

第五章 補救教學成效分析

由上一章的探討，我們可以清楚地得知學生在一般的一元二次不等式教學後，對一元二次不等式的解題，常出現下列主要錯誤類型：

1. 任意開方
2. 變號處理錯誤
3. 任意平方
4. 將領導係數當成正數來處理
5. 產生虛數比大小的謬誤
6. 過度使用「無解」的概念
7. 不會由二次函數圖形直接看出一元二次不等式的解
8. 無法判斷 $ax^2 + bx + c$ 恆為正數或恆為負數的充要條件
9. 認為不等式的解只包含整數的情形

其中「認為不等式的解只包含整數的情形」這種錯誤類型的產生是根源於對實數與整數的意義混淆不清，所以當題目問「滿足該不等式時的 x ，有多少個解？」時就有取整數的趨向，總認為答案必為有限個，而常以 x 為整數作答。這並非學生不會進行一元二次不等式的符號運算所造成的，所以本研究暫不考慮此方面的問題。

從先前的分析與討論中，我們已明白學生在學習上的錯誤及原因，研究者根據學生於一元二次不等式解題時的前八種主要錯誤類型及其犯錯的原因，參考「一元二次不等式的解題測驗」(附錄一)，重新設計「一元二次不等式的主要錯誤類型篩選測驗」(附錄二)。在研究者 93 學年度上學期期末所任教兩個班級，舉行前測，篩選出在 1-8 種主要錯誤類型中，犯錯情形超過四種或四種以上的同學共 16 位，以研究者所設計的補救教學活動進行補救教學，並於活動完畢後實施後測。在補救教學活動結束一個月後再作一次延後測，以了解學生學習保留的

情況。為了方便比較及分析，前測、後測、及延後測的題目均相同，測驗時間也均為 60 分鐘。此外，我們將整理、歸納、統計及分析學生卷面的答題資料，並對部份學生做進一步的訪談，以確認其解題時的想法和策略。

此章的目的在於探討研究者所設計的補救教學活動是否具有成效。研究問題包括：學生在補救教學活動前後之錯誤類型是否有所改變？其解題的正確率是否提高？經過一段時間後，其解題正確性的保留為何？學生對整個補救教學活動有何看法？

為了配合研究目的與研究問題，本章以下列方式呈現：

第一節 補救教學活動的設計與實施

第二節 學生在補救教學活動的前、後測結果分析

第三節 學生在補救教學活動的後測、延後測結果分析

第四節 綜合分析

第一節 補救教學活動的設計與實施

本節主要討論的是，當學生一元二次不等式解題時發生上述前八種主要錯誤類型，研究者如何透過自編的教材及設計的活動，對犯錯的學生實施補救教學活動。以下將詳述補救教學活動的設計原則及教學活動的進行。

一、補救教學活動的設計原則

從學生在「一元二次不等式的解題測驗」的卷面解題過程、事後個別晤談及主要錯誤類型的產生原因分析中，可以看出上述八種主要錯誤類型產生的原因是來自於：

- a. 將先前學習過的知識作錯誤的類推
- b. 受到老師教學口訣、教材編排及不當記憶公式的影響
- c. 無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結
- d. 對不等式的運算邏輯不清楚

e. 受到直觀的影響

基於這些錯誤原因，研究者針對一元二次不等式解題時的 1-8 種主要錯誤類型，進行補救教學，其補救教學活動的設計原則敘述如下：

1. 強化學生對不等式的運算邏輯，降低直觀法則的影響

由上節討論中得知，學生在一元二次不等式的許多解題錯誤是因為對「不等式的運算邏輯」概念不清所產生的。比如，不等式兩邊同乘(除)負數，卻忘了將符號變號所造成的「變號處理錯誤」；不管是否合乎運算邏輯，任意將不等式平方和開方，造成「任意平方」及「任意開方」的錯誤。究其原因是從八十六年國民中學實施新教材以來，把不等式的內容從國中課程去除，加上高一上課程內容多且授課時數少，教師往往對於不等式的運算多半快速帶過，以致於程度差的學生無法建立良好的觀念。

因此研究者補救教學活動的設計原則首重不等式運算法則的教學，透過「具體數字的不等關係」作「四則」運算，引導出不等式四則運算的法則，在教學過程讓學生釐清不等式四則運算的邏輯。然後以此為基礎作一次不等式的求解教學，希望能幫助更正「變號處理錯誤」的錯誤。並且在不等式平方運算的教學上，多舉一些 $a^2 > b^2$ 但是 a 不一定大於 b 的例子，幫助學生克服直覺法則的影響，以更正其「任意開方」的錯誤，並降低「任意平方」的錯誤。

2. 為避免錯誤類推及不當公式記憶，揚棄其它解法，以圖解法為主要解題策略

研究者從自編的「一元二次不等式的解題測驗」結果中及相關文獻中 (Tsamir and Almog, 2001) 發現，學生解一元二次不等式常以代數操弄方法及二次函數圖解法來處理，而以圖解法去解一元二次不等式的學生，其解題正確率會比較高。

在一般課堂的一元二次不等式教學中，為了學習的多元性，教師除了會教導代數分解法或圖解法來求解，而且常常為了解題的快速，更會以一元二次不等式的解題公式當作解一元二次不等式的主要策略。如此一來，學生雖

學得多樣但學習不夠熟練。且此時就學快速解法，容易導致對所學的內容混淆不清，造成學生因為記憶公式不完全，形成「將領導係數當成正數來處理」及「產生虛數比大小的謬誤」的錯誤類型。

學生習慣以解題公式為其解題策略時，當面臨必須以二次函數圖形來求解的問題，常因對圖解法不熟悉，而「無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結」，造成「無法用二次函數圖形看出一元二次不等式的解」和「無法判斷 ax^2+bx+c 恆為正數或恆為負數的充要條件」的錯誤類型。

從上一章的研究結果得知，學生在一元二次不等式的錯誤有許多是來自於「把先前學習過的知識作錯誤的類推」，例如把解一元二次不等式當成解一元二次方程式般造成「任意開方」的錯誤，將一元二次方程式無解的概念錯誤類推至解一元二次不等式因而形成「過度使用無解的概念」的錯誤。研究者認為學生如能以圖解法來求解一元二次不等式，將能有效地避開「先前學習過的知識」的干擾，降低解題錯誤。

綜上所述，本研究不再強調其它一元二次不等式的解法，在教學的過程不再強調一元二次不等式的解題公式，在教材上也不列出公式讓學生記憶，而以二次函數圖解法進行補救教學。

3. 建立並強化學生對一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結

學生要能以二次函數圖解法解一元二次不等式，必須能了解二次函數且繪出其簡圖，並能將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結。欲達成此目標，須從下列三方面著手：

(a) 加強學生對二次函數圖形及其性質的了解

首先，利用電腦動態描點的功能教授二次函數的圖形，讓學生了解二次函數的圖形為一拋物線。其次就是要使學生有能力去找出二次函數圖形和 x 軸交點，進而要知道什麼條件下二次函數圖形和 x 軸沒有交點，如此才能判斷二次式 ax^2+bx+c 恆為正數或恆為負數的充要條件。因此補救教學過程中，必須加強學生求二次函數圖形和 x 軸交點的能力，並透過反覆操作二次

函數圖形的電腦繪圖軟體，以期能讓學生直觀地判斷二次函數圖形和 x 軸沒有交點的條件，最終知道二次式 $ax^2 + bx + c$ 恆為正數或恆為負數的充要條件。

(b) 加強學生對二次函數圖形的判讀能力

學生無法從二次函數圖形找出所對應的一元二次不等式的解，常常是因為他們不清楚二次函數圖形上點坐標所代表的意義。因此補救教學的教材除了教授二次函數的圖形繪圖之外，更強調二次函數圖形上點坐標所代表的意義，方能教導學生從二次函數圖形找出所對應的一元二次不等式的解。

(c) 強調一元二次不等式變數 x 和一元二次不等式值的函數對應關係

許多學生之所以不會直接從二次函數的圖形看出一元二次不等式的解，其主要的的原因是學生不知一元二次不等式和二次函數圖形有關。進一步地說，學生不懂一個一元二次不等式的值和其變數 x 是函數對應關係，因此就無法用二次函數的圖形來找出一元二次不等式的解。所以研究者補救教學教材的另一重點，就是在教學的過程中著重一元二次不等式變數 x 和一元二次不等式值的函數對應關係，讓學生熟悉一元二次不等式的值是變數 x 的二次函數，進而透過圖解法來處理一元二次不等式。

二、 補救教學活動的進行

在這個部份，我們根據上述活動的設計原則，把它實際應用於補救教學中。整個教學活動費時三小時，在資源教室進行電腦輔助教學，所有教材內容均以 PowerPoint 呈現，藉由 PowerPoint 可以動態呈現和可重覆操作的特性來教學，並適時搭配以 Visual Basic 程式所寫成的二次函數繪圖軟體教導二次函數圖形的性質，並配合由研究者依教學課程內容所編製的學習單(詳見附錄三)，讓學生一面聽課一面完成學習單的內容，以加深學生上課時對課程內容的印象，增進學習的成效。全部補救教學共分十三個教學活動，現在將這十三個教學活動(詳見附錄四)略作說明如下：

(1) 教學活動一：不等式基本運算邏輯的教學。

教學目標：讓學生了解不等式的基本運算(含四則運算、透過四則運算來解一元一次不等式、平方運算)。

一元二次不等式屬於不等式的範圍，因此學生必須要熟悉不等式的一些基本運算，方能解一元一次不等式，進而處理一元二次不等式，所以一開始先進行不等式四則運算的教學，希望藉由此教學活動讓學生熟悉不等式的運算邏輯，以利後續的教學。

接下來從活動二到活動四及活動六到活動十，我們將進行一元二次不等式的圖解教學，為了不讓學生學習時只專注於某一種型式不等式，在每一個活動中的一元二次不等式圖解教學，我們在 $ax^2+bx+c<0$ 、 $ax^2+bx+c>0$ 、 $ax^2+bx+c\leq 0$ 、 $ax^2+bx+c\geq 0$ 這4種型式不等式中，隨意挑選一個作為代表來教學，其餘的不等式則在作完該代表不等式教學後，抽取其中一至二個，以口頭詢問學生或列在學習單上讓同學練習。

(2) 教學活動二：當 $x^2+bx+c=0$ 兩根為相異有理根，一元二次不等式

$x^2+bx+c>0$ 的動態圖解教學。

教學目標：讓學生(a)知道是 $y=x^2+bx+c$ 為 x 的二次函數；(b)會以描點法描繪 $y=f(x)=x^2+bx+c$ 的圖形為開口向上的拋物線，及求出圖形與 x 軸交點；(c)能說明二次函數 $y=f(x)=x^2+bx+c$ 圖形上點坐標的涵義；(d)能利用 $y=f(x)=x^2+bx+c$ 的圖形，找出一元二次不等式的解 $x^2+bx+c>0$ 。

此活動中的不等式問題為一元二次不等式中最基本且容易處理的問題，學生只要具備十字交乘法的能力，便能求出二次函數圖形與 x 軸交點。在教學之初希望以此最基本的題型讓學生能理解圖解法的原理，建立信心以利後續活動的進行。

(3) 教學活動三：當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相異有理根其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$ ，一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的動態圖解教學。

教學目標：讓學生(a)知道是 $y = ax^2 + bx + c$ 為 x 的二次函數；(b)會以描點法描繪 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形為開口向上的拋物線，及求出圖形與 x 軸交點；(c)能說明二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形上點坐標的涵義；(d)能利用 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形，找出一元二次不等式的解 $ax^2 + bx + c < 0$ 。

此教學活動為上一個活動的延續，同樣是希望學生從中學習圖解法的原理，只是在計算的難度上增加一些，在此不希望難度突然增加太多而帶給學生挫折感，減低上課的意願。

- (4) 教學活動四：當 $ax^2 + bx + c = 0$ 兩根為相異有理根其中 $a < 0$ ，一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的動態圖解教學。

教學目標：讓學生(a)知道是 $y = ax^2 + bx + c$ 為 x 的二次函數；(b)會以描點法描繪 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形為開口向下的拋物線，及求出圖形與 x 軸交點；(c)能說明二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形上點坐標的涵義；(d)能利用 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形，找出一元二次不等式的解 $ax^2 + bx + c > 0$ 。

此活動中的題型與前兩個活動的問題相類似，差別的是此題的二次函數圖形開口為向下而非前兩題的開口向上，且所求的不等式為 $ax^2 + bx + c > 0$ 不同於前兩題的 $ax^2 + bx + c < 0$ ，希望藉變化題型讓學生理解圖解法的原理。

- (5) 教學活動五：二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸交點條件的動態繪圖教學。

教學目標：讓學生知道(a) $b^2 - 4ac > 0$ 時 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸交於兩點；(b) $b^2 - 4ac = 0$ 時 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸只交於一點；(c) $b^2 - 4ac < 0$ 時 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸沒有交點。

此活動是藉由反覆操作二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的動態繪圖軟體，讓學生能直觀地看出二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸無交點、交一點及交兩點的條件為何，以便於後續活動的進行。

(6) 教學活動六：學生練習解當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相等有理根，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 。

教學目標為：(a)讓學生以目前為止所學的觀念，實際動手演練以驗證自己是否能用圖解法解決 $ax^2+bx+c>0$ 且 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相等有理根的一元二次不等式；(b)讓研究者馬上評估學習的成效以調整後續的教學步調。

此活動的進行是希望讓學生能利用活動五所學的知識，判斷出此題的不等式其對應的二次函數圖形與 x 軸只交於一點，並能利用十字交乘法找出圖形與 x 軸交點坐標，最後明白當二次函數圖形與 x 軸只交於一點時，如何找出其對應不等式的解。

(7) 教學活動七：當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相異無理根其中 $a>0$ ，一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的動態圖解教學。

教學目標：讓學生(a)知道是 $y=ax^2+bx+c$ 為 x 的二次函數；(b)會以描點法描繪 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形為開口向上的拋物線，及求出圖形與 x 軸交點；(c)能說明二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 圖形上點坐標的涵義；(d)能利用 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形，找出一元二次不等式的解 $ax^2+bx+c<0$ 。

此活動除了延續前面教學活動之外，更進一步教導學生了解當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相異無理根其中 $a>0$ 時的一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ ，其對應的二次函數圖形與 x 軸交點無法以十字交乘法得出，而必須以一元二次方程式的公式解才能求出。此問題牽涉到公式的記憶，對公式較不熟悉的同學而言此題教學稍具難度，對建立學生以圖解法解一元二次不等式的概念與原理亦是不可或缺。

(8) 教學活動八：學生練習解

1. 當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相異無理根其中 $a<0$ ，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 。

2.當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相異無理根其中 $a>0$ 、 $b=0$ ，一元二次不等式 $ax^2+c>0$ 。

教學目標：(a)讓學生以目前為止所學的觀念，實際動手演練以驗證自己是否能用圖解法解決 $ax^2+bx+c>0$ (或 $ax^2+bx+c<0$) 且 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為無理根的一元二次不等式的圖解法；(b)讓研究者馬上評估學習的成效以調整後續的教學步調。

由第四章的研究結果顯示，學生對於 x^2 項為負數或缺項的一元二次不等式的錯誤率相當高，因此此題的教學活動即針對這種情形，設計兩個題目讓學生練習以改正學生的錯誤。

(9) 教學活動九：當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相異虛根其中 $a>0$ ，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的動態圖解教學。

教學目標：讓學生(a)知道 $y=ax^2+bx+c$ 是 x 的二次函數；(b)會以描點法描繪 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形為開口向上的拋物線，及知道此時圖形與 x 軸沒有交點；(c)能說明二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 圖形上點坐標的涵義；(d)能利用 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形，找出一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解為所有實數。

由第四章的研究結果顯示，學生面對 $ax^2+bx+c<0$ (或 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c\leq 0$ 或 $ax^2+bx+c\geq 0$) 且 $b^2-4ac<0$ 的一元二次不等式時，常會濫用「一元二次不等式的求解公式」，因而產生「虛數比大小」的錯誤。或將國中時期解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 時，若 $b^2-4ac<0$ ，則兩根為無解的概念不當類推到 $ax^2+bx+c<0$ (或 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c\leq 0$ 或 $ax^2+bx+c\geq 0$) 且 $b^2-4ac<0$ 的一元二次不等式，然後產生「過度使用無解的概念」的錯誤類型，因此此題的教學活動即針對這些錯誤類型以圖解法解一元二次不等式，試圖改正學生的錯誤類型。

(10) 教學活動十：學生練習解 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為相異虛根其中 $a<0$ ，一元

二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 。

教學目標：(a)讓學生以目前為止所學的觀念，實際動手演練以驗證自己是否以圖解法解 $ax^2 + bx + c = 0$ 兩根為虛根其中 $a < 0$ ，一元二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ ；(b)讓研究者馬上評估學習的成效以調整後續的教學步調。

活動十延續前一個教學活動，希望學生透過自己實際練習再經教師檢討訂正後，能學會以圖解法解 $ax^2 + bx + c = 0$ 兩根為虛根其中 $a < 0$ 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ (或 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 或 $ax^2 + bx + c \geq 0$)。

從活動十一到活動十三，將針對與二次式 $ax^2 + bx + c$ 恆正或恆負充要條件的相關問題進行教學。

(11) 教學活動十一：二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為所有實數的動態圖形教學。

教學目標為：(a)讓學生知道不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為所有實數，即對應的二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形必在 x 軸上方；

(b)讓學生知道 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形在 x 軸上方的條件

$$\text{為 } \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases} ;$$

(c)讓學生知道不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立的條件為

$$\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases} .$$

學生對二次式 $ax^2 + bx + c$ 恆正或恆負的充要條件不是很清楚，只是機械式的記憶規則與公式而不知其原理，用此充要條件來解題就更困難。因此本教學活動將 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為所有實數的意義與其對應的二次函數圖形作動態的聯結，幫助學生建立因果式的理解，且當學生不知道 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸沒有交點的條件為 $b^2 - 4ac < 0$ 時，立即透過

電腦畫面的超連結幫助學生作複習，以增進學生的學習成效。

(12) 教學活動十二：二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解為所有實數的動態圖形教學。

教學目標：(a) 讓學生知道不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解為所有實數，即對應的二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形必在 x 軸下方；

(b) 讓學生知道 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形在 x 軸下方的條件為

$$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases};$$

(c) 讓學生知道不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 恆成立的條件為

$$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}。$$

活動十二延續前一個教學活動，同樣以電腦為輔助將二次式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解為所有實數與其對應的二次函數圖形作動態的連結，且當學生不知道 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸沒有交點的條件為 $b^2 - 4ac < 0$ 時，立即透過電腦畫面的超連結幫助學生作複習，增進學習的成效幫助學生學習。

(13) 教學活動十三：如何應用「二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立」的條件去解題的動態圖形教學。

1. 「二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立，其中 a 、 b 、 c 含某一變數，求該變數範圍」之教學。
2. 「二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形在水平直線 $y = k$ 上方，其中 a 、 b 、 c 含某一變數，求該變數範圍」之教學。

教學目標：(a) 讓學生知道利用二次函數的圖形，處理二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立的問題；

(b) 讓學生瞭解 $ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立，即對應的二次函數

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形必在 x 軸上方，且懂得利用

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形在 x 軸上方的條件為

$$\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}, \text{ 求出題目所求的變數之範圍；}$$

(c) 讓學生知道 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形在水平直線 $y = k$ 上方的意思為「不論 x 為哪一個實數代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，其縱坐標 y 必大於 k 」，即 $ax^2 + bx + c > k$ 恆成立；

(d) 學生懂得利用二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為所有實數的充要條件為 $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$ ，來處理二次不等式恆成立的問題。

此教學活動將第1小題與其對應的二次函數圖形作動態的聯結，且當學生不知 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸沒有交點的條件為 $b^2 - 4ac < 0$ 時，立即透過電腦畫面的超聯結幫助學生作複習，增進學習的成效。將第2小題搭配圖形，並把問題拆解成兩個比較容易處理的子問題來教學：一為 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形在水平直線 $y = k$ 上方的代數意義；二為 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解為所有實數的充要條件為 $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$ ，同樣當學生不知 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸沒有交點的條件為 $b^2 - 4ac < 0$ 時，立即透過電腦畫面的超聯結幫助學生作複習，以增進學生的學習成效。

第二節 學生在補救教學活動的前、後測結果分析

為了瞭解補救教學活動對於改善學生的錯誤是否有所幫助，本節將就所有參與補救教學活動的學生，在「一元二次不等式的主要錯誤類型篩選測驗」前測、後測的答題正確率、錯誤變化情形作一探討。

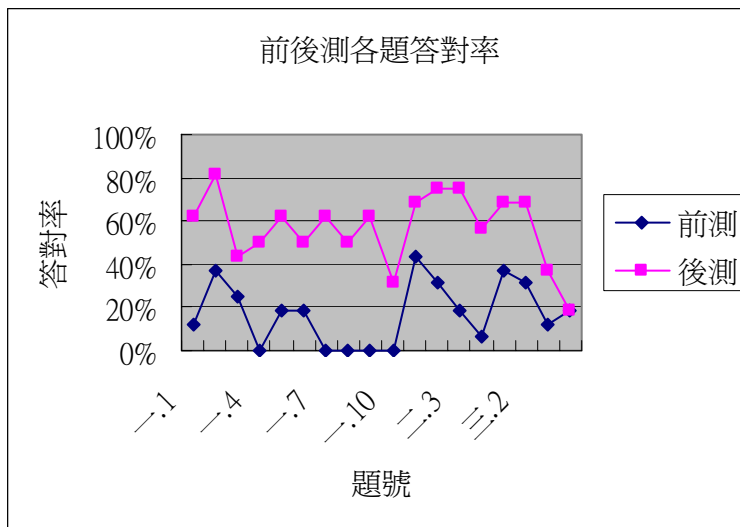
一、參與補救教學的學生前測、後測各小題答題分析

為了瞭解參與補救教學的學生在前測、後測各小題的答題情形，特將他們於「一元二次不等式的主要錯誤類型篩選測驗」前測、後測中各小題的答題正確率列表及畫折線圖表示，並以無母數檢定分析前測、後測各小題答題的差異情形。表 5-2-1 為前測、後測各小題答題正確率及答題差異情形，圖 5-2-1 為前測、後測各小題答題正確率折線圖：

【表 5-2-1】前測、後測的各小題答題正確率及答題差異情形

前、後測答題情形 題號	前測答題正確率	後測答題正確率	McNemar Test P 值
一、1	12.5	62.5	0.021
一、2	37.5	81.25	0.039
一、3	25	43.75	0.453*
一、4	0	50	0.008
一、5	18.75	62.5	0.039
一、6	18.75	50	0.070*
一、7	0	62.5	0.002
一、8	0	50	0.008
一、9	0	62.5	0.002
一、10	6.25	31.25	0.219*
二、1	43.75	68.75	0.125*

二、2	31.25	75	0.016
二、3	18.75	75	0.004
二、4	6.25	56.25	0.008
三、1	37.5	68.75	0.125*
三、2	31.25	68.75	0.031
三、3	12.5	37.5	0.125*
三、4	18.75	18.75	1.000*



【圖5-2-1】前測、後測各小題答題正確率的折線圖

觀察上述圖表，我們有下列幾點發現：

1. 由表 5-2-1 及圖 5-2-1 大致上可看出，相較於前測，學生在後測的各小題答題的正確率普遍提高了許多，甚至有 10 個小題題目其後測答題正確率較前測答題正確率更增加 40% 以上。以無母數檢定中的 **McNemar Test** 檢測前測與後測各小題答題的差異情形，得表 5-2-1 中 **McNemar Test** 的 P 值。此表顯示 P 值 < 0.05 的試題共有 11 題，表示出大部分試題其前測與後測答題情形有顯著的差異。這說明了以圖解法為解題策略的補救教學活動，對於提高學生在一元二次不等式的解題正確性頗有成效。
2. 前測與後測的答題差異不顯著的試題有 7 題，如下表所示：

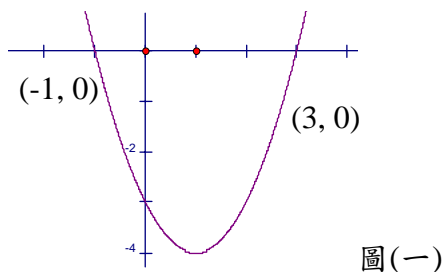
【表 5-2-2】前測與後測的答題差異不顯著的題目

一、3. 解不等式 $9x^2 + 6x + 1 > 0$

一、6. 解不等式 $-(3x+2)(x-7) \leq 0$

一、10. 解不等式 $\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} > 0$

二、1. $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為圖(一)，求不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解 x 之範圍為？



三、1. 二次函數 $y = 2x^2 + 5x + a$ 的圖形和 x 軸沒有交點，求 a 之範圍為？

三、3. 二次函數 $f(x) = x^2 - 3kx + (5k + 3)$ 的圖形恆在直線 $y = 4$ 上方，求實數 k 的範圍 = ？

三、4. 對任意實數 x ，若 $2x^2 + 2kx + k < 4x^2 + 6x + 3$ 恆成立，求實數 k 之範圍 = ？

(1) 一、3 為三題用以檢測「任意開方」錯誤類型的題目中的一題，相較於其它兩題，學生後測時在此題的答對率仍屬偏低，從學生前測答題過程，得知有 3 位同學答案為「 $9x^2 + 6x + 1 > 0 \Rightarrow (3x+1)^2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$ 」，明顯地他們都犯了「任意開方」的錯誤，而後測時雖然這 3 位同學答案仍為錯誤，但從解題過程中發現，他們不再犯「任意開方」的錯誤，都改以圖解法為解題策略，且所畫的二次函數的圖形也正確無誤，只是在最後作答時，可能因粗心而未排除 $3x+1=0$ 的情形，而將答案寫成 $x \in R$ ，也造成這題後測答題正確率無法與前測有顯著的差異。雖然學生在後測時對此題答對率並未提升太多，但就正確解題時所需的解題策略及方向而言，已大幅改善。

(2) 一、6 是用於檢測「變號處理」和「將領導係數當成正數來處理錯誤類型」的試題，我們發現學生對同類型的試題「一、4. 解不等式

$(1-2x)(3x-5) \geq 0$ 」及「一、5. 解不等式 $-2x^2 + 3x + 5 \leq 0$ 」其前、後測時答題情形有顯著的差異，但是一、6 此題的前、後測答題差異情形卻沒有

一、4 和一、5 那兩題的明顯。比較這三個試題，一、4 的難度較高，一、6 其次，一、5 最低。在補救教學前學生對一、5 和一、6 兩題的答對率均為 18.75%，而一、4 的答對率為 0%，而經補救教學後學生對難度較低的一、5 的答題大多能將 $-2x^2 + 3x + 5 \leq 0$ 變成 $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$ 來處理，避開「將領導係數當成正數來處理」的錯誤，因而答對率提高至 62.5%，而在難度較高的一、4 和一、6 後測答題中，發現有幾位學生對這兩題的答題仍犯了「將領導係數當成正數來處理」的錯誤，因此這兩題後測答對率只提升到 50%，因而造成一、6 這題後測答題情形無法與前測有顯著的差異。

- (3) 一、10. 「解不等式 $\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} > 0$ 」是用於檢測「任意平方」錯誤的試題，檢視學生在後測卷面答題的過程，大致上解題的方向及策略都正確，犯「任意平方」錯誤類型的次數也降低許多，但是因為式子中的係數不是整數，使得學生在求 $\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} = 0$ 兩根時常計算錯誤，造成後測答對率不佳，因而無法與前測有顯著的差異。由上可知學生要能正確無誤地解出一元二次不等式，除了知道以圖解法為解題的策略來之外，更需要的是具有一元二次不等式相關的先備知識，如畫二次函數的簡圖、找二次函數的圖形和 x 軸交點、解一元二次方程式等。

面談實例：

老師：同學我們來看一下，妳當初第一大題第 10 題的作法？

妳怎麼得到 $x > 2\sqrt{3} + \sqrt{156}$ 或 $x < 2\sqrt{3} - \sqrt{156}$ 這個答案的？

學生 07：嗯……，畫圖然後算 $\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} = 0$ 。

老師：就是解 $y = \sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3}$ 圖形和 x 軸的交點嗎？

學生 07：對。

老師：再來呢？

學生 07： x 就等於 $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$ …… 等於 $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{\sqrt{12}}$ 。

老師：Y 怎麼會得 $2\sqrt{3} \pm \sqrt{156}$ ？

學生 07：就...乘以 $\sqrt{12}$ 。

老師：那分母呢？

學生 07：啊！對喔！，老師這數字太複雜了，太難算了！

(4) 二、1 為四題「利用二次函數圖形找出一元二次不等式解」問題的其中之一，我們發現在補救教學前，學生對這類的問題習慣以代數操作的方法來解題，試圖由二次函數圖形與 x 軸交點，找出二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的係數 a 、 b 、 c ，然後再求出不等式的解，但因計算過程複雜，導致答案出錯。但在補救教學後發現，大部份的學生已能直接從二次函數圖形看出一元二次不等式的解。相較於其它同類型三題，二、1 小題的圖形與 x 軸有兩交點，學生以代數方法解題，解出此題的機率將比其它三題高，所以此題前測答題正確率較高，也造成此題無法和其它三題一樣地具備後測答題情形與前測有顯著差異的結果，雖然此題後測答對率與前測沒有顯著的差異，但是我們發現學生在前、後測的解題情形已從「代數操作解題」轉變成「直接看圖解題」，解題品質有明顯地提升。

(5) 三、1.和三、2.都是利用二次函數的圖形和 x 軸沒有交點的條件為 $b^2 - 4ac < 0$ 來解題的問題，而三、1.的難度較低，因此補救教學前三、1.的答對率較高。經補救教學活動後，大部份的學生對於二次函數的圖形和 x 軸沒有交點的條件為 $b^2 - 4ac < 0$ 已相當熟悉，因此這兩題後測答題正確率也都提高到 68.75%，但是三、1.前測答對率較高，也造成此題前、後測答題差異無法和三、2.同樣地具有顯著的差異。

(6) 三、3.為整份測驗中難度最高的試題，解題時必須先將二次函數平移後，再利用二次式恆正的充要條件來處理，因此學生若有些許的觀念不清或其它錯誤將無法解出，即使經補救教學後學生仍無法成功地解題，因此造成此題後測答題情形無法與前測有顯著差異的原因，這說明了若想提高學生在此題答對率，教師可能需要再作更進一步的教學。

(7) 三、4.位於卷面的最後一題，總數學生 16 人中，只有 3 人解對。檢視學生在後測卷面答題的過程，發現有 4 個人未解完，也有 2 個人完全空白，也因此造成後測答對率無法與前測有顯著的差異。經事後訪談得知，這些學生因為經補救教學活動後改以圖解法為解題策略，雖然提高了解題的正確率，但因為每一題都必須畫出二次函數的簡圖並找出圖形與 x 軸的交點來解題，比起前測時以代數方法或套用公式解題需花費更多的時間，因此無法於測驗時間內答完全部題目，造成這題答題正確率只有 18.75%。

面談實例：

老師：同學請問，妳第三大題第四題為什麼沒作完？

學生 06：因為你要收了。

老師：時間不夠嗎？

學生 06：對丫，因為都畫圖來解，所以來不及。

老師：如果再給妳多一些時間，這一題會作對嗎？

學生 06：應該可以。

3. 後測答題正確率高於 65%的題目，如下表：

【表 5-2-3】後測答題正確率高於 65%的題目

題號	後測答題正確率%
一、2	81.25
二、1	68.75
二、2	75
二、3	75
三、1	68.75
三、2	68.75

學生在上表這些題目的表現相對於其他問題是比較好的。分析這些題目，有三題是關於以二次函數的圖形去找出一元二次不等式的解，有兩題是關於二次函數的圖形和 x 軸沒有交點的問題。整體看來，補救教學活動以圖解法為教學的主要策略，對於以二次函數圖形去找出一元二次不等式解的問題是頗為有效；另外

補救活動中使用 Visual Basic 程式所寫成的二次函數繪圖軟體，作二次函數圖形和 x 軸交點條件的教學，對於加深學生對二次函數的圖形和 x 軸沒有交點的條件為 $b^2 - 4ac < 0$ 的印象是有幫助的，也因此提高了學生處理二次函數的圖形和 x 軸沒有交點相關問題的能力。

面談實例：

老師：同學請問，妳這份考卷覺得哪裏最簡單？
學生 01：嗯……第二大題。
老師：為什麼？
學生 01：用看的就可以了。
老師：怎麼看？
學生 01：最近不都在教嗎？只要題目大於 0，就看圖形大於 0 的地方，不就最近留下來教的……
老師：那你是不是認為這二次活動，對那個給你二次函數圖形，然後找出一元二次不等式的解的題目最有用？
學生 01：應該吧！

面談實例：

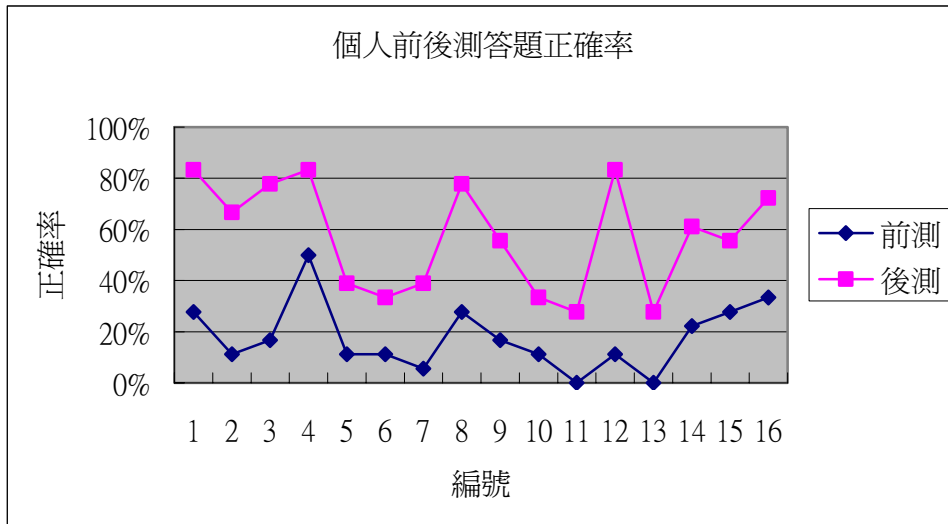
老師：請問……，補救教學活動對妳有幫助嗎？
學生 08：我覺得很有幫助。
老師：有什麼幫助？
學生 08：……從前我都是背公式去算，現在我知道為什麼原因後，就好簡單了。
老師：教學活動中，印象最深的是哪一個？
學生 08：嗯……怎麼……就那個移動拋物線圖形，看和 x 軸交點的。
老師：妳覺得那個教學活動，對妳看出二次函數的圖形和 x 軸的沒有交點的條件，很有用嗎？
學生 08：嗯…對！

二、參與補救教學的學生在前測、後測的個人答題分析

為了瞭解參與補救教學的學生在「一元二次不等式的主要錯誤類型篩選測驗」前測、後測的個人表現，特將他們全部 16 人於前測、後測的答題正確率以列表及畫折線圖表示。表 5-2-4 及圖 5-2-2 為前測、後測個人答題正確率比較表與折線圖，表 5-2-5 為無母數檢定分析前測、後測個人答題差異：

【表 5-2-4】前測、後測個人答題正確率

答題正確率(%) 編號	前測答題正確率	後測答題正確率
01	27.78	83.33
02	11.11	66.67
03	16.67	77.78
04	50	83.33
05	11.11	38.89
06	11.11	33.33
07	5.56	38.89
08	27.78	77.78
09	16.67	55.56
10	11.11	33.33
11	0	27.78
12	11.11	83.33
13	0	27.78
14	22.22	61.11
15	27.78	55.56
16	33.33	72.22



【圖 5-2-2】前測、後測個人答題正確率的折線圖

【表 5-2-5】無母數檢定前測、後測個人答題差異

NPar Tests

Wilcoxon Signed Ranks Test

		Ranks		
		N	Mean Rank	Sum of Ranks
pretal - testtal	Negative Ranks	16(a)	8.50	136.00
	Positive Ranks	0(b)	.00	.00
	Ties	0(c)		
	Total	16		

- a pretal < testtal
- b pretal > testtal
- c pretal = testtal

pretal：表前測試題個人答對情形

testtal：表後測試題個人答對情形

Test Statistics

	pretal - testtal
Z	-3.524(a)
Asymp. Sig. (2-tailed)	.000

a Based on positive ranks.

觀察上述圖表，我們分下列幾點來討論：

1. 以無母數檢定中 **Wilcoxon Signed Ranks Test** 檢測前測與後測個人答題的差異情形，從表 5-2-5 得知 $P=0.000<0.025$ ，顯示出參與補救教學的 16 名學生在前測與後測的答題情形有顯著的差異。且由上述圖表大致上可以看出，相較於前測，每位學生在後測的答題的正確率均提高，這說明了參與補救教學的學生在經補救教學活動後，對一元二次不等式的解題能力比起補救教學活動前已有提升，初步可看出補救教學活動對改善學生的錯誤有所助益。
2. 個人後測答題正確率高於 75% 的同學有 5 人(如下表 5-2-6)

【表 5-2-6】後測答題正確率高於 75% 的同學

編號	後測答題正確率
01	83.33
03	77.78
04	83.33
08	83.33
12	83.33

分析這五位同學在後測的答題資料，發現有四位同學在第一大題 10 小題 ----給一元二次不等式代數式求解一元二次不等式的解題過程中，全都採用圖解法為其解題策略，且大多能正確地求出圖形與 x 軸的交點。這說明學生若能正確地畫出一元二次不等式中所對應的二次函數圖形與 x 軸的交點，再以此找出一元二次不等式的解，則將能大大提升其一元二次不等式的解題正確率。這也驗證了我們以圖解法作為整個補救教學的解題策略是正確的。

3. 個人後測答題正確率低於 40% 的同學：

【表 5-2-7】後測答題正確率低於 40% 的同學

答題正確率(%) 編號	後測答題正確率
05	38.89
06	33.33
07	38.89
10	33.33
11	27.78
13	27.78

個人後測答題正確率低於 40% 的同學有 6 人(如上表 5-2-7)。分析這六位同學其前測的答題正確率均低於 15%，甚至有兩人為 0%。檢視他們在後測的答題過程，發現兩人很少使用圖解法去解題，剩餘四人雖用圖解法為其解題策略，解題過程也大致正確，但是他們卻常犯下列幾項錯誤：

- (1) 以圖解法解一元二次不等式，當求二次函數圖形和 x 軸交點時，常因為因式分解錯誤，或代一元二次方程式的公式解計算錯誤，因而造成無法正確地找出圖形與 x 軸的交點坐標，進而發生錯誤。
- (2) 畫二次函數圖形時，常忽略當 x 平方項係數為負，二次函數拋物線圖形開口向下而非向上。

由上可得知前測答題正確率低於 15% 的這些學生，他們對用圖解法解一元二次不等式的相關先備知識相當缺乏，因此即使已具備一些解題的正確概念，但是因先備知識的不足仍然造成其解題時的錯誤。由於研究者補救教學活動只有三節課，並未對一元二次不等式的相關先備知識作太多著墨，極可能這是造成這些學生在後測成績無法大大提升的主因。

三、參與補救教學學生之前、後測錯誤類型分析

為了瞭解參與補救教學的學生其犯錯的主要錯誤類型，是否在補救教學後有所改善。在此將參與的學生在前測、後測所犯的錯誤類型作一整理與分析，並比較這些錯誤類型的變化情形。

下表 5-2-8 為所有學生在前、後測全部試題中，所犯的八種主要錯誤類型次

數分析表：

【表 5-2-8】前、後測，學生犯錯的主要錯誤類型次數

學生編號 前、後測		01		02		03		04		05		06	
		前	後	前	後	前	後	前	後	前	後	前	後
錯誤類型													
任意開方		1	0	3	2	2	0	1	0	1	1	0	1
任意平方		0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
將領導係數當成正數來處理		1	0	2	1	3	3	2	1	3	2	2	2
產生虛數比大小的謬誤		0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0
過度使用「無解」的概念		3	0	0	0	0	0	3	0	2	2	2	1
不會由二次函數圖形直接看出所對應之一元二次不等式的解		4	0	4	0	4	0	3	0	4	2	4	2
不知 ax^2+bx+c 恆為正數 或恆為負 數的充要 條件	不懂二次函 數和 x 軸無 交點的條件	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
	不懂二次函 數恆在 x 軸 上方的條件	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
	不知二次式 恆為正數或 恆為負數的 條件	2	1	2	0	2	0	1	0	2	2	1	0
變號處理錯誤		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0

學生編號 前、後測		07		08		09		10		11		12	
		前	後	前	後	前	後	前	後	前	後	前	後
錯誤類型													
任意開方		2	0	2	0	2	1	0	0	2	2	2	0
任意平方		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
將領導係數當成正數來處理		0	2	3	1	2	1	3	2	2	0	2	1
產生虛數比大小的謬誤		2	0	0	0	3	0	2	1	0	0	0	0
過度使用「無解」的概念		0	0	2	0	0	2	0	1	0	3	2	0
不會由二次函數圖形直接看出所對應之一元二次不等式的解		4	1	4	0	4	1	4	4	4	0	4	0
不知 $ax^2 + bx + c$ 恆為正數 或恆為負 數的充要 條件	不懂二次函 數和 x 軸無 交點的條件	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
	不懂二次函 數恆在 x 軸 上方的條件	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
	不知二次式 恆為正數或 恆為負數的 條件	2	0	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1
變號處理錯誤		0	0	0	0	0	0	1	0	0	4	1	0

學生編號 前、後測		13		14		15		16		總計	
		前	後	前	後	前	後	前	後	前	後
錯誤類型											
任意開方		3	1	2	1	0	0	1	0	24	9
任意平方		0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
將領導係數當成正數來處理		3	0	2	2	1	0	2	0	33	18
產生虛數比大小的謬誤		0	0	0	0	3	0	2	1	16	2
過度使用「無解」的概念		3	0	0	0	0	0	0	0	17	9
不會由二次函數圖形直接看出所對應之一元二次不等式的解		4	4	3	0	4	4	4	0	62	18
不知 $ax^2 + bx + c$ 恆為正數 或恆為負 數的充要 條件	不懂二次函 數和 x 軸無 交點的條件	0	0	0	0	0	0	0	0	6	1
	不懂二次函 數恆在 x 軸 上方的條件	0	0	0	0	0	0	0	0	7	4
	不知二次式 恆為正數或 恆為負數的 條件	2	2	2	2	2	0	2	2	28	16
變號處理錯誤		1	0	1	0	0	1	0	0	6	5

從【表 5-2-8】中可看出相較於前測，後測的錯誤類型犯錯次數已大幅降低。

以下將根據此錯誤類型變化分析表，對學生主要錯誤類型變化的情形作一討論：

1. 「不會由二次函數圖形直接看出所對應之一元二次不等式的解」的錯誤類型

由前、後測學生犯錯的主要錯誤類型次數分析表發現，在前測時全部學生都不會處理第二大題中四個有關「由二次函數圖形直接讀出一元二次不等

式解」的問題，但是經補救教學活動之後，從後測中發現不會由二次函數圖形直接看出所對應之一元二次不等式的解的同學已大大的減少，甚至有九人在這四個題目的答題全部正確，顯見本研究以圖解法為一元二次不等式的解題策略的補救教學活動，的確大大改善學生在這方面的錯誤類型。

2. 「產生虛數比大小的謬誤」的錯誤類型

在前測時有 7 人在三題用來檢測「產生虛數比大小的謬誤」的題目上，共犯了 16 人次的錯誤，但是後測時只剩兩人共 2 人次仍有此錯誤，可見以圖解法解一元二次不等式對於降低學生在這方面的錯誤頗有助益。

3. 「過度使用無解的概念」的錯誤類型

前測時有 7 人在三題用來檢測「過度使用無解的概念」錯誤類型的題目上，共犯了 17 人次的錯誤，而後測時仍有 5 人共 9 人次仍有如此的錯誤。值得一提的是，其中的 3 人在前測時並未顯示出如此的錯誤，而是表現出「產生虛數比大小的謬誤」。細看這 3 人在後測的解題過程，有 1 人未以圖解法解題，另 2 人雖嘗試以圖解法解題，可能是因相關知識的不足，以致於無法得知「當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為虛根時， $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸沒有交點」，因此不能成功地以圖解法來解這類型的問題，反而陷入當 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為虛根時，此時 $ax^2+bx+c<0$ (或 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c\leq 0$ 或 $ax^2+bx+c\geq 0$) 必為無解的錯誤中。

4. 「任意開方」的錯誤類型

- (1) 從學生在後測的卷面答題過程中，發現有五位同學在第一大題的第 1 小題：解不等式 $x^2 > 6$ ，仍犯有任意開方的錯誤，分析她們卷面答題的過程，發現有四人並未畫圖求解，而是在卷面留下「 $x^2 > 6 \Rightarrow x \geq \pm\sqrt{6}$ (或 $x > \sqrt{6}$)」的過程，經事後訪談兩位同學得知，她們當下只是認為該題很簡單並未多加思索，只是憑直覺的寫出作答的過程。而當研究者要求學生將此題以圖解法求解，把 $y = x^2 - 6$ 的圖形畫出，並標出圖形和 x 軸的交點，

發現這 2 位同學都能正確地解出答案。這說明學生學習上的錯誤常常是由直覺所造成的，而如何更正這些直覺性錯誤需要教師更進一步的努力。

(2) 在第一大題的第 1 小題：解不等式 $x^2 > 6$ ，有一位同學以畫圖求解，其解題的策略和繪製 $y = x^2 - 6$ 的圖形也都正確，但是在卷面留下

「 $x^2 > 6 \Rightarrow x \geq \pm\sqrt{6} \Rightarrow x > \sqrt{6} \text{ or } x < -\sqrt{6}$ 」的解題過程。經事後訪談同學得知，其觀念清楚無誤，只是當下解題時不知如何表示。此例給研究者一個啟示，就是研究者以 PowerPoint 為工具作補救教學時，只著重於觀念和概念的釐清，而未能如同傳統以黑板教學時將每一步驟條列清楚，讓學生得以模仿其作答的形式。也正由於此教學時的疏忽，致使學生無法正確表達出解題的過程。

5. 「將領導係數當成正數來處理」的錯誤類型

從前、後測的卷面答題過程中，原先有 9 位學生在第一大題的第 4、5、6 小題中，至少在其中的 2 小題中犯了「將領導係數當成正數來處理」的錯誤類型。經補救教學活動後，仍然有 4 位學生還是犯了一樣的錯誤類型，顯示補救教學活動在改善學生這方面的錯誤，可能稍嫌不足。

6. 「變號處理錯誤」的錯誤類型

「變號處理錯誤」的錯誤類型，就犯錯次數來看在補救教學的前後變化並不明顯，但就犯錯的人數來看從原本 6 人變成 2 人，其原因是有一位同學在後測時在第一大題的第 4、5、8、9 小題犯了「變號處理錯誤」的錯誤類型。從他答題的過程得知此位同學並未採取以補救教學活動中所強調的圖解法為其解題策略。經事後訪談，發現他覺得畫圖解一元二次不等式，太過於麻煩且費時，而且他仍認為解一元二次不等式如同解一元二次方程式一般，正因為如此才會犯「變號處理錯誤」的錯誤。這說明對於某些學生要改變其錯誤，不是一件容易的事，除了教師必須具備耐心之外，更需找出該生學生學習上的盲點，對症下藥方能改善其錯誤。

第三節 學生在補救教學活動的後測、延後測結果分析

為了瞭解補救教學活動成效的保留情形，本節將就所有參與補救教學活動的學生，在「一元二次不等式的主要錯誤類型篩選測驗」後測、延後測的答題正確率、主要錯誤類型改變情形作一探討。

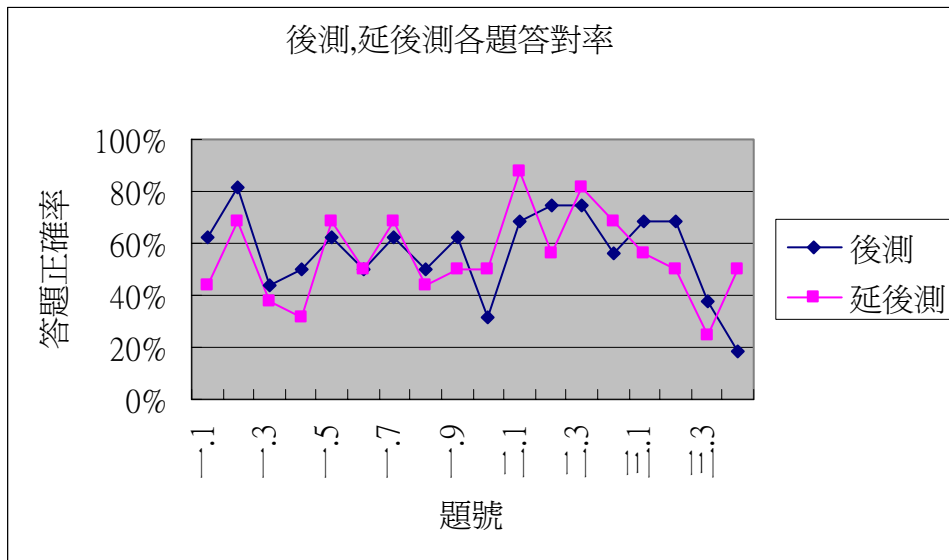
一、參與補救教學的學生後測、延後測的各題答題分析

為了瞭解參與補救教學的學生在後測、延後測各小題的答題情形，特將他們於「一元二次不等式的主要錯誤類型篩選測驗」後測、延後測中各小題的答題正確率列表及畫折線圖表示，並以無母數檢定分析後測、延後測各小題答題差異情形。表 5-3-1 為後測、延後測各小題答題正確率及答題差異情形比較表，圖 5-3-1 為後測、延後測各小題答題正確率折線圖：

【表 5-3-1】後測、延後測各小題答題正確率及答題差異情形

後測、延後測答題情形 題號	後測答題正確率	延後測答題正確率	McNemar Test P 值
一、1	62.5	43.75	0.250
一、2	81.25	68.75	0.687
一、3	43.75	37.5	1.000
一、4	50	31.25	0.453
一、5	62.5	68.75	1.000
一、6	50	50	1.000
一、7	62.5	68.75	1.000
一、8	50	43.75	1.000
一、9	62.5	50	0.727
一、10	31.25	50	0.508

二、1	68.75	87.5	0.375
二、2	75	56.25	0.375
二、3	75	81.25	1.000
二、4	56.25	68.75	0.625
三、1	68.75	56.25	0.687
三、2	68.75	50	0.250
三、3	37.5	25	0.500
三、4	18.75	50	0.063



【圖 5-3-1】後測、延後測各小題答題正確率折線圖

1. 以無母數檢定中 **McNemar Test** 檢測延後測與後測各小題答題的差異情形，從表 5-3-1 得知每一小題的 P 值均大於 0.005，表示出學生在延後測與後測中各小題的答題情形差異不大。且由上述圖表可看出延後測各小題答題正確率相較於後測，有 10 題下降，7 題上升，1 題則為不變。
2. 分析延後測答題正確率比後測低的題目：

【表 5-3-2】延後測答題正確率比後測低的題目

答題正確率(%) 題號	後測答題正確率	延後測答題正確率	下降比率
一、1	62.5	43.75	18.75
一、2	81.25	68.75	12.5
一、3	43.75	37.5	6.25
一、4	50	31.25	18.75
一、8	50	43.75	6.25
一、9	62.5	50	12.5
二、2	75	56.25	18.75
三、1	68.75	56.25	12.5
三、2	68.75	50	18.75
三、3	37.5	25	12.5

觀察上表得：

- (1) 對「一、1解不等式 $x^2 > 6$ 」、「一、2解不等式 $(x+1)^2 \leq 9$ 」與「一、3解不等式 $9x^2 + 6x + 1 > 0$ 」這三題可分解成完全平方式的一元二次不等式且用以檢測「任意開方」錯誤類型的試題，學生的解題正確率均下降，顯示這類型問題學習的保留效果可能不是很好。
- (2) 對「一、8解不等式 $x^2 + 2x - 5 \leq 4x^2 + x + 2$ 」和「一、9解不等式 $5x^2 + 4x - 3 \geq 7x^2 + 7x + 2$ 」必須移項、變號處理且用以檢測「虛數比大小的謬誤」及「過度使用無解的概念」的一元二次不等式問題，學生的解題正確率在延後測時呈現下降趨勢。
- (3) 三、1與三、2及三、3為必須利用「二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸無交點時的條件為 $b^2 - 4ac < 0$ 」來處理的題目。學生的延後測答題正確率比起後測都下降，顯見這種可能必須憑藉記憶解題的題目，保留效果比較差。

3. 分析延後測答題正確率比後測高的題目：

【表 5-3-3】延後測答題正確率比後測高的題目

答題正確率(%) 題號	後測答題正確率	延後測答題正確率	上升比率
一、5	62.5	68.75	6.25
一、7	62.5	68.75	6.25
一、10	31.25	50	18.75
二、1	68.75	87.5	18.75
二、3	75	81.25	6.25
二、4	56.25	68.75	22.5
三、4	18.75	50	31.25

觀察上表得：

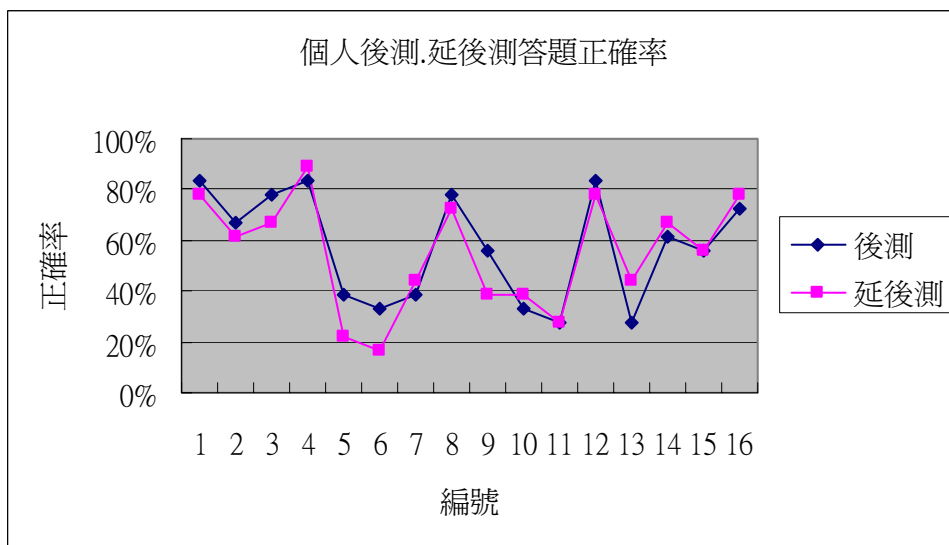
- (1) 延後測的答題正確率，比起前測提升比率最大的題目為三、4。「對任意實數 x ，若 $2x^2 + 2kx + k < 4x^2 + 6x + 3$ 恆成立，求實數 k 之範圍 = ?」。這個題目是位於卷面的最後一題，在後測時有 6 人因時間掌控不當以致於未作完，而在延後測時同學們在這方面改善了許多，也因此大幅提高了此題的解題正確率。
- (2) 學生對於第二大題 4 題有關「以二次函數找出一元二次不等式解」的問題，除了第二小題外，其餘三題在延後測的答題正確率比起前測均有所提升。從上隱約可以發現，當學生學會以二次函數直接找出一元二次不等式解後，即使經一段時間再作測驗，只要解題時能夠小心謹慎，面對這類問題仍有不錯的保留的效果。

二、參與補救教學的學生在後測、延後測的個人答題分析

下列圖表為後測、延後測個人答題正確率比較表與折線圖：

【表 5-3-4】後測、延後測中個人答題正確率

答題正確率(%)	後測答題正確率	延後測答題正確率
編號		
01	83.33	77.78
02	66.67	61.11
03	77.78	66.67
04	83.33	88.88
05	38.89	22.22
06	33.33	16.67
07	38.89	44.44
08	77.78	72.22
09	55.56	38.89
10	33.33	38.89
11	27.78	27.78
12	83.33	77.78
13	27.78	44.44
14	61.11	66.67
15	55.56	55.56
16	72.22	77.78



【圖 5-3-2】後測、延後測中個人答題正確率折線圖

【表 5-3-5】無母數檢定後測、延後測個人答題差異

NPar Tests

Wilcoxon Signed Ranks Test

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
posttal - testtal	Negative Ranks	8(a)	8.44	67.50
	Positive Ranks	6(b)	6.25	37.50
	Ties	2(c)		
	Total	16		

a posttal < testtal

b posttal > testtal

c posttal = testtal

posttal：表延後測試題答對情形

testtal：表後測試題答對情形

Test Statistics

	posttal - testtal
Z	-.973(a)
Asymp. Sig. (2-tailed)	.330

a Based on positive ranks.

1. 以無母數檢定中 **Wilcoxon Signed Ranks Test** 檢測後測與延後測個人答題的差異情形，從表 5-3-5 得知 $P=0.330>0.025$ ，顯示出參與補救教學的 16 名學生在後測與延後測的答題情形差異不大。且由上述圖表發現，延後測中個人答題正確率比後測低的同學共有 8 人，比後測高的同學共有 6 人，完全相同者則有 2 人，可見補救教學活動具有一定的保留效果。
2. 分析延後測個人答題正確率比後測低的同學：

【表 5-3-6】延後測中個人答題正確率比後測低的同學

答題正確率(%) 編號	後測答題正確率	延後測答題正確率
01	83.33	77.78
02	66.67	61.11
03	77.78	66.67

05	38.89	22.22
06	33.33	16.67
08	77.78	72.22
09	55.56	38.89
12	83.33	77.78

延後測個人答題正確率比後測低的同學共有 9 人，這 9 人中下降幅度最大的有 3 人，其中 2 人(05，06)後測的答題正確率均未達 40%。這似乎表示後測的答題正確率較低的同學在補救教學後，對於學習內容仍有許多不了解之處，而且先備知識不足之處仍未獲適當的補救，使得這些同學比起其他人學習的保留程度比較差。

3. 分析後測個人答題正確率高於 70% 的同學與延後測答題正確率的對照：

【表 5-3-7】後測個人答題正確率高於 70% 的同學與其延後測的對照

答題正確率(%) 編號	後測答題正確率	延後測答題正確率
01	83.33	77.78
03	77.78	66.67
04	83.33	88.88
08	77.78	72.22
12	83.33	77.78
16	72.22	77.78

從【表 5-3-7】中發現個人後測答題正確率高於 70% 的同學，其延後測答題正確率和前測的差異相較於其他同學比較小，顯示後測答題正確率高於 70% 的同學經補救教學後已能建立教學內容的正確概念，因此保留的效果好。

三、參與補救教學學生之後測、延後測的錯誤類型分析

由前一單元已瞭解參與補救教學的學生在補救教學後，犯錯的主要錯誤類型已有所改善，在此探討補救教學活動對於改善學生主要錯誤類型的保留程度為何。我們將參與的學生在後測、延後測所犯的錯誤類型作一整理與分析，並比較

這些錯誤類型是否有所變化。

下表為所有學生在後測、延後測全部試題中所犯的八種主要錯誤類型次數

分析表：

【表 5-3-8】後測、延後測中學生犯錯的主要錯誤類型次數

學生編號 後、延後測		01		02		03		04		05		06	
		後	延	後	延	後	延	後	延	後	延	後	延
錯誤類型													
任意開方		0	0	2	3	0	1	0	0	1	1	1	1
任意平方		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
將領導係數當成正數來處理		0	0	1	1	3	1	1	0	2	2	2	1
產生虛數比大小的謬誤		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
過度使用「無解」的概念		0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0
不會由二次函數圖形直接看出所對應之一元二次不等式的解		0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	4
不知 ax^2+bx+c 恆為正數 或恆為負 數的充要 條件	不懂二次函 數和 x 軸無 交點的條件	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	不懂二次函 數恆在 x 軸 上方的條件	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	不知二次式 恆為正數或 恆為負數的 條件	1	1	0	0	0	1	0	0	2	2	0	2
變號處理錯誤		0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0

學生編號 後、延後測		07		08		09		10		11		12	
		後	延	後	延	後	延	後	延	後	延	後	延
錯誤類型													
任意開方		0	0	0	2	1	3	0	0	2	0	0	0
任意平方		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
將領導係數當成正數來處理		2	2	1	1	1	1	2	1	0	3	1	2
產生虛數比大小的謬誤		0	0	0	0	0	0	1	0	0	3	0	0
過度使用「無解」的概念		0	0	0	0	2	0	1	0	3	0	0	0
不會由二次函數圖形直接看出所對應之一元二次不等式的解		1	1	0	1	1	1	4	2	0	0	0	1
不知 $ax^2 + bx + c$ 恆為正數 或恆為負 數的充要 條件	不懂二次函數和 x 軸無交點的條件	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
	不懂二次函數恆在 x 軸上方的條件	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
	不知二次式恆為正數或恆為負數的條件	0	0	2	1	1	1	1	2	2	1	1	0
變號處理錯誤		0	1	0	0	0	0	0	1	4	3	0	0

學生編號 後、延後測		13		14		15		16		總計	
		後	延	後	延	後	延	後	延	後	延
錯誤類型											
任意開方		1	2	1	1	0	1	0	0	9	15
任意平方		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
將領導係數當成正數來處理		0	1	2	4	0	1	0	0	18	21
產生虛數比大小的謬誤		0	0	0	0	0	0	1	0	2	3
過度使用「無解」的概念		0	0	0	0	0	3	0	0	9	3
不會由二次函數圖形直接看出所對應之一元二次不等式的解		4	0	0	0	4	3	0	1	18	16
不知 $ax^2 + bx + c$ 恆為正數 或恆為負 數的充要 條件	不懂二次函數和 x 軸無交點的條件	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
	不懂二次函數恆在 x 軸上方的條件	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3
	不知二次式恆為正數或恆為負數的條件	2	0	2	1	0	0	2	1	16	13
變號處理錯誤		0	0	0	0	1	0	0	0	5	7

1. 從【表 5-3-8】後測、延後測學生犯錯的主要錯誤類型次數表中，發現學生在延後測的主要錯誤類型犯錯次數與後測時相差不多，甚至在其中五種主要錯誤類型延後測的犯錯次數比後測還低，顯示補救教學活動在改善學生在一元二次不等式的錯誤類型，具有相當的學習保留效果。

2. 從【表 5-3-8】中，發現全部學生在 3 個檢測「任意開方」這個錯誤類型的題目上，總共犯了 10 次，但是在延後測的答題時卻提高為 15 次，顯示補救教學活動在改善這個錯誤類型的保留效果不是很好。從與學生答題過程及面談發現，學生在解這類用以檢測「任意開方」的問題時，仍然常因為直覺的影響而犯錯，對於如何打破學生直覺性的錯誤，值得後續再作研究。
3. 從【表 5-3-8】中，發現學生對「將領導係數當成正數來處理」的錯誤由後測的 18 次升為延後測的 21 次，檢視學生在延後測的答題過程，在 4 題用來檢測「將領導係數當成正數來處理」錯誤類型的題目中，發現有 6 名學生僅在一、4 小題「解不等式 $(1-2x)(3x-5) \geq 0$ 」犯錯，根據事後與學生面談得知，學生們普遍認為這個題目的「負號」在括號內，容易因粗心而疏忽造成「將領導係數當成正數來處理」的錯誤，這也是為什麼這個錯誤類型在延後測時犯錯次數會增加的原因。
4. 從【表 5-3-8】中，發現學生對「變號處理錯誤」的錯誤由後測的 5 次升為延後測的 7 次，經過與幾位在後測時未犯錯但在延後測時卻犯錯的學生面談後，得知他們認為「因粗心而未注意變號」是他們在延後測時犯錯的主因，顯見一些學生對於不等式的同乘於或同除以「負數」，不等式的符號需變號仍不夠熟練。
5. 從【表 5-3-8】中，發現學生對「過度使用無解的概念」的錯誤由後測的 9 次降為延後測的 3 次，檢視學生延後測的答題過程，在 3 題用來檢測「過度使用無解的概念」錯誤類型的題目中，發現學生的答題正確率相較於後測並未所增加。只是有 4 位在後測犯錯的同學，在延後測的答題時因解題不完全、計算錯誤或空白，造成延後測時並未表現出此錯誤類型，顯示「過度使用無解的概念」的錯誤類型在延後測和後測時沒有很大的差異。

第四節 綜合分析

從上述的討論中我們知道，補救教學活動對於改善學生在一元二次不等式的一些主要錯誤類型確有助益。為了更瞭解學生對這種以 PowerPoint 為工具作補救教學接受程度及看法，研究者以自編的補救教學課程意見調查表(如附錄五)，對 16 名參與補救教學活動進行問卷調查及適度的訪談後，有下列幾點發現：

1. 補救教學的學習內容與教材有意義

本研究以 PowerPoint 為工具作補救教學的學習方式，根據事後補救教學課程意見調查問卷(詳見附錄五)，學生對課程內容的反應(表 5-4-1)，得知補救教學活動使學習內容與教材更生動且有意義，普遍認為這種藉由電腦繪製函數圖形的輔助及標示不等式所求區域的動態圖解教學方式，使他們更容易了解以二次函數來求解一元二次不等式的概念。而透過以 Visual Basic 程式所撰寫的二次函數繪圖軟體的動態圖形展示，使他們直觀地了解二次函數與 x 軸沒有交點的充要條件，進一步使其能明白一元二次不等式恆正或恆負的充要條件。在補救教學活動前，他們對於學習一元二次不等式常只是以記憶中的公式與規則胡亂解題，並不了解背後的原理，因此在面對測驗中所刻意設計的題目，就狀況百出了。但在以 PowerPoint 為工具作補救教學活動後，對於一元二次不等式整體的概念就有了更深一層的體會。

【表 5-4-1 補救教學課程意見調查問卷中，學生對課程內容的反應】

題 目	平均分數
2.我喜歡這種以 PowerPoint 動態圖解一元二次不等式的教學的學習型式。	4.1
3.我覺得以 PowerPoint 動態的圖解一元二次不等式的教學比起平常課堂上的教學，上課的內容更生動、清楚及容易了解。	4.3
5.對於課程中的上課內容我都可以理解。	4.2
9.我打從心理不願意參與這個補救教學活動。	4.5
10.我不能適應這種以 PowerPoint 動態圖解一元二次不等式的教學型式。	3.9
11.上完這些課程的內容，讓我更清楚如何用二次函數的圖形來解一元二次不等式的觀念。	4.1
12.由二次函數畫圖軟體的操作展示，讓我更清楚二次函數和 x 軸產生(二、一、無)交點時的條件。	4.6
13.上完這些課程的內容，我覺得對一元二次不等式的解題很有幫助。	4.4
14.如果有機會，我願意繼續參與這種 PowerPoint 的動態教學，去學習相關的數學課程。	4.4

第 2、3、5、11、12、13、14 題其評分標準為：

非常同意：5 分 同意：4 分 普通：3 分

同意：2 分 非常不同意：1 分

第 9 題與第 10 題為逆向題其評分標準為：

非常不同意：5 分 不同意：4 分 普通：3 分

同意：2 分 非常同意：1 分

15.對於我們以電腦為工具，所進行的動態圖解一元二次不等式的補救教學活動，是否有些建議及感言，請妳將心中的想法寫下：	多數學生($\frac{10}{16}$)回答的答案：以前都死背公式經這次教學後，已清楚的了解其原理不用再死背公式，覺得很有收穫。
--	---

2. 增進學生的學習意願

本研究以 PowerPoint 為工具作電腦補救教學的學習方式，其動態的圖形變化畫面，能增進學生的學習意願。相較於以教師為中心的傳統講述型的教學，學生上課時畫面清晰，不會受到教室黑板反光或老師板書凌亂影響。而且老師上課時用字遣詞在課前幾乎已設定好，不容易在上課時出差錯，因此學生上課的注意力與興趣都提高了許多，學習動機受到增強，因而較會主動

學習。但以 PowerPoint 為工具作電腦補救教學的方式，仍有一些限制。例如，有時有些技術性問題無法解決，電腦畫面不夠連續或一些偶發性的問題等。若電腦輔助教學與傳統教學混合使用，其效果應該會更為顯著(Dalton & Hannafin, 1988)。

3. 學生正確的概念建立後保留效果好

從「一元二次不等式主要錯誤類型篩選測驗」的前測中與訪談中得知，學生對於二次式 $ax^2 + bx + c$ 恆正或恆負的充要條件總會遺忘或與相關概念混淆。對於一元二次不等式的求解的問題，更常只是記憶公式與規則或者憑印象胡亂作答。正因為學生之前的學習為機械式的理解方式，只是背方法與公式而不知為什麼，學習自然感到枯燥乏味，且不易培養學生自己解決問題的能力。補救教學完畢以後，研究者發現那些在過程中充分參與與積極學習的同學，可以把一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結，不再只是靠記憶公式解題，而對於二次式 $ax^2 + bx + c$ 恆為正數或恆負的充要條件，也不再只是記憶或憑空想像而已，因為透過因果式的理解之後，學生了解公式的由來和原理，即使忘了也可以自己導出，學習的保留效果自然好。

4. 以 PowerPoint 為工具作補救教學後，學生偏向以圖解法解一元二次不等式

在補救教學活動之前，學生對一元二次不等式的解題策略五花八門，解題錯誤率也很高。對於給二次函數圖形去找出一元二次不等式解的問題，由於判讀的能力低，因此常常繞了一大圈以代數符號操弄的方法來求解，費時又常出錯。而在補救教學活動之後，學生對一元二次不等式的解題策略大多採取圖解法，解題成功率提高了許多。對於給二次函數圖形去找出一元二次不等式解的問題，由於判圖的能力強多了，解題速度快且正確率高。