紀念哥德爾誕辰一百周年！

哥德爾：數學和邏輯領域中的跋涉者

王劍　山東師範大學數學科學學院　講師

武海蓬 山東師範大學數學科學學院

摘　要

哥德爾作為繼亞裏斯多德、萊布尼茨以來最偉大的邏輯學家，從正面或反面部分地解答了 20 世紀初在數學和邏輯領域最根本的問題。他的成果影響和推動影響和推動了數學基礎和數理邏輯近 70 年的發展，同時對電腦科學和科學哲學等眾多學科領域已經產生並將繼續產生深刻的影響。

關鍵字：哥德爾、數學、邏輯

壹、 前言

2002 年美國《時代週刊》上列出了 20 世紀震撼人類思想的四大偉人，他們是愛因斯坦、圖靈、凱恩斯和哥德爾。對於物理學家愛因斯坦、電腦專家圖靈以及經濟學家凱恩斯的工作，一般人都略知一二，但大多數人對作為數學家和邏輯學家的哥德爾的思想就知之甚少。哈佛大學在授予哥德爾榮譽博士學位的時候，稱他為“二十世紀最有意義的數學真理的發現者（指哥德爾不完全性定理，作者注），……，近一個多世紀以來，唯一把真正基本的科學貢獻與異常深奧準確的哲學探討相結合的人”[1]，由此就可以看出他思想成果的重要性。下面我們就追尋哥德爾走過的學術道路，感受他在數學和邏輯學領域所進行的思想跋涉。

通訊作者：王劍 7676dyj@sina.com

貳、 走進數學和邏輯的殿堂

庫爾特.弗雷德里希.哥德爾 (Kurt.Friedrich.Gödel)於 1906 年 4 月生於奧匈帝國的布爾諾。他的才智及其對理論問題的濃厚興趣很早就顯露出來，由於他經常提出問題，家裏人稱他“為什麼先生”。

1924 年哥德爾到維也納大學學習。在維也納大學，哥德爾的興趣和聰明才智得到了充分的施展。他參加了以攻讀 B.羅素的專著《數學的哲學導論》為中心的討論班，這使他得到了良好的數學和邏輯的思維訓練。在 1926—1928 年期間哥德爾還參加了維也納 M.石裏克的哲學討論班，但他並不贊成石裏克的邏輯實證主義，並且很快建立了自己的哲學觀點。在這兩個小組的經歷使得哥德爾養成了從哲學層面思考數學和邏輯問題的習慣，引領他開始走進數學和邏輯的神聖殿堂。哥德爾的老師 H.哈恩對於哥德爾走上數學和邏輯的研究之路也有重要的影響，哈恩的研究興趣主要是集合論、數學基礎、邏輯和科學哲學，這在知識背景方面給了哥德爾直接的影響。

但是，時代背景對於哥德爾確定研究方向、開始數學和邏輯的人生跋涉之旅，起了決定性的作用。20 世紀初，集合論悖論特別是羅素悖論的出現，震動了整個西方數學界和邏輯學界。羅素悖論的通俗形式為理髮師悖論，即一個理髮師宣佈只給自己不給自己理髮的人理髮，問這個理髮師是否給自己理髮？，理髮師是否給自己理髮是個不能判定的問題。它徹底摧毀了人們對於邏輯學是絕對真理的幻想，因為只要對它稍作分析，就會發現只要用邏輯術語來代替集合論術語，羅素悖論就要直接牽涉到邏輯理論本身，從而衝擊了數學和邏輯這兩門一向被認為嚴謹的學科。為了解決集合論悖論給數學基礎帶來的危機，希爾伯特及其學派制定了一個把數學建立在可靠基礎上的方

案，這一方案是要把數學理論進行形式化處理，建立起相應的形式公理系統，並且用有限方法研究形式系統的完全性（由公理出發能得到所有的相關真命題）、相容性（公理集和定理集都無矛盾）和判定性等問題。這些形式公理系統共同的邏輯基礎是一階古典謂詞演算。當時人們已證明了謂詞演算的可靠性(或一致性)，即任意一個邏輯定理在所有的解釋(或賦值)下都是真的(或普遍有效的)。但是，謂詞演算是否具有完全性呢？也就是說，謂詞演算中的普遍有效命題是否都為邏輯定理呢？這是 1920 年前後人們關注的一個重大理論問題，直至 1928 年它仍然沒有獲得解決。這個難題吸引著當時最優秀的數學家和邏輯學家。時代的呼喚使得哥德爾勇敢地選擇了這個難題作為自己的博士論文，從此他也真正開始了自己的數學和邏輯人生。

1929 年夏季， 23 歲的哥德爾肯定地解決了這一問題，證明了謂詞演算的完全性定理：對於謂詞演算的任一命題集合 S 而言， S 是相容的當且僅當 S 有模型。這一結果對於希爾伯特方案是一個有力支持，因為它表明了希爾伯特所依據的邏輯基礎是既可靠又完全的一門獨立數學理論。證明完全性定理的關鍵在於哥德爾敢於突破當時的數學傳統（即元定理只允許使用有限方法給出證明，不允許使用排中律與無限方法），大膽地採用無限方法。對此，哥德爾曾在給王浩的信中說道，“我解決完全性定理在於我的哲學思想先進，不拘泥於有限方法，而並不是我的數學方法比別人高明。”[1]這就啟發我們在數學教育中要鼓勵學生敢於對原有的數學知識和方法做出批判， 從而培養學生的創新精神。由此，哥德爾在 1930 年 2 月獲得了博士學位。

哥德爾完全性定理（Gödel’s completeness theorem）是關於形式系統的整體特徵性定理，它在謂詞演算的語法概念與語義概念之間架起了一座橋樑，

這裏語法概念指形式系統，語義概念指數學模型，也就是說，哥德爾定理在形式系統與數學模型之間架起了一座橋樑。這對於試圖以公理化化方法構建數學基礎的形式主義學派是一個莫大的鼓舞。希爾伯特，形式主義學派的領軍人物，確信他的元數學（證明論）將會成功地確立全部數學的相容性和完全性。1930 年夏天，在柯尼斯堡接受“榮譽市民” 的受禮儀式上，希爾伯特堅定地說出一句話：“我們必須知道，我們必將知道。”[2] 哥德爾的完全性定理似乎表明曙光就要到來。

參、 站在數學和邏輯的頂峰

但就在 1931 年，哥德爾發表的論文卻打開了“潘朵拉的盒子”。在《論〈數學原理〉及有關系統的形式不可判定命題》的論文中提出了兩個驚人的結論：第一不完全性定理（任何包含自然數的形式系統，如果是相容的，則是不完備的）和第二不完全性定理（如果一個包含自然數的公理系統是相容的，那麼這種相容性在該系統內是不能判定的）[3]。這篇論文是哥德爾最重要的學術論文，標誌著他的數學和邏輯人生到達了輝煌的頂峰。第一不完全性定理所指的自然數形式系統也就是皮亞諾算術系統（記為 P），定理的意思就是：如果 P 是相容（無矛盾）的，則存在一個算術的形式命題 A（A 為 P 中一個命題）和 A 的否定（$\neg$A）在 P 中都不能被證明。第二定理是第一定理的一個推論，也就是說一個公理系統的相容性必須在更大的公理系統內才能證明。

哥德爾不完全性定理（Gödel’s incompleteness theorem）是哥德爾在解決懷特海提出的一個邏輯問題時所得出的一個否定性思想成果。集合論悖論出現以後，羅素與懷特海創立了邏輯主義學派，試圖消除集合論悖論。他們的

一個基本思想就是讓原先那個包含悖論的邏輯體系作為更大的邏輯體系的子集合，在新的邏輯體系中就消除了原來的悖論。這樣做的結果，新的邏輯體系又會產生新的悖論，於是懷特海就提出了下面的問題：這樣的邏輯體系一層一層地構造下去，以至於無窮，是否就可消除悖論呢？哥德爾不完全性的定理回答就是使用層層外延法擴張形式邏輯體系並不能清除其總和的悖論！

哥德爾不完全性定理的證明思想和結果都有超乎尋常的重要意義。哥德爾在闡述定理的證明思想時說過："我們可以注意到一個形式系統的公式在形式上都表現為基本符號（變數、邏輯常項、括弧或中斷號）的一個有限序列，從形式的觀點看，所謂證明實際上就是公式的一個有限序列。對於元數學來說，究竟用什麼東西作為基本符號當然是沒有關係的。我們不妨就用自然數作為基本符號，如此，一個公式就是一個自然數的有限序列，而證明便是一個有限的自然數序列的有限序列。據此，元數學的概念（命題）也就變成了關於自然數或他們的序列的基本概念（命題），從而就可以（至少是部分地）在（物件）系統本身的符號中得到表示，特別是人們可以證明'公式'、'證明'、'可證公式'等都可在物件系統中加以定義。"[2]

我們可以看到，哥德爾把精深的哲學思想和精緻的數學方法巧妙結合起來，開創了用數學方法（通過映射和遞迴函數）證明邏輯問題的新時代。對於數理邏輯等領域來說，哥德爾提供了一種數位化的研究方法（映射），能夠方便地把一些物件（如符號和公式）轉換為自然數或自然數的函數，從而用自然數的理論來研究有關問題。

哥德爾不完全性定理是一階邏輯的基本定理，它宣告了形式主義和邏輯主義等學派的失敗，數學知識不可能完全由形式公理化方法得到，一個形式

公理系統要麼不完備，要麼有矛盾，換句話說數學不可能有一勞永逸的邏輯基礎。對此，外爾曾經悲歎地說道：“上帝是存在的，因為數學無疑是相容的；魔鬼也是存在的，因為我們不能證明這種相容性。”[1]

哥德爾第一不完全性定理是最重要的，它有多個不同的版本。比如下面的兩種說法：

“如果一個形式系統足以容納數論且無矛盾，則該系統必定是不完備的。”

“任何一個相容的數學形式化系統中，只要它強到足以定義自然數的概念，就可以構造出在該體系中既不能證明也不能證偽的命題。”

下面我們分析一些對該定理常見的誤解，澄清一些模糊認識，以便加深對整個數學的理解，從而形成正確的數學觀，更好地從事數學教育。

誤解一：“所有的公理系統都是不完備的”，這是最常見的錯誤。歐氏幾何就可以被公理化為一個完整的形式系統。

誤解二：“所有包含自然數的公理系統都是不完備的”，這也是錯誤的。第一不完全定理僅假設公理系統能“定義”自然數，很多包含自然數的系統，例如“實數”和“複數”都有完備的公理化系統。

誤解三：“我們永遠無法證明一個公理系統無矛盾”，這同樣是錯誤的。該定理只表明我們不能從系統的內部證明相容性，但可以通過其他系統和方法給出證明。例如，數論中的皮亞諾公理不能在數論範圍內被證明，但可在集合論系統中被證明。這就啟發我們要引導學生從聯繫的觀點考慮問題，在解決一個領域的數學問題時要善於引入別的領域的概念和方法，善於利用不同數學分支的工具和思想解決問題。

哥德爾不完全性定理是數學和邏輯研究的一個里程碑。

首先，它在人類歷史上第一次分清了真理和可證是兩個不同的概念。從語法上講，A 與┐A 都是不可證的，而從語義上，A 與┐A 必然有一個是真的。對於形式系統而言，“可證性是一個機械的思維過程，而真理性則是一個能動的和無窮的思維過程，二者具有質的不同。”[4] 。

其次，它揭示出任何形式系統都不能把所有的經驗知識都包括無遺，總有一個問題從形式系統的公理出發得不到判定，這深刻地揭示了形式化方法的局限性，把人們對數學真理的認識推向了一個嶄新的層次。但這並不代表公理化方法失效了，更不能得出用“哥德爾不完全性定理”革“公理化體系之命”的謬論！如果哥德爾不完全性定理表明公理化方法失效了，那麼我們如何去相信這本身來自於公理化方法的哥德爾不完全性定理呢？哥德爾不完全性定理也不能成為一些教育極端主義者在數學課程改革中隨意處理數學內容、甚至讓數學變的無形式化和無邏輯化的理論根據。

最後，哥德爾不完全性定理的影響是穿越時空和跨學科的。2002 年北京國際數學家大會，著名物理學家霍金的報告就是《哥德爾與M理論》。霍金認為，建立一個描述宇宙的大統一理論是不可能的，霍金說他的這一推測正是基於數學領域的哥德爾不完全性定理。

哥德爾不完全性定理由於其對數學和邏輯產生的巨大影響而在 20 世紀科學史上留下了濃重的一筆。著名物理學家 J.惠勒評論道：“如果到了西元 5000 年，宇宙仍然存在，而且知識仍然放射出光芒的話，人們就將仍然把哥德爾和科恩的工作（指哥德爾的不完全性定理和科恩的連續統假設相對於集合論公理的獨立性證明）看作是一切知識的中心。”[2]

肆、 開創數學和邏輯研究的黃金時代

由於不完全性定理的重要影響，從 1931 年起，哥德爾與馮.諾伊曼、P.伯奈斯、 E.F.策梅羅和 A.塔斯基等著名數理邏輯學家建立了良好的關係。他們的交流促進了數理邏輯的發展，擴大了這一學科的影響，並使哥德爾開創的方向到現在仍然是這一學科的主要研究領域。哥德爾深刻的思想和超凡的洞察力使他的研究始終面向數學和邏輯領域中的根本問題。

1932 哥德爾發表論文“對於理論邏輯判定問題的一個特別情況”，說明了邏輯判定問題的可解情況。1933 年發表論文“關於謂詞邏輯演算的判定問題”給出了謂詞演算中可判定問題的最重要表達形式。所謂謂詞演算的判定問題就是尋找一個一般的方法，對於任意給定的命題，我們都可以在有限步驟內判定它是否為真。這些結果對於數學形式系統可判定性問題做出了奠基性工作，對數學、邏輯和電腦等學科都產生了重要影響。1935 年哥德爾證明了選擇公理對於通常集合論公理系統的相容性，這對於公理化集合論的研究也是一個新的突破，大大加深了我們對公理關係的理解。1936 年，哥德爾證明了加速度定理（或證明長度定理），即對於類型和強度都逐漸增加的系統：S1，S2，…，Sn，Sn＋1，…，在 Sn 與 Sn+1 中都存在多個命題，它們在系統 Sn 與 Sn+1 中都是可證的，但在 Sn+1 的證明長度要比 Sn 中的長度短得多,這一結果對於電腦科學有著重要影響，將會大大提高電腦的運行速度。1942 年哥德爾做出了“在有窮類型論中選擇公理的獨立性證明”,這同樣對於增加我們對集合公理的理解有重要意義。這段時間，哥德爾還對直覺主義邏輯等領域做出了重要貢獻。1944 年，哥德爾在他的一篇哲學性論文“羅素的數理邏輯”[2]中著重分析了羅素的邏輯思想發展，指出了數理邏輯在實際發展中曾採取的方法，他說“…最重要的簡單類型論和公理化集合論，它們二者至少在這個範

圍內是成功的，即它們允許推導現代數學同時避免一切已知的悖論．但許多跡象只是更加清楚地表明，一些原始的概念尚需進一步闡明”[5]，這是對邏輯主義中肯的評價。

1940 年前後，哥德爾對連續統問題所作的探索是繼不完全性定理以後做出的又一重大貢獻。由康托提出的連續統的基數(勢)到底等於什麼呢？這是一個未解決的重大數學問題，也是希爾伯特提出的指引 20 世紀數學發展的 23 個數學問題中的第一個問題。連續統問題可表述為每個實數集合 R 的無窮子集合，或者與自然數集合對等(存在一一映射，即兩者的基數相等)，或者與全體實數組成的集合對等。對於這一問題，哥德爾所取得的重大成果是（廣義）連續統假設與集合論的通常公理系統(包括選擇公理)是相容的，也就是說連續統假設不假。在證明過程中，哥德爾引進了可構成集合、可構成公理等重要概念，從而開創了集合論研究的新方法和新方向（內模型方法，相當於用歐氏幾何去構造非歐幾何）。在這些結果與方法的基礎上，P.J.科恩在 1963 年創立了力迫方法，證明了廣義連續統假設相對於通常集合論公理是獨立的（即連續統假設不真）。哥德爾和科恩的工作表明連續統假設在目前的集合論公理中是一個不可判定命題，這就是 100 多年以來，人們連續統假設的主要認識。

值得指出的是，早在 1947 年，哥德爾就憑藉超凡的洞察力指出連續統假設可能是一個不可判定命題。在“什麼是康托爾的連續統問題？”這一篇重要的哲學論文中，哥德爾指出：“對於 ZF 公理系統來講，連續統問題的最終解答很可能就是一種不可判定性性，這一結果並不代表問題的解決，只是意味著現行的公理系統沒有包括那個實在的完全描述，可能存在就其證明的結果來說是如此豐富的其他公理，它照亮整個領域並產生這樣強有力的解決問題的

方法，……與大量的蘊涵連續統假設的否定似乎真的命題相反，沒有一個已知的似乎真的命題蘊涵連續統假設，……在新的公理系統中有可能否證連續統假設。”[5]哥德爾 60 多年前的論斷，仍然是當今集合論學者研究的中心課題。哥德爾的這些工作，開創了數學基礎和數理邏輯研究的黃金時代。在他思想的指引下，人們得出了一系列關於數學和邏輯的深刻成果，形成了許多數學和邏輯的分支，大大加深了我們對於數學本質和邏輯的認識。

伍、 從數學和邏輯走向哲學

1943 年以後，哥德爾逐漸把注意力轉向數學哲學、科學哲學乃至一般的哲學問題。當然他仍然密切關注著數學和邏輯的進展，比如 1958 年他研究了有限方法的擴充，1963 年審閱並推薦了 P.J.科恩的論文“連續統假設的獨立性”， 1973 年評述了 A.魯賓遜創立的非標準分析。哥德爾的這些評述對數理邏輯的發展起到了積極的推動作用。

哥德爾把注意力轉向哲學是他進行數學和邏輯跋涉的必然歸宿。因為他在數學和邏輯領域所做的探索都是著眼於根本性的問題。這就要求他必須進行深刻而細緻地哲學思考才能得到問題的解決方案，因此，他的每一個學術成果，都蘊含著豐富而深刻的哲學思想。哲學思考已經成為了哥德爾的一種探索問題的基本態度。事實上，在數學哲學研究領域，哥德爾一般被認為是一個客觀主義者，魯賓遜稱他是當代最傑出的柏拉圖主義者。在到達數學和邏輯的頂峰以後，對自己和別人的成果進行哲學思考、探究其中更本質的原理也就成為哥德爾一個自覺的行動，可以說，對於科學本質的孜孜追求，促使哥德爾必然把精力投向哲學。在哲學中，哥德爾所推崇的 5 種好品格“善取捨、

求準確、棄偏見、慎試驗、有膽魄”，也正是他獻身數學和邏輯研究的真實寫照。

需要強調的是，從表面看來，哥德爾的這種研究轉向是從輝煌到平淡的回歸，其實這是哥德爾為了追尋數學和邏輯乃至一般自然科學和社會科學根本原理的必然選擇，是另一段輝煌的開始。限於篇幅，在這裏不作詳細介紹，筆者願意另行撰文探討。有興趣的讀者可以閱讀《哥德爾文集》，通過該文集，我們必將更加深入地走進哥德爾的精神世界，進一步感悟他在數學和邏輯領域的思想歷程。

綜上所述，哥德爾作為繼亞里斯多德、萊布尼茨以來最偉大的邏輯學家影響將是深遠的，他的工作從正面或反面部分地解答了 20 世紀初在數學基礎方面最根本的問題。他以精闢的哲學思想和精湛的數學方法把數學和邏輯結合起來，使它們從較為分散的研究工作擴大為獨立的學科，並且產生了若干研究分支，影響和推動了數學基礎和數理邏輯近 70 年的發展，同時對電腦科學和科學哲學等眾多學科領域已經產生並將繼續產生深刻的影響。

參考資料

王浩、哥德爾和康宏逵譯（1997）。上海譯文出版社

劉曉力（2000）。邏輯人生—哥德爾。上海譯文出版社。

胡作玄（2000）。20 世紀數學思想。山東教育出版社。

李文林（2002）。數學史概論。高等教育出版社。

《哥德爾文集》第一卷、第二卷、第三卷和第四卷。