# 從高斯五邊形定理出發

呂正基

July 15, 2005

摘 要

眾所皆知，偉大的數學家高斯不僅在數論、代數學及複變分析這些領域創造了許多大定理，其實也做了不少有關數學的“小玩意”，“高斯五邊形定理”就是其中一例。定理的敘述是在說明任何一個凸五邊形的面積與其五個頂三角形面積間存在一個多項式形式的關係，而找出某些特定圖形間的關係式，或否定其關係式的存在就是本篇文章所要探討的內容。

本論文的開頭由“高斯五邊形定理”出發，共分三節。第一節在介紹高斯五邊形定理及其證明，和幾個圖形間的關係式，第二節提出了一個否定多項式關係存在的方法，第三節則是討論在一個 $n$ 邊形（$n \geq 6$）中，其頂三角形的面積是否有多項式形式的關係式存在。

# 1 高斯五邊形定理

本文所出現的函數 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 都是代表以複數爲係數，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 爲變數的多項式。

## 1.1 高斯五邊形定理的證明

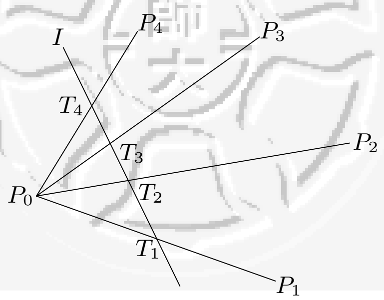
定義 **1.1.1.** 設 $P_0P_1\ldots P_{n-1}$ 爲凸 $n$ 邊形，此 $n$ 邊形的面積以符號 $(P_0P_1\ldots P_{n-1})$ 表示。當整數 $i, j$ 滿足 $i \equiv j \pmod{n}$ 時，將 $P_i$ 與 $P_j$ 視爲同一點，而三角形 $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 稱爲此 $n$ 邊形的頂三角形，面積則以符號 $(i)$ 表示。

我們開始介紹證明高斯五邊形定理的引理。

引理 **1.1.2.**（Monge 公式）在凸五邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4$ 中，有

$$(P_0P_1P_2)(P_0P_3P_4) + (P_0P_2P_3)(P_0P_1P_4) = (P_0P_1P_3)(P_0P_2P_4).$$

〔證明〕 作一直線 $I$，分別截線段 $\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}, \overline{P_0P_3}, \overline{P_0P_4},$ 於 $T_1, T_2, T_3, T_4$。




令 $(P_0T_1T_2) = p, (P_0T_2T_3) = q, (P_0T_3T_4) = r$。因爲

$$pr + q(p + q + r) = (p + q)(q + r),$$

所以式子

$$(P_0T_1T_2)(P_0T_3T_4) + (P_0T_2T_3)(P_0T_1T_4) = (P_0T_1T_3)(P_0T_2T_4) \tag{1}$$

成立。

接下來，當 $1 \le i, j \le 4, i \ne j$ 時，我們有

$$\frac{(P_0P_iP_j)}{(P_0T_iT_j)} = \frac{\overline{P_0P_i} \times \overline{P_0P_j}}{\overline{P_0T_i} \times \overline{P_0T_j}}. \tag{2}$$

令

$$\alpha = \frac{\overline{P_0P_1} \times \overline{P_0P_2} \times \overline{P_0P_3} \times \overline{P_0P_4}}{\overline{P_0T_1} \times \overline{P_0T_2} \times \overline{P_0T_3} \times \overline{P_0T_4}},$$

由 (1)、(2) 兩式，得

$$\begin{aligned}
&(P_0P_1P_2)(P_0P_3P_4) + (P_0P_2P_3)(P_0P_1P_4) - (P_0P_1P_3)(P_0P_2P_4) \\
&\qquad = \alpha\big((P_0T_1T_2)(P_0T_3T_4) + (P_0T_2T_3)(P_0T_1T_4) - (P_0T_1T_3)(P_0T_2T_4)\big) \\
&\qquad = 0,
\end{aligned}$$

得證。 □

在凸五邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4$ 中，令

$$\begin{aligned}
c_1 &= (0) + (1) + (2) + (3) + (4), \\
c_2 &= (0)(1) + (1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + (4)(0).
\end{aligned} \tag{3}$$

有了 Monge 公式和 $c_1, c_2$ 後，我們能很快的得到高斯五邊形定理：

定理 **1.1.3.** （高斯五邊形定理）若凸五邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4$ 的面積為 $A$，則

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0. \tag{4}$$

〔證明〕 將等式

$$\begin{aligned}
(P_0P_1P_2) &= (1), \\
(P_0P_3P_4) &= (4), \\
(P_0P_1P_4) &= (0), \\
(P_0P_2P_3) &= A - (1) - (4), \\
(P_0P_1P_3) &= A - (2) - (4), \\
(P_0P_2P_4) &= A - (1) - (3),
\end{aligned}$$

代入 Monge 公式，得

$$(1)(4) + (0)\big(A - (1) - (4)\big) = \big(A - (2) - (4)\big)\big(A - (1) - (3)\big).$$

整理得到

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

□

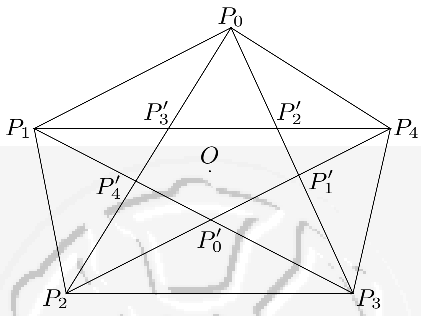
高斯五邊形定理是說，凸五邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4$ 的面積 $A$ 是方程式

$$x^2 - c_1x + c_2 = 0 \tag{5}$$

的一根，那麼方程式的另一根是否也有幾何意義呢？事實上是有的。

如圖所示，在凸五邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4$ 中，令 $A'$ 爲五邊形 $P_0'P_1'P_2'P_3'P_4'$ 的面積。而星形 $P_0P_2P_4P_1P_3$ 的面積 $A''$ 是指十邊形 $P_0P_3'P_1P_4'P_2P_0'P_3P_1'P_4P_2'$ 的面積，也就是

$$A'' = (P_0P_3'P_2') + (P_1P_4'P_3') + (P_2P_0'P_4') + (P_3P_1'P_0') + (P_4P_2'P_1') + A'.$$




性質 **1.1.4.** 方程式 $x^2 - c_1x + c_2 = 0$ 的兩根爲 $A$ 與 $A - (A' + A'')$。

〔證明〕 在五邊形 $P_0'P_1'P_2'P_3'P_4'$ 的內部任取一點 $O$，令 $(OP_iP_j) = t_{ij}, 0 \le i, j \le 4$，我們有

$$A = t_{01} + t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{40},$$
$$A' + A'' = t_{02} + t_{24} + t_{41} + t_{13} + t_{30},$$

及

$$(i) = t_{i-1\ \ i} + t_{i\ \ i+1} - t_{i-1\ \ i+1}, \quad 0 \le i \le 4.$$

從上列三個式子可以得到

$$c_1 = \sum_{i=0}^{4} (i) = 2A - (A' + A'').$$

由高斯五邊形定理知道 $A$ 是方程式的一根，再從根與係數的關係，就能得知另一根爲 $A - (A' + A'')$。 □

## 1.2 高斯五邊形定理的推論及多項式關係

由式 (3) 和式 (4) 知道，在一個凸五邊形中，其頂三角形面積 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ （依逆時針排序）與凸五邊形面積 $A$ 之間有一個多項式形式的關係式，也就是對任意的一組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, A)$，都一定是多項式方程式

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x) = x^2-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)x+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1) = 0$$

的解。像這樣子存在一個固定的非零多項式，使得當五邊形在變動時所得到的任何一組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, A)$ 代入多項式後，會使得多項式恆等於零，我們就稱 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, A)$ 之間有多項式關係，求出圖形面積之間的多項式關係就是本節的重點。以下我們將提出由定理 1.1.3 和性質 1.1.4 所推導出來的兩個性質。

性質 **1.2.1.** 在面積爲 $A$ 的凸五邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4$ 中，若定義符號 $C_1, C_2$ 爲

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{i=0}^{4} (P_iP_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}), \\ C_2 &= \sum_{i=0}^{4} (P_iP_{i+1}P_{i+2}P_{i+3})(P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}), \end{aligned}$$

則 $(A, C_1, C_2)$ 有多項式關係。

〔證明〕 首先，由

$$(P_iP_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}) = A - (P_{i+3}P_{i+4}P_i), \quad 0 \le i \le 4,$$

及式 (3)，得

$$\begin{aligned} C_1 &= 5A - c_1, \\ C_2 &= 5A^2 - 2c_1A + c_2. \end{aligned}$$

由上式及定理 1.1.3，得

$$A^2 - C_1A + C_2 = A^2 - (5A - c_1)A + (5A^2 - 2c_1A + c_2) = 0.$$

得證。 □

**性質 1.2.2.** 面積爲 $A$ 的凸五邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4$ 中，$(A'+A'', c_1, c_2)$ 有多項式關係。

〔證明〕 從性質 1.1.4 知

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 2A - (A'+A''),\\
c_2 &= A\big(A - (A'+A'')\big).
\end{aligned}
$$

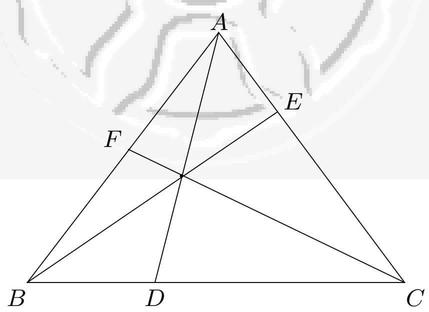
所以

$$(A'+A'')^2 - c_1^2 + 4c_2 = (A'+A'')^2 - \big(2A-(A'+A'')\big)^2 + 4A\big(A-(A'+A'')\big) = 0,$$

得證。 $\square$

從以上的幾個性質，我們知道了凸五邊形內部的某些圖形面積之間有多項式關係，那麼五個頂三角形的面積之間會不會也有這樣的關係呢？答案是否定的，這個證明將放在下一節介紹。在本節結束前，我們再來看兩個例子：

**例題 1.2.3.** 設三角形 $ABC$ 的面積爲 $a$，分別在 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上取三點 $F, D, E$，使得 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 三線共點。若三角形 $ABE$ 的面積爲 $b$，三角形 $BCF$ 的面積爲 $c$，三角形 $CAD$ 的面積爲 $d$，則 $(a,b,c,d)$ 有多項式關係。




〔證明〕 令

$$\overline{AF} : \overline{FB} = 1 : s, \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : t.$$

利用西瓦定理，得

$$\overline{CE} : \overline{EA} = st : 1,$$

因此

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1+st}, \frac{c}{a} = \frac{s}{1+s}, \frac{d}{a} = \frac{t}{1+t}.$$

將

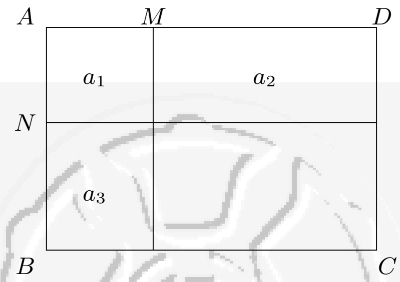
$$s=\frac{c}{c-a},t=\frac{d}{d-a}$$

代入上式的第一個式子，得

$$a^3-(b+c+d)a^2+(bc+cd+db)a-2bcd=0,$$

得證。 $\square$

例題 **1.2.4.** 如圖所示，面積爲 $a$ 的矩形 $ABCD$ 被分割成四塊小矩形。若 $a_1,a_2,a_3$ 爲所在的小矩形面積，則 $(a,a_1,a_2,a_3)$ 有多項式關係。




〔證明〕 令 $\overline{MD}=s,\overline{NB}=t$，得

$$a_1(a-a_1)=a_1(a_2+a_3+st)=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3,$$

得證。 $\square$

一群幾何圖形的面積之間有可能不存在多項式關係；有可能是之間沒有任何關係，或是關係式的形式不是多項式的。例如從餘弦定理我們知道，三個邊長與任意一個角的關係式就不是多項式的形式。

## 2 五邊形的頂三角形及三角形的優序對問題

### 2.1 五邊形頂三角形的關係式

由代數基本定理及數學歸納法可得到以下的引理：

引理 **2.1.1.** 設 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 都是複數的無窮子集合，且 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ 是以 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ 爲變數的多項式。若對每個 $t_i \in C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$，方程式

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n, y) = 0$$

皆有無限多個根，則 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ 必爲零多項式。

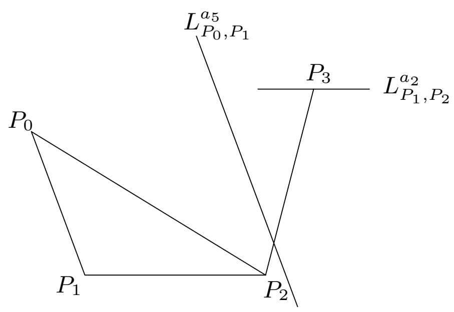
我們將要利用引理 2.1.1 來解決在第一節中所遺留下的一個問題：證明凸五邊形中的五個頂三角形面積之間沒有多項式關係。爲了証明中敘述的方便，我們先來定義一個符號。

定義 **2.1.2.** 在平面上給定 $P, Q$ 兩點及一正實數 $a$，所有滿足 $(PQR) = a$ 的點 $R$ 所形成的兩條直線以 $L^a_{P,Q}$ 表示；在有指明的情形下，可用 $L^a_{P,Q}$ 代表其中一條直線。

性質 **2.1.3.** 若 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 是凸五邊形的五個頂三角形面積，則 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 沒有多項式關係。

〔證明〕 給定滿足 $a_1 < a_2 < a_3 < a_5$ 的四個正數 $a_1, a_2, a_3, a_5$。

如圖所示，作一面積爲 $a_1$ 的三角形 $P_0P_1P_2$ 和直線 $P_1P_2$ 上方的 $L^{a_2}_{P_1,P_2}$。設 $P_3$ 爲 $L^{a_2}_{P_1,P_2}$ 上滿足 $\angle P_0P_1P_2 + \angle P_3P_2P_1 > \pi$ 的動點；在直線 $P_2P_3$ 的左側作 $L^{a_3}_{P_2,P_3}$。作直線 $P_0P_1$ 右方的 $L^{a_5}_{P_0,P_1}$，因爲 $a_5 > a_1 = (P_0P_1P_2)$，所以 $L^{a_5}_{P_0,P_1}$ 上的任一點到直線 $P_0P_1$ 的距離會大於 $P_2$ 到直線 $P_0P_1$ 的距離，因此 $P_1, P_2$ 會在 $L^{a_5}_{P_0,P_1}$ 的同側。



令 $L^{a_5}_{P_1,P_0}, L^{a_3}_{P_2,P_3}$ 的交點爲 $P_4$，$P_4$ 到直線 $P_1P_2$ 的距離爲 $h$。因爲 $P_4$ 在直線 $P_1P_0$ 的右方，$P_4$ 在直線 $P_2P_3$ 的左方；而且當 $P_3$ 在 $L^{a_2}_{P_1,P_2}$ 上往左方移動時， $L^{a_5}_{P_1,P_0}$ 與 $L^{a_3}_{P_2,P_3}$ 會接近平行，得 $h$ 的值會不斷變大，所以五邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4$ 會形成凸五邊形。由以上推論知，頂三角形 $P_0P_3P_4$ 的面積沒有上界，因此 $(P_0P_3P_4)$ 的取值有無限多個。

若存在多項式 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$，使得對任意的一組頂三角形 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$，$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ 皆等於零，則由以上的推論知，當 $a_1 < a_2 < a_3 < a_5$ 時，以 $x_4$ 爲變數的方程式 $f(a_1,a_2,a_3,x_4,a_5) = 0$ 有無限多個根。利用引理 2.1.1，得 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ 爲零多項式。 □

### 2.2 優序對問題

引理 **2.2.1.** 若 $0 < t_1,t_2,t_3 \le \frac{1}{4}$，則聯立方程式

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_1+1} \times \frac{1}{x_2+1} = t_1 \\ \frac{x_2}{x_2+1} \times \frac{1}{x_3+1} = t_2 \\ \frac{x_3}{x_3+1} \times \frac{1}{x_1+1} = t_3 \end{cases} \tag{6}$$

有正實數解 $x_1,x_2,x_3$。

〔證明〕 考慮方程式

$$(t_3 - t_1t_3)x^2 + (t_1+t_2+t_3-2t_1t_3-1)x - t_1t_3 + t_1 = 0. \tag{7}$$

由 $0 < t_1,t_2,t_3 \le \frac{1}{4}$ 推得判別式

$$\begin{aligned} D &= (t_1+t_2+t_3-2t_1t_3-1)^2 - 4t_3(1-t_1)(-t_1t_3+t_1) \\ &= (t_1+t_2+t_3-1)^2 - 4t_1t_2t_3 \ge 0, \end{aligned}$$

所以方程式 (7) 有二實根。

從根與係數的關係知二實根的和爲

$$-\frac{t_1+t_2+t_3-2t_1t_3-1}{t_3(1-t_1)},$$

再由 $0 < t_1,t_2,t_3 \le \frac{1}{4}$ 可知上式大於 1，因此方程式 (7) 有一根大於 $\frac{1}{2}$，不妨令爲 $x_1$。

令

$$x_2 = \frac{x_1}{t_1(x_1+1)} - 1.$$

因爲 $x_1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$，所以 $\frac{x_1}{x_1+1} > \frac{1}{4}$。由 $0 < t_1 \le \frac{1}{4}$ 得 $x_2 = \frac{x_1}{t_1(x_1+1)} - 1 > 0$。

接著，我們令

$$x_3 = \frac{x_2}{t_2(x_2+1)} - 1.$$

由 $(1-t_1-t_2)x_1 > \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ge t_2$ 知 $(1-t_1)x_1 + t_1 > t_2 x_1$，所以由 $x_2$ 的定義得

$$\frac{x_2}{x_2+1} = \frac{(1-t_1)x_1 + t_1}{x_1} > t_2,$$

因此 $x_3 = \frac{x_2}{t_2(x_2+1)} - 1 > 0$。

最後，我們只需要證明

$$\frac{x_3}{x_3+1} \times \frac{1}{x_1+1} = t_3,$$

那麼 $x_1, x_2, x_3$ 就符合了聯立方程式 (6)。

根據 $x_2, x_3$ 的定義，得

$$\frac{x_3}{x_3+1} \times \frac{1}{x_1+1} = \frac{(1-t_2)x_2 - t_2}{x_2} \times \frac{1}{x_1+1} = \frac{(1-t_1-t_2)x_1 - t_1}{(1-t_1)x_1^2 + (1-2t_1)x_1 - t_1}.$$

因爲 $x_1$ 是二次方程式

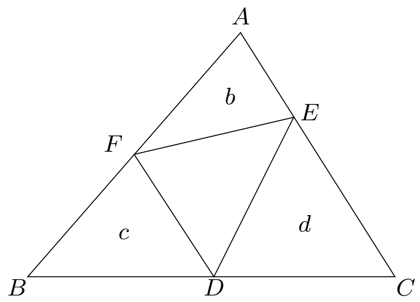
$$(t_3 - t_1t_3)x^2 + (t_1 + t_2 + t_3 - 2t_1t_3 - 1)x - t_1t_3 + t_1 = 0$$

的一根，所以移項得到

$$(1-t_1-t_2)x_1 - t_1 = t_3\big((1-t_1)x_1^2 + (1-2t_1)x_1 - t_1\big),$$

因此 $\frac{x_3}{x_3+1} \times \frac{1}{x_1+1} = t_3$。 □

定義 **2.2.2.** 給定四正數 $a, b, c, d$。如圖所示，如果存在一個面積爲 $a$ 的三角形 $ABC$，及 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上三點 $F, D, E$，使得 $(AFE) = b, (FBD) = c, (EDC) = d$，那麼我們稱 $(a, b, c, d)$ 爲優序對。



定理 **2.2.3.** 若 $a, b, c, d$ 爲四正數，且 $a \geq 4max\{b, c, d\}$，則 $(a, b, c, d)$ 爲優序對。

〔證明〕 作一個面積爲 $a$ 的三角形 $ABC$。令

$$t_1 = \frac{b}{a}, t_2 = \frac{c}{a}, t_3 = \frac{d}{a},$$

得 $0 < t_1, t_2, t_3 \leq 1/4$。由引理 2.2.1 知，聯立方程式

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_1+1} \times \frac{1}{x_2+1} = t_1 \\ \frac{x_2}{x_2+1} \times \frac{1}{x_3+1} = t_2 \\ \frac{x_3}{x_3+1} \times \frac{1}{x_1+1} = t_3 \end{cases}$$

有三正實數解 $x_1, x_2, x_3$。

在 $\overline{AB}$ 上取一點 $F$，使得 $\overline{AF} : \overline{FB} = 1 : x_1$；在 $\overline{BC}$ 上取一點 $D$，使得 $\overline{BD} : \overline{DC} = 1 : x_2$；在 $\overline{CA}$ 上取一點 $E$，使得 $\overline{CE} : \overline{EA} = 1 : x_3$。所以

$$\frac{(FBD)}{(ABC)} = \frac{x_1}{x_1+1} \times \frac{1}{x_2+1} = t_1 = \frac{b}{a},$$

得 $(FBD) = b$。同理 $(AFE) = c, (EDC) = d$，故 $(a, b, c, d)$ 爲優序對。 □

定理 **2.2.4.** 優序對 $(a, b, c, d)$ 不存在多項式關係。

〔證明〕 假設多項式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 使得任意的優序對 $(a, b, c, d)$，$f(a, b, c, d)$ 皆爲零。由定理 2.2.3 知，當四正數 $a, b, c, d$ 滿足 $a \geq 4max\{b, c, d\}$ 時，$(a, b, c, d)$ 爲優序對，因此對任意的正整數 $b, c, d$，$f(x_1, b, c, d)$ 有無限多個根。

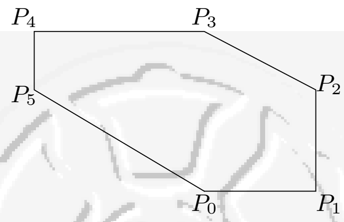
由引理 2.1.1，得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 爲零多項式。 □

# 3 幾何圖形的關係式問題

## 3.1 六邊形上的多項式關係

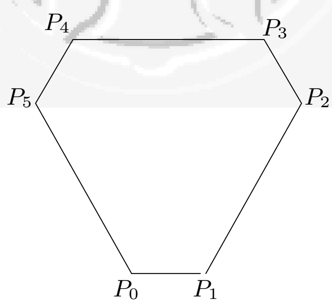
高斯五邊形定理告訴我們，任何一個凸五邊形的面積與其頂三角形面積有多項式關係，那麼凸六邊形與頂三角形之間會不會也有這樣的性質呢？其實在頂三角形面積都相等的情況下，頂三角形面積與凸六邊形面積是不存在多項式關係的。

設 $x$ 爲任意的正數，作一個六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$，其中 $P_0 = (0,0), P_1 = (1,0), P_2 = (1,1), P_3 = (0,1+x), P_4 = (-\frac{1}{x}, 1+x), P_5 = (-\frac{1}{x}, 1)$。因爲每個頂三角形的面積都是 $\frac{1}{2}$，凸六邊形面積爲 $\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + 2$，利用引理 2.1.1 就可以知道多項式關係不存在。




即使凸六邊形被限制爲圓內接六邊形，多項式關係一樣不存在：

定理 **3.1.1.** 當圓內接凸六邊形的六個頂三角形面積相等時，凸六邊形面積與頂三角形面積沒有多項式關係。




〔證明〕 首先，我們證明若六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ 滿足

$$\overline{P_0P_1} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_4P_5},$$
$$\overline{P_5P_0} = \overline{P_1P_2},$$

及

$$\angle P_4P_5P_0 = \angle P_5P_0P_1 = \angle P_0P_1P_2 = \angle P_1P_2P_3 = \frac{2\pi}{3},$$

則六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ 爲頂三角形面積都相等的圓內接凸六邊形。

因爲 $\overline{P_0P_1}=\overline{P_4P_5}$，$\angle P_4P_5P_0=\angle P_5P_0P_1$，所以四邊形 $P_4P_5P_0P_1$ 爲等腰梯形，因此 $P_4,P_5,P_0,P_1$ 四點共圓；同理 $P_5,P_0,P_1,P_2$ 四點與 $P_0,P_1,P_2,P_3$ 四點皆共圓。六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ 爲圓內接六邊形。

從圖形的對稱性知，若 $\overline{P_2P_3}$ 與 $\overline{P_4P_5}$ 不相交，則 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ 即爲凸六邊形。

從 $\angle P_5P_0P_1=\angle P_0P_1P_2=\frac{2\pi}{3}$ 及 $P_4P_5P_0P_1$ 爲等腰梯形，知 $\angle P_4P_1P_2=\frac{\pi}{3}$。因此 $\overline{P_1P_4}$ 平行 $\overline{P_2P_3}$，得 $\overline{P_2P_3}$ 與 $\overline{P_4P_5}$ 不相交，故 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ 爲凸六邊形。由 $\overline{P_1P_4}$ 平行 $\overline{P_2P_3}$ 知四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 爲等腰梯形，可得

$$\overline{P_0P_1}=\overline{P_2P_3}=\overline{P_4P_5},$$
$$\overline{P_5P_0}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_3P_4},$$

及六個內角相等，因此六個頂三角形面積都相等。

設 $x$ 爲任意的正數，令

$$\overline{P_0P_1}=x,\overline{P_1P_2}=\frac{1}{x},$$

得頂三角形面積皆等於 $\frac{\sqrt{3}}{4}$。設 $\overline{P_0P_3}$ 與 $\overline{P_1P_4}$ 的交點爲 $P$，可得三角形 $P_0P_1P$ 爲正三角形。因爲三角形 $P_0P_1P$ 的面積等於 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$，所以凸六邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ 的面積沒有上界，因此凸六邊形面積的取值有無限多個。由引理 2.1.1 可知多項式關係不存在。

□

### 3.2 頂三角形面積的關係式

在前一節我們証明了，凸五邊形的頂三角形間並不存在多項式關係，事實上對 $n\geq 6$ 的凸 $n$ 邊形來說，其頂三角形間也沒有多項式關係。

引理 **3.2.1.** 令 $n$ 爲大於 3 的整數。給定滿足 $a_1>a_2>\cdots>a_{n-2}$ 的 $n-2$ 個正數 $a_1,a_2,\ldots,a_{n-2}$，那麼存在一凸 $n$ 邊形 $P_0P_1\ldots P_{n-1}$ 滿足以下條件

$$\begin{aligned}(P_{i-1}P_iP_{i+1})&=a_i,\quad i=1,\ldots,n-2,\\ \angle P_{n-1}P_0P_1+\angle P_{n-2}P_{n-1}P_0&<\pi.\end{aligned}\tag{8}$$

〔證明〕 作一適當大的圓，使得圓上 $2n$ 個等分點 $A_0,A_1,\ldots,A_{2n-1}$ 滿足 $(A_0A_1A_2)=a_1$。令 $P_0=A_0,P_1=A_1,P_2=A_2$。由 $a_1>a_2$，知直線 $L^{a_2}_{P_1,P_2}$ 會與劣弧 $P_2A_3$ 交於

一點，令此點爲 $P_3$。同理，由 $a_2 > a_3 > \cdots > a_{n-2}$ 知，可依序在劣弧 $P_iA_{i+1}$ 上取 $P_{i+1}$，使得 $(P_{i-1}P_iP_{i+1}) = a_i, i = 3, 4, \ldots, n-2$。

由上知，弧 $P_0P_1 \ldots P_{n-1}$ 的弧長小於弧 $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ 的弧長，所以點 $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ 會落在半圓上，得 $\angle P_{n-1}P_0P_1 + \angle P_{n-2}P_{n-1}P_0 < \pi$。

故凸 $n$ 邊形 $P_0P_1 \ldots P_{n-1}$ 即爲所求。

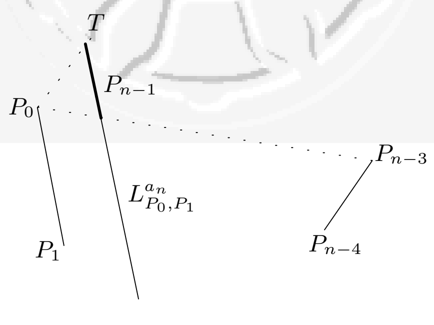
$\square$

**定理 3.2.2.** 令 $n$ 爲大於 5 的整數。若 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 分別爲凸 $n$ 邊形的 $n$ 個頂三角形面積，則 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 沒有多項式關係。

〔證明〕 給定滿足 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-3} > a_n > a_{n-1}$ 的 $n-1$ 個正數 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, a_{n-1}, a_n$。由引理 3.2.1 知存在一凸 $n-2$ 邊形 $P_0P_1 \ldots P_{n-3}$ 滿足

$$\begin{aligned} &(P_{i-1}P_iP_{i+1}) = a_i, \quad i = 1, \ldots, n-4, \\ &\angle P_{n-3}P_0P_1 + \angle P_{n-4}P_{n-3}P_0 < \pi. \end{aligned}$$

因爲 $n$ 大於 5，所以 $P_0, P_1, \ldots, P_{n-3}$ 至少有四個相異點 $P_0, P_1, P_{n-4}, P_{n-3}$。如圖所示，過 $P_0$ 作與 $\overline{P_{n-3}P_{n-4}}$ 平行的直線 $P_0T$，設 $P_{n-1}$ 爲直線 $L^{a_n}_{P_0,P_1}$ 上介於直線 $P_0T$ 和 $\overline{P_0P_{n-3}}$ 之間的動點。




作直線 $P_0P_{n-1}$ 下方的 $L^{a_{n-1}}_{P_0,P_{n-1}}$。因爲 $(P_0P_1P_{n-1}) = a_n > a_{n-1}$，所以 $P_1$ 到直線 $P_0P_{n-1}$ 的距離會大於 $L^{a_{n-1}}_{P_0,P_{n-1}}$ 上任一點到直線 $P_0P_{n-1}$ 的距離，因此 $P_0, P_1$ 會在 $L^{a_{n-1}}_{P_0,P_{n-1}}$ 的異側。作直線 $P_{n-3}P_{n-4}$ 左方的 $L^{a_{n-3}}_{P_{n-3},P_{n-4}}$，由 $a_{n-4} > a_{n-3}$ 和 $P_0P_1 \ldots P_{n-3}$ 是凸多邊形知， $P_1, P_{n-3}$ 會在 $L^{a_{n-3}}_{P_{n-3},P_{n-4}}$ 的兩側。

令 $P_{n-2}$ 爲 $L^{a_{n-1}}_{P_0,P_{n-1}}$ 與 $L^{a_{n-3}}_{P_{n-3},P_{n-4}}$ 的交點， $h$ 爲 $P_{n-2}$ 到直線 $P_0P_{n-3}$ 的距離。因爲 $P_{n-2}$ 在直線 $P_0P_{n-1}$ 的右方，$P_{n-2}$ 在直線 $P_{n-4}P_{n-3}$ 的左方；而且當 $P_{n-1}$ 往線段上方移動時， $L^{a_{n-1}}_{P_0,P_{n-1}}$ 與 $L^{a_{n-3}}_{P_{n-3},P_{n-4}}$ 會接近平行，得 $h$ 的值最後會不斷變大，所以

$n$ 邊形 $P_0P_1\ldots P_{n-2}P_{n-1}$ 會形成凸 $n$ 邊形。由以上推論可知三角形 $P_{n-3}P_{n-2}P_{n-1}$ 的面積沒有上界，所以 $(P_{n-3}P_{n-2}P_{n-1})$ 的取值有無限多個。

利用引理 2.1.1，得 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 沒有多項式關係。 $\square$

## 參 考 文 獻


[1] 許志農，算術講義，第 19 講。

[2] Dragutin Svrtan, Darko Veljan, Vladimir Volenec, Geometry of pentagons: from Gauss to Robbins, *arXiv* : *math. MG*/0403503 (2004), 1 - 10.

[3] G. Hasel, J. M. Rabin, Polygons Whose Vertex Triangles Have Equal Area, *Amer. Math. Monthly*, **110** (2003), 606 - 616.

[4] D. P. Robbins, Areas of polygons inscribed in a circle, *Amer. Math. Monthly*, **102** (1995), 523 - 530.