代數算板及其在代數教學上的應用

林保平 副教授
◎ 臺北市立教育大學數學資訊教育學系退休

摘要

代數教學時，學生的練習及計算通常使用分數或整數，小數出現時，通常也只是有限小數，無法處理或呈現無限小數的數值。由於電算器或電腦通常以小數呈現，常因小數的有效位數產生精確的問題。例如，以1位小數呈現時，1.3 ＋1.1＝2.4，但若1.3及1.1是由1.34及1.13因四捨五入進位而得，則1.3＋1.1則可能是由1.47四捨五入而得2.5，因此1.3＋1.1＝2.5 就十分容易造成誤解，這在提供數值計算的程式中（例如Geormeters’ Sketchpad）是常發生的問題。在處理除法相關問題時，也十分容易產生無限小數（如3x = 1,兩邊同除以3），不以分數處理，無法繼續運算。本文介紹作者製作發展的數學算板中的一個模組—代數算板。代數算板除能作分數的四則運算外，尚可針對代數教學需要，運用分數計算的功能，建立可依序呈現的分數係數的一元一次或二次方程式及不等式、二元一次及三元一次聯立方程式、二次函數求最大及最小值…等的解題過程，可供教師上課時參酌使用，協助教學的進行。

壹、前言

運用科技於教學中的呼籲及研究，有長久的歷史，自有電腦以來，數學家掌握電子計算有50多年的歷史，而教師與學生有幸使用電子計算功能，至今不超過30年，早期使用電子計算科技都是透過時間分享方式。微電腦的出現，打破了中央控制進入了個人化使用的時代，微電腦的普遍使用大約爲20年，從1980年代微電腦發展以來，科技在教育上的運用一直受到教育界的重視。1990年代初期開始的網路技術發展，個人電腦使用的日漸普及，寬頻網路的普遍設置，更使數學教育學者及教師對於科技在數學教學上的應用有更大的期許，融入課程的科技運用已成爲未來數學教學的趨勢。

在我國，提供教室使用的電腦雖然十分有限，但教育部班班有電腦計畫，針對教室提供教師於教室內可用的電腦相關設備，每一中小學都有以寬頻（ADSL）連線上網之設備，而且電腦價格日益低廉，其功能也日漸強大，教室中有一部電腦來協助教師正常教學應不成問題（不是點綴性的展示，而是像粉筆黑板一樣的利用），但是能供教師在課室直接利用的軟體卻十分缺乏。「教具學具」觀點的電腦輔助教學（林保平，民89；林保平，民90），建議將電腦當作工具，教師或專家根據課程及教材內容（亦不排除非其內的素材）的特質，設計出能幫助教學的教具或學生操作的學具，供教師及學生在教學時使用，電腦只掌控必要的「工具」，將教學流程、個別差異的考慮、教師的評量等工作，仍然交給教師。教師教學流程之設計中，對電腦科技目前無法處理，或教師因科技能力不足無法設計、或無現成的電腦教具學具的題材或內容部分，仍採非電腦的教學方式，並且不排除其他任何非電腦提供的操作教具或學具，教師具有彈性，可斟酌使用。

網頁http://www.dynamath.tw「動態數學」(林保平，民87~民97)從教具學具觀點，透過Geometor’s Sketchpad 及JavaSketchpad在網路上發布了十幾個主題，約200個教具學具的範例程式（大、中小學均有），不只包含幾何題材相關的教學製作，也有非幾何的素材，但在代數符號運算方面的實例，則只在「舊英文版」上有簡單的「分數計算板」（圖1），它只能呈現分數符號計算的結果，在代數（非解析幾何圖形部分）的教學方面，並無其他範例。

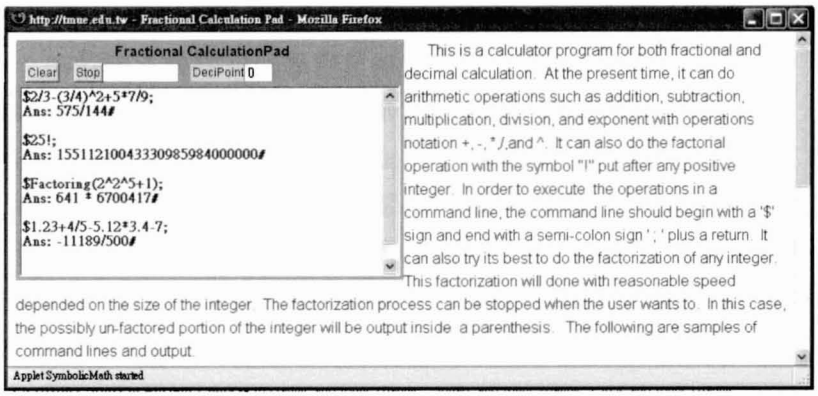

圖1　分數計算板

本質上大部分的電算器及電腦程式在數的運算及呈現上，均以處理小數運算爲主，對分數運算多以近似值的方式爲之，但也有一些手持計算器（如TI）也提供分數計算的功能，另有一些功能強大的符號運算程式如Mathematica、 Maple……等，不只具有分數計算的功能，也能作有理數系多項式或方程式的運算或求解。在手持計算器上的處理（前者），由於按鍵困難，適合個人使用，在課堂教學上不易呈現及利用。後者雖功能強大但價格昂貴，用在中小學教學，有如「殺雞用牛刀」一般。兩者在網路上，也都有使用上的限制。林保平（民76）曾發展了一個簡單的符號運算程式，但只偏重在符號數值結果的獲得，定位在學生使用於分數及多項式的計算，雖然也可作符號微分及積分，但並未著眼於教師的教室教學及網路上的使用。作者從教具學具的觀點，針對中小學有理數的運算，整數函數或三角函數的求值，設計了一個代數算板（數學算板的一個模組），可作整數、有限小數及分數的四則、乘方、階乘、排列、組合、分解因數等計算，也可作整數函數求值、三角函數（七位近似值）求值的計算。這個算板並可利用前述分數及整數的相關精確運算，進行一元一次及一元二次方程式及不等式的求解、二元及三元一次聯立方程式求解、二次函數的最大及最小值的求值……等。求解時，更能依序呈現解題步驟，也可依使用者的需求，自行出題，可供教師透過電腦投影機，配合數學算板的其他模組（幾何畫板、龜行幾何、機率統計）進行相關的代數教學，本文主旨便是介紹這個程式模組。

圖2 代數算板及按右鍵時呈現的自動出題部分功能表

貳、代數算板的特色

代數算板承續林保平（民76）的構想，使用java語言寫成，是數學算板的一部份，在安裝有昇陽（Sun）公司免費提供的Java Runtime Environment的電腦上可以執行。由數學算板的幾何畫板檔案功能表「開啓命令視窗」，可進入代數算板。在畫面內，按右鍵可呈現功能表供使用者選取（圖2）。代數算板具有下述特色，可以配合教師教室教學的使用

一、精確的有理數多項式計算

代數算板是以無限位數整數(BigInteger或稱大整數)四則運算爲基礎，可作整數的加、減、乘、除、階乘運算（圖3）。分數（有理數）在程式內部是以大整數「數對」表示，可以作有理數的四則及整數乘方運算，計算結果是以約分後的分數形式呈現。輸入的小數數值均會改換成大整數數對，在內部運作。由於運算均依照分數的規則，在作數的計算時，若小數位數定爲0且可作精確運算，計算結果會以分數呈現，此時，結果是完全精確的。若小數位數不是定爲0時，除呈現精確分數結果外，同時依設定的小數位數，以四捨五入之方式，呈現出結果的近似值。牽涉到函數或非整數指數等結果未必爲有理數的函數，程式會內定爲以7位小數呈現，此時不呈現分數，因其並非完全精確之運算。多項式的計算，以分數係數多項式的加減乘爲主，目前暫不作多項式除法的運算，故沒有分式多項式的化簡運算。圖3 展示階乘、有理多項式的精確運算及非有理函數的近似值運算。

$100!;

$= 93326215443944152681699238856266700490715968264381$

$2/3-4/5-6/7;

$= -\frac{104}{105}$ #

$4x-5+2/3x-2/5-2.3;

$= \frac{14}{3}x - \frac{77}{10}$ #

$(2x-y)^5;

$= 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$ #

$sin(2/3π)+sin(π);

$= 0.8660254$ #

$4/3+cot(1/3π);

$= 1.9106836$ #

$cot(1/3π);

$= 0.5773503$ #

$ln(10);

$= 2.3025851$ #

$ln(10)+log(10)-3/4;

$= 2.5525851$ #

圖3 精確及近似值的運算

二、代數式相關運算的推演過程

本程式除上述有理多項式的運算外，也設計了一些佈於有理數系的代數解題運算。這些解題運算均可一步一步地呈現解題的過程，便於教師上課時呈現。由於是一步一步呈現，因此教師可隨時詢問學生下一步的作法，並與學生做充分的溝通及討論。例如一元一次及二次的方程式解法，可透過移項、配方或分解因式等過程，求出方程式的精確解（有些解含有根號）。圖4爲配方法解一元二次方程式及二次不等式的過程。

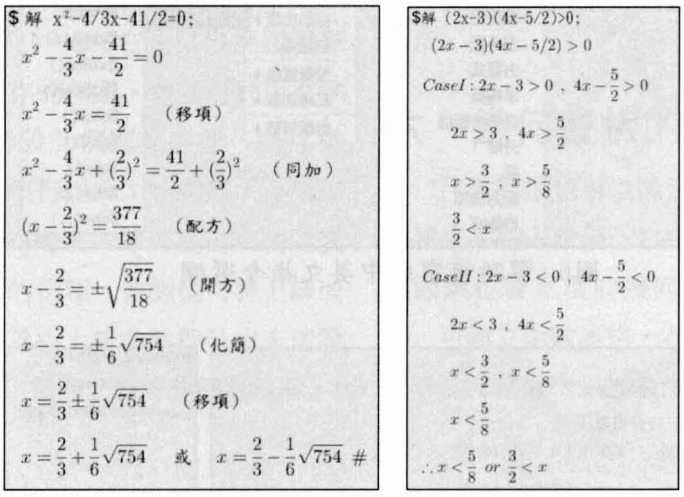

圖4　方程式及不等式的解題過程。輸入第一列題目後，依序按enter鍵呈現下一步，解完停止

圖5爲解聯立二元一次方程式的過程，列出方程式後，可以輸入指令一步一步地解聯立方程式。

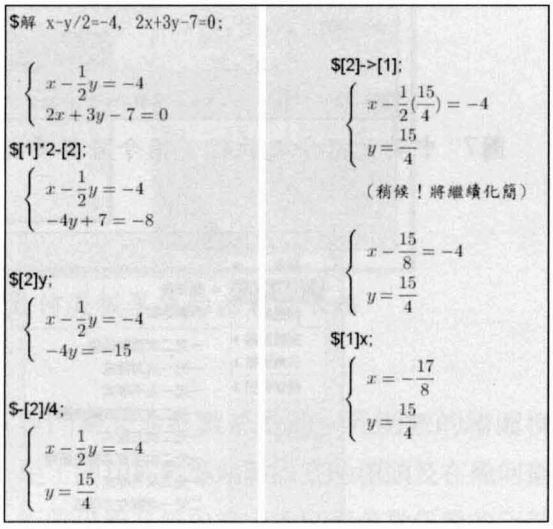

圖5　解二元一次聯立方程式的過程（紅色為解題指令，[1]及[2]分別表示上一聯立方程式的式的第1式及第2式，[2]y表示，將第2式含y的項置於等號左邊，其他項移至右邊並化簡）

三、中英文的指令

解題的指令以中文輸入爲主，也有英文指令，同樣運作。在畫面上按鍵，即可呈現彈跳視窗的功能選項。在前方或後方輸入適當的數值即可執行，如圖6及圖7。

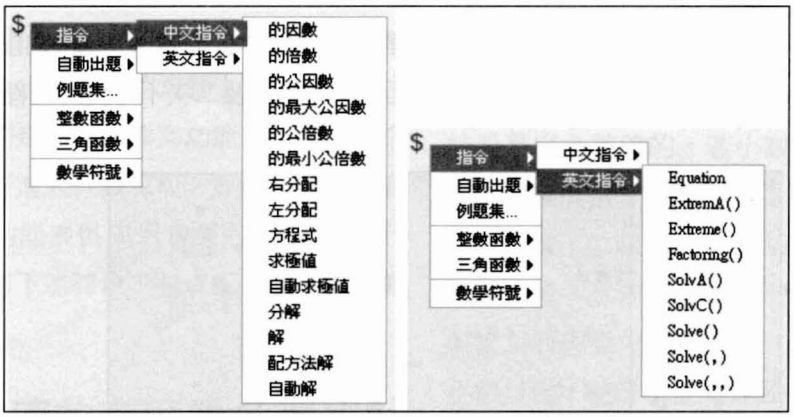

圖6　彈跳視窗的中英文指令選欄

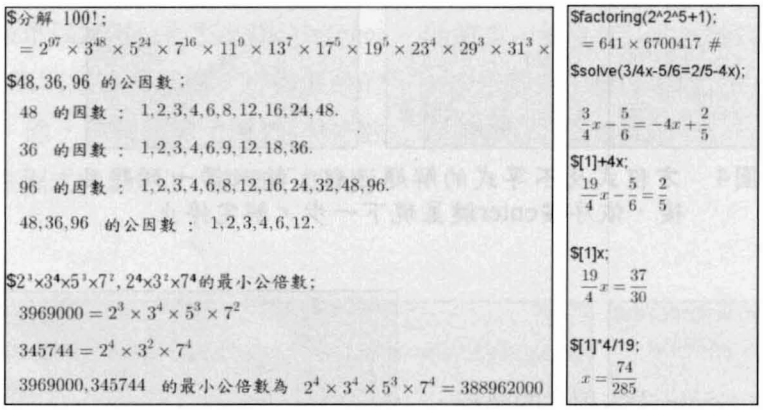

圖7　中英文指令之執行（指令若具多行結果，均透過Enter鍵，分行依序呈現）

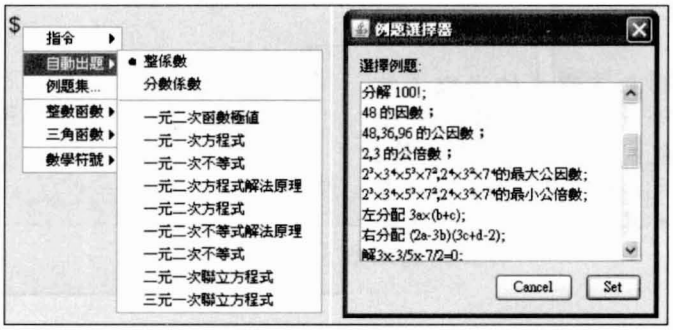

圖8　自動出題選欄及例題選擇器的對話框

四、電腦自動出題或從預存的題目例題檔案中選題

教師使用代數算板教學時，可自行輸入題目作教學，也可根據需要讓電腦自動出題，或從預存的例題檔案中選題。圖8左圖呈現解方程式及求函數極值的自動出題選欄，可先決定使用整數或分數係數，再決定要自動出題的類別。圖8右圖呈現例題選擇器及代數算板預存的例題。教師可利用文字編輯程式，自行設計例題文字檔，依序排列，一行一題，每行以「；」結尾，存爲以mex爲延伸檔名的檔案，即可在檔案功能表中讀入取代原有的例題。教師也可將上課或備課時，在代數算板上成功執行且尚未清除的題目儲存起來，當作上課時的例題使用。

五、配合標準的數學輸出形式

代數算板的輸出目前是使用JLaTexMath API之支援，在程式內部以LaTex格式輸入，再轉成圖像形式輸出，是標準的數學呈現方式，但是使用者輸入時，則以單行形式輸入，如各圖中的分數、方程式等的呈現實例所示。

六、幾何畫板的支援

代數算板也可以設定多元多項式函數，並將文字帶入數值，以求出函數值，所設多項函數也會呈現於幾何畫板。在幾何畫板中，可建立函數表格，在表格中輸入x,y值，表格會自動呈現函數值，如圖9。

圖9　代數算板函數設定及幾何畫板呈現的函數及表格

對於一元函數，代數算板也可以直接輸入函數或點，在幾何畫板畫面的坐標系統中，描出點或函數圖形。我們更設計了一個專門繪製含參數係數的一元函數的繪圖模組，圖10爲動態函數設定的標頭及在幾何畫板的坐標系統中繪出的動態參數係數的函數

圖形。在選擇欄中，可以選擇內定的幾個函數，直接繪圖或自行輸入含a,b,c,d參數及變數x的一元函數。教師可透過改變參數的值（直接鍵入參數值或選一個參數，按左邊上下的箭頭可增減參數的值）來觀察函數圖形，函數圖形會動態地隨著參數值的變化而作動態的變化。表格中，x的值可以直接輸入，程式會自動填入相應的函數值，或按鈕由程式自動填入，圖形可以是點圖或實線圖。

參、結語

本文簡單介紹數學算板中代數算板的基本功能，數學學習數位化的未來趨勢中，數學內容及教學的數位化是個十分重要的課題，代數算板提供了代數教學內容數位化的基本功能，配合同時設計的幾何畫板模組，提供了教師教學數位化及教材數位化的基本工具。

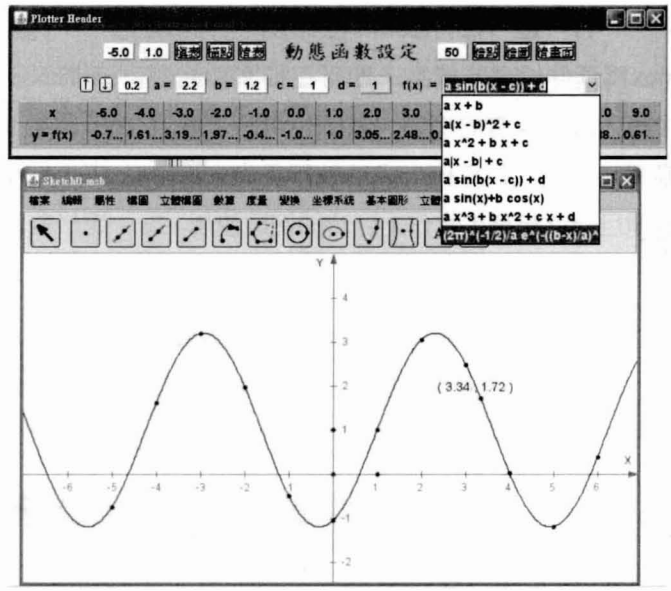

圖10　含參數的正弦函數y=a sin(b(x-c))+d的繪圖，可探討參數與正弦波的波峰、波谷、波長、振幅的關係

參考書目

林保平（民90）。融入教學的數學科電腦輔助教學—以分數的教學爲例。科學教育研究與發展，第22期，pp31-57。

林保平（民89）。教具學具觀點的數學科電腦輔助教學設計實例。科學教育研究與發展，第20期，pp29-46。

林保平 (民76)。 一個簡單符號數學的套裝程式設計。北市師專學報，第18期，pp133-170。

林保平 (民87-97)。動態數學。取自http://www.dynamath.tw。