

第壹章 緒論

第一節 研究背景

Vinner(1983)認為數學抽象概念的認知結構，主要由概念心像與概念定義所組成。概念心像則是由心智圖像(mental picture)與一些與該概念有連結的性質(properties)所形成，而概念定義是指以一種正確且非循環的方式來解釋該概念的文字定義(verbal definition)。Vinner 和 Dreyfus(1989)進一步研究發現一般大學生雖然經由抽象定義獲得概念，但在解題時卻依賴概念心像擬定解題策略。Wheatley(1997)從心像的建構(construct)、再現(re-present)與轉換(transform)等三個向度討論心像與數學解題的關係，發現個體心像的建構、再現與轉換等能力越佳者，越能成功地解決數學問題，尤其是在解決非例行(nonroutine)的數學問題時更是如此。Huttenlocher 與 Strauss (1968) 的研究顯示，空間心像在線性三段論推理中起重要作用。他們雖提出概念心像的建構與操弄對於概念的了解與解題扮演重要的角色，但並未說明心像建構的形式。

數學思考的方式具有多樣性，用來作為呈現數學想法的表徵方式，連帶會出現多樣的型態。如 Lesh, post 與 Behr (1987)提出數學學習及解題時的五種表徵系統：具體事物的經驗表徵(experience-based "scripts")、具體操作表徵(manipulatable models)、圖形影像表徵(pictures or diagrams)、口說語言表徵(spoken languages)、書寫的符號表徵(written symbols)。Janvier(1987a)也以其研究所得，提出變數(variable)概念有物件、語文描述、表格、圖形、式子等五種表徵的形式。陳建誠(1998)提出以物件、圖形和數量作為面積表徵形式。可見得在數學概念的學習上，一個數學概念的結構上是複雜的。

Lesh et al.(1987)提到多重表徵系統本身的重要性，且它們之間的轉譯(translations)與它們本身內部的轉換(transformations)更形重要，並以圖 1-1 強調出每個表徵之間都具有連結關係。轉譯可以視為在系統間的對應(between-system mappings)，轉換可以視為在系統中的運作(within-system operations)。對數學概念的獲得與使用，學生很少只用單一表徵去獲得，所

以在表徵系統中，必須要做到對於單一表徵的完整建構，也要做到表徵間互相連結的工作。他們進一步證實了轉譯是一個影響數學學習和解題表現的重要因素，而且強化或修正這些能力有助於基本數學概念的獲得與運用。同樣地，Janivier(1987b)的研究也證實了轉譯在函數教學上的重要性，並且建議應該廣泛應用在其它的主題上。

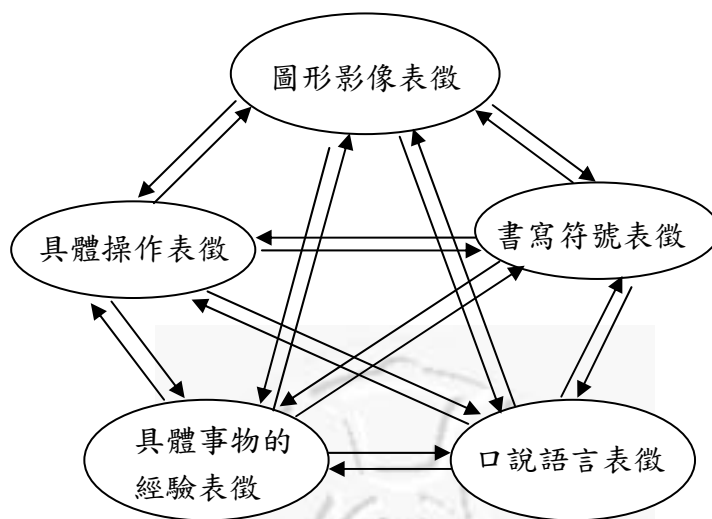


圖 1-1：Lesh 表徵連結圖

因此，學生在學習數學概念時，不能只是單純學習到不同數學表徵的概念，更要注意到數學表徵間的連結，例如在二元一次聯立方程式的求解上，我們可以連結到即是求兩直線的交點，所以數學表徵間的連結能力在數學學習中，是讓一個數學概念的結構更加完整的重要能力。

許多表徵的研究(Janvier, 1987a; Kaput, 1987; Lesh et al., 1987)均指出，在某些數學觀念上，學生經常無法掌握表徵類型之間的關係。Hart 與 Sinkinson(1987)證實，許多兒童在具體的活動經驗與數學的形式化之間的連結會有許多的困難，同時他們建議提供搭橋(bridging)的過程，如以圖形表徵作中介的表徵以解決這個問題。而圖形整合能力則能提升表徵層次(林敏雪, 1997)。蔡志仁(2000)在動態連結多重表徵視窗環境下橢圓學習之研究中，發現到實驗組在多重表徵視窗環境下，會傾向使用圖形表徵當作是一個主要表徵，其它的訊息均會納入此表徵中，所以在表徵轉換間有一個依據。由

這些學者的結論中顯示出，表徵間的連結是具有一定的困難度，然而對於表徵間連結的橋樑，他們認為圖形表徵及整合圖形表徵性質的能力扮演了一個重要的角色，與 Vinner 所提出的概念心像類似，顯示出概念心像對表徵間的連結扮演一個重要的中介角色。

在隨著電腦科技的快速發展，資訊科技融入教學已是一種常見的教學方式，數學老師常常會將數學概念經由電腦設計處理，透過外部輸出設備，呈現數學概念，若數學概念藉由某些物件呈現，如影片、紙筆、玩具、圖表.....等，且概念透過物件所呈現的型式，是會依據時間變數而有所改變，並非只是呈現概念的文字定義或靜態圖形，並在個體心像中產生類似視覺圖像的操弄，則我們稱為動態視覺化(dynamic visualization)。Noss 與 Hoyles(1996)即提出可以藉由電腦視窗環境呈現精緻化的數學意義。

藉由動態視覺化的過程產生一具有動態維度(dynamic dimension)的內部視覺表徵(Morrow, 1997)，並產生對應之動態心像，以此為思維的對象，建立有用且甚至是不可或缺的分析思維(analytic thinking)技巧(Cuoco & Goldenberg, 1997)。Rochowicz (1996)利用電腦呈現微積分概念的多重表徵能力，學生所獲得的知識更是個別化與有意義的。Shaaron Anisworth 與 Nicolas VanLabeke(2004)以掠奪者與獵物的人口變化為例，利用強調時間的程度，而設計出不同的資料表徵類型做呈現，並指出多重的表徵類型可以促使學習者整合資訊並建構出更深的理解。

在以前的相關研究(Noss & Hoyles, 1996; Morrow, 1997; Rochowicz, 1996; Shaaron Anisworth & Nicolas VanLabeke, 2004)中，提到媒介工具的呈現能幫助學習者學習，但卻並沒有特別提及媒介工具的呈現是如何激發概念心像的建構。因此，本研究的重心在於，探討不同的媒介工具是如何激發個體建構出概念心像，進而以此概念心像協助其在不同表徵之間進行連結。

第二節 研究動機與研究目的

在一次觀摩實習老師的教學影帶中，影片中的教學單元為橢圓參數式，並利用 Powerpoint 的呈現做教學活動。Powerpoint 呈現出以直角座標系之原點為中心的橫躺橢圓及以原點為圓心的兩同心圓，大圓上有一點 M，OM 線段交小圓於 N 點且與 x 軸之夾角為 θ ，M 點對 x 軸的垂線與 N 對 y 軸的

垂線交於 P 點的圖形。教師使用 Powerpoint 的物件移動功能，將 P 點到 x 軸間的線段平移至 y 軸，傳達出 P 點的 y 座標為 N 點的 y 座標，以類似的方法處理 P 點的 x 座標，傳達出 P 點的 x 座標為 M 點的 x 座標，最後歸納出 P 點的座標為 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 。教師在下一張 Powerpoint 的投影片中，將 P 點座標代入橢圓標準式中，符合橢圓標準式的解，證實 P 點確為橢圓上的點。教師接下來就回到黑板上利用橢圓參數式解決一些數學問題。課程當中，教師有教到如何解決橢圓的內接矩形的最大面積及邊長的題目。教師在教導完解題的概念與方法後，在課程結束前，以橢圓的內接矩形的最大面積及邊長的題目做為行成性評量中，上黑板解題的學生，可以利用老師所教導的解題方法解決最大面積及邊長問題。但當老師問他矩形的頂點位置在那裡時，學生反而不知所措而無法回答，顯現出學生僅掌握代數表徵及代數運算，並未激發出學生整合圖形表徵以及心像操弄，尤其是橢圓參數式中參數的幾何意義更是模糊。

由此個案教學中，讓我思考，為什麼多媒體教學無法幫助學生整合圖形表徵以及心像操弄呢？所猜測的原因有三：

- 1、因為學習素材的特質嗎？橢圓參數式中，參數並不如圓參數式中的參數那麼具有直接明顯的幾何意義。
- 2、因為過多的外部認知負擔，以至於只截取容易掌握的代數表徵，及其運算的驗證，例如 $x=a\cos\theta$ ， $y=b\sin\theta$ ，符合 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的解。而疏忽參數 θ 的意義，而無法建構此參數式的動態心像。
- 3、因為教學媒介工具的呈現方式，例如以 Powerpoint 呈現出局部的動態平移動作，而無 P 點整體的動態圖形結構。

第 3 個原因牽涉到教學媒介工具的呈現。教學現場的教學媒介工具是利用 powerpoint 來呈現出 P 點與兩軸距離的局部動態平移，讓學生知道 P 點的座標是由 M 點 x 座標及 N 點 y 座標所組成。那如果是使用靜態的圖形或操作直尺平移來呈現相同概念，甚至將 P 點以動態的方式呈現，那對於學生建構參數式時的概念心像是否有所不同？進而影響圖形與參數式間的變換。

數學教育中對於媒介工具的使用通常透過電腦科技，例如 Logo 語言

能提供孩童具體且有意義的脈絡情境以建構系統化的幾何思維 (Clements, 1990)。多媒體電腦輔助教學系統因可提供具體問題，於是學生得以進行數學解題活動(馬秀蘭、吳德邦，1998)。其次，由於教學軟體設計是以問題導向為機制，學生可針對軟體中之問題，對事實真相進行有意義、相關及連貫性之學習(江豐光，2003)。GSP 的引入將改變個體之某些數學思維的方式，此即為新科技對於數學學習與教學所帶來之最為重要的變革(黃哲男，2002)。動態幾何環境實驗教學雖對於學生的證明概念沒有顯著的成效，但是可以幫助學生提升證明技能(鄭勝鴻，2005)。這些研究都傾向著墨在電腦科技教學的價值及對學生學習上的幫助，不過並未說明媒介工具是如何激發出學生的心像操弄以幫助學習。

在探討利用媒介工具的實務教學問題及一些先進對於使用媒介工具的相關研究，我們將研究目的焦注在探討媒介工具如何幫助個體激發心像的建構及促成圖形與符號的連結。動機中所提到的橢圓參數式的教學內容，橢圓參數式是以角度為參數的參數表示式，而有關圖形參數式之大學幾何課程內容中，參數同樣為角度的參數式中，以圓擺線參數式最具代表性。因此，研究者擬出下列兩個研究問題：

- 1、個體透過動畫觀察、實物操作、語意描述等三種不同媒介工具的形式，其建構心臟線參數式的歷程中，心像的建構及連結符號表徵的情形？
- 2、個體在不同特質的動態幾何環境及靜態圖形表徵的媒介工具下，其建構心臟線參數式的歷程中，心像的建構及連結符號表徵的情形？