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 27 (4), 235-457.

Sharma, R. (2000). Researching Students' Symbol Sense, *Proceedings of the British*

Society for Research into Learning Mathematics, 20(3)

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*(2), 125-147.

Zehavi, N. (2004). Symbol sense with a symbolic-graphical system: A story in three rounds. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(2), 183-203.

附錄 1:「符號感測驗」 正式施測試卷

學校：__________ 班級：_________ 姓名：__________ □男 □女

【說明】以下題目請詳細寫下作答過程，並清楚說明你的想法或理由(字數不限)

1. 某家糕餅店慶祝新開幕，舉辦「套住一路發」活動：店家準備一張由數字 1~36 整齊排列海報(如圖一)，只要顧客能用規定矩形 圍住圖中任意八個數(圖二為其中一種圍法)，使其和為 168，當日消費金額一律打 8 折。請問此矩形所圍的八個數為何，才能使矩形內的數字和為 168?
 註：矩形不能旋轉。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

(圖一)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

(圖二)

★作答：

2. 若 m、n 兩數為整數，且 $2n+m=0$，請回答以下問題：

(1) m、n 是否皆為正整數?

(2) m 是否必為偶數?

(3) n 是否必為偶數?

(4) $m+n$ 與 $|m|+|n|$ 兩數，哪個數比較大?

★作答：

3. 由右表可得知當 $x=-5$ 時，$y=-25$；當 $x=-1$ 時，$y=-1\ldots$。

請觀察表格中 x 與 y 的數值，寫出符合此表格 x 與 y 的關係式?

x	y
−5	−25
−1	−1
2	−4
3	−9
20	−400

★作答：

4. A(1 , 1)、P(a , b)、Q(m , n)為直角坐標平面上的三個點，其中 a , b , m , n 為有理數。已知 $\sqrt{a^2+b^2}=3$、$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=5$、$\sqrt{m^2+n^2}=7$、$\sqrt{(m-1)^2+(n-1)^2}=9$。請回答以下問題：

(1)P 點到原點的距離為何?　　　　(2)Q 點到 A 點的距離為何?

★作答：

5. 已知 $(2x-5)^2+(-2x+5)-12=0$，求 x 的解

★作答：

6. 如右圖，有 A 型、B 型、C 型三種不同的紙板，其中

A 型：邊長為 π 公分（π 為圓周率）的正方形，共有 6 塊；

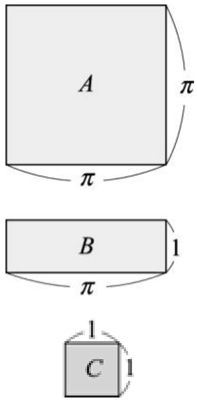
B 型：長為 π 公分，寬為 1 公分的長方形，共有 17 塊；

C 型：邊長為 1 公分的正方形，共有 12 塊。

請問：

(1)上述 35 塊紙板的面積總和為?

(2)能否將上述 35 塊紙板緊密地拼成一個長方形?若能，
請問此長方形的長與寬分別為多少?



★作答：

7. <u>陳</u>老師在黑板上出了一道數學問題：「 解方程式 $\frac{4x-2}{2x-1}=4$」

並問同學如何解題。<u>小明</u>舉手發言，回答：「因為 $2\neq4$，所以這一題無解。」

請問：

(1)請猜測<u>小明</u>回答 $2\neq4$ 的理由為何?

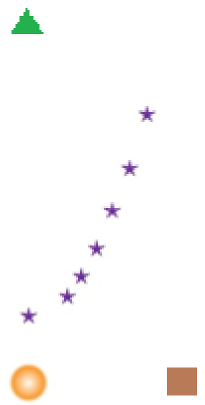
(2)你認為<u>小明</u>的回答正確嗎?若正確，請說明原因。若不正確，請提供其他作法。

★作答：

8. 已知函數 $f(x)=3x-5$，當 $f(a)=3$ 時，$a=?$

★作答：

9. 熱愛繪畫的小莫，創造一幅名為「星夜狂想」的畫作，如右圖。已知圖中有圓形、三角形、正方形與七顆星星，最靠近圓形的星星位於圓形正上方 2 公分處，其中圓形、三角形、最靠近圓形的星星三點共線。若小莫想用函數式描述星星的位置，以圓形為原點作一直角坐標平面，其中圓形到正方形的方向為 x 軸正向，圓形到三角形的方向為 y 軸正向，x 軸與 y 軸單位長皆取 1 公分，則下列哪個函數式最能表示星星的位置?



(A) $y=2x$	(B) $y=-x+2$	(C) $y=\frac{1}{2}x+2$	(D) $y=(2x)^2+2$
(E) $y=\frac{1}{2}x^2+2$	(F) $y=-x^2+2$	(G) $y=(x+2)^2$	(H) $y=\frac{1}{x}+2$

★作答：

10. 已知 $2x+y=24$ 與 $3x-y=-9$ 為直角坐標平面上的兩直線，小寶想在直角坐標平面上畫出此兩直線，下圖為小寶的部分計算過程：

$$\begin{cases} 2x+y=24 \ldots\ldots ① \\ 3x-y=-9 \ldots\ldots ② \end{cases}$$

①+②：$5x=15$

$x=3$

將 $x=3$ 代回①

得 $2\times3+y=24$

$y=18$

⋮

請問 $x=3$ 與 $y=18$ 在此計算過程中所代表的意思為何?

(A) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標；$y=18$ 表示一條水平線。

(B) $x=3$ 為一條鉛直線；$y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。

(C) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標；$y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。

(D) $x=3$ 為一條鉛直線；$y=18$ 表示一條水平線。

★作答：

11. 已知 $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=12$，求 x 的解

★作答：

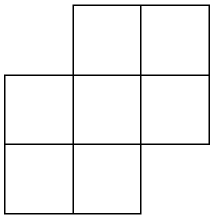
12. 求 a 的一元二次方程式 $xa^2+a+z=0$ 的解，其中 x、z 為已知數且 $x\neq 0$。

★作答：

13. **已知** $x+y=2a$ **，請問** $\dfrac{2(x-a)(y-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2}$ **=?**

★作答：

14. 將 **2**，**3**，**4**，**5**，**6**，**7**，**8** 這七個數字分別填入右圖格子中，每個格子只能有一個數字，每個數字亦只能選一次。請回答下列問題：



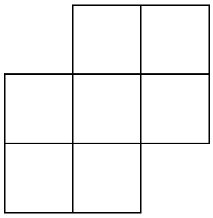
(1) 若某種填法如下：

	3	7
4	6	5
8	2	

請分別寫出上圖中各個田字形中四個數字的總和。

★作答：

(2) 欲使每個田字形四個格子中所填各數字和皆相等，請問此和的最小值為何?



★作答：

附錄 2：評分規準

評分規準

【說明】以下題目請詳細寫下作答過程，並清楚說明你的想法或理由(字數不限)

1. 某家糕餅店慶祝新開幕，舉辦「套住一路發」活動：店家準備一張由數字 1~36 整齊排列海報(如圖一)，只要顧客能用規定的 圍住圖中任意八個數(圖二為其中一種圍法)，使其和為 168，當日消費金額一律打 8 折。請問此矩形所圍的八個數為何，才能使矩形內的數字和為 168?
註：矩形不能旋轉。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

(圖一)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

(圖二)

答案：15，16，17，18，24，25，26，27

編碼	作答情況
正確作答情況	
20	使用一個代數符號解題，並合理推導出正確答案
21	使用兩個以上的代數符號解題，並合理推導出正確答案
部份正確作答情況	
10	透過數字的運算，湊出正確答案。
11	解題過程中使用代數符號解題，但未寫出正確答案。
12	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。 (包含無法判斷的解釋或推導)
13	使用代數符號解題，但誤解題意，使答案錯誤。例如：將矩形作旋轉。
19	其他
不正確作答情況	
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅透過數字的運算，但未能列出正確答案。
72	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
73	沒有使用代數符號解題，且誤解題意。例如：將矩形旋轉成垂直。

79	其他
無作答	
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

2. 若 m、n 兩數為整數，且 $2n+m=0$，請回答以下問題：

(1) m、n 是否皆為正整數?

(2) m 是否必為偶數?

(3) n 是否必為偶數?

(4) $m+n$ 與 $|m|+|n|$ 兩數，哪個數比較大?

答案：(1)否　　(2)是　　(3)否 (4) 若 m=n=0，則 $m+n$ 與 $\|m\|+\|n\|$ 一樣大。 若 m 或 n 不等於 0，則 $\|m\|+\|n\|$ 比較大。	
編碼	**作答情況**
(1)	**正確作答情況**
20	代入數字為例作說明，並寫出正確答案。
21	用文字或代數符號說明。 例如：正負相加等於零；$n>0$ 時，$m<0$；$m>0$ 時，$n<0$。
(1)	**部份正確作答情況**
10	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。 (包含無法判斷的解釋或推導)
19	其他
(1)	**不正確作答情況**
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
(1)	**無作答**
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

編碼	作答情況
(2)	正確作答情況
20	以代入數字為例作說明，並寫出正確答案。
21	用文字或代數符號說明。
(2)	部份正確作答情況
10	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。 (包含無法判斷的解釋或推導)
19	其他
(2)	不正確作答情況
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
(2)	無作答
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

編碼	作答情況
(3)	正確作答情況
20	以代入數字為例作說明，並寫出正確答案。
21	用文字或代數符號說明。
(3)	部份正確作答情況
10	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。 (包含無法判斷的解釋或推導)
19	其他
(3)	不正確作答情況
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
(3)	無作答
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉

91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

編碼	作答情況
(4)	**正確作答情況**
20	以代入數字為例作說明，並寫出正確答案。
21	用文字或代數符號說明。
(4)	**部份正確作答情況**
10	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。 (包含無法判斷的解釋或推導)
11	將數字代入為例作說明，但僅列出部分正確答案。 例如：用數字代入說明 $\|m\|+\|n\|$ 比較大的理由，未說 m=n=0 時 $m+n$ 與 $\|m\|+\|n\|$ 一樣大的情況。
12	用文字或代數符號說明，但僅列出部分正確答案。 例如：用文字或代數符號說明 $\|m\|+\|n\|$ 比較大的理由，未說 m=n=0 時 $m+n$ 與 $\|m\|+\|n\|$ 一樣大的情況。
13	僅說 $\|m\|+\|n\|$ 比較大，未附有合理解釋或推導。
14	僅說一樣大，未附有合理解釋或推導。
19	其他
(4)	**不正確作答情況**
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
(4)	**無作答**
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

3. 由右表可得知當 $x=-5$ 時，$y=-25$；當 $x=-1$ 時，$y=-1\ldots$。

請觀察表格中 x 與 y 的數值，寫出符合此表格 x 與 y 的關係式?

★作答：

x	y
-5	-25
-1	-1
2	-4
3	-9
20	-400

答案：$y=-x^2$	
編碼	**作答情況**
	正確作答情況
20	觀察數值規律，寫出正確答案。
21	透過二次函數解題，寫出正確答案。例如：令 $y=ax^2+bx+c$。
	部份正確作答情況
10	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
11	觀察數值規律，找出正確規律，但未能寫出正確答案。
12	觀察數值規律，找出正確規律，使用不完整的代數式表示答案。例如：部分文字敘述加上某些符號表示：「$y=\lvert x^2\rvert$+負號」
13	欲透過一次函數解題，但未能寫出正確答案。 例如：令 $y=ax^2+bx+c$。
14	寫出多個答案，多個答案中包含正確答案。
19	其他
	不正確作答情況
70	欲透過一次函數解題。例如：令 $y=ax+b$，將表格中的 x、y 值代入求出一直線方程式。
71	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
72	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
	無作答
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

4. A(1 , 1)、P(a , b)、Q(m , n)為直角坐標平面上的三個點，其中 a , b , m , n 為有理數。已知$\sqrt{a^2+b^2}=3$、$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=5$、$\sqrt{m^2+n^2}=7$、$\sqrt{(m-1)^2+(n-1)^2}=9$。請回答以下問題：

(1)P 點到原點的距離為何?　　(2)Q 點到 A 點的距離為何?

<table>
<tr><td colspan="2">答案： (1) 3　　(2) 9</td></tr>
<tr><td>編碼</td><td>作答情況</td></tr>
<tr><td>(1)、(2)</td><td>正確作答情況</td></tr>
<tr><td>20</td><td>察覺符號所透露的訊息(距離公式)，寫出正確答案。</td></tr>
<tr><td>21</td><td>畫圖並配合符號所透露的訊息，寫出正確答案。</td></tr>
<tr><td>(1)、(2)</td><td>部份正確作答情況</td></tr>
<tr><td>10</td><td>列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。</td></tr>
<tr><td>19</td><td>其他</td></tr>
<tr><td>(1)、(2)</td><td>不正確作答情況</td></tr>
<tr><td>70</td><td>欲透過解方程式，分別將題目中的未知數一一求出。
例如：嘗試解出聯立方程式$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=3\\\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=5\end{cases}$中的 a、b；或
$\begin{cases}\sqrt{m^2+n^2}=7\\\sqrt{(m-1)^2+(n-1)^2}=9\end{cases}$中的 m、n。</td></tr>
<tr><td>71</td><td>圖解法，但未能寫出正確答案。</td></tr>
<tr><td>72</td><td>無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。</td></tr>
<tr><td>73</td><td>僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。</td></tr>
<tr><td>79</td><td>其他</td></tr>
<tr><td>(1)、(2)</td><td>無作答</td></tr>
<tr><td>90</td><td>嘗試解題，但又塗掉或劃掉</td></tr>
<tr><td>91</td><td>直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。</td></tr>
<tr><td>99</td><td>空白</td></tr>
</table>

5.　已知 $(2x-5)^2+(-2x+5)-12=0$，求 x 的解

★作答：

答案： $x=\frac{9}{2}$，1

編碼	作答情況
正確作答情況	
20	透過符號的**折解或重組，進一步**合理推導寫出正確答案。例如：將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$……。
21	透過符號的**折解或重組，並**重新定義為一新的符號，透過此自訂的符號解題，進一步求出正確答案。例如：將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$，並令 $A=(2x-5)$，先求 $A^2-A-12=0$ 中 A 的解，再進一步求出 x。
部份正確作答情況	
10	僅列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
11	直接將式子展開解題，寫出正確答案。
12	透過符號的**折解或重組，但未能**寫出正確答案。例如：將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$……。
13	透過符號的**折解或重組，並**重新定義為一新的符號，透過此自訂的符號解題，**但未能**寫出正確答案。例如：將原方程式改寫為 $(2x-5)^2-(2x-5)-12=0$，並令 $A=(2x-5)$……。
19	其他
不正確作答情況	
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
72	未能正確折解或重組符號，而是直接將 $(2x-5)^2+(-2x+5)-12=0$ 視為 $A^2+A-12=0$。
73	直接將式子展開解題，但未能寫出正確答案。
79	其他
無作答	
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

6. 如右圖，有 A 型、B 型、C 型三種不同的紙板，其中

A 型：邊長為 π 公分（π 為圓周率）的正方形，共有 6 塊；

B 型：長為 π 公分，寬為 1 公分的長方形，共有 17 塊；

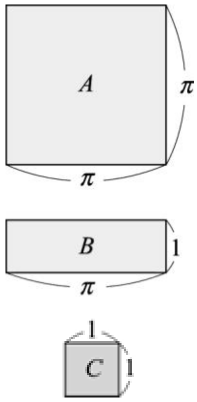
C 型：邊長為 1 公分的正方形，共有 12 塊。

請問：

(1)上述 35 塊紙板的面積總和為?

(2)能否將上述 35 塊紙板緊密地拼成一個長方形?若能，

請問此長方形的長與寬分別為多少?



答案： (1) $6\pi^2+17\pi+12$

(2) 長 $(3\pi+4)$，寬 $(2\pi+3)$

<u>備註</u>：第一小題的主要目的為確保學生是否瞭解題意及多項式加法的概念。第二小題才是測試 S-2 指標，需改變符號外在形式結構得到答案。主要探索學生能否將多項式合理拆成兩個式子的乘積，所以在此只要明確寫出(指出何者為長、寬，仍評斷為正確答案。

編碼	**作答情況**
(1)	**正確作答情況**
20	列出正確答案
(1)	**不正確作答情況**
70	列出錯誤答案
(1)	**無作答**
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

編碼	**作答情況**
(2)	**正確作答情況**
20	嘗試將 $6\pi^2+17\pi+12$ 分解為兩式乘積，合理推導寫出正確答案。

21	圖示法，畫出所拼的長方形，寫出正確答案。
(2)	**部份正確作答情況**
10	僅列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
11	嘗試將第一小題的多項式分解為兩式乘積，但未能寫出正確答案。
19	其他。
(2)	**不正確作答情況**
70	圖示法，嘗試拼出長方形，但未能寫出正確答案。
71	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
72	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
73	以其他未知數取代π表示答案，或以解方程式方法算出某特定值。 例如：
74	欲將π值=3.14…代入
79	其他
(2)	**無作答**
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

7. 陳老師在黑板上出了一道數學問題：「 解方程式$\frac{4x-2}{2x-1}=4$」

並問同學如何解題。小明舉手發言，回答:「因為$2\neq4$，所以這一題無解。」請問：

(1)請猜測小明回答$2\neq4$的理由為何?

(2)你認為小明的回答正確嗎?若正確，請說明原因。若不正確，請提供其他作法。

編碼	作答情況
(1)	**正確作答情況**
20	以長除法或約分概念解題
21	以倍數的概念解題
(1)	**部份正確作答情況**
10	代入特例判斷
19	其他
(1)	**不正確作答情況**
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
72	擅自將 x 消去。例如：$\frac{4\cancel{x}-2}{2\cancel{x}-1}=\frac{4-2}{2-1}=2$
79	其他
(1)	**無作答**
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

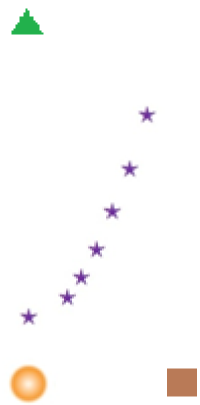
編碼	作答情況
(2)	**正確作答情況**
20	答案正確，且能由等量公理解釋。
21	答案正確，且能由長除法解釋。

22	答案正確，且能由求解方程式及解的合理性解釋。 例如：指出分母不能為 0
23	答案正確，且能以分子與分母的關係判斷答案。
(2)	**部份正確作答情況**
10	以代數字之方式測試，並列出正確答案。
11	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
19	其他
(2)	**不正確作答情況**
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	答案錯誤，認為僅能用等量公理解方程式的方式解題，且沒有考量到增減根情況。
72	答案錯誤，認為僅能用等量公理解方程式的方式解題，且解方程式過程錯誤。
79	其他
(2)	**無作答**
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉。
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

8. 已知函數 $f(x)=3x-5$，當 $f(a)=3$時，$a=$？

答案： $a=\frac{8}{3}$	
編碼	**作答情況**
	正確作答情況
20	理解 a 可視為 x 的其中一個值，並寫出正確答案。
21	計算過程中直接計算 $3x-5=3$(以 x 計算)，仍知求出的答案代表所求 a 值。
	部份正確作答情況
10	理解 a 可視為 x 的其中一個值，但未能寫出正確答案。
11	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
12	答案為 $x=\frac{8}{3}$，未明確說明 a 值為 $\frac{8}{3}$。
19	其他
	不正確作答情況
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
72	將 x=3 代入 $f(x)=3x-5$，認為所求出來的值即等於 a 值。 例如：$f(3)=3\times3-5=4$，得 a=4
79	其他
	無作答
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

9. 熱愛繪畫的<u>小莫</u>，創造一幅名為「星夜狂想」的畫作，如右圖。已知圖中有圓形、三角形、正方形與七顆星星，最靠近圓形的星星位於圓形正上方 2 公分處，其中圓形、三角形、最靠近圓形的星星三點共線。若<u>小莫</u>想用函數式描述星星的位置，以圓形為原點作一直角坐標平面，其中圓形到正方形的方向為 x 軸正向，圓形到三角形的方向為 y 軸正向，x 軸與 y 軸單位長皆取 1 公分，則下列哪個函數式最能表示星星的位置?



(A) $y=2x$	(B) $y=-x+2$	(C) $y=\frac{1}{2}x+2$	(D) $y=(2x)^2+2$
(E) $y=\frac{1}{2}x^2+2$	(F) $y=-x^2+2$	(G) $y=(x+2)^2$	(H) $y=\frac{1}{x}+2$

答案： E

編碼	作答情況
	正確作答情況
20	能發現試題附圖為二次函數的部分圖形，經合理篩選寫出正確答案。
21	畫出選項中各函數式的圖，與題目中的星星軌跡作對照。
	部份正確作答情況
10	能發現試題附圖為二次函數的部分圖形，但未能進一步合理篩選出正確答案。例如：選擇數個二次函數選項。
11	能發現試題附圖為二次函數的部分圖形，但未說明篩選出正確答案的理由。
12	答案正確，未直接發現星星的軌跡為二次函數的圖形，而是標出多個星星的坐標，代入各選項檢驗。
13	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
14	畫出選項中各函數式的圖，與題目中的星星軌跡作對照，但未能選出正確答案。例如：選擇數個答案，但其中包含正確答案 E。
19	其他

不正確作答情況	
70	利用點坐標代入法，但未能求出正確答案。 例如：包含錯誤將點(0,2)代為(2,0)。
71	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
72	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
無作答	
90	嘗試解題，但又塗掉、劃掉。
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

10. 已知 $2x+y=24$ 與 $3x-y=-9$ 為直角坐標平面上的兩直線，小寶想在直角坐標平面上畫出此兩直線，下圖為小寶的部分計算過程：

$$\begin{cases} 2x+y=24 \ldots\ldots ① \\ 3x-y=-9 \ldots\ldots ② \end{cases}$$

①+②：$5x=15$

$x=3$

將 $x=3$ 代回①

得 $2\times 3+y=24$

$y=18$

⋮

請問 $x=3$ 與 $y=18$ 在此計算過程中所代表的意思為何?

(A) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標；$y=18$ 表示一條水平線。

(B) $x=3$ 為一條鉛直線；$y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。

(C) $x=3$ 表示此兩直線交點的 x 坐標；$y=18$ 表示此兩直線交點的 y 坐標。

(D) $x=3$ 為一條鉛直線；$y=18$ 表示一條水平線。

答案： C

編碼	作答情況分類
	正確作答情況
20	能理解題意，並用合理的作答過程推導出答案
	部份正確作答情況
10	未附有合理的解釋或推導，但答案正確。
19	其他
	不正確作答情況
70	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
71	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
	無作答
90	嘗試解題，但又塗掉、劃掉。
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

11. 已知 $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=12$，求 x 的解

答案： $x=15$	
編碼	**作答情況**
	正確作答情況
20	直接將 $\sqrt{x+1}$ 或 $x+1$ 視為一個整體來解題，進一步求出正確答案。 例如：$2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=12$ => $3\sqrt{x+1}=12$......
21	將 $\sqrt{x+1}$ 或 $x+1$ 重新定義為一新的符號，透過此自訂的符號解題，進一步求出正確答案。 例如：令 $A=\sqrt{x+1}$，則 $2A+A=12$ => $A=4$ => $x=15$
	部份正確作答情況
10	直接將 $\sqrt{x+1}$ 或 $x+1$ 視為一個整體來解題，但未能進一步求出正確答案。
11	將 $\sqrt{x+1}$ 或 $x+1$ 重新定義為一新的符號，透過此自訂的符號解題，但未能進一步求出正確答案。
12	直接將左右兩式平方，並進一步得到正確答案。
13	將 x 設定為某些數字代入檢驗，而得到正確答案。
14	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
19	其他
	不正確作答情況
70	欲去掉根號，而將左右兩式平方，但錯誤使用乘法公式。例如： $4(x+1)+(x+1)=144$
71	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
72	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
	無作答
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉。

91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

12. 求 a 的一元二次方程式 $xa^2+a+z=0$ 的解，其中 x、z 為已知數且 $x\neq0$。

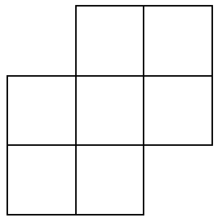
答案： $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4xz}}{2x}$	
編碼	**作答情況**
	正確作答情況
20	但能辨別 a、x 與 z 在此式所代表的意義，進一步合理推導寫出正確答案。例如：x、1 與 z 分別為 a^2、a 與常數項的係數。
	部份正確作答情況
10	雖未能寫出正確答案，但能辨別 a、x 與 z 在此式所代表的意義。例如：能分辨 x、1 與 z 分別為 a^2、a 與常數項的係數。
11	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
19	其他
	不正確作答情況
70	將 a、x 或 z 隨意以數字代入。
71	提到公式解，但未能應用於此題將正確答案寫下。
72	將題目左式中的每項視作 0。 例如：$xa^2=0$、$a+z=0$ 或 $a=0$、$z=0$。
73	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
74	列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
	無作答
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

13. **已知** $x+y=2a$ **，請問** $\dfrac{2(x-a)(y-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2}$ **＝?**

答案： -1	
編碼	**作答情況**
	正確作答情況
20	將 $x+y=2a$ 改寫為 $(x-a)+(y-a)=0 \rightarrow (x-a)=-(y-a)$ **，代入題目所求式子，進一步合理推導寫出正確答案。**
21	將 $x+y=2a$ 改寫為 $x=2a-y$ **或** $y=2a-x$ **，代入題目所求式子，進一步合理推導寫出正確答案。**
22	將 $x+y=2a$ 改寫為 $\dfrac{x+y}{2}=a$ **，代入題目所求式子，進一步合理推導寫出正確答案。**
23	將 $(x-a)$ 或 $(y-a)$ 視為一整體，並運用乘法公式解題。
	部份正確作答情況
10	將 $x+y=2a$ 改寫為 $(x-a)+(y-a)=0 \rightarrow (x-a)=-(y-a)$ **，並代入題目化簡，雖化簡步驟合理，但因化簡過程中部分步驟計算錯誤，而導致答案錯誤。**
11	將 $x+y=2a$ 改寫為 $x=2a-y$ **或** $y=2a-x$ **，並代入題目化簡，雖化簡步驟合理，但因化簡過程中部分步驟計算錯誤，而導致答案錯誤。**
12	將 $x+y=2a$ 改寫為 $\dfrac{x+y}{2}=a$ **並代入題目化簡，雖化簡步驟合理，但因化簡過程中部分步驟計算錯誤，而導致答案錯誤。**
13	列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
19	其他
	不正確作答情況

70	明顯錯誤相消。例如：$\frac{2(x-a)(y-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2}=\frac{2}{(x-a)+(y-a)}$
71	展開後，未進一步合理推導。
72	不清楚乘法公式並錯誤使用。例如：$a^2+b^2=(a+b)(a-b)$
73	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
74	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他。
無作答	
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

14. 將 **2**，**3**，**4**，**5**，**6**，**7**，**8** 這七個數字分別填入右圖格子中，每個格子只能有一個數字，每個數字亦只能選一次。請回答下列問題：



(1) 若某種填法如下：

	3	7
4	6	5
8	2	

請分別寫出上圖中各個田字形中四個數字的總和。

答案： (1) 20，21　　　(2) 19

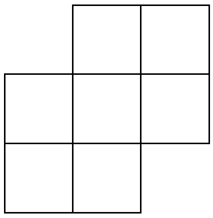
<u>備註</u>：第一小題的主要目的為確保學生是否瞭解田字形的意思。第二小題的主要目的才是測試 U-1 指標。

編碼	**作答情況**
(1)	**正確作答情況**
20	列出正確答案
(1)	**不正確作答情況**
70	列出錯誤答案
(1)	**無作答**
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白

(2) 欲使每個田字形四個格子中所填各數字和皆相等，

請問此和的最小值為何?

★作答：



答案： (1) 20，21　　　　(2) 19

<u>備註</u>：第一小題的主要目的為確保學生是否瞭解田字形的意思。第二小題的主要目的才是測試 U-1，此題著重於是否使用符號解題。

編碼	作答情況
(2)	**正確作答情況**
20	使用兩個以下的代數符號解題，合理推導並寫出正確答案。
21	使用三個以上的代數符號解題，合理推導並寫出正確答案。
(2)	**部份正確作答情況**
10	窮舉法，隨意透過數字的選填湊出正確答案。 例如：將 **2**，**3**，**4**，**5**，**6**，**7**，**8** 這七個數字填入格子裡湊出答案。
11	未使用代數符號解題，而是根據某些理由選填數字得到正確答案。
12	解題過程中欲使用代數符號，但未能寫出正確答案。
13	僅列出正確答案，未附有合理的解釋或推導。
19	其他
(2)	**不正確作答情況**
70	透過數字的選填解題，找出符合兩個田字形中的數字和相等，但此值不為最小值。
71	透過數字的選填解題，不僅未能找出符合兩個田字形中的數字和相等，此值亦不為最小值。
72	無法從作答中分析出合理的解題策略與步驟。
73	僅列出錯誤答案，無任何作答過程或理由。
79	其他
(2)	**無作答**
90	嘗試解題，但又塗掉或劃掉
91	直接表明不會寫，或是寫些與解題無關的東西。
99	空白