第肆章　資料分析

本研究在資料收集方面，包含學生的比例問題紙筆測驗及個別訪談的資料，依據研究目的及研究問題一一呈現比例問題的表面結構和深層結構兩個因素對於國中一年級學生在解比例問題的表現之統計資料分析結果，由於資料較繁雜，為了方便讀者閱讀，將此章分成下列節次呈現：

第一節　比例問題的表面結構與國一學生的解題表現之關係

一、「不同數字型式」與學生解題表現之關係

二、「不同語意類型」與學生解題表現之關係

三、「不同量的性質」與學生解題表現之關係

第二節　比例問題的表面結構與國一學生的解題策略之關係

一、「不同數字型式」與學生解題策略之關係

二、「不同語意類型」與學生解題策略之關係

三、「不同量的性質」與學生解題策略之關係

第三節　比例問題的深層結構與國一學生的解題表現之關係

一、「比例概念的共變原則」與學生解題表現之關係

二、「比例概念的不變原則」與學生解題表現之關係

三、「比例概念的相對改變原則」與學生解題表現之關係

第四節　比例問題的深層結構與國一學生的解題策略之關係

第五節　比例問題的表面結構與深層結構解題之間的關聯性

第一節 比例問題的表面結構與國一學生的解題表現之關係

一、「不同數字型式」與學生解題表現之關係

(一)結果

本節的第一部分主要探討學生在不同數字型式的解題表現是否有差異，下表 4-1-1 為不同數學學業成就的學生在不同題本的解題表現。

表 4-1-1 不同數學學業成就的學生在不同題本的解題表現

題本	人數	H	M	L	總平均	標準差
T1	116	28.86	28.37	20.09	26.27	6.34
T2	113	27.11	23.79	18.41	22.96	6.93
T3	118	29.69	27.94	24.58	26.91	5.24
T4	113	27.57	22.62	8.167	21.48	10.40

(1)由總平均數和標準差比較四個題本的差異

因為本研究是依數字型式將比例問題測驗題本分為 T1、T2、T3、T4 四個題本，每一個學生只做其中一個題本，因此，為排除學生之間本身的差異，所以不直接做統計上的檢驗來驗證這四個題本的難易度。由文獻可知，由易至難的順序為 T1、T2、T3、T4，但由研究者收集到的資料來看，見下圖 4-1-1，由易至難的順序應為 T3、T1、T2、T4，其中 T1 和 T3 的差異不大，平均數非常接近，而 T4 題本的平均數最低，其表現最差。四個題本的標準差由小至大為 T3、T1、T2、T4，代表在 T3 題本中學生的表現差異最小、T4 題本差異最大，而 T4 題本中學生的分數很分散，高分的很高，低分的很低，差距相當大。

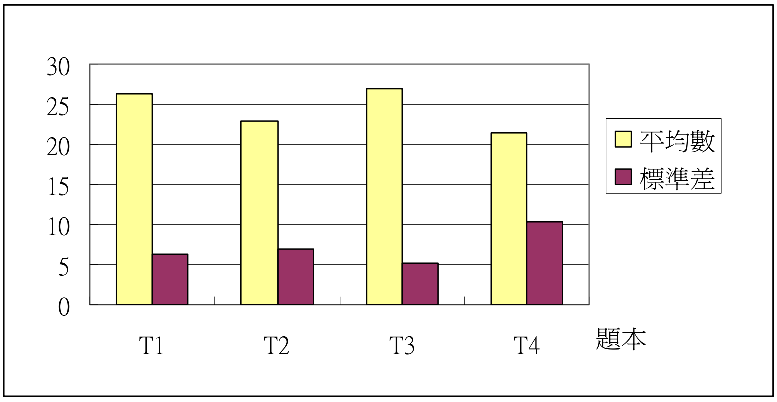


圖 4-1-1 學生在四個題本的解題表現差異

(2)由不同題本比較不同數學學業成就學生的差異

若從四個題本的總平均數來看，題本之間的分數沒有很明顯的差別，但如果將每個題本的高、中、低數學學業成就的學生單獨看，見下圖 4-1-2，就會發現在 T1 題本中高、中數學學業成就的學生平均分數非常接近，而低數學學業成就的學生平均明顯低很多，代表高、中數學學業成就的學生在 T1 題本中是無法鑑別出差異的，只有低數學學業成就的學生才可鑑別出來；T2 題本中，高、中、低數學學業成就的學生平均數都有明顯的差距，代表在 T2 題本中可鑑別出不同數學學業成就的學生；T3 題本中，高、中、低數學學業成就學生的平均數有差異，但不是很明顯，因此，T3 題本雖然有鑑別度，但鑑別的程度不高；T4 題本中，高、中、低數學學業成就的學生平均數都有明顯的差異，尤其是低數學學業成就的學生分數非常低，代表低數學學業成就的學生在 T4 題本的表現很差，答對率很低，因此，T4 題本對不同數學學業成就的學生鑑別度很高。

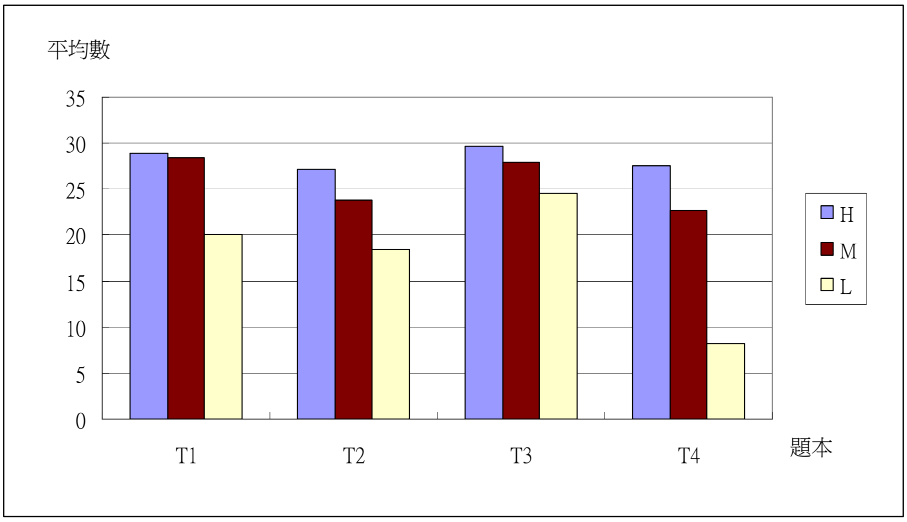


圖 4-1-2 不同題本對不同數學學業成就學生的解題表現差異

(3)由不同數學學業成就的學生比較不同題本的差異

由下圖 4-1-3，對高數學學業成就的學生而言，四個題本的平均數由大至小為 T3、T1、T4、T2，而且這個平均數差異都很小，代表不管在哪一個題本，高數學學業成就的學生其解題表現都不受題本影響，對他們而言，答對率都很高，沒有難易度之分；從中數學學業成就的學生來看，四個題本的平均數由大至小為 T1、T3、T2、T4，T1 和 T3 題本的差異不大，顯示他們在做這兩個題本的時候沒有太大差別，而在 T2 及 T4 題本的平均數較差，表示對中數

學學業成就的學生而言 T2 及 T4 題本是較困難的；從低數學學業成就的學生來看，四個題本的平均數由大至小為 T3、T1、T2、T4，每一個題本之間都有明顯的差距，代表不同的題本對低數學學業成就的學生而言解題表現都是有差異的，尤其是在 T4 題本，平均數相當的低，所以對低數學學業成就的學生來說，他們幾乎在做 T4 題本時遭遇到很多困難，錯誤率很高。

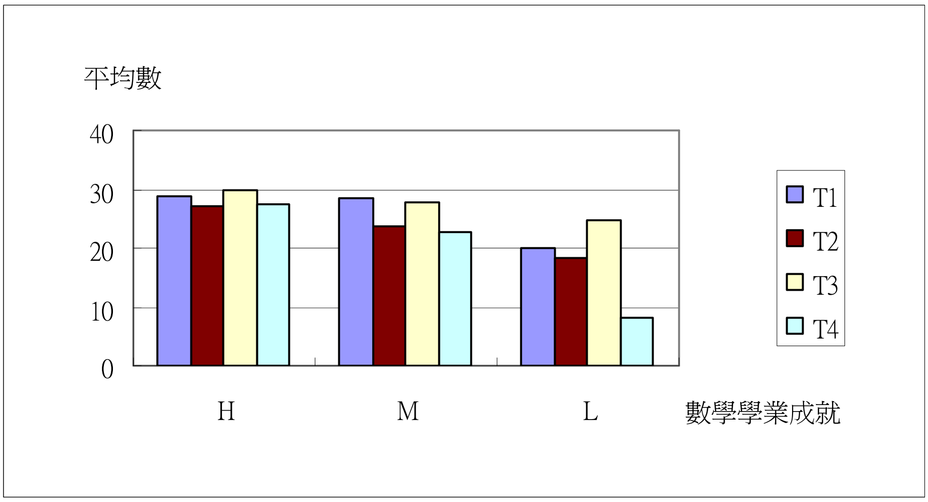


圖 4-1-3 不同數學學業成就的學生在不同題本的解題表現差異

(二)討論

由以上結果可知，學生在 T1 及 T3 題本的解題表現優於 T2 及 T4 題本的解題表現，而 T4 題本的解題表現最差，與文獻提到學生較擅長解決整數比問題，對非整數比問題認為較困難的結果一致。除此之外，楊錦連(民 87)的研究結果發現數字型式(A：B=C：X)對國小五年級兒童的解題表現由好至差為：第一式(C 同時是 B 和 A 的整數倍)、第二式(B 是 A 的整數倍)、第三式(C 是 A 的整數倍)、第四式(C 不是 A 或 B 的整數倍)；對國小六年級兒童的解題表現為：第一式優於第二式和第三式、第二式和第三式優於第四式、第二式和第三式之間無差異，代表數字型式與解題的表現有關。

文獻上的研究結果與本研究四個題本由簡至難的順序 T3、T1、T2、T4 不大一致，原因可能是本研究的比例問題測驗中數據大小較相近，所以導致學生很容易計算，因此造成 T1 和 T3 題本的平均數差異很小，沒有明顯的差別，而且也可能因為數字較小較相近，造成學生使用「差數相等」策略的比率提高，在 T2 題本中，若學生沒察覺數字間的倍數關係，則容易犯錯，因此，T2 題本的表現就相對較不好。

二、 「不同語意類型」與學生解題表現之關係

本節的第二部分主要探討不同數學學業成就學生在不同語意類型的解題表現是否會有顯著差異。研究者採用「多變量重複量數變異數分析」，以不同數學學業成就學生作為自變項，所有學生在「比例問題測驗」上五種語意類型的平均得分為依變項，必須說明的是，由於放大-縮小-外在量只有一題，所以在進行多變量重複量數變異分析時並沒有將此語意類型納入分析，而因為每位學生只做其中一個題本，因此分成四個題本探討其結果。

(一)結果

(1) T1 題本：

表 4-1-2　T1 題本：不同數學學業成就的學生在不同語意類型解題表現上的變異數分析摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	16.27	4	110	<.0001
Pillai's Trace	16.27	4	110	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	16.27	4	110	<.0001
Roy's Greatest Root	16.27	4	110	<.0001

由上表 4-1-2 可知，Wilks' Lambda 的統計考驗值達顯著水準，$F(4,110)=16.27$，$p<.0001$，可見不同數學學業成就的學生在不同語意類型的解題表現呈現顯著差異，至於不同數學學業成就的學生與不同語意類型在 T1 題本的交互作用，其統計考驗結果如下表 4-1-3 所示：

表 4-1-3　T1 題本：不同數學學業成就與不同語意類型的解題表現之間的交互作用摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	4.90	8	220	<.0001
Pillai's Trace	4.58	8	222	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	5.24	8	154.84	<.0001
Roy's Greatest Root	10.24	4	111	<.0001

由上表可知，透過多變量重複量數變異數分析方式，發現不同數學學業成就與不同語意類型的解題表現兩個變項之間的交互作用呈現顯著差異，其相關的 Wilks' Lambda 統計考驗值達顯著水準，F(8,220)=4.90，p<.0001；因此，有證據顯示不同數學學業成就的學生在五種不同語意類型解題的表現差異之情況是不相同的。

以下報導描述性統計的資料，以協助進一步瞭解不同數學學業成就學生在不同語意類型題目上的表現，為了完整之故，特別將先前「放大-縮小-外在量」的資料一併報導，結果如下表 4-1-4 所示：

表 4-1-4 不同數學學業成就學生在 T1 題本不同語意類型的解題表現

T1 題本	熟知的量數	部分-部分-不混合	部分-部分-混合	關係集合	放大-縮小-外在量	放大-縮小-內在量
H	1.98	1.83	1.88	1.94	2	1.88
M	1.99	1.79	1.74	1.92	2	1.85
L	1.71	0.81	1.33	1.33	1.4	1.42

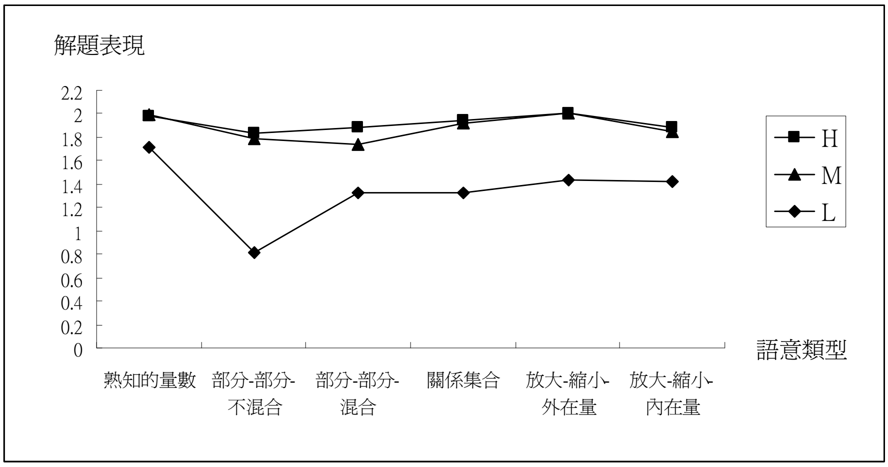


圖 4-1-4 不同數學學業成就學生在 T1 題本不同語意類型的解題表現

由上表 4-1-4 及圖 4-1-4 可看出在 T1 題本中，高數學學業成就學生的解題表現基本上優於中數學學業成就學生，中數學學業成就學生的解題表現又優於低數學學業成就學生。此外，高及中數學學業成就學生在六種語意類型題目的表現均優於低數學學業成就學生，低數學學業成就學生在「部分-部分-不混合」的題目解題表現明顯最差，與高及中數學學業成就學生有明顯的落差。

(2) T2 題本：

表 4-1-5　T2 題本：不同數學學業成就的學生在不同語意類型解題表現上的變異數分析摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	27.04	4	107	<.0001
Pillai's Trace	27.04	4	107	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	27.04	4	107	<.0001
Roy's Greatest Root	27.04	4	107	<.0001

由上表 4-1-5 可知，Wilks' Lambda 的統計考驗值達顯著水準，$F(4,107)=27.04$，$p<.0001$，可見不同數學學業成就的學生在不同語意類型的解題表現呈現顯著差異，至於不同數學學業成就的學生與不同語意類型在 T2 題本的交互作用，其統計考驗結果如下表 4-1-6 所示：

表 4-1-6　T2 題本：不同數學學業成就與不同語意類型的解題表現之間的交互作用摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	2.94	8	214	0.0039
Pillai's Trace	2.94	8	216	0.0038
Hotelling-Lawley Trace	2.94	8	150.55	0.0044
Roy's Greatest Root	4.06	4	108	0.0042

由上表可知，透過多變量重複量數變異數分析方式，發現不同數學學業成就與不同語意類型的解題表現兩個變項之間的交互作用呈現顯著差異，其相關的 Wilks' Lambda 統計考驗值達顯著水準，$F(8,214)=2.94$，$p=.0039<.01$。因此，不同數學學業成就的學生在五種不同語意類型解題的表現差異之情況並不相同。

表 4-1-7 不同數學學業成就學生在 T2 題本不同語意類型的解題表現

T2 題本	熟知的量數	部分-部分-不混合	部分-部分-混合	關係集合	放大-縮小-外在量	放大-縮小-內在量
H	1.98	1.66	1.80	1.78	1.87	1.72
M	1.88	1.06	1.57	1.66	1.82	1.37
L	1.68	0.74	1.01	1.23	1.56	1.06

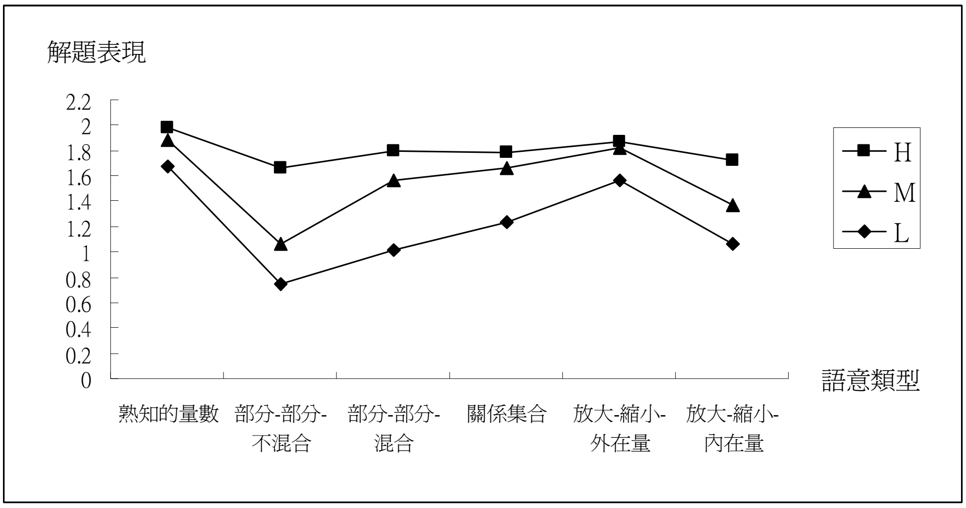


圖 4-1-5 不同數學學業成就學生在 T2 題本不同語意類型的解題表現

由上表 4-1-7 及圖 4-1-5 可看出在 T2 題本中，高數學學業成就學生的解題表現明顯優於中數學學業成就學生，中數學學業成就學生的解題表現又明顯優於低數學學業成就學生，中、低數學學業成就學生在「部分-部分-不混合」的題目解題表現明顯最差，其次為「部分-部分-混合」和「放大-縮小-內在量」。

(3) T3 題本：

表 4-1-8 T3 題本：不同數學學業成就的學生在不同語意類型解題表現上的變異數分析摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	11.67	4	112	<.0001
Pillai's Trace	11.67	4	112	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	11.67	4	112	<.0001
Roy's Greatest Root	11.67	4	112	<.0001

由上表 4-1-8 可知，Wilks' Lambda 的統計考驗值達顯著水準，$F(4,112)=11.67$，$p<.0001$，可見不同數學學業成就的學生在不同語意類型的解題表現呈現顯著差異，至於不同數學學業成就的學生與不同語意類型在 T3 題本的交互作用，其統計考驗結果如下表 4-1-9 所示：

表 4-1-9　T3 題本：不同數學學業成就與不同語意類型的解題表現之間的交互作用摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	2.77	8	224	0.0061
Pillai's Trace	2.72	8	226	0.0070
Hotelling-Lawley Trace	2.83	8	157.69	0.0058
Roy's Greatest Root	5.02	4	113	0.0009

由上表可知，透過多變量重複量數變異數分析方式，發現不同數學學業成就與不同語意類型的解題表現兩個變項之間的交互作用呈現顯著差異，其相關的 Wilks' Lambda 統計考驗值達顯著水準，$F(8,224)=2.77$，$p=.0061<.01$。因此，不同數學學業成就的學生在五種不同語意類型解題的表現差異之情況並不相同。

表 4-1-10 不同數學學業成就學生在 T3 題本不同語意類型的解題表現

T3 題本	熟知的量數	部分-部分-不混合	部分-部分-混合	關係集合	放大-縮小-外在量	放大-縮小-內在量
H	2	1.97	1.97	1.99	2	1.94
M	2	1.5	1.83	1.94	2	1.79
L	1.85	1.24	1.68	1.75	1.55	1.44

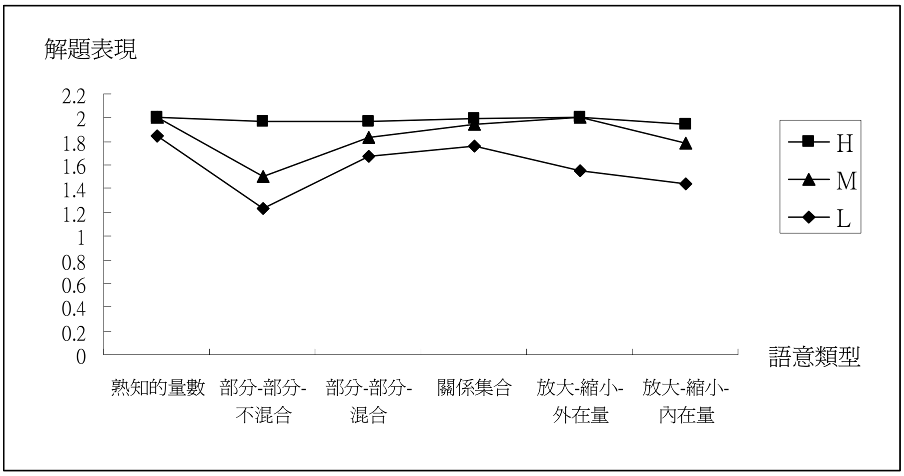


圖 4-1-6 不同數學學業成就學生在 T3 題本不同語意類型的解題表現

由上表 4-1-10 及圖 4-1-6 可看出在 T3 題本中，高數學學業成就學生的解題表現明顯優於中數學學業成就學生，中數學學業成就學生的解題表現又明顯優於低數學學業成就學生，高數學學業成就學生的平均分數都很接近，而中、低數學學業成就學生在「部分-部分-不混合」的題目解題表現明顯比高數學學業成就的學生差。

(4) T4 題本：

表 4-1-11　T4 題本：不同數學學業成就的學生在不同語意類型解題表現上的變異數分析摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	17.68	4	107	<.0001
Pillai's Trace	17.68	4	107	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	17.68	4	107	<.0001
Roy's Greatest Root	17.68	4	107	<.0001

由上表 4-1-11 可知，Wilks' Lambda 的統計考驗值達顯著水準，$F(4,107)=17.68$，$p<.0001$，可見不同數學學業成就的學生在不同語意類型的解題表現呈現顯著差異，至於不同數學學業成就的學生與不同語意類型在 T4 題本的交互作用，其統計考驗結果如下表 4-1-12 所示：

表 4-1-12　T4 題本：不同數學學業成就與不同語意類型的解題表現之間的交互作用摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	2.75	8	214	0.0065
Pillai's Trace	2.73	8	216	0.0069
Hotelling-Lawley Trace	2.79	8	150.55	0.0067
Roy's Greatest Root	4.53	4	108	0.0020

由上表可知，透過多變量重複量數變異數分析方式，發現不同數學學業成就與不同語意類型的解題表現兩個變項之間的交互作用呈現顯著差異，其相關的 Wilks' Lambda 統計考驗值達顯著水準，$F(8,214)=2.75$，$p=.0065<.01$。因此，不同數學學業成就的學生在五種不同語意類型解題的表現差異之情況並不相同。

表 4-1-13 不同數學學業成就學生在 T4 題本不同語意類型的解題表現

T4 題本	熟知的量數	部分-部分-不混合	部分-部分-混合	關係集合	放大-縮小-外在量	放大-縮小-內在量
H	1.96	1.3	1.84	1.84	1.89	1.64
M	1.78	1.33	1.57	1.47	1.6	1.28
L	0.94	0.19	0.33	0.47	0.56	0.24

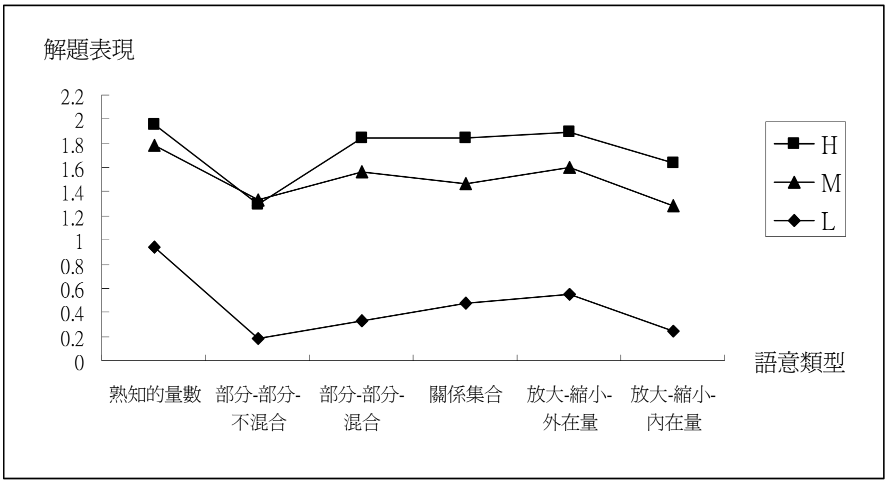


圖 4-1-7 不同數學學業成就學生在 T4 題本不同語意類型的解題表現

由上表 4-1-13 及圖 4-1-7 可看出在 T4 題本中，高數學學業成就學生的解題表現明顯優於中數學學業成就學生，中數學學業成就學生的解題表現又明顯優於低數學學業成就學生，高、低數學學業成就學生在「部分-部分-不混合」的題目解題表現明顯最差，低數學學業成就學生在 T4 題本的解題表現比其它題本差，且與高、中數學學業成就學生的解題表現落差非常大。

(二)討論

綜合以上四個題本的分析可看出不同數學學業成就學生在不同語意類型的解題表現都有顯著的差異，由下表 4-1-14 可得知，四種語意類型的解題表現為：「熟知的量數」問題解題表現優於「關係集合」問題，又優於「放大-縮小」問題，「部分-部分」問題的表現最差。

表 4-1-14 學生在不同語意類型上的解題表現

語意類型	熟知的量數			部分-部分				關係集合					放大-縮小		
				不混合		混合							外在量	內在量	
題號	5	7	14	1	9	2	10	3	6	8	11	15	12	4	13
平均數	1.87	1.88	1.80	1.44	1.30	1.48	1.68	1.62	1.83	1.81	1.34	1.66	1.72	1.63	1.37
標準差	0.49	0.46	0.60	0.90	0.95	0.87	0.73	0.78	0.55	0.58	0.93	0.75	0.68	0.76	0.92
總平均數	1.85			1.475				1.652					1.573		

在 Lamon(1993)的訪談研究結果中，四個解題表現由好至差的順序為「關係集合」、「部分-部分」、「熟知的量數」、「放大-縮小」問題，與本研究結果的順序相差甚大，研究者認為這與研究對象的年齡、人數及施測的題目不同有關，本研究的研究對象為學過比例概念的國一學生，Lamon 的研究對象是國小六年級尚未正式學過比例概念的學生，因此，無法相提並論做比較，且在題目設計上，本研究的數字大小控制在 30 以內的整數，倍數也都保持在 10 倍以內，採用的是第四項的缺項問題，這與 Lamon 的題目相差甚遠，所以才會有如此差別的結果。而本研究的結果發現「熟知的量數」問題對學生而言是較容易的，原因是這些題目對學生而言是較熟悉且有解題經驗的，因此，他們能正確解題的比率也較高。

三、 「不同量的性質」與學生解題表現之關係

本節的第三部分主要探討不同數學學業成就學生在不同量的性質的解題表現是否會有顯著差異。研究者採用「多變量重複量數變異數分析」，以不同數學學業成就學生作為自變項，所有學生在「比例問題測驗」上五種量的性質的平均得分為依變項，進行多變量重複量數變異數分析，因為每位學生只做其中一個題本，因此分成四個題本探討其結果。

(一)結果

(1) T1 題本：

表 4-1-15　T1 題本：不同數學學業成就的學生在不同量的性質解題表現上的變異數分析摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	16.32	4	110	<.0001
Pillai's Trace	16.32	4	110	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	16.32	4	110	<.0001
Roy's Greatest Root	16.32	4	110	<.0001

由上表 4-1-15 可知，Wilks' Lambda 的統計考驗值達顯著水準，$F(4,110)=16.32$，$p<.0001$，可見不同數學學業成就的學生在不同量的性質的解題表現呈現顯著差異，至於不同數學學業成就的學生與不同量的性質在 T1 題本的交互作用，其統計考驗結果如下表 4-1-16 所示：

表 4-1-16　T1 題本：不同數學學業成就與不同量的性質的解題表現之間的交互作用摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	4.42	8	220	<.0001
Pillai's Trace	4.22	8	222	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	4.64	8	154.84	<.0001
Roy's Greatest Root	8.65	4	111	<.0001

由上表可知，透過多變量重複量數變異數分析方式，發現不同數學學業成就與不同量的性質的解題表現兩個變項之間的交互作用呈現顯著差異，其相關的

Wilks' Lambda 統計考驗值達顯著水準，F(8,220)=4.90，p<.0001。因此，不同數學學業成就的學生在五種不同量的性質解題的表現差異之情況並不相同。

表 4-1-17 不同數學學業成就學生在 T1 題本不同量的性質的解題表現

T1 題本	離散量-離散量-內比	離散量-離散量-外比	離散量-連續量-外比	連續量-連續量-內比	連續量-連續量-外比
H	1.92	1.98	1.98	1.88	1.92
M	1.79	2	1.99	1.86	1.95
L	1.15	1.75	1.56	1.24	1.34

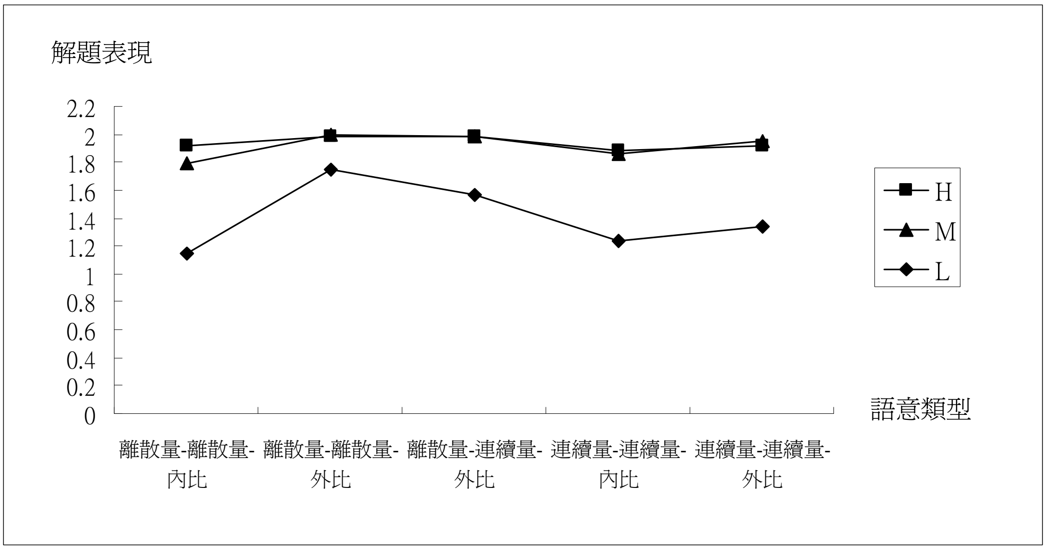


圖 4-1-8 不同數學學業成就學生在 T1 題本不同量的性質的解題表現

由上表 4-1-17 及圖 4-1-8 可看出在 T1 題本中，高、中數學學業成就學生的解題表現差異不大，低數學學業成就學生的解題表現明顯較差，中、低數學學業成就學生在「離散量-離散量-內比」的題目解題表現最差。

(2) T2 題本：

表 4-1-18 T2 題本：不同數學學業成就的學生在不同量的性質解題表現上的變異數分析摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	37.64	4	107	<.0001
Pillai's Trace	37.64	4	107	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	37.64	4	107	<.0001
Roy's Greatest Root	37.64	4	107	<.0001

由上表 4-1-18 可知，Wilks' Lambda 的統計考驗值達顯著水準，$F(4,107)=37.64$，$p<.0001$，可見不同數學學業成就的學生在不同量的性質的解題表現呈現顯著差異，至於不同數學學業成就的學生與不同量的性質在 T2 題本的交互作用，其統計考驗結果如下表 4-1-19 所示：

表 4-1-19　T2 題本：不同數學學業成就與不同量的性質的解題表現之間的交互作用摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	3.48	8	214	0.0009
Pillai's Trace	3.34	8	216	0.0013
Hotelling-Lawley Trace	3.63	8	150.55	0.0007
Roy's Greatest Root	6.94	4	108	<.0001

由上表可知，透過多變量重複量數變異數分析方式，發現不同數學學業成就與不同量的性質的解題表現兩個變項之間的交互作用呈現顯著差異，其相關的 Wilks' Lambda 統計考驗值達顯著水準，$F(8,214)=3.48$，$p=.0009<.01$。因此，不同數學學業成就的學生在五種不同量的性質解題的表現差異之情況並不相同。

表 4-1-20 不同數學學業成就學生在 T2 題本不同量的性質的解題表現

T2 題本	離散量-離散量-內比	離散量-離散量-外比	離散量-連續量-外比	連續量-連續量-內比	連續量-連續量-外比
H	1.80	1.95	2	1.63	1.92
M	1.51	1.85	1.91	1.31	1.85
L	1.08	1.76	1.76	0.83	1.45

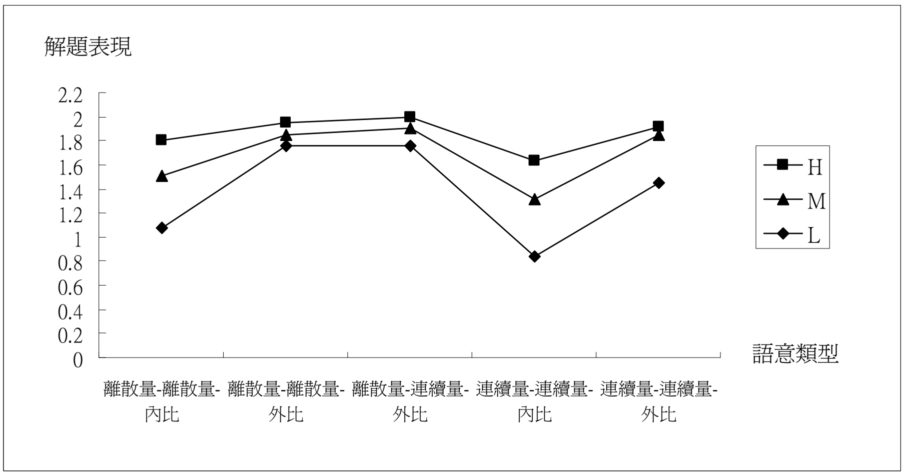


圖 4-1-9 不同數學學業成就學生在 T2 題本不同量的性質的解題表現

由上表 4-1-20 及圖 4-1-9 可看出在 T2 題本中，高數學學業成就學生的解題表現明顯優於中數學學業成就學生，中數學學業成就學生的解題表現又明顯優於低數學學業成就學生，而且從圖 4-1-9 得知高、中、低數學學業成就的學生其解題表現曲線很類似，所有學生在「連續量-連續量-內比」的題目表現最差，其次為「離散量-離散量-內比」。

(3) T3 題本：

表 4-1-21　T3 題本：不同數學學業成就的學生在不同量的性質解題表現上的變異數分析摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	7.71	4	112	<.0001
Pillai's Trace	7.71	4	112	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	7.71	4	112	<.0001
Roy's Greatest Root	7.71	4	112	<.0001

由上表 4-1-21 可知，Wilks' Lambda 的統計考驗值達顯著水準，$F(4,112)=7.71$，$p<.0001$，可見不同數學學業成就的學生在不同量的性質的解題表現呈現顯著差異，至於不同數學學業成就的學生與不同量的性質在 T3 題本的交互作用，其統計考驗結果如下表 4-1-22 所示：

表 4-1-22　T3 題本：不同數學學業成就與不同量的性質的解題表現之間的交互作用摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	2.09	8	224	0.0373
Pillai's Trace	2.06	8	226	0.0409
Hotelling-Lawley Trace	2.14	8	157.69	0.0353
Roy's Greatest Root	3.98	4	113	0.0046

由上表可知，透過多變量重複量數變異數分析方式，發現不同數學學業成就與不同量的性質的解題表現兩個變項之間的交互作用呈現顯著差異，其相關的 Wilks' Lambda 統計考驗值達顯著水準，$F(8,224)=2.09$，$p=.0373<.05$。因此，不同數學學業成就的學生在五種不同量的性質解題的表現差異之情況並不完全相同。

表 4-1-23 不同數學學業成就學生在 T3 題本不同量的性質的解題表現

T3 題本	離散量-離散量-內比	離散量-離散量-外比	離散量-連續量-外比	連續量-連續量-內比	連續量-連續量-外比
H	1.97	2	2	1.98	1.97
M	1.75	2	2	1.79	2
L	1.42	1.87	1.87	1.55	1.82

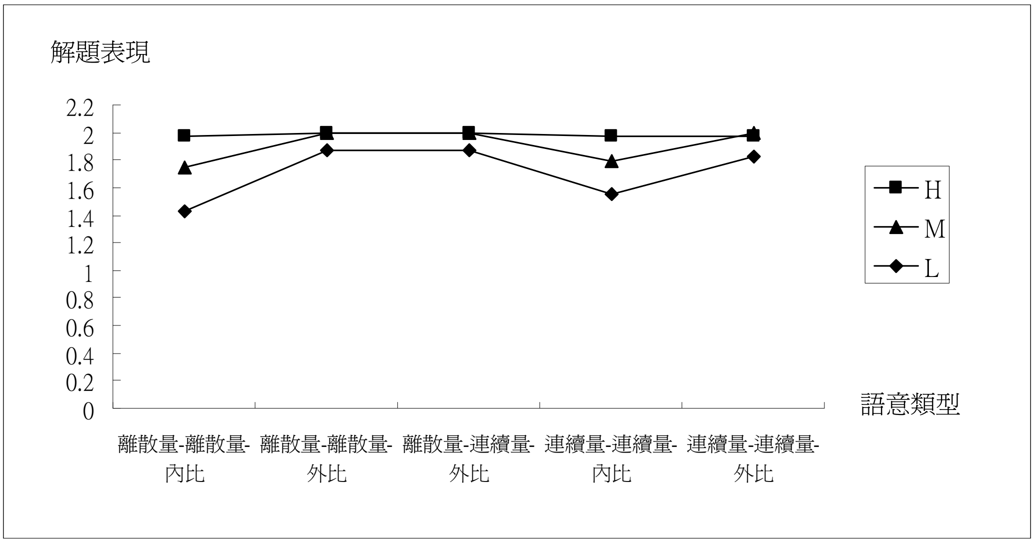


圖 4-1-10 不同數學學業成就學生在 T3 題本不同量的性質的解題表現

由上表 4-1-23 及圖 4-1-10 可看出在 T3 題本中，高、中數學學業成就學生在「外比」的解題表現幾乎沒有差異，而在「離散量-離散量-內比」及「連續量-連續量-內比」的題目高數學學業成就學生明顯優於中數學學業成就學生，中數學學業成就學生的解題表現又明顯優於低數學學業成就學生。

(4) T4 題本：

表 4-1-24 T4 題本：不同數學學業成就的學生在不同量的性質解題表現上的變異數分析摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	20.94	4	107	<.0001
Pillai's Trace	20.94	4	107	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	20.94	4	107	<.0001
Roy's Greatest Root	20.94	4	107	<.0001

由上表 4-1-24 可知，Wilks' Lambda 的統計考驗值達顯著水準，$F(4,107)=20.94$，$p<.0001$，可見不同數學學業成就的學生在不同量的性質的解題表現呈現顯著差異，至於不同數學學業成就的學生與不同量的性質在 T4 題本的交互作用，其統計考驗結果如下表 4-1-25 所示：

表 4-1-25　T4 題本：不同數學學業成就與不同量的性質的解題表現之間的交互作用摘要表

統計考驗	F 值	分子自由度	分母自由度	P 值
Wilks' Lambda	4.75	8	214	<.0001
Pillai's Trace	4.70	8	216	<.0001
Hotelling-Lawley Trace	4.81	8	150.55	<.0001
Roy's Greatest Root	7.32	4	108	<.0001

由上表可知，透過多變量重複量數變異數分析方式，發現不同數學學業成就與不同量的性質的解題表現兩個變項之間的交互作用呈現顯著差異，其相關的 Wilks' Lambda 統計考驗值達顯著水準，$F(8,214)=4.75$，$p<.0001$。因此，不同數學學業成就的學生在五種不同量的性質解題的表現差異之情況並不相同。

表 4-1-26 不同數學學業成就學生在 T4 題本不同量的性質的解題表現

T4 題本	離散量-離散量-內比	離散量-離散量-外比	離散量-連續量-外比	連續量-連續量-內比	連續量-連續量-外比
H	1.86	1.95	1.92	1.71	1.91
M	1.51	1.86	1.76	1.28	1.49
L	0.31	0.83	1.10	0.33	0.69

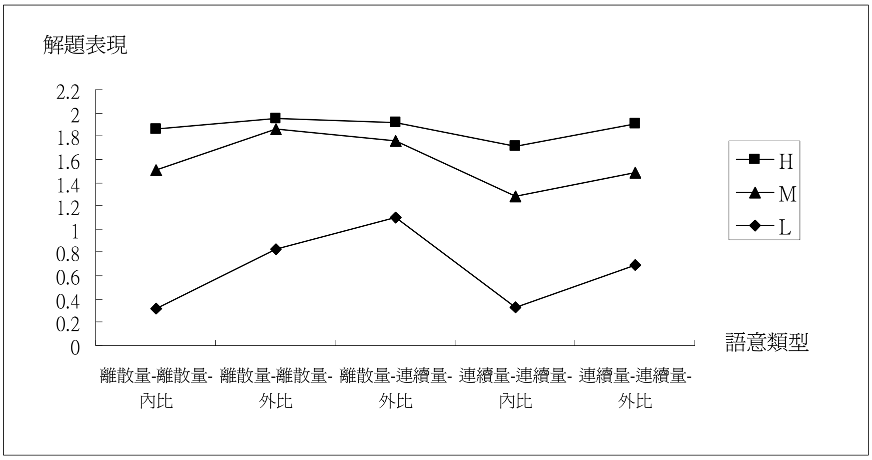


圖 4-1-11 不同數學學業成就學生在 T4 題本不同量的性質的解題表現

由上表 4-1-26 及圖 4-1-11 可看出在 T4 題本中，高數學學業成就學生明顯優於中數學學業成就學生，中數學學業成就學生的解題表現又明顯優於低數學學業成就學生，高、中、低數學學業成就學生在「離散量-離散量-內比」及「連續量-連續量-內比」的表現都不佳，。

(二)討論

綜合以上四個題本的分析可看出不同數學學業成就學生在不同量的性質的解題表現都有顯著的差異，由下表 4-1-27 可得知，五種量的性質的解題表現由好至差依序為：「離散量-離散量-外比」、「離散量-連續量-外比」、「連續量-連續量-外比」、「離散量-離散量-內比」及「連續量-連續量-內比」。

表 4-1-27 學生在不同量的性質上的解題表現

量的性質	離散量-離散量						離散量-連續量		連續量-連續量						
	內比				外比		外比		內比					外比	
題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
平均數	1.44	1.48	1.62	1.63	1.87	1.83	1.88	1.81	1.30	1.68	1.34	1.72	1.38	1.80	1.66
標準差	0.90	0.87	0.78	0.76	0.49	0.55	0.46	0.58	0.95	0.73	0.93	0.68	0.92	0.60	0.75
總平均數	1.54				1.85		1.84		1.48					1.73	

本研究設計的題目不僅考慮到離散量和連續量的區別，還加入了「內比」和「外比」的條件，研究者在預試時發現學生在解題時除了會受離散量和連續量的不同而影響解題表現外，還會受題目中的數量是否為相同單位的干擾，因此，這部分「量的性質」設計是與其它研究較不相同之處。

而研究的結果發現學生在「內比」的題目表現較差，在「外比」的題目表現較好，顯示題目的數量單位的確是影響學生解題表現的重要因素。若是將兩類的內比題目比較，則會發現「離散量-離散量-內比」的解題表現優於「連續量-連續量-內比」；將三類的外比題目做比較，則會發現解題表現由好至差的順序為「離散量-離散量-外比」、「離散量-連續量-外比」、「連續量-連續量-外比」，代表不管在內比還是外比的題目，學生在離散量的表現都優於連續量的表現，這點與文獻中提到兒童在離散量的情境下比連續量更能想像具體內容的結果一致。

第二節 比例問題的表面結構與國一學生的解題策略之關係

一、 「不同數字型式」與學生解題策略之關係

(一) 全部樣本結果

本節的第一部分主要探討學生在不同數字型式的解題策略是否會有差異。研究者將受試者在「比例問題測驗」上正確的解題策略分為七類:「單價法」、「倍數法」、「公式法」、「數量分解策略」、「疊加法」、「舉例法」及「計算錯誤」; 錯誤的解題策略分為八類:「比例項錯置」、「對應項相等」、「和數相等」、「差數相等」、「乘積相等」、「估算」、「其它運算」及「無計算過程或空白」, 採用「百分比計次」的方法, 計算出在四種不同數字型式題本(T1、T2、T3、T4)中各種解題策略的出現百分率, 以瞭解學生使用解題策略的情形。

因為不同數學學業成就的學生在不同題本中會有不同的解題策略, 因此, 以下將四個題本又分成不同數學學業成就來探討其解題策略的差異(註: 表格中黑底部分代表使用比率較高者, 而且每個人解一題都只用一種解題策略)。

(1) T1 題本

下表 4-2-1 及圖 4-2-1 呈現全部學生在 T1 題本的解題策略統計情形:

表 4-2-1 不同數學學業成就學生在 T1 題本的解題策略百分率

		正確的解題策略 (%)							錯誤的解題策略 (%)							
		R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
數學學業成就	H	14.73	37.05	44.19	0.00	0.00	0.00	0.78	0.47	0.16	0.31	0.16	0.93	0.00	1.24	0.00
	M	20.49	35.93	37.56	0.00	0.00	0.00	1.14	0.81	0.00	0.16	0.33	0.16	0.00	1.95	1.46
	L	18.33	38.13	8.96	0.00	1.46	0.00	0.21	0.83	0.21	3.13	3.33	0.63	0.00	10.83	13.96

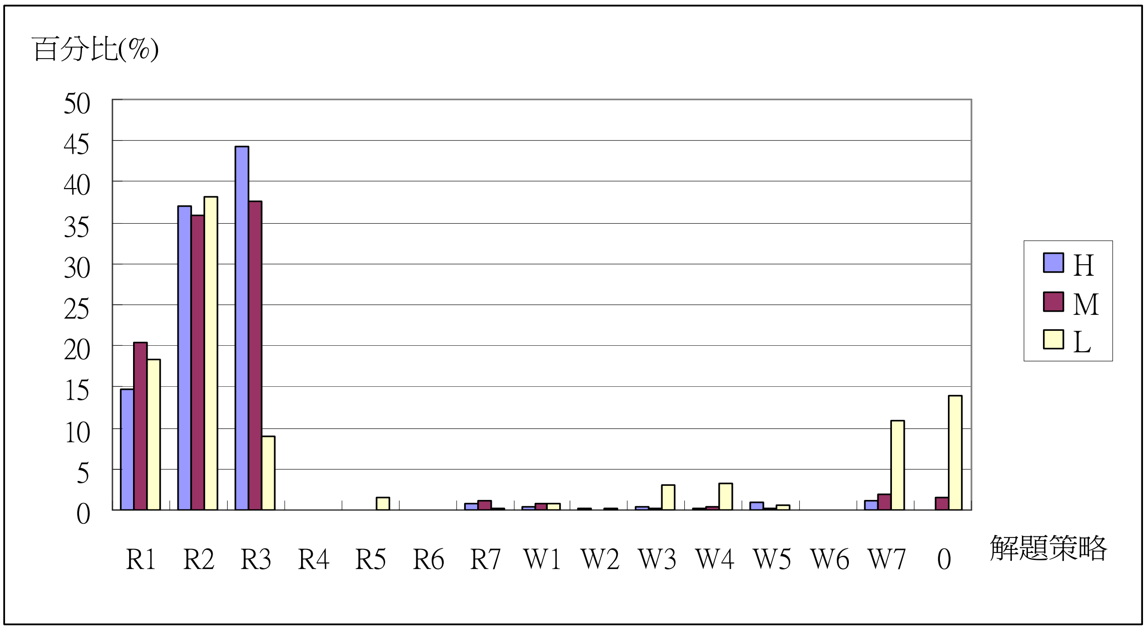


圖 4-2-1 學生在 T1 題本的解題策略統計圖

由以上的統計可發現高數學學業成就的學生使用正確的解題策略其百分比由高至低為 R3→R2→R1，其中使用 R1 的百分比明顯較其它的少；中數學學業成就的學生使用正確的解題策略其頻率由高至低為 R3→R2→R1，以 R3 的解題策略居多，使用 R2 和 R3 的比率相差不大；低數學學業成就的學生使用正確的解題策略其百分比最高的為 R2，其使用情況最為普遍，與其它的策略相較明顯高出許多，使用 R3 的比率較少，另外，使用 W7 及空白的比率也滿高的，代表低數學學業成就的學生在 T1 題本已出現相當多的錯誤。

(2) T2 題本

表 4-2-2 不同數學學業成就學生在 T2 題本的解題策略百分率

		正確的解題策略 (%)							錯誤的解題策略 (%)								
		R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
數學學業成就	H	45.44	2.81	41.75	0.00	0.00	0.00	0.70	0.53	0.18	0.53	3.33	0.70	0.18	1.58	2.11
	M	48.63	1.37	27.45	0.78	0.00	0.20	1.76	1.76	0.78	2.94	5.49	0.20	0.39	5.10	3.14
	L	47.48	0.65	11.38	0.81	0.00	0.00	1.63	3.25	0.49	5.20	11.22	0.16	0.16	11.54	6.02

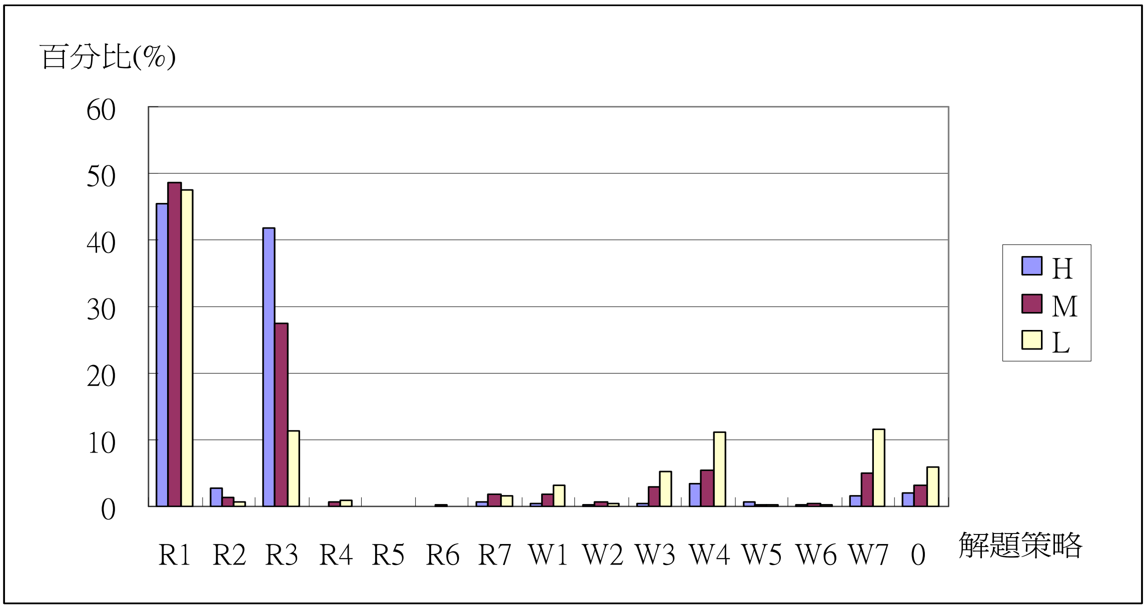


圖 4-2-2 學生在 T2 題本的解題策略統計圖

由以上的統計可發現高、中、低數學學業成就的學生使用正確的解題策略其比率最高的都是 R1，高、中數學學業成就的學生其次為 R3，R2 解題策略出現的比率相當的少，代表 T2 題本在解題時有其獨特性，因為 T2 題本的設計為第一個比的前後項有整數倍關係，因此，學生較容易使用 R1 解題策略來解題，因為使用 R2 的解題策略在計算上會出現分數運算，因此，幾乎所有學生都會避開此解題方法，所以 R2 出現的比率很小。

(3) T3 題本

表 4-2-3 不同數學學業成就學生在 T3 題本的解題策略百分率

		正確的解題策略 (%)							錯誤的解題策略 (%)							
		R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
數學學業成就	H	7.71	28.54	62.29	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.63	0.21	0.42	0.00	0.00	0.00
	M	4.65	63.43	23.23	0.00	1.62	0.00	0.40	0.20	0.61	1.01	1.62	0.81	0.00	2.02	0.40
	L	2.14	59.50	18.11	0.00	1.38	0.00	1.64	0.38	0.63	1.51	5.91	0.50	0.38	4.78	3.14

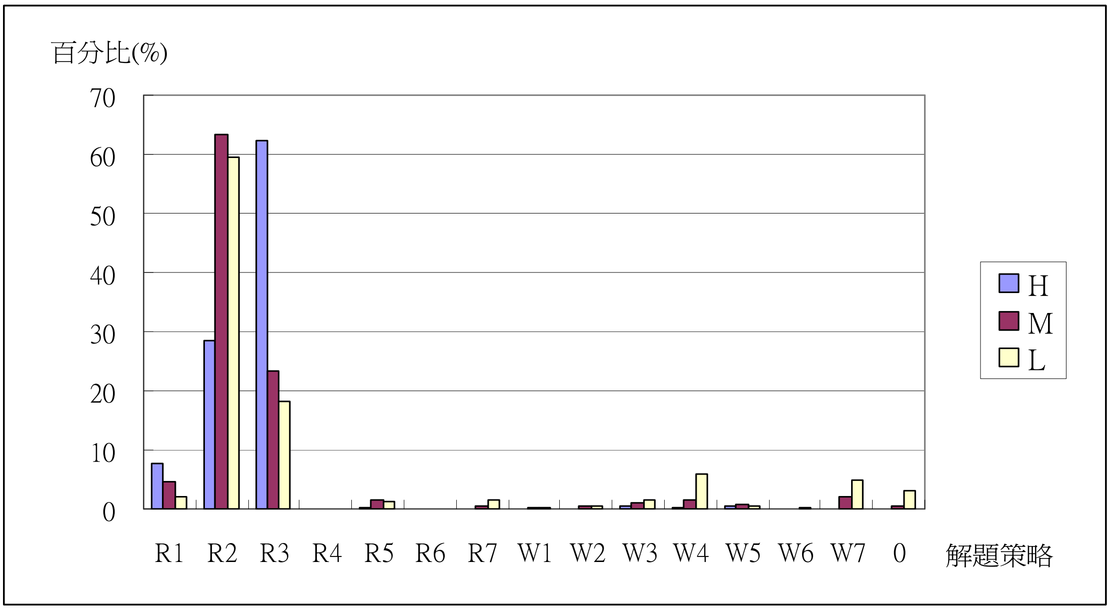


圖 4-2-3 學生在 T3 題本的解題策略統計圖

由以上的統計可發現中、低數學學業成就的學生使用正確的解題策略其比率最高的都是 R2，其次為 R3，R1 解題策略出現的比率相當的少，代表 T3 題本在解題時學生會傾向使用 R2 解題策略，因為 T3 題本的設計為兩個比的前對應項一個是另一個的整數倍，因此，學生較容易觀察到倍數關係而使用 R2 解題策略來解題，因為使用 R1 的解題策略在計算上會出現分數運算，因此，中、低數學學業成就的學生都會避開此解題方法，所以 R1 出現的比率相對少了很多，但對於高數學學業成就的學生而言，他們似乎較傾向使用 R3 的解題策略，對他們而言，使用公式法可能是最直接又簡單的方法。

(4) T4 題本

表 4-2-4 不同數學學業成就學生在 T4 題本的解題策略百分率

		正確的解題策略 (%)							錯誤的解題策略 (%)							
		R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
數學學業成就	H	17.27	12.12	61.82	0.00	0.00	0.00	1.06	0.76	0.15	0.30	4.09	0.91	0.15	0.76	0.61
	M	16.74	10.67	47.26	0.30	0.00	0.15	1.04	0.74	0.00	1.63	10.96	0.44	0.89	3.70	5.48
	L	13.06	5.56	4.72	1.94	0.28	0.56	2.22	0.28	1.11	3.33	31.94	0.28	2.22	15.28	17.22

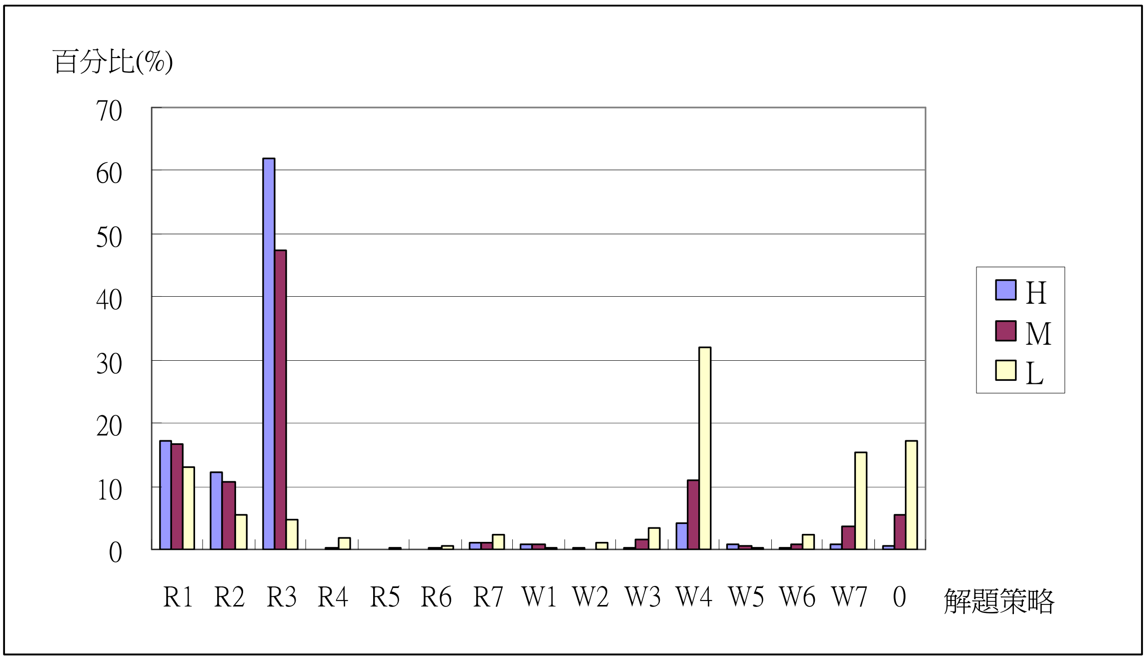


圖 4-2-4 學生在 T4 題本的解題策略統計圖

由以上的統計可發現高數學學業成就的學生使用正確的解題策略其比率由高至低為 R3→R1→R2，R3 使用的比率很高，因為這個題本的數字沒有整數倍的關係，所以高數學學業成就的學生就會使用公式法解題較為簡單；中數學學業成就的學生最常使用的正確解題策略為 R3，但在錯誤的解題中，W4 出現的情形也增加許多，代表有些學生開始因為受題目影響而改變解題策略；低數學學業成就的學生在 T4 題本中答題的正確率很低，幾乎都使用了錯誤的解題策略，W4 使用的比率最高，其次為空白及 W7，代表 T4 題本對低數學學業成就的學生而言出現了困難，而導致錯誤率很高。

(二) 全部樣本討論

由表 4-2-1、4-2-2、4-2-3 及 4-2-4 的結果可看出學生在解不同數字型式的比例問題時，所出現的各種解題策略都不相同，以下針對四個題本依次說明：

(1)T1 題本：高、中數學學業成就學生正確的解題策略多偏向使用「公式法」，低數學學業成就學生多偏向使用「倍數法」。

(2)T2 題本：高、中、低數學學業成就學生正確的解題策略皆偏向使用「單價法」。

(3)T3 題本：高數學學業成就學生正確的解題策略多偏向使用「公式法」，中、低數學學業成就學生多偏向使用「倍數法」。

(4)T4 題本：高、中數學學業成就學生正確的解題策略多偏向使用「公式法」；低數學學業成就學生錯誤的解題策略多偏向使用「差數相等」策略，其比率明顯比其它題本多。

以上在不同題本會使用不同解題策略的原因與數字型式有關，在 T2 題本的數字型式設計為第一個比的前後項有整數倍關係，所以學生如果發現這個整數倍關係，就會使用 R1 的解題策略居多；在 T3 題本的數字型式設計為兩個比中，前對應項有一個是另一個的整數倍，所以學生如果發現這個前對應項的整數倍關係，則就會使用 R2 的解題策略；在 T4 題本因為兩個比皆為任意數值，沒有直接對應的整數倍關係，所以學生會使用 R3 的解題策略較為容易；T1 題本的數字型式設計為第一個比的前後項有整數倍關係且兩個比中，前對應項有一個是另一個的整數倍，在兩個都有整數倍的關係下，低數學學業成就學生比較傾向 R2 的解題策略，研究者猜測原因應該是與「單位」有關，因為前對應項的單位都相同，所以比較容易做兩者間的倍數運算，而他們使用 R3 的解題策略情況較少，代表他們雖然學過公式法的解題策略，但可能忘記了或不會用而使得使用的情形較不普遍。

將上表 4-2-1、4-2-2、4-2-3 及 4-2-4 中不同數學學業成就學生的解題策略使用情形歸納為下表 4-2-5，將學生使用解題策略的比率由大到小排出前 4 名，由下表可發現高數學學業成就的學生除了 T2 題本外，幾乎使用 R3 解題策略的比率都為最

高，代表高數學學業成就學生較不易受數字型式影響其解題策略，穩定度較高，而低數學學業成就的學生容易受數字型式影響而改變其解題策略，穩定度很低，所以在 T4 題本時出現很高的錯誤率。所有學生使用正確的解題策略以 R1、R2、R3 為主，而使用錯誤的解題策略以 W4、W7 及空白的居多，低數學學業成就學生使用錯誤的解題策略百分比最高，其次為中數學學業成就學生。

表 4-2-5 不同數學學業成就學生的解題策略百分比排序

		解題策略百分比排序			
		1	2	3	4
T1	H	R3	R2	R1	W7
	M	R3	R2	R1	W7
	L	R2	R1	0	W7
T2	H	R1	R3	W4	R2
	M	R1	R3	W4	W7
	L	R1	W7	R3	W4
T3	H	R3	R2	R1	
	M	R2	R3	R1	W7
	L	R2	R3	W4	W7
T4	H	R3	R1	R2	W4
	M	R3	R1	W4	R2
	L	W4	0	W7	R1

註：黑底部分代表出現錯誤的解題策略

(三) 個案訪談結果

在本節中，研究者依據國中一年級下學期的第一次段考成績，從各班挑選高、中、低數學學業成就的學生進行訪談，雖然每一個學生只做一份比例測驗題本，但在訪談時，研究者會適時的修改題目數據，讓學生比較不同的數據是否做法會相同，如果有不一致的情形發生，則請學生比較其做法的差別並說明理由，而且研究者在訪談過程中會提供受試者不同的解題策略，讓受試者能說明其差異，晤談的對象共 24 名，依據「半結構性晤談大綱」對學生進行晤談，事後將晤談過程的錄音轉譯成文字，每位接受晤談學生都有一份訪談資料，研究者將晤談的資料加以分析、歸納，以下以幾位學生的晤談結果為例，分別探討其解題策略是否與「不同數字型式」有關，晤談原案參考及分析結果呈現如下：

(1)解題策略不會受數字型式影響

例 1：高數學學業成就【T1 題本，第一題】學生代碼：AH1

以 AH1 的第一題為例，研究者不管如何變換數字型式及解題策略，他都能掌握比的相對改變原則，清楚知道如果用「差數相等」的策略來解題則之間的差也需要成倍數關係，不能只是看差數而已，因此此學生的比例概念清楚，從頭至尾都使用正確且相同的解題策略，完全不受不同數字型式的干擾而改變其解題策略。

I：那如果有一個同學說：第一袋有 10 顆白的、5 顆黑的，白的比黑的多 5 顆，所以這個 20 顆白的，也要比黑的多 5 顆，所以用 20-5=15，所以黑的要 15 顆，這樣的答案可不可以？

S：不可以。

I：為什麼？

S：嗯…因為…<u>因為 10 放大 2 倍，所以減 5 也要放大 2 倍。</u>

I：那應該用減的要怎樣列式才對？如果要用減的？

S：<u>10-5 等於 20-10。</u>

I：你說 10-5 等於 20-10，為什麼是減 10，不是減 5？

S：<u>因為 10 放大 2 倍，所以減 5 也要放大 2 倍。</u>

例 2：中數學學業成就【T2 題本，第一題】學生代碼：EM2

以 EM2 的第一題為例，此學生一開始在某些題目上就使用「差數相等」來解題，在訪談的過程中，只要研究者提出合理的解釋她都可以接受，不管是用總數相等或是乘法策略她都覺得是正確的解法，她會選擇比較好算的方法來算，目的只是求出

一個答案而已，並無法分辨不同方法所代表的意涵。因此，此學生的解題策略不會受題目的數字型式而改變，會用自己的想法將題目中的數字隨意運算。

I：很好啊…你講出來，老師大概懂你的意思了。那如果現在有一個學生的另外一個作法是，他說第一個袋子裡有 10 顆白的，5 顆黑的，所以他就把 10 加上 5，他說第一個袋子裡有 15 顆，啊我剛剛如果題目沒有改，所以第二個袋子裡面也要有 15 顆，所以他就 15 減掉 12，有 3 顆黑的，你看得懂他的意思嗎？

S：嗯…15 減 12！

I：因爲他說第一個袋子裡有 15 顆，所以第二個袋子，因爲是機率相同，所以這邊也要有 15 顆！

S：哦！

I：所以他用 15 顆，減掉裡面的 12 顆白的…剩下 3 顆黑的。你覺得他這個算法怎麼樣？(和數相等策略)

S：我覺得這個算法好像…

I：可以接受嗎？

S：對啊…好像還可以接受！

: : :

I：那如果還有一個學生哦，他就告訴老師說，耶我發現這裡 10 顆白的 5 顆黑的，我剛好這個是他的 2 倍！5 乘 2 是不是剛好等於 10！他知道 10 除以 5 剛好是 2，所以呢，他說白的剛好是黑的 2 倍，那這裡的白的也要是黑的 2 倍！所以他用 12 除以 2 等於 6！又出現了另外一個答案了！你覺得呢？他的答案變成 6！又跟你的答案不一樣，跟這個答案也不一樣，你覺得他這個想法好不好！

S：也可以接受。

I：呵呵…因爲老師解釋得太好嗎？爲什麼可以接受這個？

S：因爲這樣比較容易懂說 5 乘以 2 會等於 10！然後 12 就會認爲他有 2 倍嘛！除以 2 就會等於 6！比較懂！

: : :

I：那如果這個剛好沒有整數倍的時候怎麼辦？例如說，6 跟 8！

S：6 跟 8。

I：我沒有 1.5 倍了，我沒有 2 倍 3 倍了怎麼辦？那這個題目怎麼算？

S：這個嘛，這樣我就會用加減的。

I：因爲太難算了哦！

S：對。

I：那如果這樣 6 跟 8 你有沒有辦法看倍數？

S：沒有。

(2)某些題目的解題策略會受數字型式影響(第 2、11、13 題)

例：中數學學業成就【T3 題本，第二題】學生代碼：HM1

以 HM1 的第二題為例，他能用自己的想法表達出比的概念，有時會用「數量分解策略」來回答問題，雖然不是用很快速簡單的方法呈現答案，但是其邏輯思考的方向都是對的，因為使用的是「數量分解策略」，所以對於解分數及非整數倍時就會出現困難，雖然很努力想找出關係，但是因為數據變複雜了，所以很容易就搞混而算不出來。在第二題中如果題目數字是有明顯的倍數關係，他就會使用乘法策略，如果是有簡單的數字關係就用「數量分解策略」，若沒辦法看出數字的關係，最後就會使用「差數相等」策略，表示此名學生的解題策略是為因著題目的數字型式而改變的，下圖 4-2-5 是該名學生在第二題的原案。

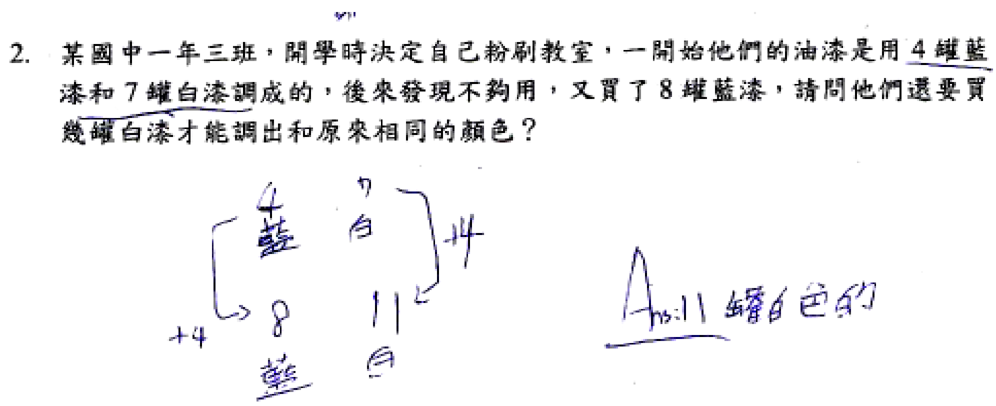


圖 4-2-5 HM1 在 T3 題本第 2 題的原案

I：你看喔！這裡是 4 罐，這裡是 6 罐白的，這裡是 9 罐，啊這邊加 5(4+5=9)，所以我知道這邊是 11 罐(6+5=11)。

S：嗯。

I：對呀！這方法是一樣的，為什麼現在可以，剛剛就覺得不好，為什麼會有不同的解法？哪一個答案比較好？

S：我覺得你的答案比較好。

： ： ：

I：嗯，那你還會用什麼方法慢慢算。

S：<u>如果這個不行(指沒有倍數時)的話我才用這個(用差數相等策略)</u>，這個又不行的時候我再用另外一個。

I：想其它方法？

S：對，我們有教過的方法。

I：那如果我換成 4、6、10 呢？答案是多少？你好像數據不一樣會影響你的作答情況耶！

S：4 罐嘛、6 罐…4、6…後來它買 10 罐…這時候…6 罐的話…嗯…(算了 8 秒)。

I：答案多少？

S：15。

I：怎麼算的？

S：因爲乘以 2 嘛，首先先想乘以 2。
I：好，乘以 2。
S：然後跟它差 2 對不對，然後它們兩個的比是 2：3，所以它這裡再加 3 罐啊！
I：喔！你是拆開來算啊！嗯嗯。那你覺得 15 這個答案對不對？
S：我是這樣算，可是沒有把握！
I：可是這時候你又不選用加的了喔！
S：我也會用加的啊！可是你看我啊！…如果我有很多的時間我就會用加的再驗算。

(3)解題策略會受數字型式影響

例 1：低數學學業成就【T1 題本，第一題】學生代碼：CL1

以 CL1 的第一題為例，該名學生能夠察覺數字間的整數倍關係，他會透過整數的關係算出要求的值，但如果將題目改成非整數倍時，他就無法做計算，因為分數的概念較弱，當除不盡時，不太會用分數表示，分數的乘法也不熟練。該生第一題是用差數相等策略，但經過訪談後發現他也有想到比例的算法，只是他不能確定哪一個方法才是對的，也沒把握用哪一個方法才比較好，可見他是因為看到數據間有倍數關係才會使用比例的方法，並不是真正瞭解其關係，解題策略會因數字型式不同而異。

S：啊是…10 顆、5 顆，放 20 顆就是兩倍，所以答案也要弄成兩倍。(利用倍數法)
I：5 顆也要弄成兩倍哦？
S：嗯。
I：所以你這個答案和你寫的算式是不是不一樣？你是指多 10 顆嗎？多 10 顆再加上 5 顆是不是？那你剛剛說兩倍是指白球是它的兩倍？還是多 10 顆？
S：應該是多 10 顆吧？
I：那如果老師把數字改成 18 顆白球呢？
S：18 顆…(想了 10 秒)。就把黑球加 8。(利用差數相等策略)
I：就是這個 10 再加 8，所以 5 也要加 8 是不是？
S：對。
I：很好。那再來。如果老師把原來的黑球改成 4 顆呢？其它不變，答案會變多少？
S：…。
I：這裡是 10 顆白球和 4 顆黑球，另一個是 20 顆白球要放幾顆黑球？
S：一樣把它加起來呀，10 顆白球、4 顆黑球…。
I：嗯，你再說一次。
S：就 10 顆白球、4 顆黑球跟剛剛一樣把它加起來。(利用差數相等策略)
I：這個要加哦！那要加多少？
S：加 10。
I：加 10 哦？是不是這個意思，所以你說因爲這個差 10 顆，所以 4 要加 10 哦！
S：嗯。

例 2：低數學學業成就【T2 題本，第一題】學生代碼：FL1

以 FL1 的第一題為例，該名學生能夠察覺數字間的整數倍關係，如果題目數字沒有發現有倍數關係就會使用差數相等策略，代表只是看題目數字而決定使用的方法，並無法區辨相對和絕對的意涵，有時還會使用總數相等的方法來解題，因為解釋起來覺得很合理，所以都可以接受，該生表示使用乘法策略只限於有倍數時使用，而差數相等策略並不會受題目數字的限制，所以比較常會使用差數相等策略來解題。而該生對於使用分數覺得很陌生，如果沒有發現題目中的倍數關係，並不容易想到要用分數來表示，反而是會用估算的方式解題，代表題目中如果沒有倍數的話，對學生而言是很不直觀的，無法聯結到使用分數或小數的方式，即使學生在計算分數的加減乘除都沒有問題，但在算數學文字題時，學生很容易改用其它簡單的策略來解題，似乎會逃避使用分數。

S：<u>因爲 12 減掉 7 等於 5 啊，10 減 5 也是 5 啊！(差數相等策略)</u>

I：嗯嗯，所以你覺得差一樣，所以機率相同。

S：嗯。

I：好，那老師改一下數字，第二個袋子改成 20 顆白的，那答案會是多少？

S：10 顆黑球。

I：10 顆，怎麼算的？

S：<u>因爲……10 顆…10 除以 5 等於 2，所以是 5 的兩倍，所以這裡是除以 2 等於 10。(倍數法)</u>

I：好，你是說 10÷5=2，所以 20÷2=10 這樣，好，那你跟剛剛的方法就不一樣了，爲什麼？

S：…(想了 15 秒)就這樣覺得。

I：哦！直覺哦！是因爲改了數字剛好你有發現這是兩倍，所以你會用倍數來算。

S：嗯。

I：那如果這兩個方法比較，你覺得哪一個會比較對？

S：除的這個。

I：除的這個，那如果沒有改數字，你會用原來的方法嗎？還是你也會想要換用除的？

S：<u>(想了 23 秒)應該還是用原來的(指差數相等策略)。</u>

I：用原來的哦！題目都一樣，只是數字不一樣，但你會用不同的方法來解決，爲什麼會這樣？沒有固定方法嗎？要看數字嗎？

S：嗯。

：　　　：

I：好，那老師再改哦！如果這邊改成 10 顆白的和 6 顆黑的，第二袋還是 20 顆白的，你會怎麼算？第二個袋子要放幾顆黑的？

S：(想 22 秒)14 顆黑的。

I：好，你告訴老師怎麼算的？

S：…(想了 8 秒)好像是 12 顆耶！

I：是哦！你要不要寫一下算式，你怎麼想出答案的？

S：(寫 10 白、6 黑，20 白、12 黑)就是 10 顆變成 20 顆，這裡變成兩倍，就乘以 2 變 12。

I：所以你是用這裡兩倍，這裡也要兩倍對不對？

S：對。

I：可是這裡就差 8 顆(20-12=8)，這裡只差 4 顆(10-6=4)，跟你第一次寫的又不一樣了耶！你現在又換成用倍數的關係，那原來的方法呢？你會支持用原來的方法嗎？

S：…(想了 16 秒)比較不會了。

I：比較不會用這個方法了是不是？

S：嗯。

I：好，那老師再改一下，第一袋有 9 顆白球、6 顆黑球，第二袋有 12 顆白球，那答案會是多少？

S：(想了 12 秒)9 顆黑的。(利用差數相等策略)

I：這時候又換回來用減的，為什麼？是因為你發現倍數不見了嗎？所以你就用減的。

S：對。

I：那這兩種方法你覺得都可以嗎？

S：要看數字有沒有倍數，倍數如果不見就用這個。

I：好，就是如果你有發現倍數就會用倍數，如果沒有倍數就用加減的。

S：嗯。

例 3：低數學學業成就【T3 題本，第六題】學生代碼：IL2

以 IL2 的第六題為例，研究者如果把題目中的數據改成有倍數關係的，她就會發現是用相乘的，但如果沒有整數倍，就會避開用分數來算，見下圖 4-2-6 所示，因為她的分數乘除不太會，所以如果發現沒有倍數關係，就會用差數相等策略，或者使用疊加法來計算，見下圖 4-2-7 的第 5 題原案所示，無法說清楚兩個數量之間的運算關係，絕大多數是因為發現了有整數倍才會用倍數來算，否則一律用差數相等策略，因此，表示此學生在解題時，解題策略會因數字型式而改變。

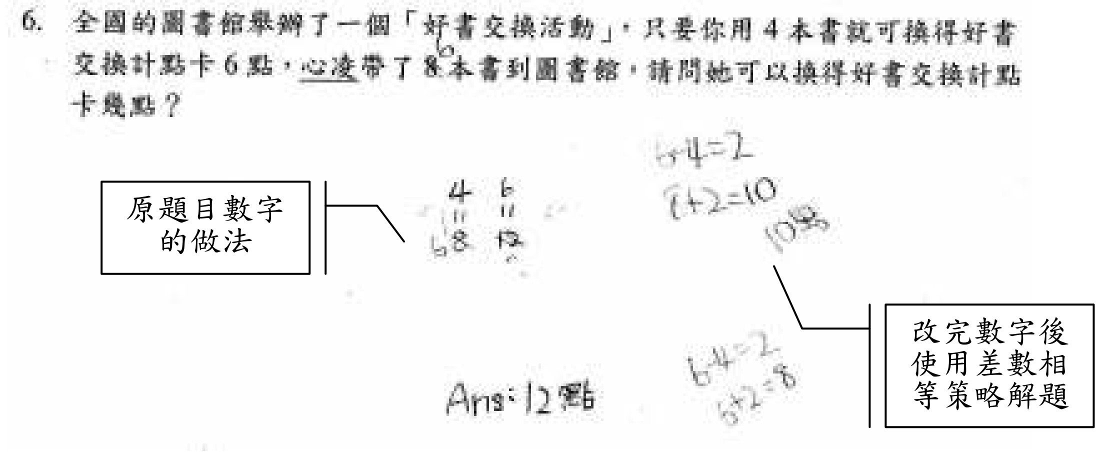


圖 4-2-6 IL2 在 T3 題本第 6 題的原案

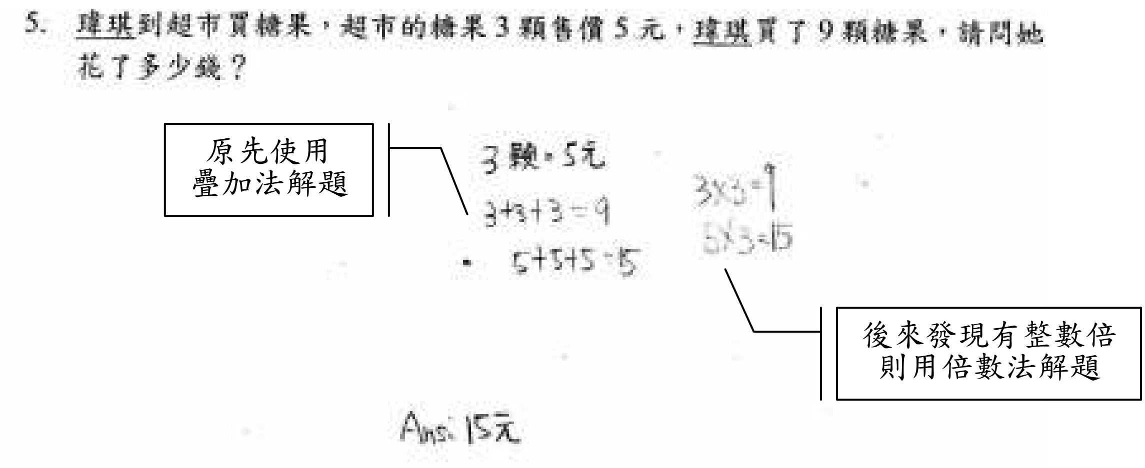


圖 4-2-7 IL2 在 T3 題本第 5 題的原案

I：好，那你解釋一下第六題的算法。

S：<u>它的倍數，所以這個也要乘以 2。(使用倍數法)</u>

：　　　：

I：如果說這時候這個如果改成 6 本呢？這裡是 4 本換 6 本，後來是 6 本可以換幾點？請你算一下。

S：…。

I：你可以告訴老師方法，計算不會沒有關係，你會怎麼算？

S：我會…(想 20 秒)，<u>我會減吧！</u>

I：減？你說 6 減 4 是不是，6 減 4 等於 2，所以呢？

S：(想 10 秒)8。

I：怎麼算出來的？那這時候老師又要問你呀！這個時候你是用加減，剛剛你是用 2 倍去算，現在你沒有用倍數的關係，而是用相差來算，為什麼呢？

S：<u>因為…因為它不是倍數。</u>

I：是因為你都卡在不是倍數的關係，那如果它是一個分數倍，你會逃避會乘法對不對？

S：嗯。

I：所以如果剛好整數倍你就會算，就是會用倍數的方法算？

S：嗯。

例 4：低數學學業成就【T4 題本，第三題】學生代碼：LL1

以 LL1 第三題為例，研究者如果把題目中的數據改成有倍數關係，則該學生的想法會隨著題目中的數據大小做不同的做法，原來第四式的數字型式用差數相等策略來算，原因是沒有倍數關係，若研究者將數字改成第二式的數字型式，該生就察覺之間的倍數關係，能正確解題，會依照題目數字不同而改變其解題策略，見下圖 4-2-8 所示。

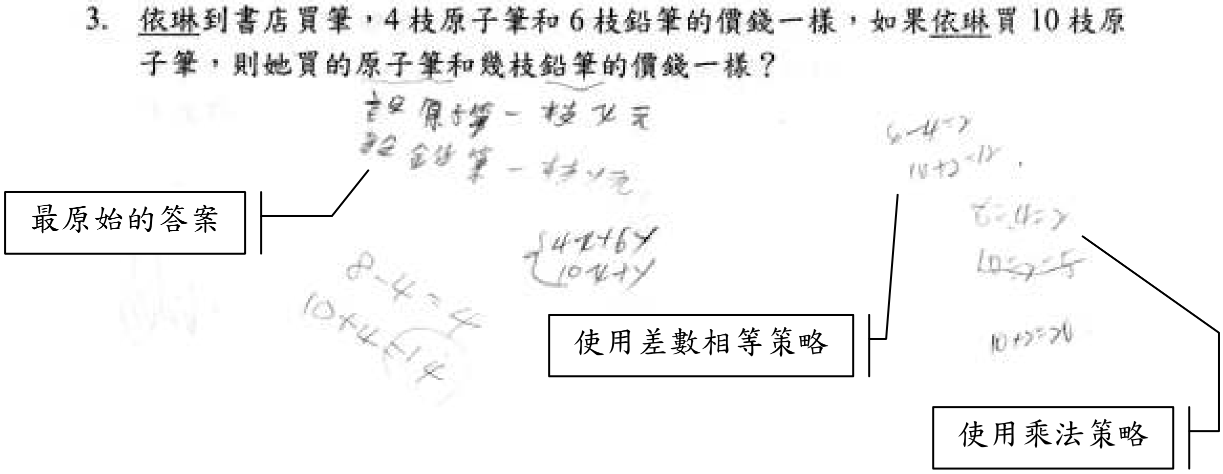


圖 4-2-8 LL1 在 T4 題本第 3 題的原案

I：想不出來了哦，那我們再把數據改一下，如果是 4 枝原子筆和 8 枝鉛筆的價錢一樣，那買 10 枝原子筆時和幾枝鉛筆的價錢一樣？

S：5 枝。

I：怎麼算的？

S：就是 8 除以 4 等於 2。

I：然後呢？所以你的 5 枝是 10 除以 2。

S：對。

I：爲什麼你會這樣做？

S：因爲 8 是 4 的兩倍，所以這個要除以 2

：　　　：　　　：

I：那老師再提供你一個方法，它說 8 跟 4 是差 4 枝，所以呢，依琳買了 10 枝，所以我跟它差 4 枝，所以把 10 加 4 就是鉛筆的枝數，你覺得這個答案怎麼樣？

S：…。

I：你覺得老師提供的方法是好還是不好？

S：要看題目問的那個…它要的答案。

I：要的答案，那是答案 20 比較好，還是剛剛老師算的這個 14 比較好？

S：應該是 20。

I：20 哦？那你覺得這個錯在哪裡？

S：它不應該是用加減的，要用乘除的。

I：爲什麼不能用加減？

S：因爲它…它是要求那個倍數，不是要求它加減出來的數。

I：嗯。要用倍數來算。那如果剛剛我沒有改題目之前，你要怎麼算？你教教老師？

S：那這一題就要用加減的。(原題目數據用差數相等來算)

I：用加減的？怎麼用？

S：(不改原題目數據，寫下 6-4=2，10+2=12)

I：那爲什麼有時候你會用加減的，有時候會用乘除？

S：題目的要求。

I：是數據不一樣的時候會用不同的計算方法嗎？

S：嗯。

(四)個案訪談討論

在晤談完 24 名受試者後，研究者將學生的回答情形分為三類，呈現於下表 4-2-6：

(1) 解題策略不會受數字型式影響，不受數字型式影響而改變解題策略，幾乎都使用固定的解題策略，記作×。

(2) 某些題目的解題策略會受數字型式影響(第 2、11、13 題)，會因數字型式不同而改變解題策略，記作△。

(3) 解題策略會受數字型式影響，會因數字型式不同而改變解題策略或接受不同的解題策略，記作○。

表 4-2-6 學生的解題策略與不同數字型式的關係

	高數學學業成就		中數學學業成就		低數學學業成就	
T_1	AH1 ×	AH2 ×	BM1 ×	BM2 ×	CL1 ○	CL2 ×
T_2	DH1 ×	DH2 ×	EM1 ×	EM2 ×	FL1 ○	FL2 ○
T_3	GH1 ×	GH2 ○	HM1 △	HM2 ×	IL1 ○	IL2 ○
T_4	JH1 ×	JH2 ×	KM1 ○	KM2 △	LL1 ○	LL2 ×

由上表可得知，幾乎所有高數學學業成就的學生都具備有正確的比例概念，因為不管數字型式如何改變，他們都不受題目數字的影響而改變其解題策略。中數學學業成就的學生在某些題目(如第 2、11、13 題)較容易犯錯，會想使用「差數相等」策略解題，有些原因是與數字型式有關，有些原因則是因為不瞭解題意而犯錯。大部分低數學學業成就的學生會依不同的數字型式而有不同的解題策略，如果學生發現題目中的數字之間是有整數倍關係，則會很自然的使用乘法策略中的單價法或倍數法來解題，若沒有發現題目數字間的整數倍關係，則會傾向使用差數相等的策略來解題，並不會想到要用分數或小數來做運算，代表學生的分數概念較弱，對學生而言，使用差數相等策略是最直觀且最簡單的方法，能夠很快的得到一個答案，代

表他們在處理文字題時目的只在追求算出一個答案，並非真正瞭解題目的意思，就算解題策略正確也不代表他們是真正瞭解題意，只是因為數字的引導而使他們使用了正確的解題策略，他們並不太會去探究題目與運算之間的關係，就算在同一個題目中使用不同的解題策略也覺得沒關係。總而言之，這些比例問題測驗對於數學學業成就低的學生而言，他們只是做了數字的運算而已，並沒有真正瞭解題目數字間的關係，所以只要研究者改變數字型式或用不同的解題策略來問學生，學生很容易就會改變解題策略，通常是在第四式的數字型式有明顯的改變，原因是因為數字間沒有整數倍關係，只要分數運算能力較差的學生遇到這類的題目，學生就很容易使用差數相等的解題策略。因此，研究者在訪談過後認為應多加強他們的數字感及分數概念，並建立正確的解題態度，遇到文字題應該先瞭解題意後才作答，這樣才不會受題目數字型式不同而影響其解題的策略。

二、「不同語意類型」與學生解題策略之關係

(一) 全部樣本結果

本節的第二部分主要探討學生在不同語意類型的解題策略是否會有差異。研究者將受試者在「比例問題測驗」上正確的解題策略分為七類:「單價法」、「倍數法」、「公式法」、「數量分解策略」、「疊加法」、「舉例法」及「計算錯誤」;錯誤的解題策略分為八類:「比例項錯置」、「對應項相等」、「和數相等」、「差數相等」、「乘積相等」、「估算」、「其它運算」及「無計算過程或空白」,採用「百分比計次」的方法,計算出在六種不同語意類型(「熟知的量數」、「部分-部分-不混合」、「部分-部分-混合」、「關係集合」、「放大-縮小-外在量」、「放大-縮小-內在量」)中各種解題策略的出現百分率,以瞭解學生使用解題策略的情形。

因為不同數學學業成就的學生在不同題本中會有不同的解題策略,因此,以下將四個題本又分成不同數學學業成就來探討其解題策略的差異(註:表格中黑體字代表使用比率較高者,而且每個人解一題都只用一種解題策略)。

(1) T1 題本

表 4-2-7 不同數學學業成就學生在 T1 題本「語意類型」問題使用解題策略的情形

高數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	17.05	**45.74**	37.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
部分-部分-不混合	10.47	27.91	**52.33**	0.00	0.00	0.00	1.16	0.00	1.16	2.33	0.00	0.00	0.00	**4.65**	0.00
部分-部分-混合	6.98	29.07	**56.98**	0.00	0.00	0.00	2.33	2.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.33	0.00
關係集合	10.23	42.79	**43.72**	0.00	0.00	0.00	0.93	0.47	0.00	0.00	0.47	0.47	0.00	0.93	0.00
放大-縮小-外在量	2.33	46.51	**51.16**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
放大-縮小-內在量	**40.70**	22.09	31.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	**5.81**	0.00	0.00	0.00
中數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	24.39	**43.09**	31.71	0.00	0.00	0.00	0.81	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
部分-部分-不混合	7.32	39.02	**42.68**	0.00	0.00	0.00	1.22	1.22	0.00	1.22	0.00	0.00	0.00	2.44	4.88
部分-部分-混合	10.98	31.71	**43.90**	0.00	0.00	0.00	1.22	0.00	0.00	0.00	1.22	0.00	0.00	**10.98**	0.00
關係集合	17.07	38.54	**40.00**	0.00	0.00	0.00	0.98	0.98	0.00	0.00	0.49	0.00	0.00	0.00	1.95
放大-縮小-外在量	26.83	26.83	**46.34**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
放大-縮小-內在量	**42.68**	24.39	24.39	0.00	0.00	0.00	2.44	2.44	0.00	0.00	0.00	1.22	0.00	1.22	1.22
低數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	22.92	**47.92**	8.33	0.00	6.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.04	0.00	0.00	5.21	8.33
部分-部分-不混合	4.69	**25.00**	10.94	0.00	0.00	0.00	0.00	1.56	0.00	**14.06**	6.25	0.00	0.00	**18.75**	**18.75**
部分-部分-混合	12.50	**37.50**	10.94	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.25	0.00	0.00	0.00	**15.63**	**17.19**
關係集合	15.63	**40.63**	8.75	0.00	0.63	0.00	0.00	1.25	0.63	1.25	4.38	0.63	0.00	**10.00**	**16.25**
放大-縮小-外在量	25.00	**40.63**	9.38	0.00	0.00	0.00	0.00	3.13	0.00	0.00	3.13	0.00	0.00	6.25	**12.50**
放大-縮小-內在量	**34.38**	29.69	6.25	0.00	0.00	0.00	1.56	0.00	0.00	0.00	4.69	3.13	0.00	**10.94**	**9.38**

單位：%

由以上的表格可發現高、中數學學業成就學生在 T1 題本的語意類型其正確解題策略模式相似，在「熟知的量數」問題都傾向使用倍數法，「放大-縮小-內在量」的問題都傾向使用單價法，其餘的問題都使用公式法；低數學學業成就學生除了在「放大-縮小-內在量」的問題較常使用單價法外，其餘的問題都使用倍數法，由上表可得知低數學學業成就學生在解題時使用 R3 解題策略的比率較低。另外，錯誤的解題策略方面，高數學學業成就的學生在「放大-縮小-內在量」及「部分-部分-不混合」問題錯誤率較高；中數學學業成就的學在「部分-部分-混合」問題錯誤率

較高；低數學學業成就的學生除了「熟知的量數」問題外，其餘類型的題目總錯誤率都在 20%以上，其中以「部分-部分-不混合」問題錯誤率最高，值得一提的是在這個語意類型下使用 W3 的比率高出 W4 許多，代表學生在這個類型的題目容易犯「和數相等」的錯誤解題策略，會使用這個策略與題目的類型有關，研究者認為學生會使用這樣的解題策略是因為「部分+部分=總量」，因此，如果不能掌握題目意涵，則會誤解題意而犯錯。

(2) T2 題本

表 4-2-8 不同數學學業成就學生在 T2 題本「語意類型」問題使用解題策略的情形

高數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	**66.67**	0.88	31.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.88	0.00	0.00	0.00	0.00
部分-部分-不混合	26.32	1.32	**56.58**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.32	2.63	2.63	0.00	0.00	5.26	3.95
部分-部分-混合	30.26	2.63	**55.26**	0.00	0.00	0.00	1.32	1.32	0.00	0.00	5.26	0.00	0.00	1.32	1.32
關係集合	**44.74**	3.16	41.05	0.00	0.00	0.00	0.53	1.05	0.00	0.00	4.21	0.00	0.53	2.11	2.63
放大-縮小-外在量	**55.26**	2.63	34.21	0.00	0.00	0.00	2.63	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.26
放大-縮小-內在量	**44.74**	6.58	34.21	0.00	0.00	0.00	1.32	0.00	0.00	1.32	5.26	5.26	0.00	0.00	1.32
中數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	**73.53**	0.98	16.67	1.96	0.00	0.00	0.00	1.96	0.00	0.00	2.94	0.00	0.98	0.98	0.00
部分-部分-不混合	14.71	0.00	**38.24**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.41	**16.18**	5.88	0.00	0.00	**17.65**	5.88
部分-部分-混合	35.29	0.00	**45.59**	0.00	0.00	0.00	1.47	2.94	0.00	7.35	4.41	0.00	0.00	4.41	1.47
關係集合	**51.18**	2.35	28.82	1.18	0.00	0.59	1.76	0.00	0.00	0.00	7.06	0.00	0.59	4.71	4.71
放大-縮小-外在量	**55.88**	2.94	35.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.94	0.00	0.00	0.00	5.88
放大-縮小-內在量	**50.00**	1.47	14.71	0.00	0.00	0.00	7.35	7.35	1.47	0.00	7.35	2.94	0.00	4.41	5.88
低數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	**71.54**	0.00	8.94	3.25	0.00	0.00	0.81	0.81	0.00	0.00	2.44	0.00	0.00	7.32	4.88
部分-部分-不混合	**21.95**	1.22	13.41	0.00	0.00	0.00	1.22	1.22	2.44	**21.95**	14.63	1.22	0.00	17.07	3.66
部分-部分-混合	**32.93**	1.22	15.85	0.00	0.00	0.00	1.22	6.10	0.00	13.41	8.54	0.00	0.00	14.63	6.10
關係集合	**47.80**	0.49	11.71	0.49	0.00	0.00	1.46	2.44	0.49	1.46	13.66	0.00	0.49	12.20	7.32
放大-縮小-外在量	**58.54**	2.44	12.20	0.00	0.00	0.00	4.88	2.44	0.00	0.00	2.44	0.00	0.00	12.20	4.88
放大-縮小-內在量	**45.12**	0.00	7.32	0.00	0.00	0.00	2.44	8.54	0.00	0.00	**21.95**	0.00	0.00	7.32	7.32

由上表 4-2-8 可發現高、中數學學業成就學生在 T2 題本的語意類型其正確解題策略模式相似，在「部分-部分-不混合」及「部分-部分-混合」的問題都傾向使用公式法，其餘的都傾向使用單價法，研究者猜測因為這兩類的問題在題目敘述中可能透露出“比例”的概念，如：第一題中的「機率相同」、第九題中的「比例相同」、第十題中的「相同濃度」，因此，高、中數學學業成就的學生就較容易使用比例的公式法直接解題，其餘的語意類型因為受 T2 題本的數字型式影響，所以使用單價法的比率較高；低數學學業成就學生不管在 T2 題本中的哪一種語意類型，都明顯傾向使用 R1 的解題策略，完全不受語意類型的差別而有所不同，因此，代表高、中數學學業成就學生雖然會受題目數字型式的影響，但在做某些語意類型的題目時還是會考量其題目意涵來決定解題策略，而低數學學業成就學生則完全是受題目數字型式的牽制來決定解題策略。

在錯誤的解題策略方面，中、低數學學業成就學生在「部分-部分-不混合」表現最差，而且犯 W3 錯誤的比率提高許多，另外，低數學學業成就學生在「放大-縮小-內在量」犯 W4 的比率很高，研究者認為會犯這樣的錯誤與這類型題目為內在量的改變有關，若學生不瞭解題意或比例概念不清楚，很容易將內在量的相對改變想成內在量的絕對改變，因此，使用「差數相等」的機率就會提高許多，所以這類型題目可用來判斷學生是否瞭解「相對改變」的比例概念。

(3) T3 題本

表 4-2-9 不同數學學業成就學生在 T3 題本「語意類型」問題使用解題策略的情形

高數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	9.38	33.33	**56.25**	0.00	1.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
部分-部分-不混合	3.13	20.31	**73.44**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
部分-部分-混合	1.56	21.88	**75.00**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.56	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
關係集合	3.75	33.75	**61.88**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.63	0.00	0.00	0.00	0.00
放大-縮小-外在量	3.13	31.25	**65.63**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
放大-縮小-內在量	28.13	21.88	**46.88**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.13	0.00	0.00	0.00
中數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	3.03	**74.75**	19.19	0.00	3.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
部分-部分-不混合	1.52	**42.42**	30.30	0.00	0.00	0.00	1.52	1.52	4.55	6.06	0.00	0.00	0.00	**12.12**	0.00
部分-部分-混合	3.03	**56.06**	30.30	0.00	1.52	0.00	1.52	0.00	0.00	1.52	4.55	1.52	0.00	0.00	0.00
關係集合	1.21	**70.91**	23.03	0.00	1.82	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.82	0.00	0.00	0.61	0.61
放大-縮小-外在量	6.06	**69.70**	21.21	0.00	3.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
放大-縮小-內在量	19.70	**53.03**	16.67	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.03	4.55	0.00	1.52	1.52
低數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	0.00	**69.18**	17.61	0.00	3.14	0.00	5.03	0.00	0.00	0.00	1.26	0.63	0.00	3.14	0.00
部分-部分-不混合	2.83	**34.91**	20.75	0.00	0.94	0.00	0.94	2.83	4.72	9.43	6.60	0.00	0.00	9.43	6.60
部分-部分-混合	1.89	**62.26**	19.81	0.00	0.94	0.00	0.00	0.00	0.00	0.94	5.66	0.00	0.00	6.60	1.89
關係集合	1.13	**67.55**	18.11	0.00	0.75	0.00	1.13	0.00	0.00	0.00	4.91	0.38	0.00	3.02	3.02
放大-縮小-外在量	0.00	**56.60**	20.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	9.43	0.00	0.00	5.66	7.55
放大-縮小-內在量	8.49	**48.11**	13.21	0.00	1.89	0.00	0.94	0.00	0.00	0.94	**13.21**	1.89	2.83	4.72	3.77

由上表 4-2-9 可發現高數學學業成就學生在 T3 題本的語意類型其正確解題策略都以 R3 居多；中、低數學學業成就學生則幾乎都是使用 R2 的解題策略，研究者認為高數學學業成就學生只要在做完幾題後判斷出此份比例問題測驗都是與「比例」有關，則他們就會一貫的使用公式法來解題，只要他們記得公式法的「內項乘積=外項乘積」，則任何的題目都可輕鬆代公式解出答案來，而中、低數學學業成就學生可能是受 T3 題目數字型式的影響而使用 R2 的解題策略居多，代表在 T3 題本解題時，中、低數學學業成就學生較易受這個題本的數字型式影響而使用倍數法來解題。另外，在錯誤的解題策略方面，很多情況與上述的題本雷同，在此就不多加贅述。

(4) T4 題本

表 4-2-10 不同數學學業成就學生在 T4 題本「語意類型」問題使用解題策略的情形

高數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	32.58	16.67	**48.48**	0.00	0.00	0.00	0.76	0.00	0.00	0.00	1.52	0.00	0.00	0.00	0.00
部分-部分-不混合	4.55	3.41	**82.95**	0.00	0.00	0.00	1.14	0.00	0.00	1.14	2.27	0.00	0.00	2.27	2.27
部分-部分-混合	5.68	9.09	**76.14**	0.00	0.00	0.00	2.27	1.14	0.00	1.14	2.27	0.00	0.00	2.27	0.00
關係集合	14.09	16.36	**61.36**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.91	0.45	0.00	5.91	0.00	0.00	0.00	0.91
放大-縮小-外在量	0.00	11.36	**81.82**	0.00	0.00	0.00	2.27	0.00	0.00	0.00	4.55	0.00	0.00	0.00	0.00
放大-縮小-內在量	35.23	6.82	**37.50**	0.00	0.00	0.00	2.27	2.27	0.00	0.00	**6.82**	**6.82**	1.14	1.14	0.00
中數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	30.37	13.33	**43.70**	0.00	0.00	0.00	2.22	0.00	0.00	0.74	4.44	0.00	0.74	3.70	0.74
部分-部分-不混合	7.78	6.67	**53.33**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.56	**12.22**	0.00	0.00	4.44	10.00
部分-部分-混合	11.11	13.33	**54.44**	0.00	0.00	0.00	1.11	0.00	0.00	3.33	10.00	0.00	0.00	3.33	3.33
關係集合	13.33	10.67	**48.00**	0.89	0.00	0.44	0.89	1.78	0.00	0.44	**12.89**	0.00	0.00	2.67	8.00
放大-縮小-外在量	11.11	15.56	**53.33**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.22	**13.33**	0.00	2.22	2.22	0.00
放大-縮小-內在量	22.22	5.56	**34.44**	0.00	0.00	0.00	1.11	1.11	0.00	0.00	**14.44**	3.33	4.44	6.67	6.67
低數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
熟知的量數	**33.33**	8.33	4.17	5.56	1.39	0.00	0.00	1.39	0.00	0.00	16.67	0.00	1.39	12.50	15.28
部分-部分-不混合	4.17	2.08	4.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	8.33	12.50	**25.00**	0.00	0.00	18.75	**25.00**
部分-部分-混合	4.17	10.42	4.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10.42	**41.67**	0.00	0.00	14.58	14.58
關係集合	10.00	4.17	5.83	2.50	0.00	1.67	5.00	0.00	0.00	0.83	**32.50**	0.00	0.83	17.50	19.17
放大-縮小-外在量	12.50	12.50	4.17	0.00	0.00	0.00	4.17	0.00	0.00	0.00	**41.67**	0.00	4.17	12.50	8.33
放大-縮小-內在量	8.33	0.00	4.17	0.00	0.00	0.00	2.08	0.00	0.00	0.00	**45.83**	2.08	10.42	12.50	14.58

由上表 4-2-10 可發現高、中數學學業成就學生在 T4 題本中的語意類型其正確解題策略以 R3 比率最高，很明顯在這個題本高、中數學學業成就的學生都會採用公式法來解題，因為這個題本的數字型式為任意數值，沒有倍數關係，所以如果使用 R1 或 R2 的解題策略就會遇到要思考如何做分數的運算，反倒是使用公式法直接做分數的四則運算較容易；低數學學業成就學生在這個題本出現很大的問題，他們只有在「熟知的量數」問題使用正確的解題策略比率較高，其餘的語意類型幾乎都是採用錯誤的解題策略 W4 來解題，代表他們在分數的運算相當差，會避開使用分

數而採用「差數相等」策略來解題，因此，對於低數學學業成就的學生而言，他們只能理解「熟知的量數」問題，代表這類型的題目他們較清楚掌握題意而不會犯錯，但其它類型的題目可能因為練習的機會較少，所以在沒有把握的情形下只好避開分數而使用較易解出答案的差數相等策略。

另外，研究者還發現有些學生在「部分-部分-不混合」問題會出現 W2 的錯誤解題策略，可能將第一題中的「機率相同」及第九題中的「比例相同」誤解成「數量相同」，才會出現「對應項相等」的解題策略；還有些高數學學業成就學生在「放大-縮小-內在量」的題目中會使用 W5 的解題策略，而會使用 W5 解題的為比例問題測驗的第十三題，題目敘述是「不改變原來的形狀」，有些學生將題目誤解為不改變原來的形狀就是指「不改變面積大小」的意思，因此，就會使用「乘積相等」來算出答案，這也代表這類的題目容易引導學生產生錯誤的思考，值得注意。

(二) 全部樣本討論

由表 4-2-7、4-2-8、4-2-9 及 4-2-10 的百分比結果可看出學生在解不同語意類型的比例問題時，所出現的各種解題策略都不相同，以下針對四類的語意類型依次說明：

(1)熟知的量數：高數學學業成就學生正確的解題策略較偏向使用「公式法」，中、低數學學業成就學生會受題本的數字型式影響而決定使用的解題策略，低數學學業成就學生在熟知的量數問題表現最好，多偏向使用「單價法」。

(2)部分-部分：1.部分-部分-不混合的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「對應項相等」、「和數相等」及「差數相等」策略；

2.部分-部分-混合的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「差數相等」策略。

(3)關係集合：關係集合的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「差數相等」策略。

(4)放大-縮小：1.放大-縮小-外在量的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「差數相等」策略；

2.放大-縮小-內在量的問題其錯誤的解題策略多偏向使用「乘積相等」策略和「差 數相等」策略，而在 T4 題本使用「差數相等」策略的人數明顯比其它題本多。

研究者發現在比例問題測驗的第四題在四個題本中使用的解題策略都幾乎相同，很多學生都會使用單價法，研究者認為學生因為有做過類似的題目，知道打折就是指原價乘以折數，所以習慣會用原價和售價去算出折數，再來算出答案。

綜合以上的結果，學生在「熟知的量數」問題解題表現最佳，使用錯誤的解題策略情況最少，而「放大-縮小」及「部分-部分」問題是學生最容易犯錯的題型，因為這兩類語意類型在題意和意涵都較容易引導學生產生錯誤的解題策略，所以不同的語意類型會影響到學生使用不同的解題策略，因此，研究者依據資料分析的結果猜想，認為語意類型的認知學習由易至難應為下圖 4-2-9 所示，因此，教師可以根據下圖的認知順序提供學生不同的學習階段，並從學生的解題策略來判斷學生錯誤的原因及困難。

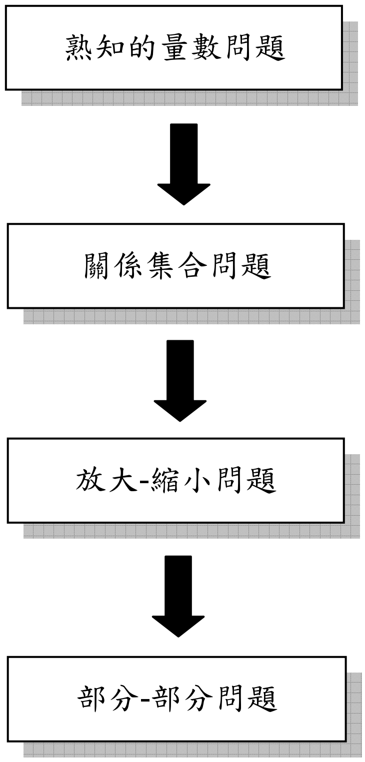


圖 4-2-9 以語意類型劃分比例問題的認知學習階段

(三)個案訪談結果

研究者在晤談時，會請學生說明不同語意類型與解題策略的關係，瞭解是否在不同語意類型的比例問題下會有不同的解題方式，並瞭解題目之間的難易程度及學生在解比例問題時產生的疑惑及遇到的困難。以下為 24 名晤談學生的晤談結果，分別探討各個訪談學生在不同語意類型的解題策略情形，而下面的晤談原案參考及分析結果主要是呈現學生在某些語意類型有特定解題策略的情形：

1. 高數學學業成就【T2 題本，第一題及第四題】學生代碼：DH1

表 4-2-11 DH1 學生在不同語意類型的解題策略情形

語意類型			題號－解題策略編碼				
1	熟知的量數		5－R1	7－R1	14－R1		
2	部分-部分	不混合	1－R3	9－R3			
		混合	2－R3	10－R3			
3	關係集合		3－R3	6－R1	8－R1	11－R3	15－R1
4	放大-縮小	外在量	12－R3				
		內在量	4－R1	13－R1			

第一題

I：哦！那你有學過你寫的算式是什麼東西嗎？

S：呃…六年級有學過的東西。

I：那叫什麼？

S：呃…比例式吧！

I：這個叫比例式嗎？

S：好像是。

I：比例式，那…好…你可不可以提出爲什麼你要用比例式來做？

S：…不知道耶！…就想到用這個…。

I：所以你一開始就想到用這個方式嗎？沒有其它方法嗎？

S：有。

I：什麼方法？你現在再想想看有沒有其它方法可以做？一定要用比例式做嗎？

S：有…有其它方法。

I：什麼方法？你可以寫下來。

S：寫下來嗎？

I：嗯。當參考用。

S：(寫下 10÷5=2，12÷2=6)

I：爲什麼是這樣？10 除以 5 等於 2 是什麼意思？

S：就是如果有 1 顆黑色球的話，就會有 2 顆白色球。

I：那爲什麼 12 要除以 2？

S：因爲 12 顆白色球的話，它的一半就會是黑色球。

: : :

I：好，那前面這三題你的算法都差不多，後面這三題又換方式算，爲什麼？

S：我也不知道。

I：就很隨意，想到什麼方法就用什麼方法…。

S：我也不知道。

I：那你可不可以解釋一下第 4 題你的算法，爲什麼要 6÷12？可不可以 12÷6？

S：就看它打幾折？

I：1/2 嗎？

S：不是。

I：那是幾折？

S：5 折。

I：那 16 爲什麼乘 1/2？

S：因爲它也要打 5 折。

I：那這一題可不可以用你剛剛的”比”來寫？

S：可以。

I：那你剛剛爲什麼沒有想到用這個方法來寫？

S：我也不知道。

I：以前有算過類似的問題嗎？

S：嗯…好像有。

I：那你都會怎麼算？

S：呃…就先算打折數。

此學生在做比例問題測驗時使用的解題策略並無法從訪談中得知很明確的原因，學生也不知道為何會使用不同的解題策略，只是順應著當時的想法就做出來了，在「熟知的量數」、「關係集合」及「放大-縮小-內在量」問題較常使用單價法來解題，在第 4 題當中，學生表示以前有算過類似的問題，因此，研究者推測使用單價法來解題的原因與其學習經驗有關。

2. 高數學學業成就【T3 題本，第一題】學生代碼：GH2

表 4-2-12 GH2 學生在不同語意類型的解題策略情形

語意類型			題號－解題策略編碼				
1	熟知的量數		5－R2	7－R2	14－R2		
2	部分-部分	不混合	1－W2	9－W2			
		混合	2－R2	10－R2			
3	關係集合		3－R2	6－R2	8－R2	11－R2	15－R2
4	放大-縮小	外在量	12－R2				
		內在量	4－R2	13－R2			

第一題

S：(看了 22 秒)它說抽出黑球的機率相同。

I：嗯嗯。

S：然後第一個袋子有 9 顆嘛，所以機率相同也要有 9 顆。

I：嗯。那你所說的機率相同是指什麼？

S：顆數應該要一樣。

I：所以這裡是 10 顆白的加 9 顆黑的，這邊是 20 顆白的加上 9 顆黑的。

S：嗯。

I：那如果把這裡改成 30 顆白的，那要加幾顆黑的？(10 白 9 黑，30 白？黑)

S：一樣 9 顆。

該名學生把第一題題目當中的「機率相同」及第九題題目當中的「比例相同」誤解成「數量相同」，見下圖 4-2-10 及圖 4-2-11，因此，在「部分-部分-不混合」的問題都使用相同的解題策略，代表學生在這種語意類型的題目中較不清楚其題意，較容易犯錯。

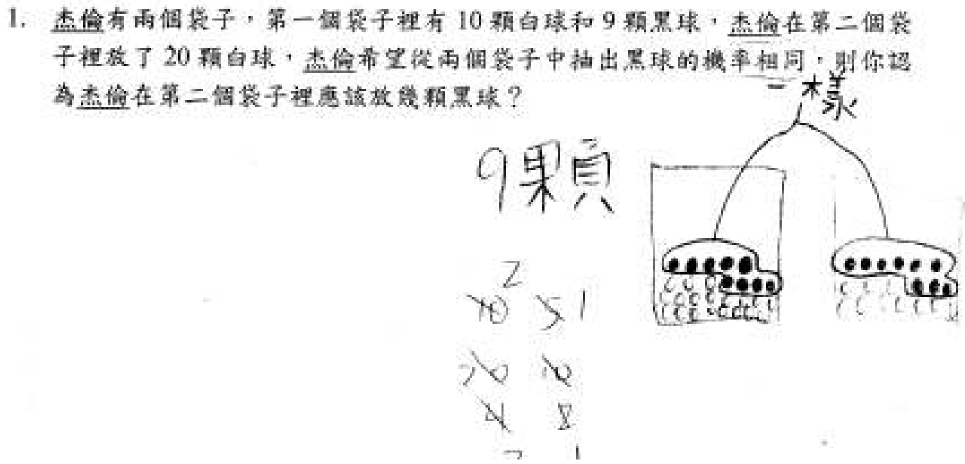


圖 4-2-10 GH2 在 T3 題本第 1 題的原案

圖 4-2-11 GH2 在 T3 題本第 9 題的原案

3. 低數學學業成就【T1 題本，第二題及第七題】學生代碼：CL1

表 4-2-13 CL1 學生在不同語意類型的解題策略情形

語意類型			題號－解題策略編碼				
1	熟知的量數		5－R1	7－R1	14－R1		
2	部分-部分	不混合	1－W4	9－W7			
		混合	2－0	10－R2			
3	關係集合		3－R1	6－R1	8－R2	11－R2	15－R1
4	放大-縮小	外在量	12－R1				
		內在量	4－R1	13－R2			

第二題

I：好，那下一題呢？你可不可以解釋一下。

S：不懂它的意思。

I：好，那一句話看不懂？你再看一次。

S：…(看題目中)

I：你可不可以解釋一下題目在說什麼？老師聽聽看。

S：……(沉思中…想了 15 秒)。

I：你講講看沒關係。

S：…。

I：那你有想到什麼算法嗎？

S：…。

I：那老師把題目解釋一次給你聽。(解釋題目)

S：嗯。

I：這樣題目有沒有聽懂？

S：4 罐吧！

I：爲什麼是 4 罐？

S：因爲剛剛你說 4 罐、8 罐，又買兩罐，所以 1：2 再買 4 罐所以是 2 罐。

第七題

I：好，那我們來看第 7 題。你把你的算式講一下。

S：就 2 分鐘看 10 頁，就 10 除以 2，就一分鐘可以看 5 頁，6 分鐘就 30 頁。

I：那你爲什麼會這樣算？

S：就先算一分鐘看幾頁，然後…再算 6 分鐘看幾頁。

I：嗯，那你有沒有做過類似的問題？

S：好像有。

：　　　　　：　　　　　：

I：很好，這個題目是不是比較簡單？

S：嗯。

該名學生在「部分-部分」的解題表現不佳，原因是不瞭解題意，經過研究者重新解釋題目之後，他就比較能掌握題目的意思而能進行解題，而在「熟知的量數」問題都使用單價法來解題，因為他會先算出一單位的量，然後再去乘以幾個單位，在第 5、7 和 14 題的題目較容易引發該名學生使用單價法，而且學生也有類似的經驗應該先算出一單位的量，因此，解題策略和語意類型是有關聯性的，他沒看過的題目就比較不會做，有做過類似的題目就比較會用經驗去解題。

4. 低數學學業成就【T1 題本，第一題及第五題】學生代碼：CL2

表 4-2-14 CL2 學生在不同語意類型的解題策略情形

語意類型			題號－解題策略編碼				
1	熟知的量數		5－R1	7－R1	14－R1		
2	部分-部分	不混合	1－0	9－0			
		混合	2－0	10－0			
3	關係集合		3－W3	6－R1	8－R1	11－0	15－0
4	放大-縮小	外在量	12－R1				
		內在量	4－R1	13－0			

第一題

I：那你是完全不會寫是嗎？有沒有任何想法？

S：嗯...，就想不出來呀！

I：好。那你有看過類似的題目嗎？

S：有。

I：什麼時候？

S：上學期，我們學校有教過。

I：那你覺得這個題目難不難？

S：只要我知道怎麼算，我就會了，有老師教我，我就會了。

I：嗯。那你是看懂題目了，但不知道怎麼算。

S：嗯。

第五題

I：好！那下一題題目比較短，你再看一次，解釋題目給老師聽。

S：它 3 顆售價是 6 元，所以知道 1 顆是 2 元，它買 9 顆，所以乘起來是 18。

I：那你覺得你有把握答對這題嗎？

S：不知道。

I：你覺得你會做對嗎？

S：不會。

I：沒把握？

S：嗯。

I：那你有沒有看過類似的題目？

S：有，小學。

I：那你覺得這一題算難還是簡單？

S：簡單。

I：所以你做這一題都沒有遇到困難。

S；沒有。

這個學生在「部分-部分」的問題中都沒有回答一題，他雖然說老師曾經教過，只是他忘記了，但要他算，他卻一點想法也沒有，完全不知如何作答，代表他只是用“記”的方式在做此題目，完全無法掌握題目的意思，而分析其各題的解題策略，在回答正確的題目中所使用的解題策略都是單價法，特別在「熟知的量數」問題中都完全答對，代表這類型的題目對他而言較簡單，很容易先算出一個單位量之後再乘以倍數後算出來，因此，語意類型與解題策略是相關的。

5. 低數學學業成就【T2 題本，第二題】學生代碼：FL1

表 4-2-15 FL1 學生在不同語意類型的解題策略情形

語意類型			題號－解題策略編碼				
1	熟知的量數		5－R1	7－W7	14－R1		
2	部分-部分	不混合	1－W4	9－W3			
		混合	2－W3	10－W3			
3	關係集合		3－W4	6－R1	8－R1	11－W4	15－R1
4	放大-縮小	外在量	12－R1				
		內在量	4－R1	13－W4			

第二題

I：題目看得懂嗎？

S：懂。

I：那你解釋你的算法。

S：(想了 22 秒)4 罐藍漆加上 8 罐白漆等於 12 罐某色的漆，然後發現不夠用，又買 5 罐藍漆，加上某數等於 12 這樣。

I：所以你用的方法是什麼意思？

S：就看全部有幾罐，然後減掉藍漆的，剩下的就是白漆的。

：　　　　：　　　　：

I：嗯…老師看了你做的結果，發現你在做 1、3、11、13 題的時候會用這個方法，2、9、10 題會用另一個方法，你爲什麼會有這樣不同的做法？你當時候是怎麼想的？

S：嗯…嗯…不知道，忘了。

I：你再仔細想想，跟題目的問題有關嗎？你再重看一次。

S：…(想了 34 秒)。

I：你回想一下那時候是怎麼想的？

S：…(想了 12 秒)第 2 題是調東西，所以是把東西加在一起，啊第 10 題也是把東西加在一起，所以才會用這個方法吧！

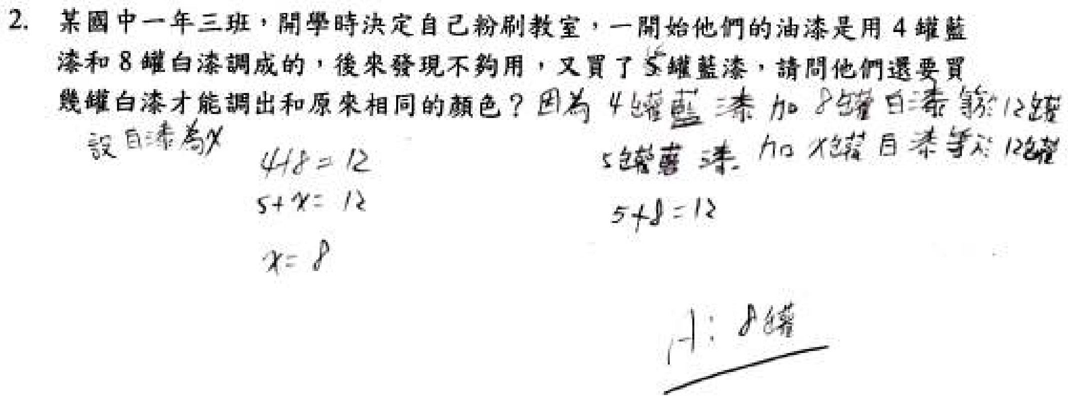
I：那第 9 題呢？

S：嗯…就這兩條蛋糕的長度一樣長，所以也是加在一起。

I：哦！…所以你這幾題就都用加的總和相等來算。

S：嗯。

該名學生在做「部分-部分」問題時，會把部份和部份的量相加起來等於總量，然後利用總量相等來做運算，見下圖 4-2-12，代表這個學生在做這樣的語意類型問題時較易產生錯誤，因此，解題策略和語意類型有相關。


2. 某國中一年三班，開學時決定自己粉刷教室，一開始他們的油漆是用 4 罐藍漆和 8 罐白漆調成的，後來發現不夠用，又買了 5 罐藍漆，請問他們還要買幾罐白漆才能調出和原來相同的顏色？因為 4 罐藍漆加 8 罐白漆等於 12 罐

設白漆為 x

4+8=12

5+x=12

x=8

5 罐藍漆加 x 罐白漆等於 12 罐

5+8=12

A: 8 罐

圖 4-2-12 FL1 在 T2 題本第 2 題的原案

6. 低數學學業成就【T4 題本，第一題及第五題】學生代碼：LL1

表 4-2-16 LL1 學生在不同語意類型的解題策略情形

語意類型			題號－解題策略編碼				
1	熟知的量數		5－R1	7－R1	14－R1		
2	部分-部分	不混合	1－W3	9－W3			
		混合	2－0	10－W4			
3	關係集合		3－W7	6－R7	8－R7	11－W7	15－W7
4	放大-縮小	外在量	12－W4				
		內在量	4－W6	13－W7			

第一題

I：嗯。那你知道什麼叫做「機率相同」嗎？

S：就是它的…它的…機率會是一樣的。

I：好，那你所謂的機率一樣，那你的算式是什麼意思？

S：…(思考中)…就是 10 顆白球加 8 顆黑球等於 18，啊如果第二個袋子要跟第一個袋子的機率一樣的話，就是 18-15=3。

I：那你是說第一個袋子白球加黑球是 18 顆，所以第二個袋子加起來也要 18 顆嗎？

S：嗯。

I：那你可以再把你的機率相同說明一下嗎？

S：…就是如果機率相同的話，那兩袋的球，白球加黑球總數要一樣。

第五題

I：好，再來下一題。

S：就是它買 4 顆 6 元，就是先算出一顆多少錢，然後再去乘以 14 顆等於多少錢，得出了這個答案。

I：那你爲什麼要先算出一顆的錢？

S：<u>因爲先算出一顆比較好算。</u>

I：那你以前有算過類似的問題嗎？

S：<u>有吧！國小有算過吧！</u>

這個學生在「部分-部分-不混合」題目中會使用和數相等的解題策略，他將部份和部份的量加起來等於總量，再利用總量去運算，代表這個學生在做這類型的問題時不能掌握其中的比例關係，而在做「熟知的量數」問題時相對是比較簡單的，他可以很清楚的表達出算式的意義，能知道要先算出其中一個單價再去做運算，因此，不同的語意類型會改變他的解題策略。

(四) 個案訪談討論

在晤談完 24 名受試者後，研究者將學生的回答情形分為三類，呈現於下表 4-2-17：

(1) 解題策略不會受語意類型的影響，研究者無法辨識訪談學生的語意類型是否有特定的解題策略，記作×。

(2) 解題策略會受某些語意類型的影響，某些題目會使用單價法而與其他題的解題策略不同，記作△。

(3) 解題策略會受語意類型的影響，會因語意類型不同而改變解題策略或接受不同的解題策略，記作○。

表 4-2-17 學生的解題策略與不同語意類型的關係

	高數學學業成就		中數學學業成就		低數學學業成就	
T_1	AH1 ×	AH2 ×	BM1 ×	BM2 ×	CL1 ○	CL2 ○
T_2	DH1 ○	DH2 ×	EM1 △	EM2 ×	FL1 ○	FL2 △
T_3	GH1 ×	GH2 ○	HM1 ×	HM2 ×	IL1 ×	IL2 ×
T_4	JH1 ×	JH2 ×	KM1 ×	KM2 ×	LL1 ○	LL2 △

由上表及分析訪談資料可得知，在探討不同語意類型與解題策略的關係時，由訪談資料發現低數學學業成就的學生在解題時較容易受題目類型而有不同的解題策略，而高、中、低數學學業成就的學生其共同點是第 4 題幾乎都使用「單價法」，因為學生對這題目中的"打折"有較多的運算經驗，通常都會習慣先算出其打折的折數，因此學生幾乎都會使用單價法的方式來計算。而高、中數學學業成就學生很多題目大部份都使用「倍數法」來解題，低數學學業成就學生很多題目大多使用「單價法」來解題，而且在「熟知的量數」問題其正確率都較高，代表單價法對低數學學業成就學生而言是較簡單易懂的。

整體觀之，在第 1、9、11 和 13 題錯誤率較高，原因是題目較長又較不易瞭解，有些學生會誤會題目的意思，例如：學生對於「機率」的意涵不是很瞭解，所以他

們會把第 1 題題目中的「機率相同」想成「數目相同」；第 9 題題目中的「吃掉的比例相同」誤會成「吃掉的數量相同」，所以會採用差數相等策略；第 11 題因為題目較長又較複雜，學生無法瞭解題意及掌握固定不變的大小水族箱的體積，因此，不容易想到用比例的方式解題，而採用較簡單的差數相等策略，即使是用正確的解題策略，也不見得是真正瞭解其中的涵義；第 13 題題目中的「不改變原來的形狀」，學生會很直觀的認為只要長和寬增加的長度相同，那麼形狀就不會被改變。在這幾題中發現，學生因為比較沒有做過類似的題型，因此，學生很容易使用錯誤的解題策略，而這些題目中的關鍵語句也是影響學生作答的主因，學生如果不能對題目中的關係產生「比感」，則容易用自己的話語去詮釋題目的意涵，而使用自認為合理的解題策略去解題。

有些題目在訪談時並沒有很明顯發現題目的語意類型與解題策略的明確關係，因為學生無法說出為什麼在做不同題型時會使用不同的解題策略，他們只是憑直覺或第一個感覺去解題，並沒有特別想到要用什麼方法解題，因此，研究者只能將此部份做歸納整理，將學生的解題策略分類後分析是否與題目的語意類型有關聯性，只能做假設性的猜測，有些並無法直接證明之間的關係，因為學生在解題時牽涉太多的相關因素，可能包含解題經驗、解題習慣及其它變數的影響。研究者利用訪談的方式瞭解學生使用解題策略的原因，雖然受限於種種因素無法做完整的探討，但還是可從分析的資料得知某些語意類型與解題策略是有相關性的。

三、 「不同量的性質」與學生解題策略之關係

(一) 全部樣本結果

本節的第三部分主要探討學生在不同量的性質的解題策略是否會有差異。研究者將受試者在「比例問題測驗」上正確的解題策略分為七類:「單價法」、「倍數法」、「公式法」、「數量分解策略」、「疊加法」、「舉例法」及「計算錯誤」;錯誤的解題策略分為八類:「比例項錯置」、「對應項相等」、「和數相等」、「差數相等」、「乘積相等」、「估算」、「其它運算」及「無計算過程或空白」,採用「百分比計次」的方法,計算出在五種不同量的性質(「離散量-離散量-內比」、「離散量-離散量-外比」、「離散量-連續量-外比」、「連續量-連續量-內比」、「連續量-連續量-外比」)中各種解題策略的出現百分率,以瞭解學生使用解題策略的情形。

因為不同數學學業成就的學生在不同題本中會有不同的解題策略,因此,以下將四個題本又分成不同數學學業成就來探討其解題策略的差異(註:表格中黑體字代表使用比率較高者,而且每個人解一題都只用一種解題策略)。

(1) T1 題本

表 4-2-18 不同數學學業成就學生在 T1 題本「量的性質」問題其解題策略的情形

高數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	25.00	27.33	**43.02**	0.00	0.00	0.00	1.74	0.58	0.00	0.00	0.00	0.58	0.00	1.74	0.00
離散量-離散量-外比	23.26	**43.02**	33.72	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
離散量-連續量-外比	13.95	**48.84**	36.05	0.00	0.00	0.00	0.00	1.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
連續量-連續量-內比	6.05	36.74	**51.16**	0.00	0.00	0.00	0.47	0.47	0.47	0.93	0.00	2.33	0.00	1.40	0.00
連續量-連續量-外比	8.14	39.53	**47.67**	0.00	0.00	0.00	1.16	0.00	0.00	0.00	1.16	0.00	0.00	2.33	0.00
中數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	27.44	27.44	**33.54**	0.00	0.00	0.00	2.44	0.61	0.00	0.61	0.61	0.00	0.00	4.88	2.44
離散量-離散量-外比	23.17	**46.34**	30.49	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
離散量-連續量-外比	23.17	**46.34**	29.27	0.00	0.00	0.00	1.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
連續量-連續量-內比	11.71	35.61	**45.37**	0.00	0.00	0.00	0.98	1.46	0.00	0.00	0.00	0.49	0.00	1.95	2.44
連續量-連續量-外比	23.17	32.93	**41.46**	0.00	0.00	0.00	0.00	1.22	0.00	0.00	1.22	0.00	0.00	0.00	0.00
低數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	21.88	**25.78**	9.38	0.00	0.00	0.00	0.78	0.00	0.78	6.25	3.13	0.78	0.00	**16.41**	14.84
離散量-離散量-外比	28.13	**48.44**	6.25	0.00	4.69	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.69	7.81
離散量-連續量-外比	14.06	**50.00**	9.38	0.00	4.69	0.00	0.00	1.56	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	7.81	12.50
連續量-連續量-內比	12.50	**40.00**	9.38	0.00	0.00	0.00	0.00	1.25	0.00	4.38	4.38	1.25	0.00	10.63	**16.25**
連續量-連續量-外比	20.31	**35.94**	9.38	0.00	1.56	0.00	0.00	1.56	0.00	0.00	7.81	0.00	0.00	9.38	14.06

單位：%

由以上的表格可發現高、中數學學業成就學生在 T1 題本量的性質題目中，「離散量-離散量-外比」及「離散量-連續量-外比」題目使用 R2 正確解題策略較多，其它的題目都使用 R3 為主；低數學學業成就學生全部的題目都傾向使用 R2 的解題策略，使用 R3 解題策略的比率相較於高、中數學學業成就學生較低，低數學學業成就學生似乎沒有受量的性質而有不同的解題策略。在錯誤的解題策略方面，高、中數學學業成就學生在「離散量-離散量-內比」、「連續量-連續量-內比」及「連續量-連續量-外比」的題目有些微的錯誤，而低數學學業成就學生在這三類題目錯誤率就明顯較高，代表這三類量的性質問題相較於其它題目較困難些。

(2) T2 題本

表 4-2-19 不同數學學業成就學生在 T2 題本「量的性質」問題其解題策略的情形

高數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	40.13	4.61	**45.39**	0.00	0.00	0.00	1.32	1.32	0.00	0.00	5.26	0.00	0.00	1.32	0.66
離散量-離散量-外比	**67.11**	1.32	28.95	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.32	0.00	0.00	1.32	0.00
離散量-連續量-外比	**64.47**	0.00	35.53	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
連續量-連續量-內比	30.53	3.16	**46.84**	0.00	0.00	0.00	1.05	0.53	0.53	1.58	4.21	2.11	0.53	2.63	5.79
連續量-連續量-外比	**52.63**	2.63	40.79	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.63	0.00	0.00	1.32	0.00
中數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	**40.44**	0.74	31.62	0.00	0.00	0.74	3.68	0.00	0.74	5.15	4.41	0.00	0.00	**10.29**	2.21
離散量-離散量-外比	**70.59**	2.94	17.65	1.47	0.00	0.00	0.00	1.47	0.00	0.00	2.94	0.00	1.47	1.47	0.00
離散量-連續量-外比	**73.53**	0.00	19.12	2.94	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.41	0.00	0.00	0.00	0.00
連續量-連續量-內比	**31.76**	1.18	31.18	0.00	0.00	0.00	2.35	4.12	1.76	4.71	**8.24**	0.59	0.59	6.47	7.06
連續量-連續量-外比	**60.29**	2.94	27.94	1.47	0.00	0.00	0.00	1.47	0.00	0.00	4.41	0.00	0.00	0.00	1.47
低數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	**41.46**	0.61	12.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.83	10.37	**14.02**	0.61	0.00	**14.63**	4.27
離散量-離散量-外比	**75.61**	0.00	10.98	1.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.22	1.22	0.00	0.00	6.10	3.66
離散量-連續量-外比	**75.61**	0.00	6.10	4.88	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.22	0.00	1.22	6.10	4.88
連續量-連續量-內比	**26.34**	0.98	12.20	0.00	0.00	0.00	4.39	9.27	0.00	6.83	**16.59**	0.00	0.00	**15.61**	7.80
連續量-連續量-外比	**56.10**	1.22	13.41	0.00	0.00	0.00	1.22	1.22	0.00	0.00	12.20	0.00	0.00	6.10	8.54

由上表 4-2-19 可發現高數學學業成就學生在 T2 題本量的性質題目中，「離散量-離散量-外比」、「離散量-連續量-外比」及「連續量-連續量-外比」的題目使用 R1 正確解題策略明顯較多，其它的題目則使用 R3 為主，代表這些學生在做外比的題目時，較容易刺激他們使用單價法來解題，所以，高數學學業成就的學生會受量的性質不同而改變他們的解題策略；中、低數學學業成就學生在 T2 題本使用正確的解題策略都是以 R1 為主，代表他們受題本的數字型式影響較大，大部分都用單價法來解題，因此，他們在量的性質條件下解題策略並沒有區別，另外，中、低數學學業成就學生在「離散量-離散量-內比」及「連續量-連續量-內比」的錯誤率最高，且在這兩類的題目中學生較容易犯「差數相等」及「和數相等」策略，研究者推測可能是與題目為內比有關，因為內比的題目其單位皆相同，因此，學生自然會較容易使用相加或相減的方式來做計算。

(3) T3 題本

表 4-2-20 不同數學學業成就學生在 T3 題本「量的性質」問題其解題策略的情形

高數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	16.41	23.44	**58.59**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.56	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
離散量-離散量-外比	7.81	37.50	**53.13**	0.00	1.56	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
離散量-連續量-外比	7.81	34.38	**57.81**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
連續量-連續量-內比	0.63	26.88	**70.63**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.63	0.00	1.25	0.00	0.00	0.00
連續量-連續量-外比	7.81	28.13	**62.50**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.56	0.00	0.00	0.00	0.00
中數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	11.36	**46.21**	29.55	0.00	0.00	0.00	0.76	0.00	0.76	0.76	**5.30**	0.76	0.00	3.79	0.76
離散量-離散量-外比	3.03	**75.76**	18.18	0.00	3.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
離散量-連續量-外比	1.52	**72.73**	22.73	0.00	3.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
連續量-連續量-內比	2.42	**64.24**	21.21	0.00	1.21	0.00	0.61	0.61	1.21	2.42	0.61	1.82	0.00	3.03	0.61
連續量-連續量-外比	1.52	**74.24**	21.21	0.00	3.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
低數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	6.13	**45.28**	17.92	0.00	1.89	0.00	0.00	0.00	1.89	1.42	**14.15**	0.47	1.42	5.19	4.25
離散量-離散量-外比	0.00	**70.75**	17.92	0.00	3.77	0.00	1.89	0.00	0.00	0.00	1.89	0.00	0.00	2.83	0.94
離散量-連續量-外比	1.89	**70.75**	17.92	0.00	0.94	0.00	3.77	0.00	0.00	0.00	0.94	0.00	0.00	3.77	0.00
連續量-連續量-內比	0.75	**56.23**	19.25	0.00	0.75	0.00	1.51	1.13	0.38	3.40	3.77	0.75	0.00	6.79	5.28
連續量-連續量-外比	0.00	**73.58**	16.04	0.00	0.00	0.00	2.83	0.00	0.00	0.00	3.77	0.94	0.00	1.89	0.94

由上表 4-2-20 得知高數學學業成就學生在 T3 題本量的性質題目中，高達 50%以上都是使用 R3 的正確解題策略，其次是 R2，顯然這些學生會習慣使用公式法來解比例問題；中、低數學學業成就學生則是優先選擇 R2 解題策略來解題，R1 及 R3 解題策略明顯少了很多，這與高數學學業成就學生的情況有明顯的不同，這可能與 T3 題本的數字型式有關，所以他們傾向使用 R2 解題策略。至於在錯誤的解題策略方面，高數學學業成就學生並沒有特別明顯的錯誤，而中、低數學學業成就學生在「離散量-離散量-內比」的表現較差，使用 W4 的情形較多，其次為「連續量-連續量-內比」的題目，顯示內比的題目在 T3 題本中是較易犯錯的，值得注意這些學生的學習情況。

(4) T4 題本

表 4-2-21 不同數學學業成就學生在 T4 題本「量的性質」問題其解題策略的情形

高數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	21.02	8.52	**63.07**	0.00	0.00	0.00	0.57	0.57	0.00	1.14	2.84	0.00	0.57	1.14	0.57
離散量-離散量-外比	35.23	17.05	**45.45**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.27	0.00	0.00	0.00	0.00
離散量-連續量-外比	23.86	15.91	**55.68**	0.00	0.00	0.00	1.14	2.27	0.00	0.00	1.14	0.00	0.00	0.00	0.00
連續量-連續量-內比	3.18	10.00	**70.91**	0.00	0.00	0.00	2.27	0.91	0.45	0.00	**6.82**	2.73	0.00	1.36	1.36
連續量-連續量-外比	20.45	15.91	**59.09**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.55	0.00	0.00	0.00	0.00
中數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	16.67	10.56	**47.22**	0.00	0.00	0.56	1.11	0.56	0.00	2.22	11.11	0.00	2.22	2.22	5.56
離散量-離散量-外比	27.78	13.33	**48.89**	2.22	0.00	0.00	1.11	0.00	0.00	1.11	2.22	0.00	0.00	1.11	2.22
離散量-連續量-外比	25.56	13.33	**48.89**	0.00	0.00	0.00	0.00	1.11	0.00	0.00	3.33	0.00	0.00	4.44	3.33
連續量-連續量-內比	8.00	8.44	**47.56**	0.00	0.00	0.00	0.44	0.44	0.00	2.67	**16.89**	1.33	0.44	5.78	8.00
連續量-連續量-外比	18.89	11.11	**43.33**	0.00	0.00	0.00	3.33	2.22	0.00	0.00	12.22	0.00	1.11	3.33	4.44
低數學學業成就	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	0
離散量-離散量-內比	4.17	4.17	4.17	0.00	0.00	2.08	2.08	0.00	2.08	7.29	**37.50**	0.00	5.21	13.54	17.71
離散量-離散量-外比	**22.92**	2.08	4.17	8.33	2.08	0.00	4.17	2.08	0.00	0.00	22.92	0.00	2.08	16.67	12.50
離散量-連續量-外比	**33.33**	12.50	6.25	2.08	0.00	0.00	2.08	0.00	0.00	0.00	16.67	0.00	2.08	14.58	10.42
連續量-連續量-內比	6.67	5.00	4.17	0.00	0.00	0.00	1.67	0.00	1.67	4.17	**37.50**	0.83	0.83	18.33	19.17
連續量-連續量-外比	16.67	6.25	6.25	4.17	0.00	0.00	2.08	0.00	0.00	0.00	**31.25**	0.00	0.00	10.42	22.92

由上表 4-2-21 可知高、中數學學業成就學生在 T4 題本量的性質題目中，大部分的學生都是使用 R3 的正確解題策略居多，其次是 R1，在這個題本中，因為題目的數字較難做運算，因此，會公式法的學生都會使用公式法來解題，所以在這裡使用 R3 解題策略的比率就提高了，代表這些學生還是會以數字型式來決定解題策略，而較不易受「量的性質」題目的不同而改變解題策略；低數學學業成就學生在這個題本中只有「離散量-離散量-外比」和「離散量-連續量-外比」使用 R1 正確的解題策略比率較高，其它量的性質的題目都有很高的比率使用 W4 錯誤解題策略，顯示對他們而言，外比的題目相較於內比的題目還是較容易一些，在外比的題目中，他們較不會受單位相同的影響而使用「差數相等」策略，可見「量的性質」對低數學學業成就學生的解題策略還是有某些的關聯性。

(二) 全部樣本討論

由表 4-2-18、4-2-19、4-2-20 及 4-2-21 的百分比結果可看出學生在解不同量的性質的比例問題時，所出現的各種解題策略都不太相同，以下針對五種量的性質依次說明：

(1)離散量-離散量-內比：高數學學業成就學生使用正確的解題策略較偏向「公式法」，不同的題本解題策略差異不大；中、低數學學業成就學生會受題本的數字型式影響而決定使用的解題策略，在 T4 題本的表現最差。

(2)離散量-離散量-外比：高數學學業成就學生在 T1 題本會受數字型式影響而使用 R2 解題策略居多，T2 題本會受外比的影響而使用 R1 解題策略居多，T3 和 T4 則仍維持使用 R3 解題策略較多；中、低數學學業成就學生的解題策略則是隨著題本的數字型式特性而改變，在這類的題目中表現都比其它量的性質的題目好。

(3)離散量-連續量-外比：所有學生在這類的題目與上述(2)的解題策略情形雷同，因為同是外比的題目，所以解題策略的正確率也較高。

(4)連續量-連續量-內比：高數學學業成就學生除了 T1 題本外，其它題本仍然是使用 R3 解題策略居多，代表他們還是習慣使用公式法來解題；中數學學業成就學生在 T1 及 T4 題本多傾向使用 R3 解題策略，T2 及 T3 題本則是依數字型式特性來解題；低數學學業成就學生較少使用公式法解題，都是依題本的數字型式來決定解題策略。所有學生在這類型題目犯「差數相等」策略的比率較高。

(5)連續量-連續量-外比：高、低數學學業成就學生的解題策略情形與(2)、(3)的情況雷同，中數學學業成就學生在 T1 題本使用 R3 的情形較多，研究者猜測可能是與連續量有關，因此學生會傾向使用公式法解題。

綜合以上的結果，高數學學業成就學生在 T2 題本較易因量的性質不同而有不同的解題策略，只要是外比的題目通常都會使用 R1 解題策略居多；中數學學業成就學生在 T1 題本中，對於內比及同為連續量的解題策略都傾向使用 R3 解題策略，代表學生易因量的性質不同而有不同的解題策略；低數學學業成就學生在量的性質下沒有太大的差別，幾乎都是受題本的數學型式影響而改變解題策略，在 T4 題本除了外比的題目表現較好外，其它的題目都傾向使用 W4 錯誤的解題策略。

所有學生在「離散量-離散量-外比」和「離散量-連續量-外比」的表現都較好，「離散量-離散量-內比」及「連續量-連續量-內比」的題目表現最差，因為數量的單位相同，所以使用「差數相等」策略的比率最高，其次是「連續量-連續量-外比」，顯示在量的性質對學生的解題策略是有關聯性的，研究者依據資料分析的結果猜想，其認知的學習由易至難應為下圖 4-2-13 所示，因此，教師可以根據下圖的認知順序提供學生不同的學習階段,並從學生的解題策略來判斷學生錯誤的原因及困難。

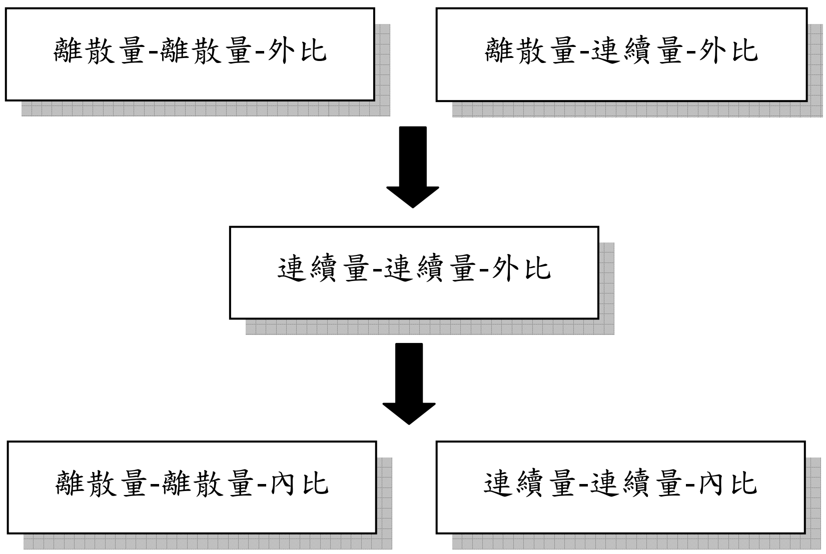


圖 4-2-13 以量的性質劃分比例問題的認知學習階段

(三) 個案訪談結果

研究者在晤談時，會請學生說明不同量的性質與解題策略的關係，瞭解是否在不同量的性質的比例問題下會有不同的解題方式，並瞭解題目之間的難易程度及學生在解比例問題時產生的疑惑及遇到的困難。以下為 24 名晤談學生的晤談結果，分別探討各個訪談學生在不同量的性質的解題策略情形，而下面的晤談原案參考及分析結果主要是呈現學生在某些量的性質有特定解題策略的情形：

1. 高數學學業成就【T2 題本，第十四題及第十五題】學生代碼：DH1

表 4-2-22 DH1 學生在不同量的性質的解題策略情形

量的性質			題號－解題策略編碼				
1	離散量-離散量	內比	1－R3	2－R3	3－R3	4－R1	
		外比	5－R1	6－R1			
2	離散量-連續量	外比	7－R1	8－R1			
3	連續量-連續量	內比	9－R3	10－R3	11－R3	12－R3	13－R1
		外比	14－R1	15－R1			

第十四、十五題

I：你覺得這些題目跟單位有影響到你的做法嗎？

S：單位相同的話就不會影響，不相同的話就會影響。

I：可以再說清楚一點嗎？不相同的話影響在哪裡？

S：就是不相同的單位就要換成相同的單位。

I：例如說哪一題？

S：好像沒有。

I：我說的單位不相同指的是這個(指第 14 題)，單位相同是這個(指 13 題)。

S：這個是算速率呀！(指第 14 題)

I：你是 6 除以 3，爲什麼不是 3 除以 6？

S：因爲距離除以時間的速度。

I：哦！那 15 題呢？爲什麼要 2÷4 不要 4÷2？4÷2 不是比較好除嗎？

S：就是要算每公克的膠泥放進去會溢出多少公撮的水。

I：所以你是算 1 公克的膠泥會溢出的水，哦~所以你很清楚你在算什麼，不是隨便除來除去的。

S：嗯。

該學生在「外比」的題目較常使用單價法，在「內比」的題目幾乎使用公式法，因為如果在兩個單位不相同的情況下，可以直接算一單位的數量大小，然後再依題

目乘以一個數字即可，由訪談可知他的單位量概念很清楚，知道每一單位量代表的意義，所以，不管是連續量或是離散量，只要遇到「外比」的題目就會直接用單價法來解題，代表該生在不同量的性質的題目會使用不同的解題策略。

2. 高數學學業成就【T3 題本，第二題】學生代碼：GH2

表 4-2-23 GH2 學生在不同量的性質的解題策略情形

量的性質			題號－解題策略編碼				
1	離散量-離散量	內比	1－W2	2－R2	3－R2	4－R2	
		外比	5－R2	6－R2			
2	離散量-連續量	外比	7－R2	8－R2			
3	連續量-連續量	內比	9－W2	10－R2	11－R2	12－R2	13－R2
		外比	14－R2	15－R2			

第二題

I：嗯，倍數，那如果沒有整數倍時要怎麼辦？

S：那可能就要算一顆，再去算多少。

I：好。那…其它的題目可不可以先算一個單位的數量，然後再去算多少？

S：呃…一個單位的數量是什麼？

I：就像你剛剛說要先算一顆是多少錢，這就是一個單位的數量。

S：哦！

I：那其它題目可以這樣做嗎？

S：應該可以吧！

I：那你可以說說看第一題可不可以用這個方法做？

S：呃…不行耶！

I：爲什麼？

S：因爲機率相同，所以兩袋的黑球應該相同，根本不用算。

I：哦！是哦！那第二題呢？…你可不可以說說看一罐藍的需要幾罐白的？

S：嗯。應該是 4 罐吧！

I：爲什麼？

S：因爲白的比藍的多 3 罐，所以加 3。

I：嗯。那你覺得這題和糖果那題有什麼不一樣？

S：…(想了 22 秒)，一樣的。

I：我是說你剛剛會先算一顆糖果多少錢，用錢除以糖果數，那這裡你是用加的，而不是用除的，爲什麼？

S：因爲這個糖果可以先算出一顆多少錢。

I：嗯，那藍白漆呢？爲什麼你不是用除的，而是用加的？

S：因爲相差 3 罐呀！

I：這兩個方法好像不一樣，那這兩個題目有什麼不一樣？

S：就一個可以直接算一顆，另一個不能直接算。

I：爲什麼？爲什麼這題不能直接算？

S：因爲藍白漆都是一罐一罐的，所以可以直接用加的就好了。

I：哦！那糖果這題可以直接用加的嗎？

S：不可以！

I：爲什麼？

S：因爲這兩個單位不一樣，不能加。

I：嗯！所以你是覺得這藍白漆的單位相同，所以才覺得可以用加的嗎？

S：應該是吧！

這個學生本來在做第二題時是用倍數法，但經由研究者提供其它的做法後，他認為「差數相等」策略較好，而在比例問題為內比(單位相同)時會出現「對應項相等」的策略，原因可能是不瞭解題意，但在訪談中發現學生會使用「差數相等」策略的原因與其題目中單位都相同有關，如果單位不同，該名學生不會使用差數相等策略，若單位相同(如第二題)，則可能出現使用「差數相等」的解題策略，表示學生會使用差數相等策略與其不同量的性質有關，在題目中為「內比」時較容易出現錯誤。

3. 高數學學業成就【T4 題本，第十一題及十三題】學生代碼：JH2

表 4-2-24 JH2 學生在不同量的性質的解題策略情形

量的性質			題號－解題策略編碼				
1	離散量-離散量	內比	1－R2	2－R2	3－R2	4－R1	
		外比	5－R2	6－R2			
2	離散量-連續量	外比	7－R2	8－R2			
3	連續量-連續量	內比	9－R2	10－R2	11－W4	12－R2	13－W4
		外比	14－R2	15－R2			

第 11 題

I：那這個大的花 5 分鐘、這個花 2 分鐘，這個花 7 分鐘，那這個小的花的時間跟 7 比較的話會有什麼關係？

S：減少 3 分鐘。

I：你是看 5 比 2 多 3 分鐘，所以 7 也要比它多 3 分鐘。

S：嗯。

I：所以你跟原來寫的都是 4 分鐘嗎？

S：我覺得我應該寫錯了。
I：那你沒有發現這裡有沒有其它的關係。
S：這我知道，就我剛剛說錯的觀念啊！
I：那你這樣就矛盾啦！你剛剛說人家錯，現在又用相同的方法。
S：對呀！
I：那它是比例關係嗎？
S：不是吧！
I：爲什麼不是？
S：…嗯…因爲會有兩個因素。
I：什麼因素？
S：就是水管的大小跟時間啊！
I：喔！就是水管的粗細又不一樣，時間又不一樣。
S：對呀！

： ： ：

I：你是因爲想不到其它方法所以才用減的是不是？
S：對呀！
I：所以你應該可以感同身受剛剛那位學生爲什麼用減的，就是因爲他不知道有比例關係所以才用這個方法來寫，你也是一樣沒有想到比例關係才這樣寫的對不對？
S：嗯。
I：所以老師問你爲什麼當初會這樣寫？是因爲題目看不懂，所以找題目上的數字關係來算是不是？
S：就一開始就誤會題目意思了。
I：嗯嗯，可是我後來這樣解釋之後你有馬上想到其它的方法嗎？你沒有發現題目有倍數關係，所以你直接用它們之間的差來看？
S：是一開始啦！
I：你會覺得怪怪的？
S：嗯。
I：所以你算的時候就沒有把握？
S：對呀！沒把握！

第 13 題

I：好，那 13 題，5：2 爲什麼等於 8：5？
S：呃…我算錯了。
I：那要怎麼算？
S：(寫 5：2=8：x，16÷5=16/5)
I：那爲什麼那時候要加 3？
S：我看錯了啦！
I：爲什麼會看錯？
S：唉呦！就看錯了。
I：那爲什麼你會用加的？你不是都一直說是倍數關係嗎？
S：是呀！是倍數關係！

I：所以是不小心看錯的。

S：嗯。

I：你是不是都是剛好看可以約掉，然後再看倍數，然後這個剛好沒有幾倍…。

S：它可以有倍數呀！

I：那是幾倍？

S：8/5 倍呀！

I：那是 5 乘以 8/5 喔！所以 2 也要乘以 8/5 喔！

S：嗯。

I：所以你真的是算太快，所以看錯了。

S：嗯。

I：那你爲什麼會看錯？是因爲題目都是公尺同單位，所以你就直覺覺得用減的嗎？

S：嗯，就第一眼看到不是剛好整數倍，所以就用減的。

I：除了不是整數倍以外，你覺得你當時候會用減的方法是不是有受到單位的影響？

S：嗯。

I：像第 15 題你就不會想到要用減的，而直接用比例式，你覺得這跟單位有沒有關？

S：有吧！就如果單位一樣的話，如果算出來不是整數，就會想用減法去做，如果是整數，我就會用比去做。

I：嗯！所以你在做題目的時候有在想說要用什麼方法來做囉！

S：嗯。

該名學生在「連續量-連續量內比」的題目時會出現差數相等策略，第 11 題因為不瞭解題意，覺得太複雜了，所以一時沒有頭緒，只好使用「差數相等」策略，而第 13 題則是因為算太快了，第一直覺就覺得是差 3，所以用差數相等策略來算，後來學生表示因為粗心而算錯了，這名學生在算 11 和 13 題時，可能是因為題目中的單位都相同，而且都是連續量，算出來不是整數值，因此，導致出現差數相等策略的結果，見下圖 4-2-14 所示，代表學生還是需要再加強其觀念，單位相同的題目易讓人產生直接做加減的運算，所以解題策略和不同量的性質有關。

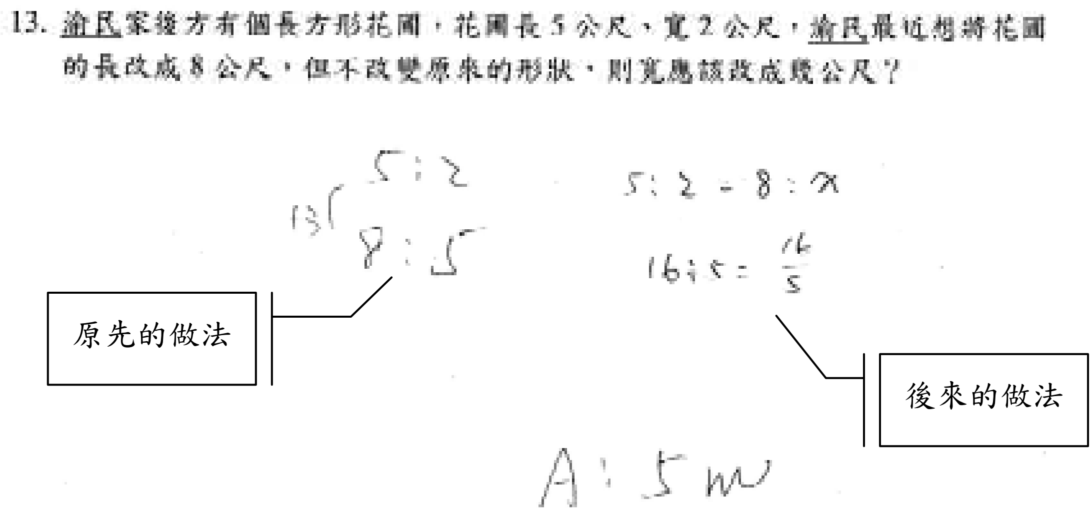


圖 4-2-14 JH2 在 T4 題本第 13 題的原案

4. 中數學學業成就【T4 題本，第十三題】學生代碼：KM1

表 4-2-25 KM1 學生在不同量的性質的解題策略情形

量的性質			題號－解題策略編碼				
1	離散量-離散量	內比	1－R2	2－R2	3－R2	4－R1	
		外比	5－R2	6－R2			
2	離散量-連續量	外比	7－R2	8－R2			
3	連續量-連續量	內比	9－W4	10－R2	11－W4	12－R2	13－W4
		外比	14－R2	15－R2			

第 13 題

I：如果一個長方形長 2 公尺，寬 1 公尺，那麼我把它變成長 4 公尺，寬 2 公尺，這樣形狀會一樣嗎？

S：一樣耶！長乘以 2 的話寬也要乘以 2。

I：這樣就不會變了嗎？

S：嗯。

I：那要怎樣形狀才不會變？

S：乘以某數，寬也要乘以某數。

I：嗯，那長變得比較長了，那寬要不要變的比較長？

S：會呀！

I：那它們有沒有什麼關係不會變？

S：就乘以一個數就對了啦！長乘以某一個數，寬也要乘以一個數。

I：好，那你用倍數跟這個原來的答案哪一個比較好？

S：當然是這個啊！

I：那你一開始為什麼這樣做？(用差數相等策略)

S：因為一開始看到數字差 3，所以就用 8 減 3 等於 5。

I：那是不是因為題目用除的話結果是分數，所以你就用減的？
S：嗯，對呀，就一時看太快。
I：那跟這個單位有沒有關係？會不會因為題目中的數字單位都相同，所以誘導你會用減的方式來做？
S：對呀！就第一眼覺得兩個都是長度，第一個長方形的長和寬差 3，所以另一個長方形的長和寬也應該差 3。
I：那你會做錯這題是因為題目數字沒有整數倍關係，還是因為單位相同影響了你的作法？
S：都有吧！就一時算錯！

這個學生在「連續量-連續量內比」的題目時會出現差數相等策略，都是因為這類型題目都是連續量，他們之間的數字沒有剛好成整數倍，而且單位都相同，因此，造成該名學生容易在這類型題目中做錯，事後學生覺得自己算太快而算錯，而且後來發現錯誤時已經來不及改了，所以，在不同量的性質的題目下，學生的確很容易就出錯，容易使用「差數相等」策略來解題。

5. 低數學學業成就【T2 題本，第六題】學生代碼：FL1

表 4-2-26 FL1 學生在不同量的性質的解題策略情形

量的性質			題號－解題策略編碼				
1	離散量-離散量	內比	1－W4	2－W3	3－W4	4－R1	
		外比	5－R1	6－R1			
2	離散量-連續量	外比	7－W7	8－R1			
3	連續量-連續量	內比	9－W3	10－W3	11－W4	12－R1	13－W4
		外比	14－R1	15－R1			

第 6 題

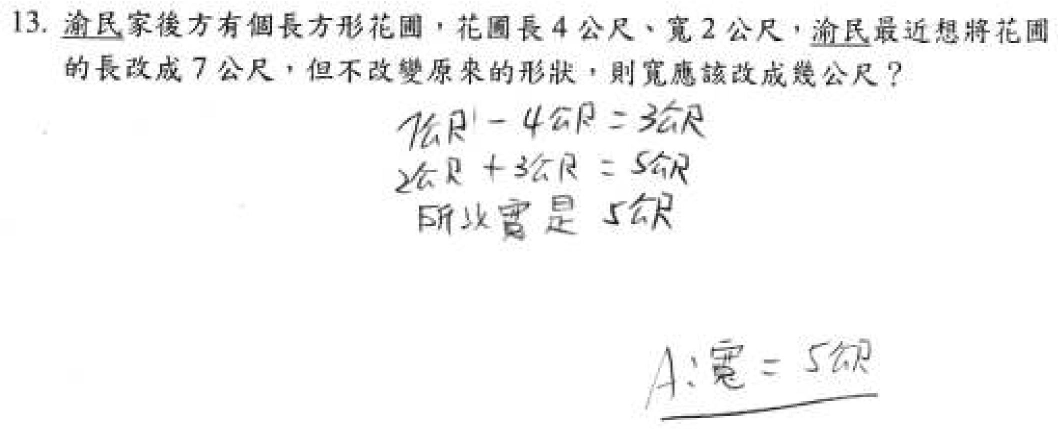
I：那第 1、3、11、13 題呢？為什麼你會用這個方法算？
S：嗯…(想了 19 秒)嗯…ㄟ…就看差啊！
I：你覺得你會用差來算跟題目的單位有沒有關係？
S：什麼單位？
I：就數字後面的單位呀！這幾題題目中的單位都一樣，你覺得有沒有影響到你做答的方法？
S：嗯…那時候我就覺得用差來算，因為這一題(指第 1 題)顆數都差 2，所以用這個差算。
I：哦！那你為什麼第 6 題不會用這個方法算？
S：因為這個單位不一樣，所以不能用差算，這樣怪怪的。
I：怪怪的哦？為什麼？
S：就單位不一樣不能直接減。
I：哦~所以跟單位有關囉？
S：嗯…大概吧！
I：那你覺得你算得對不對？

S：不知道，應該錯吧！

I：爲什麼？覺得很難嗎？

S：不會很難，但是覺得怪怪的。

該生在做「內比」的題目時會出現「差數相等」和「和數相等」策略，原因是題目中的單位相同，所以會想採用加減的方式來計算，見下圖 4-2-15，雖然訪談中會因研究者提供的解題策略而改變想法，但還是存有差數相等的概念，認為用差數相等策略來解題是最沒有限制的，因此，不同量的性質會使得該生使用不同的解題策略。


13. 渝民家後方有個長方形花圃，花圃長 4 公尺、寬 2 公尺，渝民最近想將花圃的長改成 7 公尺，但不改變原來的形狀，則寬應該改成幾公尺？

7公尺 − 4公尺 = 3公尺

2公尺 + 3公尺 = 5公尺

所以寬是 5公尺

A：寬 = 5公尺

圖 4-2-15 FL1 在 T2 題本第 13 題的原案

6. 低數學學業成就【T4 題本，第五題】學生代碼：LL2

表 4-2-27 LL2 學生在不同量的性質的解題策略情形

量的性質			題號－解題策略編碼				
1	離散量-離散量	內比	1－W4	2－W4	3－W4	4－R1	
		外比	5－R1	6－R1			
2	離散量-連續量	外比	7－R1	8－0			
3	連續量-連續量	內比	9－W3	10－W4	11－W4	12－W4	13－W5
		外比	14－R1	15－W4			

第五題

I：老師問你哦！像你第 5、6、7、14 題你都用一樣的方法，爲什麼？你那時候是怎麼想的？

S：…呃…(想了 16 秒)

I：有想說要怎麼算嗎？例如第 5 題，你是怎麼想的？

S：…嗯…就先算一本可以換多少點。

I：那你算出來一本可以換多少點？
S：就 9/6。
I：9/6，那這個算式什麼意思？
S：就換 8 本。
I：所以就乘以 8。好，這個是分數運算，你學過分數的加減乘除了嗎？那你會不會覺得很難？
S：不會。
I：那其它題也是一樣的算法？
S：對呀！就先算出一個，然後再去乘。
I：嗯，所以你的方法都一樣。
S：嗯。
I：那你為什麼在算這些題目的時候知道要先用除的算出一個多少，然後再去乘。
S：老師有教過。
I：老師有教過？教你們要先算出一個哦？
S：嗯，就 6 本書 9 點，所以可以先算出一個。
I：嗯。那是不是這兩個的單位一定要不一樣才可以除？
S：…嗯…應該是吧！
I：如果這兩個單位一樣是不是就不能除了？
S：大概吧！兩個單位一樣除的話就怪怪的，不知道是什麼？
I：所以你如果看到題目的數字兩個單位不一樣，你就會想先算出一個是多少，然後再去算。
S：嗯。

該生對於題目中的單位如果是不一樣的就會想先用除的算出一個的單位量之後再去算，代表題目中的不同量的性質會讓學生產生不同的解題策略，他在做「內比」的題目時會較常出現「差數相等」的解題策略，在「外比」的題目較常使用「單價法」，見下圖 4-2-16，不管題目中的量是離散量還是連續量，只要是單位相同的話該生就會使用差數相等策略，而單位不同的話就會使用單價法，從這個學生的訪談中可發現不同量的性質的確會出現不同的解題策略。

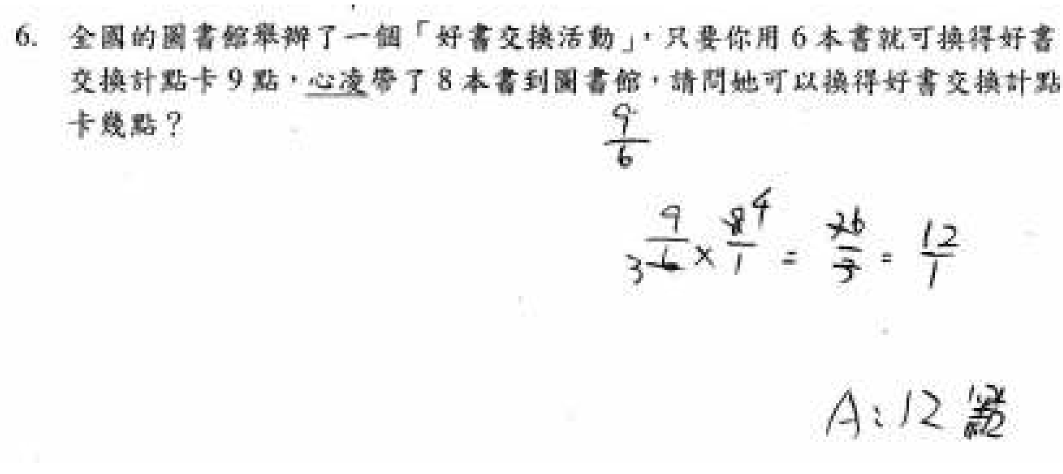


圖 4-2-16 LL2 在 T4 題本第 6 題的原案

(四) 個案訪談討論

在晤談完 24 名受試者後，研究者將學生的回答情形分為三類，呈現於下表 4-2-28：

(1) 解題策略不會受量的性質影響，研究者無法辨識訪談學生在量的性質是否有特定的解題策略，記作×。

(2) 解題策略會受某些量的性質的影響，某些題目會使用單價法或差數相等策略而與其他題的解題策略不同，記作△。

(3) 解題策略會受量的性質的影響，會因量的性質不同而改變解題策略或接受不同的解題策略，記作○。

表 4-2-28 學生的解題策略與不同量的性質的關係

	高數學學業成就		中數學學業成就		低數學學業成就	
T_1	AH1 ×	AH2 ×	BM1 ×	BM2 ×	CL1 △	CL2 △
T_2	DH1 ○	DH2 ×	EM1 ×	EM2 ×	FL1 ○	FL2 △
T_3	GH1 ×	GH2 ○	HM1 ×	HM2 ×	IL1 ×	IL2 △
T_4	JH1 ×	JH2 ○	KM1 ○	KM2 △	LL1 ×	LL2 ○

由上表及分析訪談資料可得知，在探討不同量的性質與解題策略的關係時，發現高、中、低數學學業成就的學生在不同量的性質問題與解題策略沒有很明顯的差異，高、中數學學業成就的學生大部份的題目都使用「倍數法」或「公式法」來解題，而低數學學業成就的學生傾向使用「單價法」或「差數相等」策略來解題，對低數學學業成就的學生而言，使用「單價法」或「差數相等」策略是較容易理解且好算的方法。

從以上的分析資料可得知，學生在做「外比」的題目時，不管是離散量或是連續量，他們都較常使用「單價法」來解題，因為單位不同，可以先求出一個單位的數量大小後再去乘以另一數就可以算出答案了，這個方法學生很容易理解，幾乎都

能做出合理的解釋，但在「內比」的題目上就發現學生較容易出錯，因為單位相同，學生比較不會想到要使用單價法，這時他們就會想要使用其它的方法或錯誤的「差數相等」策略來解題，而連續量的內比題目比離散量的內比題目更容易使用「差數相等」策略，因為題目中的連續量算出來的答案可能不會是整數，因此，對於低數學學業成就的學生而言相對困難許多，只要他們的分數概念不好，那麼，在做連續量的內比題目時，他們就會想要使用「差數相等」策略解題，因為這對他們而言是最簡單的方法，不管是在哪種題目的數字下都可以算得出來。

由訪談的資料來看，學生在「離散量」的題目比「連續量」的題目表現好，這個結果和文獻中所提到的結果一致；學生在「外比」的題目比「內比」的題目表現好，因此，不同量的性質會影響學生使用的解題策略。

小結：

本研究進行訪談的學生共 24 名，本節是希望透過訪談學生的訪談資料分析學生在解題時是否會受比例問題的表面結構－數字型式、語意類型、量的性質而影響其解題策略，經由上面的分析統整後，茲將學生在比例問題測驗的答對題數與其比例問題的表面結構之表現結果呈現如下表 4-2-29 所示：

表 4-2-29 訪談學生的答對題數與比例問題的表面結構之表現結果

學生代碼	答對題數(題)	數字型式	語意類型	量的性質
AH1	15	×	×	×
AH2	14	×	×	×
DH1	15	×	○	○
DH2	15	×	×	×
GH1	15	×	×	×
GH2	13	○	○	○
JH1	13	×	×	×
JH2	13	×	×	○
BM1	13	×	×	×
BM2	12	×	×	×
EM1	15	×	△	×
EM2	1	×	×	×
HM1	13	△	×	×
HM2	15	×	×	×
KM1	12	○	×	○
KM2	12	△	×	△
CL1	12	○	○	△
CL2	7	×	○	△
FL1	7	○	○	○
FL2	10	○	△	△
IL1	13	○	×	×
IL2	10	○	×	△
LL1	3	○	○	×
LL2	5	×	△	○

透過上表，將所有不同數學學業成就的學生在表面結構的表現整理如下表4-2-30 所示：

表 4-2-30 不同數學學業成就的學生在表面結構的表現統計表

表面結構 人數統計	數字型式			語意類型			量的性質		
	○	△	×	○	△	×	○	△	×
高成就	1	0	7	2	0	6	3	0	5
中成就	1	2	5	0	1	7	1	1	6
低成就	6	0	2	4	2	2	2	4	2
小計	8	2	14	6	3	15	6	5	13
總計	24 人			24 人			24 人		

茲將上述所探討的結果，將不同表面結構下不同數學學業成就的學生其解題策略的情形呈現如下：

(一) 在數字型式下

(1) 高數學學業成就的學生不易受數字型式的影響而改變其解題策略，因為他們的比例概念清楚，都能分辨正確和錯誤的解題策略，堅持使用正確的解題策略而不受數字型式影響。

(2) 中數學學業成就的學生接近一半的人會受數字型式的影響而改變解題策略，當他們的分數概念不好時，則容易受數字型式影響而使用不同的解題策略。

(3) 低數學學業成就的學生則是大部分的人都會受數字型式的影響而改變解題策略，因為他們會依照數字型式來決定使用的解題策略為何，並不是真正瞭解比例概念。

由上可知，數字型式是一個很重要因素，會控制學生是否能使用正確的解題策略來解題，會受數字型式影響的學生幾乎都是因為分數概念較弱，當發現題目的數字有整數倍時，他們都能正確解題，但如果題目的數字為非整數倍時，他們就會較常使差數相等策略來解題，原因是差數相等策略適用於任何的數字型式，較容易計算，不會出現分數的運算情形，因此，可以發現在 T4 題本低數學學業成就的學生

答對表現很差，與本章第一節量的統計結果相呼應，原因就出在 T4 題本的數字型式較難運算，只要再加上學生對比例的概念不清楚時，出現錯誤解題策略的機率就會很高。

(二) 在語意類型下

(1) 高、中數學學業成就的學生受影響的人數只有少數一、二人，顯示這些學生不會因為語意類型不同而改變解題策略，高、中數學學業成就的學生比較習慣使用公式法來解題，這可與第一節量的統計結果相對照比較，因此，只要他們能察覺題目為比例概念，則他們就可以利用公式法解決所有的問題。

(2) 低數學學業成就的學生則有一半以上的人會受語意類型的影響而改變解題策略，尤其在熟知的量數問題最為明顯，他們對於此題目較為熟悉，習慣會使用單價法來解題，有些學生在「部分-部分」的題目會較常使用和數相等策略來解題，因為他們會認為「部分＋部分＝總和」，因此解題錯誤的機率也比較高。

(三) 在量的性質下

(1) 高數學學業成就有三個學生會受到量的性質不同而有不同的解題策略產生，據訪談的內容顯示，他們在內比的題目較容易使用錯誤的解題策略，原因是他們可能一時看太快而算錯，加上題目中的數字單位都相同，所以在沒有想清楚之間的比例關係時，就很容易使用錯誤的解題策略。

(2) 中數學學業成就學生大部分的人都不會受量的性質影響而改變解題策略，只有做 T4 題本的學生在「連續量-連續量-內比」的題目較容易犯錯，原因是連續量算出來的答案為非整數倍，因而動搖他們原來的方法，而改考慮別的解題策略來解題，因為題目數字的單位又相同，所以最容易使用的就是差數相等策略，由於 T4 題本本身的數字型式較難，再加上題目如果為「連續量-連續量-內比」的題目，則會增加使用「差數相等」策略的機會。

(3) 低數學學業成就的學生超過一半的人會受量的性質不同而改變解題策略，主要發生錯誤的題目為「內比」的題目，因為內比的題目數字單位都相同，他們會依照題目的數字單位是否為相同來判斷使用的解題策略，如果是外比的題目，因為數字單位不相同，因此較常採用單價法來解題，也較不易出錯，如果是內

比的題目，因為受到單位相同的干擾，所以會傾向使用「和數相等」或「差數相等」策略來解題。

綜合以上結果發現，完全不受三個比例表面結構的影響皆為高、中數學學業成就的學生，而低數學學業成就的學生都至少會受其中一個表面結構而影響其解題策略，另外，數字型式是三個比例表面結構中最容易影響學生解題表現及解題策略的原因，其次，語意類型中的「熟知的量數」問題和「部分-部分」問題也會影響學生的表現，量的性質中的「連續量-連續量-內比」的表現最差，接著是「離散量-離散量-內比」的題目表現也不佳。

第三節 比例問題的深層結構與國一學生的解題表現之關係

一、 「比例概念的共變原則」與學生解題表現之關係

（一）結果

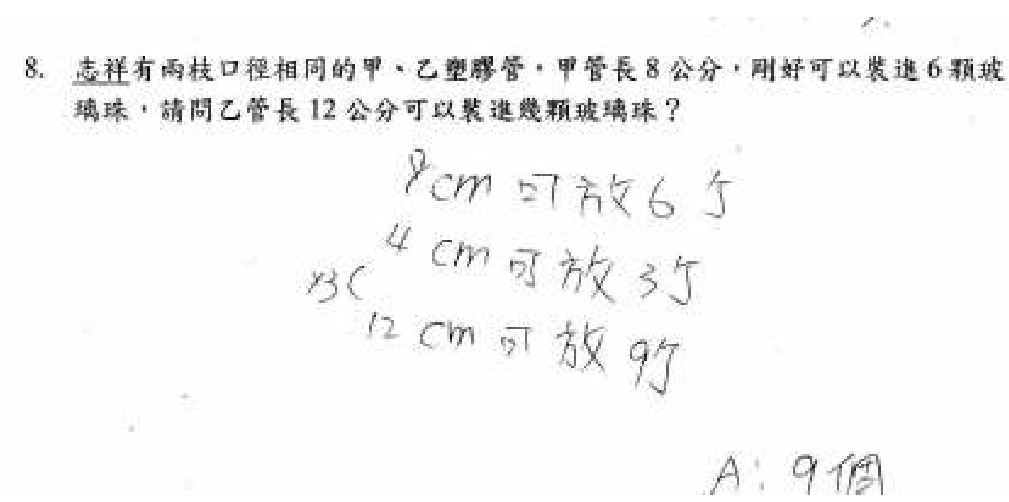
本節的第一部分主要探討學生對「比例概念的共變原則」的瞭解是否與其解題表現有關。在訪談的過程中，研究者會提出問題：「你認為題目當中有沒有什麼關係是會隨著數字的變動而改變的？」，經由提出的問題判斷學生是否具備「比例概念的共變原則」，以下分別舉幾個學生的訪談資料為例：

(1)具備比例概念的共變原則

例 1：高數學學業成就【T4 題本，第一題】學生代碼：JH2

I：那我問你，黑球跟白球之間有沒有什麼關係是會隨著數字的變動而改變的？如果我在機率相同的條件之下。
S：倍數關係。
I：倍數關係，那如果我放的黑球比較多，白球要放多還是放少？
S：要放多一點。
I：是相對於黑球要放多一點嗎？
S：你是說黑球要放多一點，讓第二袋的機率相同嗎？
I：不是，我是說在題目原來的機率裡面，如果我還有另外一袋，如果我黑球放的很多，那我白球要放幾顆？是相對要放比較多還是比較少？
S：比較多。
I：那它是一個量變大，另一個量會跟著做什麼樣的改變？
S：也會跟著變大。
I：是這個關係嗎？
S：嗯。
I：那你所說的倍數關係是指什麼？
S：如果白球顆數變多 2 倍，黑球也會變多 2 倍。

依該生的回答情形可知她具有比例概念的共變原則，她清楚比例是成倍數關係在改變，比表示的數字不是實際值，所以不能做加、減運算，只能做乘除運算，因為之間的關係是倍數關係，所以不能使用差數相等或和數相等的運算方式，它們的差數及和數不會保持不變，而是之間的倍數會一起改變，可見下圖 4-3-1 的第 8 題原案所示，該名學生知道當一個數變成 3 倍時，另一個數也要跟著變成 3 倍，所以瞭解共變的關係。



8. 志祥有兩枝口徑相同的甲、乙塑膠管，甲管長 8 公分，剛好可以裝進 6 顆玻璃珠，請問乙管長 12 公分可以裝進幾顆玻璃珠？

8cm 可放 6 ㄎ
4 cm 可放 3ㄎ
x3(
12 cm 可放 9ㄎ

A：9個

圖 4-3-1 JH2 在 T4 題本第 8 題的原案

例 2：中數學學業成就【T4 題本，第一題】學生代碼：KM2

I：好，那如果我放第三個袋子進去，一樣抽中的機率一樣，我如果黑球放比較多的時候，你覺得白球會相對放比較多還是比較少？

S：…那白球也會變多不會變少。

I：爲什麼？

S：因爲它約完是 5 個白跟 4 個黑，如果你是放 16 個黑色進去的話就是 4 倍，然後你 5 乘以 4 等於 20，它乘以它的倍數是放幾顆進去，同樣地它增加幾倍它也會增加幾倍，對。

I：那爲什麼你會想到要用倍數的關係，爲什麼要同時放大幾倍？

S：因爲如果你沒有同時放大幾倍的話它的機率不會一樣呀！

I：嗯。

該生很清楚比例概念的共變原則，她知道當一個數量變成 k 倍時，另一個數量也應該變成 k 倍，否則之間的比例關係就不一樣了，她可以理解用不同的乘法策略來回答，只要是用倍數關係來看都是對的，因此，該生瞭解比例概念的共變原則。

(2)不穩定具備比例概念的共變原則

例：中數學學業成就【T4 題本，第二題】學生代碼：KM1

I：嗯嗯，很清楚，好，那我問你，藍色和白色油漆之間有沒有什麼關係是會改變的？

S：呃…我聽不懂？

I：藍色和白色油漆之間有沒有什麼關係是會隨著數字的變動而改變的？會隨著你的題目不一樣而變動的？

S：會嗎？應該不會吧？我覺得不會。

I：我說 4 罐藍漆配 6 罐白漆，那 6 罐藍漆配 9 罐白漆，那你有沒有發現什麼關係在變動？

S：都差兩個啊！呃…不不不，啊，我不知道耶！

I：嗯…你再看一下，<u>藍漆和白漆之間有沒有什麼關係是隨著數字的變動而一起改變的？</u>

S：呃…，<u>就藍漆乘以多少，白漆就要乘以多少。</u>

此學生原來都是用加法策略，但因為覺得算起來怪怪的，所以很多都改成倍數關係來看，但他不知道這兩者之間的差別，他可以說出題目數量間的共變關係，從訪談中可以知道他會把分數乘除直接用通分來算(如 $\frac{5}{2}\times\frac{7}{3}=\frac{15\times14}{6}$)，代表分數的計算不是很好，對於題目中能先化簡變成整數倍的會用倍數來看，見下圖 4-3-2，但如果第一眼覺得無法化簡成整數倍時就會用差數相等策略來算，見下圖 4-3-3，因此，該學生在解釋共變關係時有時會用倍數去判別，有時會用差數去判別，不能很明確掌握比例的正確共變關係。

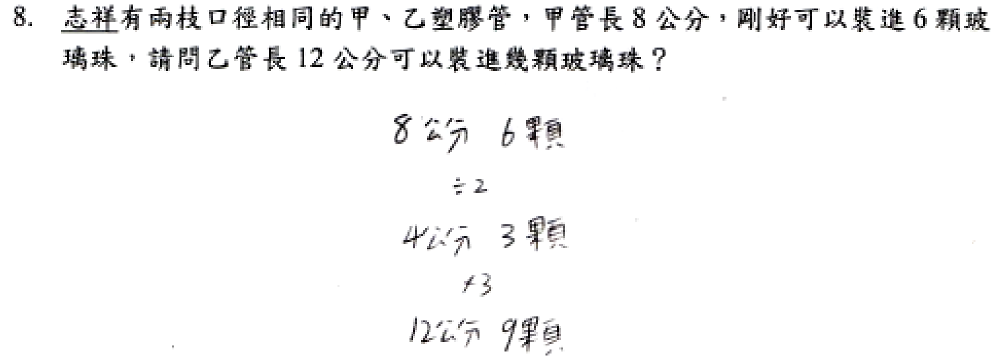

8. 志祥有兩枝口徑相同的甲、乙塑膠管，甲管長 8 公分，剛好可以裝進 6 顆玻璃珠，請問乙管長 12 公分可以裝進幾顆玻璃珠？

圖 4-3-2 KM1 在 T4 題本第 8 題的原案

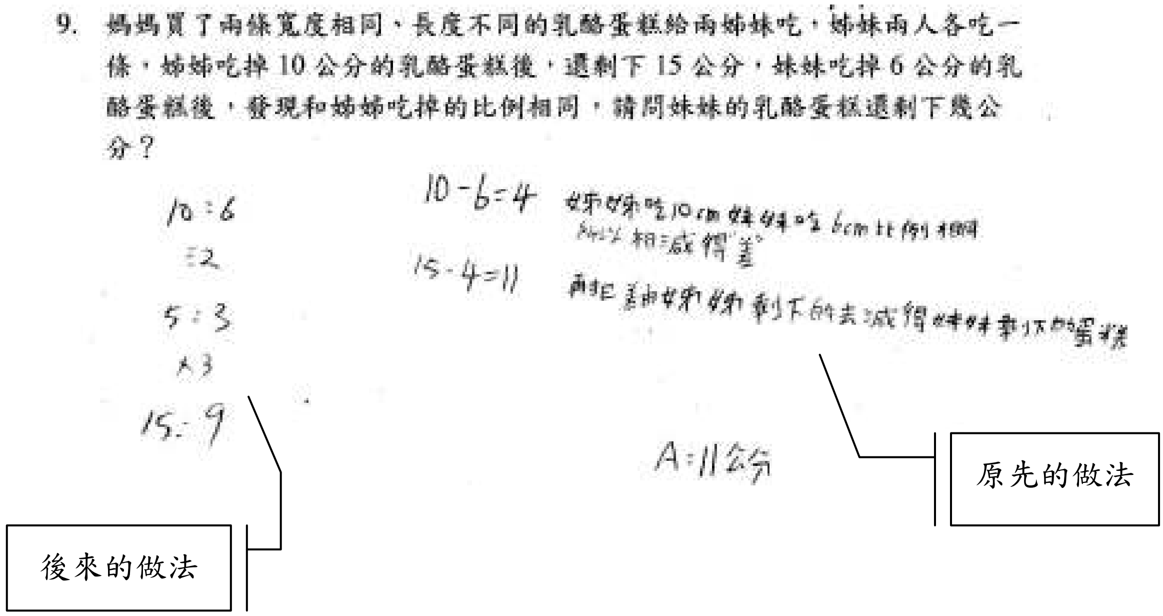

9. 媽媽買了兩條寬度相同、長度不同的乳酪蛋糕給兩姊妹吃，姊妹兩人各吃一條，姊姊吃掉 10 公分的乳酪蛋糕後，還剩下 15 公分，妹妹吃掉 6 公分的乳酪蛋糕後，發現和姊姊吃掉的比例相同，請問妹妹的乳酪蛋糕還剩下幾公分？

圖 4-3-3 KM1 在 T4 題本第 9 題的原案

(3)不具備比例概念的共變原則

例：低數學學業成就【T4 題本，第四題】學生代碼：LL2

I：那你在這裡有沒有發現如果你買的飲料愈貴，跟原來的有沒有什麼關係是會變動的？有沒有什麼關係是會隨著數字的變動而改變的？

S：…。

I：我如果買比較貴的，我付的錢會比較多還是比較少？

S：比較少。

I：爲什麼？

S：因爲打折。

I：嗯，會比原來的少對不對？

S：嗯。

I：那你有沒有發現有沒有什麼關係是會隨著數據而變動的？

S：…(沉默沒有回答)。

： ： ：

I：那有沒有什麼關係是會讓這兩個數據變動的？

S：飲料的價錢。

I：飲料價錢貴的打折後會比飲料比較便宜的付的多還是少？

S：…(感覺聽不懂意思)。

I：那你覺得這個飲料的原價跟打折後有沒有什麼關係？

S：…嗯…打完折之後會比較便宜。

I：那你有觀察到它們的數量間有什麼變化嗎？

S：這個少 4 元，另一個少 5 元。

該名學生對數字的敏感度不是很好，幾乎都只想到用加減法，就算研究者將題目換成簡單的整數倍，她也沒察覺數量間的關係，不管題目怎麼改，她還是依舊只會使用差數相等策略，訪談的過程發現她共變的關係很弱，都需要經過研究者不斷的提示，她才能大略的回答，而且只是在「熟知的量數」問題回答較好，其它的就都無法提出比例共變的關係。由此學生可看出如果一開始無法察覺題目數字間的倍數共變關係，那麼就很容易淪為使用差數相等策略，這種高度使用差數相等策略的學生，其比例概念的共變關係都尚未建立，所以導致比例推理能力很弱。

(二) 討論

從分析的過程中發現大部分低數學學業成就的學生不是很清楚「比例概念的共變原則」，不能很明確的說出題目當中會一起共變的兩個量，在數字中有整數倍時可能會用乘法的共變關係，但對於沒有整數倍時就會用差數相等的方法解題，其想法為$a-b=c-d$或$a-c=b-d$，可能是受到等量公理的概念影響，因此，即使他們知道一個量變多，另一個量也會變多的關係，但不會正確說出他們之間是成正變，是倍數共變的關係，所以多會傾向使用差數相等的方式來解題。

研究者將所有訪談學生的資料整合，透過分析後的結果將學生分為三類：

(1) 若學生的回答為倍數的共變：「一個量變成k倍，另一個量也變成k倍」，則判定為具備有「比例概念的共變原則」，以「○」表示，其認知的概念如下圖 4-3-4 所示：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend right, "\times k"'] & b \arrow[d, bend left, "\times k"] \\ ak & bk \end{tikzcd}$$

圖 4-3-4 「比例概念的共變原則」之認知概念

(2) 除了熟知的量數問題外，若學生的回答有時為倍數的共變，有時為差數的共變，會依題目不同而改變解題策略，則判定為不穩定具備「比例概念的共變原則」，以「△」表示。

(3) 除了熟知的量數問題外，若學生的回答皆為差數的共變：「一個差m，另一個也差m」或無法說出數量間共變的關係時，則判定為不具備有「比例概念的共變原則」，以「×」表示，其認知的概念如下圖 4-3-5 所示：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend right, "+m"'] & b \arrow[d, bend left, "+m"] \\ a+m & b+m \end{tikzcd}$$

圖 4-3-5 差數相等的共變之認知概念

本研究透過訪談，依據上面的分類，將 24 名受試學生歸類為下表 4-3-1 所示：

表 4-3-1 訪談學生的答對題數與比例概念的共變原則之表現結果

高數學學業成就	答對題數(題)	是否具備共變原則	中數學學業成就	答對題數(題)	是否具備共變原則	低數學學業成就	答對題數(題)	是否具備共變原則
AH1	15	○	BM1	13	○	CL1	12	△
AH2	14	○	BM2	12	○	CL2	7	×
DH1	15	○	EM1	15	○	FL1	7	△
DH2	15	○	EM2	1	×	FL2	10	△
GH1	15	○	HM1	13	△	IL1	13	△
GH2	13	△	HM2	15	○	IL2	10	△
JH1	13	○	KM1	12	△	LL1	3	△
JH2	13	○	KM2	12	○	LL2	5	×
平均答對題數	14.125		平均答對題數	11.625		平均答對題數	8.375	

由上表可發現，高數學學業成就的學生答對題數高，正確率高，且幾乎所有的學生都具備比例概念的共變原則，而中數學學業成就的學生答對題數較差，且有 3 人為不穩定及不具備比例概念的共變原則，低數學學業成就的學生答題的正確率更低，幾乎所有的學生都不完全瞭解比例概念的共變原則，他們很容易受到題目或其它因素的影響而改變解題的方法，所以整體表現很不好，因此，從上表可知學生的答題正確率和是否具備比例概念的共變原則有一定的關係，具備比例概念共變原則的學生其答對率普遍較高，答對題數都在 12 題以上，但相反言之，答題正確率高反而不一定具備「比例概念的共變原則」，可能是因為練習效應或受數字的影響而導致正確的答案，因此，老師不能以答題正確率來判斷學生是否真正瞭解比例概念，這將有其風險。

二、「比例概念的不變原則」與學生解題表現之關係

（一）結果

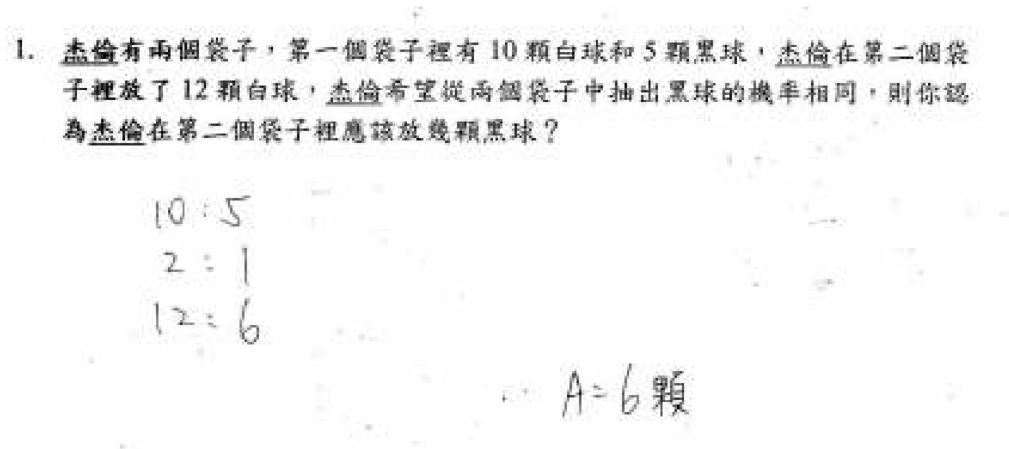
本節的第二部分主要探討學生對「比例概念的不變原則」的瞭解是否與其解題表現有關。在訪談的過程中，研究者會提出問題：「你認為題目當中有沒有什麼關係是會一直保持不變的？」，經由提出的問題判斷學生是否具備「比例概念的不變原則」，以下分別舉幾個學生的訪談資料為例：

(1)具備比例概念的不變原則

例 1：高數學學業成就【T2 題本，第一題】學生代碼：DH2

I：那你有發現白球和黑球之間有沒有什麼關係是會一直保持不變的？
S：嗯…就白球和黑球的關係都是 2：1，白球是黑球的 2 倍。
I：嗯，那一定要是 2 倍嗎？3 倍可以嗎？
S：什麼意思？
I：就如果白球是 15 顆、黑球是 5 顆可以嗎？
S：不可以。
I：為什麼？
S：這樣機率就不一樣了。
I：那你說的 2：1 是什麼意思？
S：一定就是要乘之後…它們最後…那個…最後一定要 2：1，嗯…就是如果白球有 2 顆，那就會抽中 1 顆黑球，這樣機率才會都相同。

依該生的回答情形可知她具有比例概念的不變原則，她知道題目中的黑白球必須保持相同的倍數關係，而且之間的比是固定不變的，能清楚說出 2：1 是指每 2 顆白球當中，就會有 1 顆白球的意涵，代表該生真正瞭解比的等價關係，也就是瞭解「每一單位比」的涵義，見下圖 4-3-6 所示：



1. 杰倫有兩個袋子，第一個袋子裡有 10 顆白球和 5 顆黑球，杰倫在第二個袋子裡放了 12 顆白球，杰倫希望從兩個袋子中抽出黑球的機率相同，則你認為杰倫在第二個袋子裡應該放幾顆黑球？

10 : 5
2 : 1
12 : 6

∴ A = 6 顆

圖 4-3-6 DH2 在 T2 題本第 1 題的原案

例 2：中數學學業成就【T1 題本，第一題】學生代碼：BM2

I：那你覺得如果要維持「機率相同」的話，那白球跟黑球有沒有什麼關係是固定不變的？

S：因爲整個袋子加起來有 15 顆，然後黑球有 5 顆，所以抽中黑球是 5/15。

I：那白球呢？

S：白球 10/15。

I：那在「機率相同」的情況下，你可以再說清楚一點，是什麼關係保持不變嗎？

S：就是白球一定要 10/15、黑球一定佔 5/15。

I：黑球一定要 5/15，不能是 2/15、3/15 嗎？

S：如果球數有變的話。

I：什麼意思？

S：如果球數有改的話。

I：那這個分數大小會變嗎？

S：不會改變。

I：不會改變？那這個可以約分嗎？

S：可以，這約的話是 2/3，這個是 1/3。

I：那這 2/3 和 1/3 會變嗎？

S：不會，它乘的話還是這個比。

I：這個比？關係都是 2/3 跟 1/3。

S：嗯。

I：那這個 2/3 跟 1/3 是什麼意思？你可以說明一下嗎？

S：就是如果有袋子裡全部加起來有 3 顆球，那裡面就會有 2 顆黑的，1 顆白的。

依該生的回答情形可知她具有比例概念的不變原則，她知道題目中的「機率相同」是保持黑白球相同關係的重要關鍵，她清楚說出黑白球佔全部的比例是不會變的，她用比值的方式說明了比的等價關係，代表該生瞭解「單位比值」的意涵。

(2)不穩定具備比例概念的不變原則

例：中數學學業成就【T4 題本，第二題】學生代碼：KM1

I：好，那藍漆和白漆之間有沒有什麼關係是會一直保持不變的？

S：嗯…藍漆乘以多少，白漆就要乘以多少。

I：好，那你剛剛藍漆乘以多少？

S：沒有，它先除再乘。

I：你是說藍漆要先除以 2 再乘以 3，所以白漆也要先除以 2 再乘以 3。

S：嗯嗯。

I：所以藍漆和白漆之間有沒有什麼固定的關係不會變？

S：啊，都可以約。

I：然後呢？

S：約成最簡。

I：最簡是多少？

S：就 2：3 啊。

I：是哦！

S：都約成 2：3。

I：那 2：3 是什麼意思？

S：就是如果要調相同的顏色，藍色和白色的油漆比例要是 2：3。

I：所以它說要調成相同顏色代表藍色和白色的油漆的比例會不會變？

S：不會啊！

I：不會，那你爲什麼原來要用加減的方法？

S：就好像都差兩罐啊！

I：那你可不可以告訴我你原來的方法哪裡有問題？還是你覺得也對？你覺得哪一個方法比較正確？

S：應該這個(指後來的方法)。因爲這個好像都不能約成最簡，不能同樣約成 2：3。

I：可是這個方法它們兩個差都一樣耶！這樣調出來顏色會一樣嗎？原來 4 罐加 6 罐，後來 6 罐加 8 罐。

S：我覺得怪怪的，所以不行。

I：那到底怪在哪裡？

S：嗯…我不會解釋耶！

I：不會解釋，那你知道爲什麼嗎？

S：不知道。

I：就是覺得怪而已。

S：我就覺得它們不能約成最簡 2：3，除非是一樣才可以約成 2：3，不然就是它們都是 2 和 3 的倍數。

此學生他知道 4：6 等於 2：3，但不清楚比是在做什麼的，他反應國小老師都沒交待清楚，他對比也是一知半解，所以他只是記得老師教過的方法來算，能做比的運算，但其中比是否有不變的關係不能很清楚的瞭解，不能很明確說明比的等價意涵，因此，他有時看到題目中的數字會使用差數相等策略，有時就會使用倍數法，代表該生不能很明確掌握比的不變關係。

(3)不具備比例概念的不變原則

例：低數學學業成就【T4 題本，第三題】學生代碼：LL2

I：那你有沒有發現如果我買原子筆的數目跟買鉛筆的數目有沒有什麼關係？你有沒有觀察到？數據上有沒有什麼關係？或者說原子筆的數目跟買鉛筆的數目有沒有什麼關係是會保持不變的？

S：都只差 1 枝。

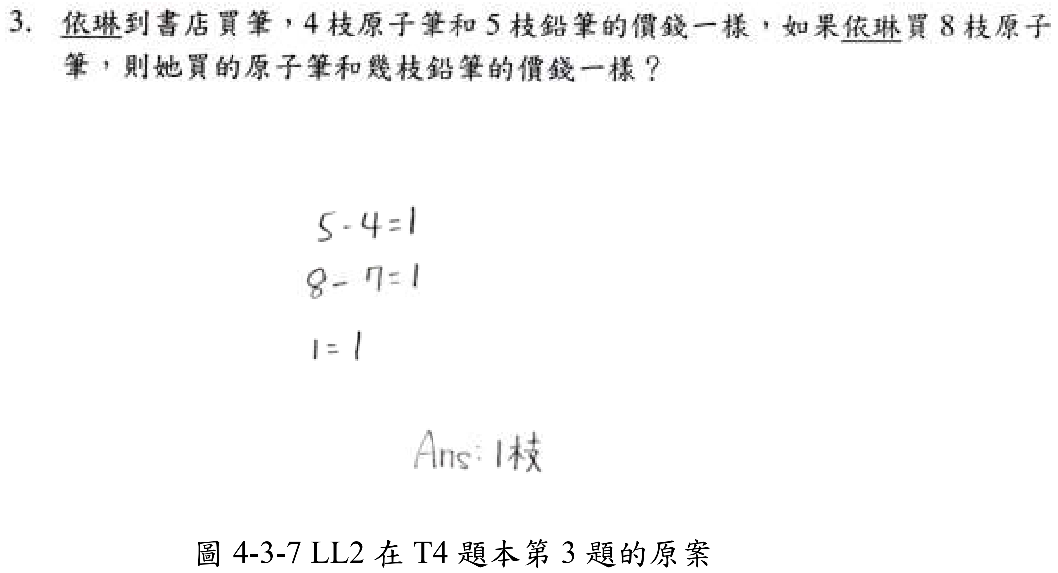
I：你覺得都只差 1 枝喔！

S：嗯。

I：那是不管原子筆的數目和鉛筆的數目是多少，它們的關係一定都是差 1 枝嗎？

S：對。

該名學生除了熟知的量數問題外，幾乎所有題目都是用差數相等策略，從以上的訪談資料顯示，她都只會想到數字之間的差不變，即使將題目改成有整數倍的數字，她也不會察覺要使用乘法策略來解題，表示她完全不具備「比例概念的不變原則」，只能看出兩個數量之間的差數不變關係，而無法瞭解兩者間真正的不變關係，見下圖 4-3-7 所示。。


3. 依琳到書店買筆，4 枝原子筆和 5 枝鉛筆的價錢一樣，如果依琳買 8 枝原子筆，則她買的原子筆和幾枝鉛筆的價錢一樣？

5-4=1
8-7=1
1=1

Ans: 1枝

圖 4-3-7 LL2 在 T4 題本第 3 題的原案

（二）討論

從分析的過程中發現要瞭解比例概念的不變原則是比瞭解比例概念的共變原則來得困難，因為比例概念的共變原則從數字上很容易觀察出關係，但不變原則的意涵較深，需要真正體會及瞭解才能理解，因此，能理解比例概念不變原則其認知層次較比例概念共變原則來得高，尤其是低數學學業成就的學生，他們很多都只是從數據上去拼湊答案，幾乎不瞭解題目真正的意涵，即使能說出數據上的倍數關係是不變的，但也只是從數據上觀察得知，數字中有整數倍時他們可能會想到用倍數法去判斷之間的關係，但如果沒有整數倍時就很容易使用差數相等策略來回答問題，顯示他們的分數倍概念較差，其想法都只是很單純的想從數字中去找出一個答案，至於是否符合題目要問的意思，他們就無法真正去說明清楚了。

研究者將所有訪談學生的資料整合，透過分析後的結果將學生分為三類：

(1) 若學生的回答為倍數的不變，回答的情況為：「它們之間的倍數(比值)關係永遠不變」、「它們之間的關係永遠保持 $a:b$ 」，並能清楚說明「每一單位比」或「單位比值」的意涵，則判定為具備有「比例概念的不變原則」，以「○」表示，其認知的概念以比例問題測驗的第二題為例，如下圖 4-3-8 所示：

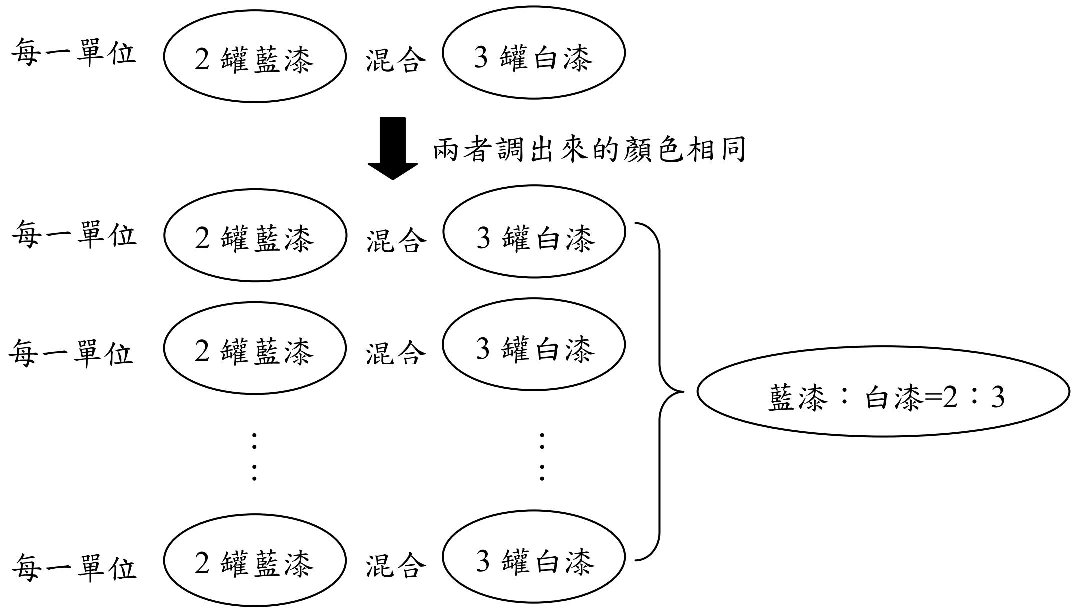


圖 4-3-8 「比例概念的不變原則」之認知概念

(2) 除了熟知的量數問題外，學生的回答有些題目為倍數的不變、每一單位比的不變、單位比值的不變，有些為差數的不變，會依題目不同而改變解題策略，則判定為不穩定具備「比例概念的不變原則」，以「△」表示。

(3) 除了熟知的量數問題外，若學生的回答皆為差數的不變：「它們之間相差的數目一樣」或無法說出數量間比例關係的不變時，則判定為不具備有「比例概念的不變原則」，以「×」表示，其認知的概念以比例問題測驗的第二題為例，如下圖 4-3-9 所示：

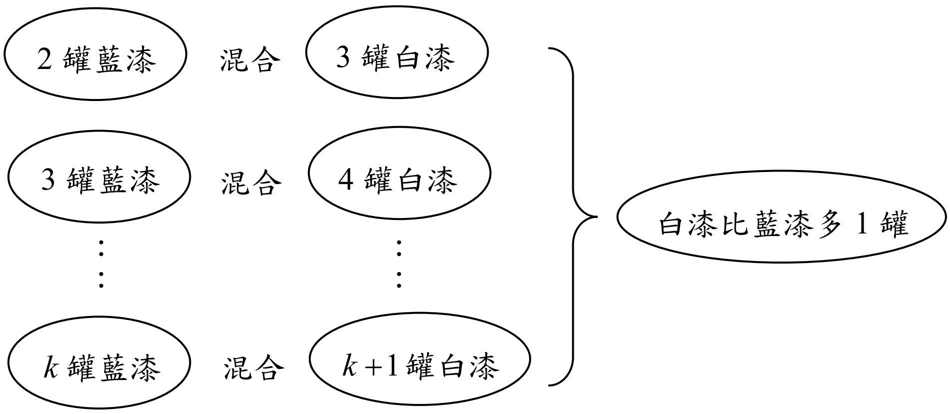


圖 4-3-9 差數相等的不變之認知概念

本研究透過訪談，依據上面的分類，將 24 名受試學生歸類為下表 4-3-2：

表 4-3-2 訪談學生的答對題數與比例概念的不變原則之表現結果

高數學學業成就	答對題數(題)	是否具備不變原則	中數學學業成就	答對題數(題)	是否具備不變原則	低數學學業成就	答對題數(題)	是否具備不變原則
AH1	15	○	BM1	13	○	CL1	12	△
AH2	14	○	BM2	12	○	CL2	7	×
DH1	15	○	EM1	15	○	FL1	7	△
DH2	15	○	EM2	1	×	FL2	10	△
GH1	15	○	HM1	13	△	IL1	13	△
GH2	13	△	HM2	15	○	IL2	10	△
JH1	13	○	KM1	12	△	LL1	3	△
JH2	13	○	KM2	12	○	LL2	5	×
平均答對題數	14.125		平均答對題數	11.625		平均答對題數	8.375	

高、中、低數學學業成就的學生在「比例概念的不變原則」的表現與在「比例概念的共變原則」的表現都相同，顯示學生的共變和不變概念是緊密連結的，對於學生而言，只要能理解共變的概念，幾乎就能掌握住不變的概念，雖然不變概念的認知層次是相對於共變概念的認知層次高，但只要學生能清楚掌握其中一個概念，在解題時就不會受題目不同而改變其解題方式。很多低數學學業成就的學生其共變概念較薄弱，很多可能都是從數字上恰好拼湊出答案，因此，在不變概念時就顯現出他們不理解其意涵，也代表比例概念的共變原則是較容易從數字上去發現並說明的，而比例概念的不變原則就必須真正理解才能說明清楚，比例概念的共變和不變原則是緊密連繫，當學生使用乘法策略解題時，他的共變和不變概念就會是正確的，若學生使用差數相等策略解題時，他的共變和不變概念就會是錯誤的，因此，只要學生無法清楚掌握比例概念的共變和不變原則時，很容易受到題目所牽制而改變其解題方式。

在上表 4-3-2 發現學生的答對題數並無法判定一個學生是否瞭解比例概念，而應該用深層結構的「比例概念的不變原則」來判斷學生的理解情形，雖然有些低數學學業成就的學生答對題數多，但在接受訪談時卻無法說明題目及解題的方法，顯示他們對比例的認知還不夠，從教學的觀點來看，需要從深層結構來加強及提昇他們對比例的認知。

而訪談分析出不穩定具備「比例概念的不變原則」的學生，在熟知的量數問題較容易用單價法，而其它題型則較易使用差數相等策略，顯示他們對熟知的量數問題能瞭解比例概念的不變原則，也就是說，熟知的量數問題對他們而言是較容易理解其涵意，所以，如果想知道學生是否真正具備有「比例概念的不變原則」，則應選擇非熟知的量數問題來檢驗學生是否瞭解其概念。

三、「比例概念的相對改變原則」與學生解題表現之關係

(一) 結果

本節的第三部分主要探討學生對「比例概念的相對改變原則」的瞭解是否與其解題表現有關。在訪談的過程中，研究者會請學生說出使用乘除的運算方法和加減的運算方法差別為何，如果學生能清楚區辨乘除運算和加減運算所代表的意涵，則認定為具備有「比例概念的相對改變原則」，反之則否，以下分別舉幾個學生的訪談資料為例：。

(1)具備比例概念的相對改變原則

例：高數學學業成就【T2 題本，第一題】學生代碼：DH2

I：好，那如果有一個學生呀，他說，這裡 10 顆白的跟黑的差 5 顆，所以第二袋也要差 5 顆，所以 20 減 5 等於 15，他的答案是 15 顆，跟你的想法不一樣，你一開始想到比，可是他一開始是想到差一樣，你覺得呢？他這樣想對不對？

S：等一下喔！

I：好。

S：(想了 61 秒)好像不一樣(寫 $\frac{10}{5} \neq \frac{20}{15}$)。

I：那你怎麼判斷不一樣的？

S：好像是…它跟它…<u>它那個 10 用比的方式啊，就是 10 顆白球先放上面，5 顆黑球放下面，然後 20 顆白球放上面，然後 x 顆黑球啊！就交叉相乘，這樣子的話兩個才會相同。</u>

I：嗯，所以你是用剛剛的分數表示方式來算。那爲什麼這個不同？

S：因爲這個是 20，下面是 15，20 和 15 就不同啊！

I：不相同是不是？

S：對呀！

I：你是怎樣看出不相同的？

S：就這個 5 乘以 3，10 乘以 3 應該是 30，所以不相同(寫 $\frac{10}{5} = \frac{30}{15} \neq \frac{20}{15}$)。

I：嗯，所以你覺得這樣機率就不相同。

S：嗯。

I：那你還沒有算之前，你看到這樣想你覺得他對嗎？爲什麼？他就是覺得很怪啊！<u>爲什麼不能看相差幾顆？爲什麼要用你的方式來算。</u>

S：<u>它那個白球顆數有增加，所以它可能黑球個數就會比較多。</u>

I：嗯，對呀！算出來黑球比原來還要多，那你覺得他的想法不對是不是？

S：嗯。

I：那如果你要教這個學生，你要怎麼教他？怎麼告訴他是錯的？你的方法才是對的。

S：他那個 10 顆白球跟 5 顆黑球差 5 顆，並不代表 20 顆白球也會跟黑球差 5 顆啊！

I：為什麼不一定是差 5 顆？

S：呃…(想了 17 秒)

I：他覺得每次白球跟黑球應該差 5 顆啊！那你覺得他這個想法對嗎？

S：不對。

I：那應該要差幾顆？

S：…(想了 87 秒，寫 $\frac{10}{5}=\frac{20}{10}=\frac{30}{15}=\frac{40}{20}=\frac{50}{25}$)它那個白球跟黑球的差都是愈來愈多，都是 5 的倍數。

I： 嗯嗯，所以你覺得他們的差會怎麼樣？

S：它們的差應該愈來愈多，不會是固定的。

I：所以他的方法錯在哪裡？

S：就他覺得「差」是一樣的，所以機率相同是不對的。

該生很明確能區辨乘法運算和差數相等運算之間的差異，在訪談中得知，她知道如果白球數量增加，黑球的數量相對也會增加，而之間的差也會跟著增加，差數並非是固定不變的，因此，判斷該生具備「比例概念的相對改變原則」。

(2)不穩定具備比例概念的相對改變原則

例：高數學學業成就【T4 題本，第十一題】學生代碼：JH1

I：是哦！那你第 11 題怎麼沒有用相同的方法算？

S：這題看不懂。

I：看不懂？你再看一次。

S：嗯。(看了 15 秒)

I：看好了嗎？你解釋題目意思給老師聽。

S：怎麼解釋？

I：用你自己的話講出來。

S：不是跟題目一樣嗎？

I：好，那你現在會用什麼方法解？

S：(寫 5：2=35：14=7：$\frac{14}{5}$)應該這樣吧！

I：你原來看不懂是哪句話看不懂？

S：題目太長了。

I：題目太長，閱讀有困難。

S：嗯。

：　　　　　　　　　　：　　　　　　　　　　：

I：那你怎麼知道要用除的，不是用別的方法？有學生說 5 比 2 多 3 分鐘，所以 7 減 3 等於 4，爲什麼不是用你的方法算？

S：我也不知道，那些人應該是亂猜的吧！我沒看過這樣算的。

I：那你可以解釋他的算法嗎？

S：我不會解釋。

I：那你覺得他對嗎？

S：應該是錯的。

I：應該是錯的，可是不知道錯在哪裡？

S：對呀！

I：完全不知道怎麼解釋嗎？

S：就覺得算法怪怪的。

I：你不會覺得他的解釋滿合理的嗎？他發現之間相差 3 分鐘呀！那你爲什麼會覺得是倍數關係不是相差的關係？

S：…我不知道耶！

I：你怎麼一開始會想到用倍數，而不是想到其它的。

S：一開始就想到用倍數，也沒有想別的。

I：那我講的這個學生有不一樣的答案，你覺得呢？

S：我覺得他應該是錯的。

I：應該是錯的，那我問你，他們之間的時間都會相差 3 分鐘嗎？

S：不一定吧！

I：以他的解釋覺得兩個水族箱的時間都要相差 3 分鐘，所以如果大水族箱花 10 分鐘，小水族箱就要花 7 分鐘，都是相差 3 分鐘，可是以你的解釋是每次都要有倍數關係。

S：不一定要差 3 分鐘。

I：那應該要差幾分鐘？

S：沒有一定要差幾分鐘。

I：不能用差來是不是？

S：嗯。

該名學生在大部份的題目都可以清楚掌握題目中的關鍵條件，能夠抓住兩者之間固定的關係，以直覺反應用比例來算，在計算上都沒有問題，比較兩數量時會採用通分的方法，如果兩個分數的分子相同，則比較分母，分母愈大其值愈小，若是分母相同，則比較分子，分子愈大其值愈大，能夠清楚判斷兩數量的大小。他能夠知道一個量變大、另一個量也變大是正比的關係，且其中一個數乘以幾倍，另一個數也要乘以相同的倍數，而且也知道不能用固定的差來看兩數量關係，因為它們的

差會隨著改變，並不會固定。在此題中因為題目太長的緣故造成他無法瞭解題意，讓他無法掌握題目中相對改變的數量關係，因此，當他遇到不熟悉及敘述太長的題目時，會影響其解題的正確性。

(3)不具備比例概念的相對改變原則

例 1：中數學學業成就【T3 題本，第二題】學生代碼：HM2

I：好，那如果剛剛那個學生一樣是用加的，他說…我改回原來的題目，他說白色比藍色多 3 罐，所以這個白色也要比藍色多 3 罐，所以答案是 11 罐，那你覺得他的答案怎麼樣？他爲什麼要這樣算？

S：ㄟ…我也不知道他爲什麼要這樣寫。

I：你覺得他對還是錯？

S：我覺得他有道理啊！我覺得他說藍色和白色差 3 罐…ㄟ…我不知道…。

I：那你覺得這兩次調出來的顏色會一樣嗎？

S：應該不會吧！

I：那哪一個調出來會比較深？

S：什麼意思？

I：第一次是不是 4 罐藍的、7 罐白的，第二次是 8 罐藍的、11 罐白的，你說兩次調出來的顏色不一樣嘛！那是哪一次的顏色比較深？

S：這個比較深(指第一次)，這個比較淺(指第二次)。

I：這個比較淺，爲什麼？

S：哪一個比較深？哪一個比較淺？…，不知道耶！

I：沒辦法判斷？遇到什麼問題？

S：因爲藍色倒下去、白色倒下去，應該會變得比較淡啊！對呀！兩個都是呀！

I：兩個都變淡，所以沒辦法判斷？

S：對呀！…嗯…不然…沒辦法判斷。

該名學生在做比例問題測驗時習慣性使用「內項乘積等於外項乘積」來解題，見下圖 4-3-10，雖然她的答案都正確，但卻不知道這個方法的理由，只是強記下來使用。她在計算上都沒有問題，她能夠知道比例式數字間的關係是倍數關係，不是用加減的關係，但她不能很明確指出差數相等的錯誤，無法清楚區辨相對和絕對概念之間的差別，只是能夠感覺到一個量增加時，另一個量也要跟著增加，且兩者有一固定的比例關係。訪談中，研究者請她比較兩數量之間的大小關係時，如果兩數量相差較大，她能夠說明兩量的大小，但如果兩數量相差較近或相差的數量相等，則無法感覺出來哪一個較大，無法用數量關係去比較大小，訪談結果顯示她在解「缺項問題」時較沒有問題，但在「比較問題」時卻沒辦法順利比較出大小，沒辦法用

數字大小去做定量的比較，只能從數字大小關係找出定向的關係，所以只要數據太接近或相差的數據相等時，就容易干擾到她的想法而無法做出正確的判斷，因此，透過訪談可知道此學生對比例概念的相對改變原則還是處於尚未瞭解的階段。

6. 全國的圖書館舉辦了一個「好書交換活動」，只要你用 4 本書就可換得好書交換計點卡 6 點，心凌帶了 8 本書到圖書館，請問她可以換得好書交換計點卡幾點？

$4:6=8:x$

$x=\frac{8\times 6}{4}$

$=12$

A: 12 點

圖 4-3-10 HM2 在 T3 題本第 6 題的原案

例 2：低數學學業成就【T3 題本，第三題】學生代碼：IL1

I：沒有，那如果這裡老師發現有一個學生寫 5 減 4 等於 1，所以 8 加 1 等於 9，如果有個學生這樣寫，你可不可以告訴老師他寫的這樣對，還是你寫的對？

S：嗯…都不對。

I：都不對。那怎樣才會對？

S：不知道。

I：你這也是猜出來的？

S：對呀！

I：那如果請你區辨這兩個方法有哪裡不一樣，你可不可以告訴老師？

S：嗯…。

I：他說這個比它多一枝，所以這個鉛筆也要比它多一枝呀！你認為他的說法合不合理？

S：合理。

I：合理，那你覺得答案對嗎？

S：應該不對。

I：為什麼合理但答案不對？

S：不知道。

I：他是合理可是不對。

S：嗯。

I：那你的方法也合理嗎？

S：不知道。我是用猜的。

I：嗯，那如果這兩個方法都不對，那兩個選一個你會選哪一個比較好？

S：這個(選用倍數的)。

I：為什麼？

S：<u>因為這有倍數關係。</u>

I：<u>所以當這個題目沒有倍數的時候，你就會選這個方法(指加法策略的那個)嗎？就是 5 減 4 等於 1，所以 6 要加 1 等於 7。</u>

S：<u>嗯。</u>

該生是因為發現題目有倍數關係才知道要用倍數法來算，但其實他都不懂題目意思，只是看到就算了，如果沒有倍數關係就不會算了，不會用分數計算，他無法區別乘法和加法的差別，認為加法也是合理的算法，所以有倍數時用乘法，沒有倍數時用加法，只是一種算答案的方法，雖然無法說出兩者的差別，但比較喜歡採用乘法策略，見下圖 4-3-11 在第 2 題的原案，因此，從訪談中可以確定此學生不具備比例概念的相對改變原則。

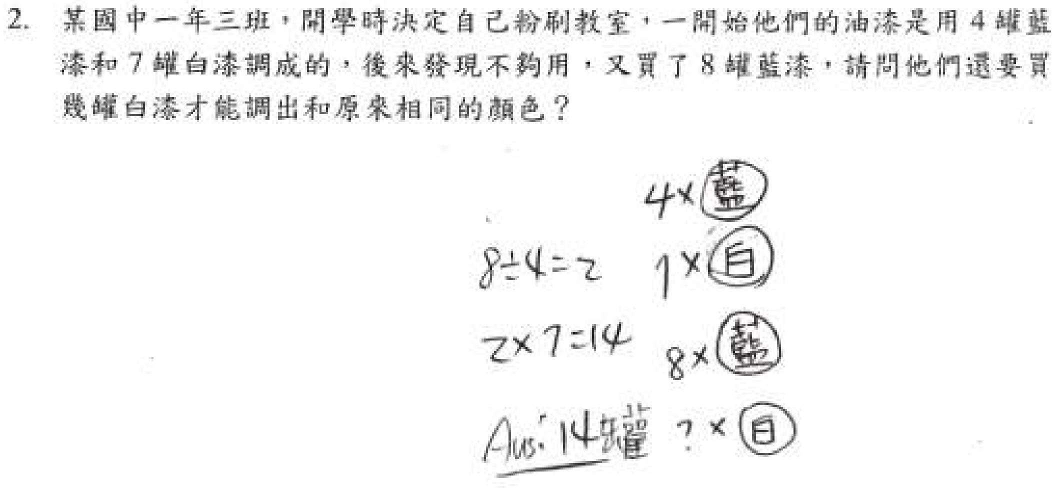

2. 某國中一年三班，開學時決定自己粉刷教室，一開始他們的油漆是用 4 罐藍漆和 7 罐白漆調成的，後來發現不夠用，又買了 8 罐藍漆，請問他們還要買幾罐白漆才能調出和原來相同的顏色？

圖 4-3-11 IL1 在 T3 題本第 2 題的原案

（二）討論

從分析的過程中發現要瞭解比例概念的相對改變原則是比瞭解比例概念的不變原則來得困難，因為訪談時要請學生說出使用乘除的運算方法和加減的運算方法差別為何是較不容易的，學生要能清楚區辨乘除運算和加減運算所代表的意涵，才有辦法說明正確，這是需要對比例有深層的瞭解才能區辨出來，有些學生處於不完全瞭解相對改變的階段，當題目是他們所熟知或者為外比的題目時，他們比較能感覺乘除運算和加減運算的差異，但如果題目為內比且兩數量間的差較小或相等時，則他們就無法比較之間的大小關係，而容易使用差數相等策略來解題，代表即使他們具備了比例概念的共變和不變原則，但如果在比例概念的相對改變原則不清楚時，很容易產生錯誤的解題策略，使得解題的表現也較差，因此，能理解比例概念相對改變原則的學生較理解比例概念共變、不變原則的學生少，而且，比例概念的相對改變原則是決定學生是否能正確解題的關鍵因素。

研究者將所有訪談學生的資料整合，透過分析後的結果將學生分為三類：

(1) 若學生回答的情況為：「差數也會跟著倍數改變，並非固定不變」及不管在任何題目下都能比較使用差數相等策略時兩者數量間的大小關係者，皆判定為具備有「比例概念的相對改變原則」，以「○」表示。

(2) 學生知道差數相等策略為錯誤的方法，知道乘除運算才是正確的方法，能分辨加減和乘除運算的差別，但若遇到沒接觸過、敘述太長及數值算出來是分數的題目則無法掌握相對改變的概念，可能就會使用差數相等策略來解題，則判定為不穩定具備「比例概念的相對改變原則」，以「△」表示。

(3) 學生遇到兩數量比較大小關係時，不能區辨加減和乘除運算的差別，無法解釋其中的理由，或者無法明確用數量關係來比較出兩者的大小(只能瞭解定性關係而無定量的概念)，尤其是當兩數量間的數字相差太近及相等時，就無法對數字做定量的比較，則判定為不具備有「比例概念的相對改變原則」，以「×」表示。

本研究透過訪談，依據上面的分類，將 24 名受試學生歸類為下表 4-3-3：

表 4-3-3 訪談學生的答對題數與比例概念的相對改變原則之表現結果

高數學學業成就	答對題數(題)	是否具備相對改變原則	中數學學業成就	答對題數(題)	是否具備相對改變原則	低數學學業成就	答對題數(題)	是否具備相對改變原則
AH1	15	×	BM1	13	△	CL1	12	×
AH2	14	×	BM2	12	△	CL2	7	×
DH1	15	○	EM1	15	△	FL1	7	×
DH2	15	○	EM2	1	×	FL2	10	×
GH1	15	△	HM1	13	×	IL1	13	×
GH2	13	×	HM2	15	×	IL2	10	×
JH1	13	△	KM1	12	×	LL1	3	×
JH2	13	△	KM2	12	△	LL2	5	×
平均答對題數	14.125		平均答對題數	11.625		平均答對題數	8.375	

高、中數學學業成就的學生在「比例概念的共變原則」的表現與在「比例概念的不變原則」的表現無明顯差異，但由上表 4-3-3 發現在「比例概念的相對改變原則」下就開始出現落差，不具備比例概念相對改變原則的中數學學業成就學生較高數學學業成就學生多，能漸漸區分出之間的差異，尤其是低數學學業成就的學生更是明顯，全部的學生都不具備比例概念的相對改變原則，因為這個部分較難解釋和理解，所以他們在基礎不穩固的情況下都無法正確說明原因，因此，比例概念的相對改變原則比不變原則在程度上較難理解，其認知層次又更高，所以，可從此部分更明顯區分出學生是否真正瞭解比例概念。

由以上的結果顯示，比例概念的相對改變原則與學生的數學學業成就有明顯的關聯性，能真正瞭解「比例概念的相對改變原則」的學生幾乎都是屬於高、中數學學業成就的學生，而不能瞭解「比例概念的相對改變原則」的學生則大多屬於低數學學業成就的學生，這代表學生的數學能力應該從比例概念的相對改變原則來做劃分，能穩定瞭解比例概念相對改變原則的學生才能在面對不同的比例問題時有效的解決問題。

小結：

本研究進行訪談的學生共 24 名，本節是希望透過訪談學生的訪談資料分析學生是否具備「比例概念的共變原則」、「比例概念的不變原則」及「比例概念的相對改變原則」，經由上面的分析統整後，茲將學生的答對題數與其比例問題的深層結構之表現結果呈現如下表 4-3-4 所示：

表 4-3-4 訪談學生的答對題數與比例問題的深層結構之表現結果

學生代碼	答對題數(題)	共變原則	不變原則	相對改變原則
AH1	15	○	○	×
AH2	14	○	○	×
DH1	15	○	○	○
DH2	15	○	○	○
GH1	15	○	○	△
GH2	13	△	△	×
JH1	13	○	○	△
JH2	13	○	○	△
BM1	13	○	○	△
BM2	12	○	○	△
EM1	15	○	○	△
EM2	1	×	×	×
HM1	13	△	△	×
HM2	15	○	○	×
KM1	12	△	△	×
KM2	12	○	○	△
CL1	12	△	△	×
CL2	7	×	×	×
FL1	7	△	△	×
FL2	10	△	△	×
IL1	13	△	△	×
IL2	10	△	△	×
LL1	3	△	△	×
LL2	5	×	×	×

透過上表，將所有不同數學學業成就的學生在深層結構的表現整理如下表 4-3-5 所示：

表 4-3-5 不同數學學業成就的學生在深層結構的表現統計表

深層結構 人數統計	共變原則			不變原則			相對改變原則		
	○	△	×	○	△	×	○	△	×
高成就	7	1	0	7	1	0	2	3	3
中成就	5	2	1	5	2	1	0	4	4
低成就	0	6	2	0	6	2	0	0	8
小計	12	9	3	12	9	3	2	7	15
總計	24 人			24 人			24 人		

上表顯示比例概念的共變和不變原則是同時並存的，當學生使用乘法策略時，他們就很容易理解比例概念的共變和不變原則，高、中數學學業成就的學生有一半以上的人都清楚知道比例共變和不變的關係，而低數學學業成就的學生則都處於半瞭解及不瞭解的狀態，代表他們連最基本的比例概念都還不清楚。在比例概念的相對改變原則上，有 2 名高數學學業成就的學生能夠完全瞭解，其餘的人則是不清楚甚至是無法解釋其理由；中數學學業成就的學生則有一半的人屬於不瞭解及不清楚的階段；低數學學業成就的學生則是全部的人都不瞭解比例的相對改變原則，代表這個概念對他們而言是較困難且不易懂的，所以，可以很明顯區分出不同數學學業成就的學生在比例深層結構概念的差異。

透過上表 4-3-4，將所有訪談學生在深層結構的表現統整歸納分為五個層次，見下表 4-3-6 所示：

表 4-3-6 訪談學生在深層結構的層次分類表

層次	學生的表現特徵	共變	不變	相對改變	人數
層次 1	1. 能正確回答有整數倍的熟知量數問題，能說出共變和不變的關係。 2. 除了熟知的量數問題外，其它的語意類型都不受數字型式的影響，會用自己的想法將題目中的數字隨意運算(通常是用差數相等策略，就算有倍數也不會用乘法策略)，完全不管題目的意思，也不知道自己算的是否合理，而算式只是為求一個答案而已。	×	×	×	3

層次 2	1. 能正確回答有整數倍的熟知量數問題，能說出共變和不變的關係。 2. 除了熟知的量數問題外，其它的語意類型會受數字型式的影響而改變解題策略，數字型式若有整數倍關係就用乘除運算，其共變和不變的概念就為正確；若無整數倍就用加減運算，其共變和不變的概念就為錯誤，不能確定哪種運算才是正確的方法。 3. 分數運算不好，只能處理整數倍的題目。	△	△	×	9
層次 3	1. 幾乎所有的語意類型都能掌握題目數量之間的共變和不變關係，都認為使用乘法策略才是正確的運算方法。 2. 當遇到兩數量比較大小關係時，不能區辨加減和乘除運算的差別，尤其是當兩數量間的數字相差太近及相等時，就無法對數字做定量的比較。 3. 有時分數運算會算錯，或在判斷兩數量大小時會判斷錯誤。	○	○	×	3
層次 4	1. 能分辨加減和乘除運算的差別，知道用乘除運算比較才是對的，但若遇到沒接觸過、敘述太長及數值算出來是分數的題目則無法掌握相對改變的概念，可能就會使用差數相等策略來解題。 2. 分數四則運算都不錯，不受兩數量間為非整數倍而影響解題策略。	○	○	△	7
層次 5	1. 能明確說出使用加減運算錯誤的原因，並且會用相對概念來解釋兩數量間的大小關係，能掌握題目中共變、不變及相對改變的深層結構概念。 2. 不管是任何題目，其比例深層結構概念都很清楚，完全能夠理解題目意思而正確解題。 3. 分數四則運算很好，完全不受數字型式的影響。	○	○	○	2

因為由訪談的結果可得知比例概念的共變和不變原則對於高、中數學學業成就的學生而言幾乎是同時並存的，且發現深層結構的認知順序由易至難應該為比例概念的共變原則→比例概念的不變原則→比例概念的相對改變原則，因此，再將上表轉換成下表 4-3-7 的形式，從此表可見認知層次較高的概念若具備，則認知層次較低的概念也會具備，反之，若認知層次較低的概念不具備，則認知層次較高的概念則一定不具備，而比例概念的相對改變原則因為認知層次明顯高於其它兩者，所以比例概念的相對改變原則是操控學生是否能正確答題的主要原因。

表 4-3-7 訪談學生在深層結構的表現與各類層次的關係

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">共變、不變</td></tr>
<tr><td>○</td><td>△</td><td>×</td></tr>
<tr><td rowspan="3">相對改變</td><td>○</td><td>層次 5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>△</td><td>層次 4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>×</td><td>層次 3</td><td>層次 2</td><td>層次 1</td></tr>
</table>

經由訪談過後，將訪談學生在深層結構的表現轉換成量化的數量大小來預測學生的數學學業成就及比例問題的答對題數，將以上代表「○」以 2 分計算，「△」以 1 分計算，「×」以 0 分計算，以迴歸去預測兩者之間的關係，其結果如下表 4-3-8、圖 4-3-12 及圖 4-3-13 所示：

表 4-3-8 訪談學生在深層結構的轉化分數與對照表

深層結構的層次分類		轉化分數	學生編號	數學學業成就分數	答對題數(題)	人數(%)
層次 1	×××	0	EM2、CL2、LL2	63、42、47	1、7、5	3 (12.5%)
層次 2	△△×	2	GH2、HM1、KM1、CL1、FL1、FL2、IL1、IL2、LL1	75、52、55、31、39、45、43、27、24	13、13、12、12、7、10、13、10、3	9 (37.5%)
層次 3	○○×	4	AH1、AH2、HM2	79、96、58	15、14、15	3(12.5%)
層次 4	○○△	5	GH1、JH1、JH2、BM1、BM2、EM1、KM2	82、98、80、67、63、71、66	15、13、13、13、12、15、12	7 (29.2%)
層次 5	○○○	6	DH1、DH2	93、86	15、15	2 (8.3%)

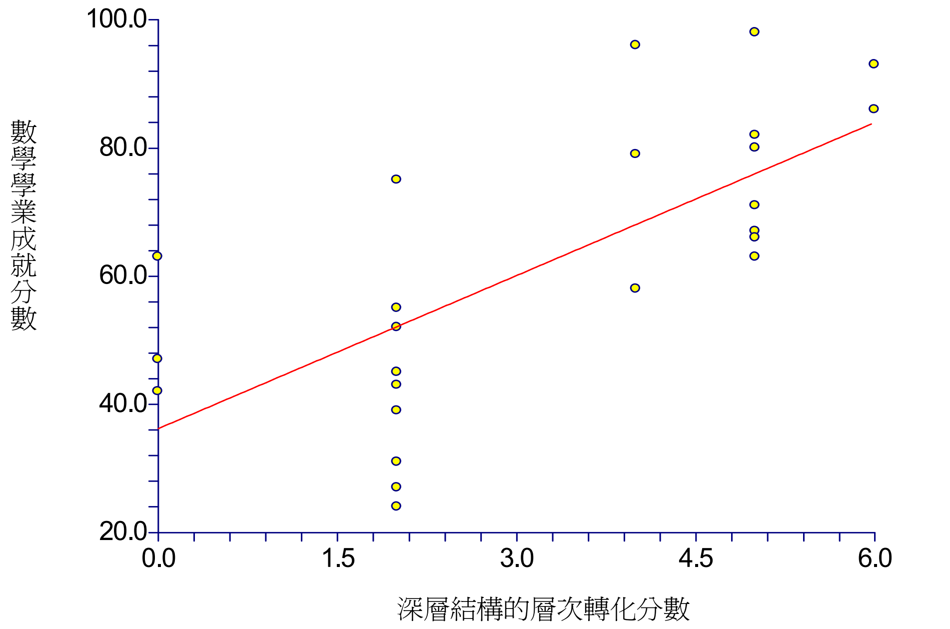


圖 4-3-12 深層結構的表現與數學學業成就分數的線性迴歸圖

上圖的線性迴歸中，F 考驗為 $F(1, 22)=20.99$，$p<.0001$，其 R Square＝0.488，Adjusted R Square＝0.465，意即深層結構的表現分數可預測數學學業成就分數約47%左右，其迴歸方程式為 $y=36.2+7.96x$，其中 x＝深層結構的表現分數、y＝數學學業成就分數。

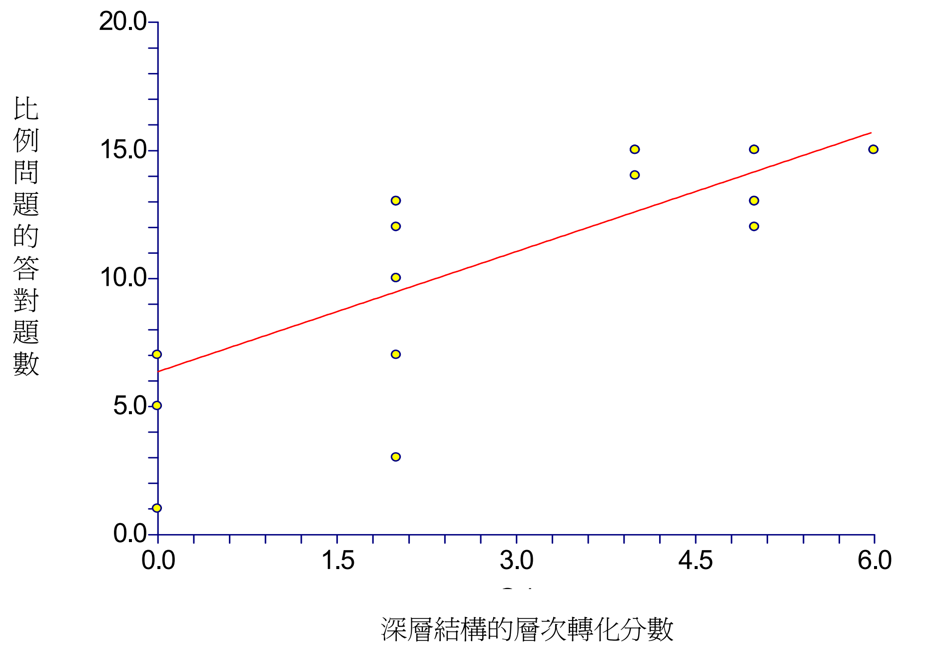


圖 4-3-13 深層結構的表現與比例問題的答題題數線性迴歸圖

圖 4-3-13 的線性迴歸中，F 考驗為 F(1, 22)＝28.36，p<.0001，其 R Square＝0.563，Adjusted R Square＝0.543，意即深層結構的表現分數可預測比例問題的答對題數約 54%左右。其迴歸方程式為 $y = 6.36 + 1.56x$ ，其中 x＝深層結構的表現分數、y＝比例問題的答對題數。

綜合所有的訪談結果發現深層結構的認知順序由易至難可能為比例概念的共變原則→比例概念的不變原則→比例概念的相對改變原則，而表面結構影響學生解題策略的先後順序可能為數字型式→語意類型→量的性質，因此，學生在比例問題測驗的答題正確率並不能完全代表學生真正的學習情況，一般在教學時，老師都習慣用類似於本研究中的比例問題測驗來測驗學生的學習結果，這得到的結果並不足以解釋學生的學習情形，尤其是對低數學學業成就的學生來說更無法達到教學的成效，因此，我們應該朝著發展深層結構的題目來測驗學生的學習成果，才是有效反應其結果的測量工具。

第四節 比例問題的深層結構與國一學生的解題策略之關係

從上一節的分析當中將所有訪談學生分成表 4-3-8 的 5 個層次，依照所分的各個層次分別去探討學生對於深層結構的瞭解與解題策略的關聯性。

一、層次 1 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

下表 4-4-1 為層次 1 的學生在比例問題測驗的解題策略情形：

表 4-4-1 層次 1 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

學生代碼	R1	W3	W4	W5	0
EM2	4		其它		
CL2	其它		3		1、2、9、10、11、13、15
LL2	4、5、6、7、14	9	其它	13	8

層次 1 的學生代表完全不具備三個比例的深層結構概念，因此，在解題時，時常會依照自己的想法去算答案，而不管是否符合題意，從上表可知，EM2 除了第一題以外，其它題目都是使用 W4 的解題策略；CL2 正確的解題策略以 R1 為主，沒有用到其它正確的解題策略來解題，其它的題目不是用 W4 就是空白不會回答；LL2 主要正確的解題策略是 R1，其它錯誤的解題策略為 W4 居多。在層次 1 的學生其正確的解題策略都只會用 R1 單價法的解題策略，對於他們而言，單價法是最容易理解的方法，所以如果遇到他們會做的題目就會用單價法來解題，因為沒有深層結構的概念，因此，他們幾乎是隨意將數字做運算，尤其是他們的分數概念很弱，所以最容易也最方便的方法就是將數字做加減運算，可以完全避開題目中難算的數字，他們的目的只是解出一個答案而已，完全不瞭解題目中的意涵。

二、層次 2 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

下表 4-4-2 為層次 2 的學生在比例問題測驗的解題策略情形：

表 4-4-2 層次 2 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

學生代碼	R1	R2	R5	R7	W1	W2	W3	W4	W6	W7	0
GH2		其它				1、9					
HM1	4	其它						2		1	
KM1	4	其它						9、11、13			
CL1	其它	8、10、11、13						1		9	2
FL1	其它						2、9、10	1、3、11、13		7	
FL2	其它				13			1	5	3、9	
IL1		其它					9	4			
IL2		其它	5			1		2、3、12			4
LL1	5、7、14			6、8			1、9	10、12	4	3、11、13、15	2

層次 2 的學生具備不穩定的比例共變和不變原則，但不具備相對改變原則，他們在做熟知的量數問題時能清楚知道共變和不變的關係，但其它的語意類型則否，由上表可以發現他們在「連續量-連續量-內比」的題目(第 9、10、11、12 及 13 題)較易使用錯誤的解題策略，原因是因為他們的分數運算不好，所以只會做整數倍的運算，有整數倍時就會傾向使用乘法策略，若無整數倍時就會傾向使用差數相等策略。他們對題目的瞭解程度幾乎是受限於數字型式，無法明確掌握題目的比例概念，只要稍微變更一下題目，他們就會犯錯，因為這層次的學生不具備比例的深層結構概念，所以不能算是真正瞭解比例概念。

三、層次 3 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

下表 4-4-3 為層次 3 的學生在比例問題測驗的解題策略情形：

表 4-4-3 層次 3 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

學生代碼	R1	R2	R3	W5
AH1	4、9	其它		
AH2	4	其它		3
HM2		13	其它	

層次 3 的學生具備比例概念的共變和不變原則，但不具備相對改變原則，他們都知道使用乘法策略才是正確的運算方法，但無法提出明確的解釋原因，尤其是要求他們比較兩數量大小關係時，他們只能做定性的比較，若數字相差大則可以用感覺的判斷出大小，但如果數字相差太近或相等時，則無法對數字做定量的比較。由上表可知，因為他們具備比例概念的共變和不變原則，所以他們在做缺項問題時不會出現太多錯誤，但不具備比例相對改變原則的學生在做比例的比較問題時就會出現錯誤，因此，此層次的學生應該加強比例相對改變的概念，使其能真正且完全地瞭解比例深層結構的概念。

四、層次 4 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

下表 4-4-4 為層次 4 的學生在比例問題測驗的解題策略情形：

表 4-4-4 層次 4 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

學生代碼	R1	R2	R3	W1	W4	W5	W7	0
GH1	4		其它					
JH1	4	其它						1、11
JH2	4	其它			11、13			
BM1	4、5	其它				13	9	
BM2		其它		4	15		9	
EM1	4、5、6、7、8、9							
KM2	2、3	其它			11、13、14			

層次 4 的學生具備比例概念的共變、不變原則及不穩定的相對改變原則，他們在比較兩數量的大小關係時能分辨加減和乘除運算的差別，知道用乘除運算來比較

才是正確的，因為他們分數的運算都還不錯，所以不受兩數量間為非整數倍而影響解題策略，但他們的相對改變原則並不是很穩定，只要遇到沒接觸過、敘述太長的題目則無法掌握相對改變的概念，可能就會使用差數相等策略來解題，從上表可知，第 9、11、13 題對他們而言是較容易犯錯的題目，學生表示並不是不會算，而是不瞭解題意而算錯，經過研究者的解釋後他們就能使用正確的解題策略解題了，代表他們在讀文字題的理解程度還需要再加強，才能避免因誤解題意而產生錯誤。

五、層次 5 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

下表 4-4-5 為層次 5 的學生在比例問題測驗的解題策略情形：

表 4-4-5 層次 5 的學生在比例問題測驗的解題策略情形

學生代碼	R1	R2	R3
DH1	4、5、6、7、8、13、14、15		其它
DH2	4	其它	

層次 5 的學生具備了比例的三個深層結構概念：共變、不變及相對改變原則，他們在做比較問題時，都能明確說出使用加減運算錯誤的原因，知道之間的差數及和數並非固定不變，並且會用乘除的相對概念來解釋兩數量間的大小關係，不管在任何的題目下，其比例的深層結構概念都很清楚，能夠真正理解題目意思而正確解題，這個層次的學生分數運算能力很好，完全不會受題目數字型式的影響而改變解題策略，由訪談得知這兩個訪談學生的數學能力很好，在解題時能掌握題目的關鍵要素而辨識出解題的方法，即使題目未看過或敘述較長，也能清楚解釋題目的意思而不匆忙做答，是真正掌握比例的深層結構概念且能獨立思考解題的人。

小結：

一、　「比例概念的共變原則」與學生解題策略之關係

一般而言，學生若清楚使用共變原則，則較易使用「倍數法」來解題，因為他們知道的是當一個變成k倍時，另一個也會變成k倍，他們能觀察到數字間的關係是兩個同時乘以k倍，所以這樣的認知就會形成使用「倍數法」來解題，尤其是在第一式及第三式時最為明顯，因為$a:b=c:x$，若a和c之間有倍數關係，則最容易想到的就是倍數法，但若為第二式，因為a和b之間有倍數關係，雖然他知道可以使用倍數法，但因為數字的型式讓他會比較傾向用整數關係來解題，所以，這時學生可能就會採用「單價法」解題。

二、　「比例概念的不變原則」與學生解題策略之關係

學生在熟知的量數問題因為較能掌握比例概念的不變原則，所以較易使用「單價法」來解題。若學生共變和不變都同時掌握，則通常會依數字型式來決定解題的策略，若數字型式為第一式，則使用單價法和倍數法的情況居多；若為第二式，則學生較易使用單價法；若為第三式，則學生較易使用倍數法；若為第四式，因為數字沒有倍數關係，所以學生會再依照量的性質來決定解題策略，若數字之間可再約，如 4：6=2：3，學生會先化成簡單整數比，然後再去找 2：3=6：9 的倍數關係，若數字之間不能再約成簡單整數比，則學生如果不能掌握比例的相對概念，則會選擇使用「差數相等策略」，另外，學生還會受到量的性質的干擾，若為內比，因為同單位，學生也會比較容易使用差數相等策略，若為外比，因為不同單位，學生就比較會傾向使用單價法，而連續量因為數字之間可能為非整數倍，所以連續量的表現會比離散量的表現差，而且比較容易傾向使用差數相等策略。

三、　「比例概念的相對改變原則」與學生解題策略之關係

學生若能掌握比例概念的相對改變原則，則學生不會使用差數相等的解題策略來解題，而因為能掌握這個部份的認知層次較高，所以學生並無特定的解題策略，如果他們又學過內項乘積等於外項乘積或交叉相乘的方法，則他們會較容易使用公式法，對他們而言，公式法可以解決任何的比例缺項問題，他們認為這個方法很好用，但其實他們偶爾也會視題目而改變解題策略，他們能接受各種正確的解題策略，因為當他們具備了比例概念的相對改變原則後，則他們也都同時瞭解共變和不變的原則，所以，他們在解題時已不限定使用單一種方法，而存在的是一題多解的能力。

第五節 比例問題的表面結構與深層結構解題之間的關聯性

在前面四節中分別獨立探討表面結構和深層結構對學生解題表現及解題策略的影響，本節將綜合以上的結果，比較學生在比例問題的表面結構和深層結構解題的關聯性，首先，將 24 名訪談學生在表面結構和深層結構的表現統整於下表 4-5-1 所示：

表 4-5-1 訪談學生在比例問題的表面結構和深層結構之表現結果

學生代碼	答對題數(題)	表面結構			深層結構		
		數字型式	語意類型	量的性質	共變原則	不變原則	相對改變原則
AH1	15	×	×	×	○	○	×
AH2	14	×	×	×	○	○	×
DH1	15	×	○	○	○	○	○
DH2	15	×	×	×	○	○	○
GH1	15	×	×	×	○	○	△
GH2	13	○	○	○	△	△	×
JH1	13	×	×	×	○	○	△
JH2	13	×	×	○	○	○	△
BM1	13	×	×	×	○	○	△
BM2	12	×	×	×	○	○	△
EM1	15	×	△	×	○	○	△
EM2	1	×	×	×	×	×	×
HM1	13	△	×	×	△	△	×
HM2	15	×	×	×	○	○	×
KM1	12	○	×	○	△	△	×
KM2	12	△	×	△	○	○	△
CL1	12	○	○	△	△	△	×
CL2	7	×	○	△	×	×	×
FL1	7	○	○	○	△	△	×
FL2	10	○	△	△	△	△	×
IL1	13	○	×	×	△	△	×
IL2	10	○	×	△	△	△	×
LL1	3	○	○	×	△	△	×
LL2	5	×	△	○	×	×	×

因為以上的分類結果為次序類別資料，所以茲分別以關聯量數(measures of association)中的 Gamma 係數(Goodman & Kruskal, 1954)來測量表面結構和深層結構之間的關聯度，雖然訪談的人數只有 24 人，但還是想藉由這些學生瞭解表面結構和深層結構之間的關聯性。

一、表面結構的數字型式 VS.深層結構的共變、不變原則

因為由訪談的結果發現學生比例概念的共變和不變原則幾乎是同時並存的，因此，茲將共變和不變放在一起討論，兩者解題表現視為相同，而下表 4-5-2 為訪談學生在數字型式和共變、不變原則解題表現的對應人數，其$\gamma=-0.56$，代表表面結構的數字型式和深層結構的共變、不變原則為負中等相關，意思為我們可以用表面結構的數字型式來預測深層結構的共變、不變原則，或者用深層結構的共變、不變原則來預測表面結構的數字型式，其中能夠減少 56%的預測誤差，由此可知，共變、不變原則的學生與題目的數字型式有關，能夠預測之間的關聯度為中等。

表 4-5-2 訪談學生在數字型式和共變、不變原則表現的對應人數

深層結構 / 表面結構		共變與不變原則		
		○	△	×
數字型式	○	0	8	0
	△	1	1	0
	×	11	0	3

$\gamma=-0.56$

二、表面結構的數字型式 VS.深層結構的相對改變原則

下表 4-5-3 為訪談學生在數字型式和相對改變原則解題表現的對應人數，其$\gamma=-0.86$，代表表面結構的數字型式和深層結構的相對改變原則為負非常高相關，意思為我們可以用表面結構的數字型式來預測深層結構的相對改變原則，或者是用深層結構的相對改變原則來預測表面結構的數字型式，其中能夠減少 86%的預測誤差，總結來說，相對改變原則與題目的數字型式有很高的負相關，能夠預測之間的關聯度很高。

表 4-5-3 訪談學生在數字型式和相對改變原則表現的對應人數

表面結構＼深層結構		相對改變原則		
		○	△	×
數字型式	○	0	0	8
	△	0	1	1
	×	2	6	6

$\gamma = -0.86$

三、表面結構的語意類型 VS.深層結構的共變、不變原則

下表 4-5-4 為訪談學生在語意類型和共變、不變原則解題表現的對應人數，其 $\gamma = -0.6$，代表表面結構的語意類型和深層結構的共變、不變原則為負中等相關，意思為我們可以用表面結構的語意類型來預測深層結構的共變、不變原則，或者用深層結構的共變、不變原則來預測表面結構的語意類型，其中能夠減少 60%的預測誤差，由此可知，比例概念的共變、不變原則與題目的語意類型有關，能夠預測之間的關聯度為中等。

表 4-5-4 訪談學生在語意類型和共變、不變原則表現的對應人數

表面結構＼深層結構		共變與不變原則		
		○	△	×
語意類型	○	1	4	1
	△	1	1	1
	×	10	4	1

$\gamma = -0.6$

四、表面結構的語意類型 VS.深層結構的相對改變原則

下表 4-5-5 為訪談學生在語意類型和相對改變原則解題表現的對應人數，其 $\gamma = -0.375$ ，代表表面結構的語意類型和深層結構的相對改變原則為負低相關，意思為我們可以用表面結構的語意類型來預測深層結構的相對改變原則，或者用深層結構的相對改變原則來預測表面結構的語意類型，其中能夠減少預測誤差所占的比例為 37.5%，由此可知，相對改變原則的學生與題目的語意類型沒有很明顯的關係，之間的關聯度不是很高。

表 4-5-5 訪談學生在語意類型和相對改變原則表現的對應人數

深層結構 / 表面結構		相對改變原則		
		○	△	×
語意類型	○	1	0	5
	△	0	1	2
	×	1	6	8

$\gamma = -0.375$

五、表面結構的量的性質 VS.深層結構的共變、不變原則

下表 4-5-6 為訪談學生在量的性質和共變、不變原則解題表現的對應人數，其 $\gamma = -0.49$ ，代表表面結構的量的性質和深層結構的共變、不變原則為負中等相關，意思為我們可以用表面結構的量的性質來預測深層結構的共變、不變原則，或者用深層結構的共變、不變原則來預測表面結構的量的性質，其中能夠減少預測誤差所占的比例為 49%，由此可知，比例概念的共變、不變原則與題目的量的性質有關，能夠預測之間的關聯度為中等。

表 4-5-6 訪談學生在量的性質和共變、不變原則表現的對應人數

表面結構 \ 深層結構		共變與不變原則		
		○	△	×
量的性質	○	2	3	1
	△	1	3	1
	×	9	3	1

$\gamma = -0.49$

六、表面結構的量的性質 VS.深層結構的相對改變原則

下表 4-5-7 為訪談學生在量的性質和相對改變原則解題表現的對應人數，其 $\gamma = -0.21$，代表表面結構的量的性質和深層結構的相對改變原則為負低相關，意思為我們可以用表面結構的量的性質來預測深層結構的相對改變原則，或者用深層結構的相對改變原則來預測表面結構的量的性質，其中能夠減少預測誤差所占的比例為 21%，由此可知，比例概念的相對改變原則與題目的量的性質沒有很明顯的關係，能夠預測之間的關聯度不是很高。

表 4-5-7 訪談學生在量的性質和相對改變原則表現的對應人數

表面結構 \ 深層結構		相對改變原則		
		○	△	×
量的性質	○	1	1	4
	△	0	1	4
	×	1	5	7

$\gamma = -0.21$

小結：

綜合以上結果，整理如下表 4-5-8 及下圖 4-5-1 所示，表面結構的數字型式、語意類型、量的性質與深層結構的共變、不變原則都呈現負中等相關；表面結構的數字型式和深層結構的相對改變原則呈現負非常高相關，代表相對改變原則與題目的數字型式關聯度最強，也就是說，愈具備相對改變原則的學生，則愈不容易因題目數字型式不同而有不同的解題策略，反之，愈不具備相對改變原則的學生，則愈容易因題目數字型式不同而有不同的解題策略；表面結構的語意類型、量的性質和深層結構的相對改變原則皆呈現負低相關，代表相對改變原則與題目的語意類型、量的性質關聯度較低，也就是說，能夠用相對改變原則來預測學生在語意類型及量的性質的解題表現準確度較低。

表 4-5-8 比例問題的表面結構與深層結構解題之間的關聯性

關聯度		深層結構	
		共變與不變原則	相對改變原則
表面結構	數字型式	負中等相關	負非常高相關
	語意類型	負中等相關	負低相關
	量的性質	負中等相關	負低相關

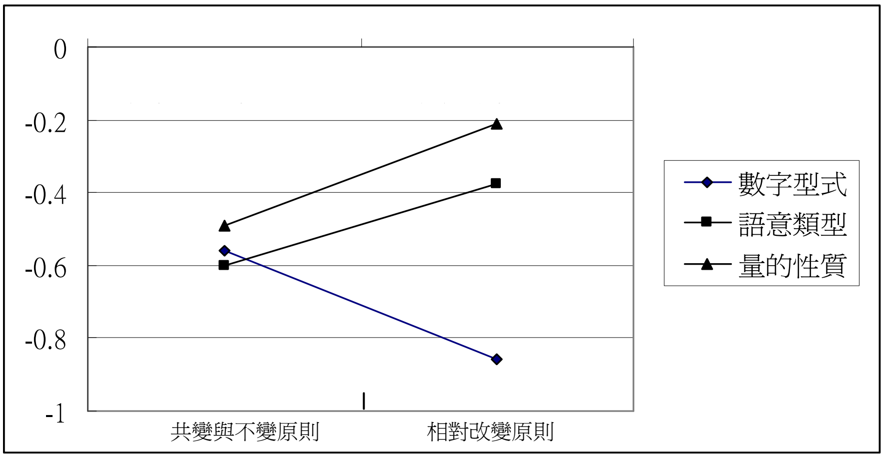


圖 4-5-1 比例問題的表面結構與深層結構解題之間的 γ 圖