

第五章 動畫、實物、語意三種媒介工具之研究結果與討論

本章的實驗發現主要回應研究問題 1：個體對於動畫觀察、實物操作、語意描述的三種不同媒介工具的形式，其建構心臟線參數式的歷程中，心像的建構及連結符號表徵的情形。

研究者分為四個部分探討受測者心像的建構及連結符號表徵的情形。第一部分在探討受測者心像表徵型式及操作方式；第二部分在探討受測者對於動點軌跡的心像呈現型式；第三部分在探討受測者構圖時，對於圖形結構與符號的參照關係；第四部分在探討受測者推理時，對於圖形結構與符號的變換關係。研究者依據受測者在問卷上所回應的資料作分析。

第一節為橫向分析研究發現，針對受測者心像表徵型式及操作方式、點軌跡的心像呈現型式、圖形結構與符號的參照、圖形結構與符號的變換等四個部分，作三組受測者的心像建構及連結符號表徵情形的橫向的比較分析。第二節為縱向分析研究發現，主要針對三組中，具有不同參數式型式的受測者，依其心像表徵型式、點軌跡的心像呈現型式、圖形結構與符號的參照、圖形結構與符號的變換等四部分的序列發展情形，作縱向的比較分析。第三節針對橫向分析研究發現及縱向分析研究發現作結果的分析與討論。

第一節 橫向分析之研究發現

研究者想觀察每一位受測者心像建構與連結符號表徵的情形，所以研究者先將受測者編碼，動畫組受測者以 D 為代碼，實物組受測者以 P 為代碼，語意組受測者以 V 為代碼。而內部性質的編碼，是研究者與兩位研究生及一位專家共同編製並一起討論受測者所屬編碼。

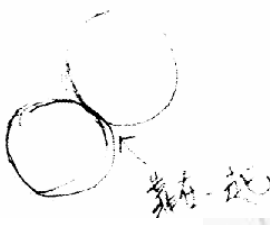
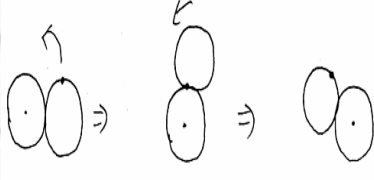
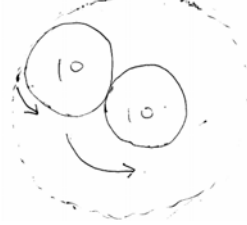
一、受測者的心像表徵型式及操作方式

(1) 心像表徵型式

研究者依據皮亞傑所提出的三種抽象化類型：經驗抽象、擬經驗抽象

、反思抽象，分類受測者在一開始的初始心像表徵型式。研究者將受測者心像表徵型式為靜態圖形者視為受測者透過經驗抽象作思考，心像表徵型式為圖形操作者視為受測者透過擬經驗抽象作思考，心像表徵型式為軌跡圖形者視為受測者透過反思抽象作思考。研究者將受測者所呈現的圖形或文字做編碼，但不考慮圖形或文字的正確性，先大方向把靜態圖形編為 1，圖形操作編為 2，圖形軌跡編為 3，無圖形編為 0；再依圖形或文字的細部性質做分類：滾動銅板的外圍軌跡編為(a)，滾動銅板的圓心軌跡編為(b)，兩銅板的接觸點軌跡編為(c)，長擺線軌跡編為(d)，以文字語意表達編為(v)，觀察圖形性質和關係編為(p)。以表 5-1 做編碼的介紹。

表 5-1：心像表徵型式編碼表

圖形型式			
圖形性質	靜態圖形	圖形操作	軌跡圖形
編碼代號	1	2	3
細部編碼	(a)：滾動銅板的外圍軌跡。(b)：滾動銅板的圓心軌跡。(c)：兩銅板的接觸點軌跡。(d)：長擺線軌跡。(v)：以文字語意表達。(p)：觀察圖形性質和關係。		

依據表 5-1，研究者將動畫組、實物組、語意組中，受測者的心像表徵型式做編碼，並以表 5-2 呈現動畫組、實物組、語意組中，每一位受測者的心像表徵情形，方便之後的分析與探討。

表 5-2：第一個實驗活動之心像表徵型式編碼分佈表

動畫組	心像表徵	實物組	心像表徵	語意組	心像表徵
D1	2	P1	1	V1	2(p)
D2	2	P2	2	V2	2
D3	2	P3	1	V3	2
D4	2	P4	2(V)	V4	2
D5	2+3(a)	P5	2	V5	2
D6	2	P6	2	V6	2(p)
D7	2+3(b)	P7	2	V7	2
D8	2+3(b)	P8	2	V8	2
D9	3(c)	P9	2	V9	2
D10	2+3(b)	P10	2	V10	2
D11	3(v)	P11	2	V11	3(a)
D12	3(c)	P12	2	V12	2
D13	1	P13	3(a)(b)	V13	2
D14	1	P14	2+3(b)	V14	2+3(a)(b)
D15	0	P15	3(c)	V15	2
D16	2(v)	P16	2		
D17	2(v)	P17	2		
D18	2(v)	P18	2		
D19	2(v)	P19	2		
D20	3(c)	P20	2+3(a)		

由表 5-2，先不論細部性質，以圖形的性質為主，可以統計出。動畫組：0 佔 5%、1 佔 10%、2 佔 65%、3 佔 40%；實物組：0 佔 0%、1 佔 10%、2 佔 80%、3 佔 20%；語意組：0 佔 5%、1 佔 0%、2 佔 93%、3 佔 13%。根據統計數據，可以圖 5-1 表示各組心像表徵型式的分佈的情形。

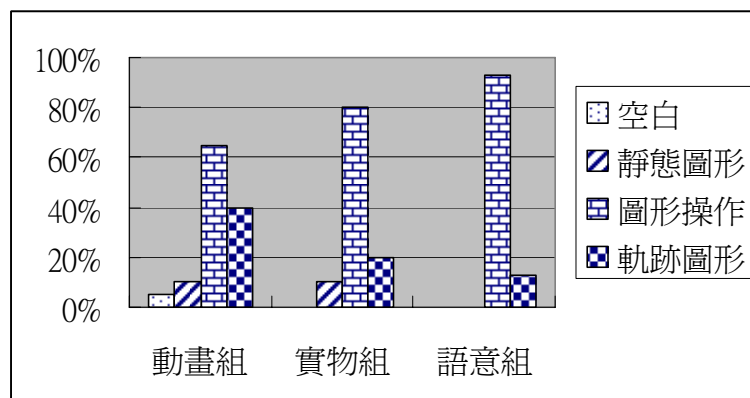


圖 5-1：第一個實驗活動之心像表徵型式分佈圖

動畫組的受測者之心像表徵型式以圖形操作及軌跡圖形為主。實物組及語意組的受測者之心像表徵型式以圖形操作為主。

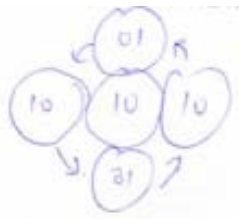

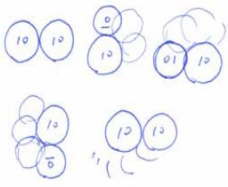

從圖 5-1 的觀察中，三組受測者的心像表徵型式都以圖形操作佔整體的比例最高。在實物組與語意組中，軌跡圖形在整體所佔的比例上，兩組差異不大；動畫組中，軌跡圖形在整體所佔的比例上就明顯高於其它兩組。顯示出動畫組比其它兩組容易注意到圖形的軌跡，而實物組與語意組則比較傾向操弄圖形，顯示出實物的操作與透過語意思考都容易讓受測者在心像中操弄圖形。研究猜測可能的原因在於，動畫組可以看到完整的滾動過程，而實物組及語意組只能自己摸索兩銅板滾動的情形，所以動畫組比較容易注意到圖形的軌跡，或是在操弄圖形後也注意到圖形的軌跡如 D5、D7、D8、D10 等幾位受測者。

動畫組與實物組都有部分受測者只注意到靜態圖形如 D13、D14、P1、P3，但語意組則沒有受測者注意到靜態圖形。顯示出動畫組與實物組的受測者在觀察銅板滾動時，可能會受到物件性質的影響，而只注意到銅板的外型，而語意組的受測者可能因為沒有參考物可以觀察，促使語意組的受測者，其心像表徵型式傾向操弄圖形。

(2) 受測者心像的操作方式

問卷第一部分的問題：「滾動的銅板繞固定銅板一圈時，本身自轉幾圈」。研究者以題目做目標導向的方式，迫使受測者操弄其心像來擬定解題策略以回應問卷上的問題。受測者解題時所依據的，通常分為觀察銅板上的圖案變化或觀察銅板上的定點位置變化。研究者認為觀察銅板是代表受測者注意到整體的變化，觀察銅板上的定點則代表受測者注意到局部的變化。從受測者的構圖中，可以將圖形的型式分為連續型及離散型兩種。以表 5-3 說明受測者操作圖形的方式。

表 5-3：第一個實驗活動之心像操作方式例圖

心智圖形				
操作特色	整體連續	局部連續	整體離散	局部離散

研究者依受測者的整體解題策略，將受測者心像操作的性質分為整體連續、局部連續、整體離散、局部離散，解題所注意到的面向區分為注意相對位置及注意接觸弧長相等的性質。研究者將整體連續編碼為 I、局部連續編碼為 II、整體離散編碼為 III、局部離散編碼為 IV；注意相對位置編碼為 a、注意接觸弧長相等的性質編碼為 b，自轉一圈編為 1，自轉 2 圈編為 2，例如受測者注意到了銅板圖案的變化，及銅板圖案的相對位置，並認為銅板自轉 2 圈，研究者將其編碼為 2 I a；受測者注意到銅板上某定點的離散變化而沒有注意到點的相對位置，並認為銅板自轉 1 圈，研究者將其編碼為 1 IV。研究者將各組受測者心像操作的情形以表 5-4 來表示。

表 5-4：第一階段心像操作方式編碼分佈表

動畫組	心像操弄	實物組	心像操弄	語意組	心像操弄
D1	1 III (a)	P1	1 IV	V1	1 IV
D2	1 IV	P2	1 IV (b)	V2	2 IV (a)
D3	1 II	P3	1 I	V3	2 IV (a)
D4	2 I (b)	P4	1 IV	V4	1 IV
D5	2 I (a)	P5	2 III+IV	V5	2 IV (a)
D6	2 I (a)	P6	1 IV	V6	2 IV (a)(b)
D7	1 IV (a)(b)	P7	1 IV (b)	V7	1 III
D8	1 II	P8	1 IV	V8	1 II
D9	2 II	P9	2 I (a)	V9	2 I (a)
D10	2 I (a)	P10	1 IV	V10	1 III (a)

D11	2 III (a)	P11	2 I (a)	V11	1 II
D12	1 II	P12	1 II	V12	1 IV (a)(b)
D13	2 I + II (a)	P13	2 IV	V13	2 IV
D14	2 I (a)	P14	1 IV	V14	1 III
D15	2 I (a)	P15	2 I (a)	V15	2 I (a)
D16	2 I (a)	P16	1 IV		
D17	2 I (a)	P17	1 I (a)		
D18	2 I + II (a)	P18	1 I		
D19	2 I	P19	1 IV		
D20	1 II	P20	1 II		

由表 5-4 統計出各組心像操作方式的比例情形，動畫組：I 佔 55%、II 佔 10%、III 佔 10%、IV 佔 10%，實物組：I 佔 30%、II 佔 10%、III 佔 5%、IV 佔 60%，語意組中：I 佔 13.3%、II 佔 13.3%、III 佔 20%、IV 佔 53.3%。正確答案為銅板自轉兩圈，研究者統計各組的答對率，動畫組：65%，實物組：25%，語意組：53.3%。綜合以上統計，為探討三組的差異情形，以圖 5-2 表示各組的分佈情形。

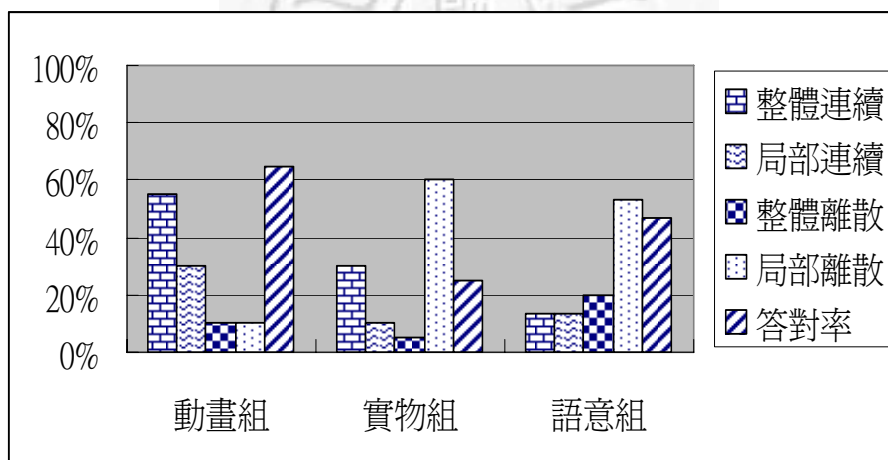


圖 5-2：第一個實驗活動之心像操作方式分佈圖

由圖 5-2 可以觀察出，動畫組的操作方式有 58% 屬於整體連續型，顯示出動畫組的受測者在解題時，心像的操作是比較偏向整體且連續的操作方式，在表 5-3 中，動畫組的受測者，其編碼為 I 者常伴隨(a)的編碼，如 D15、D16、D14，顯示出操作方式為整體連續型的受測者容易注意到相對位置的變化。實物組的操作方式雖有 30% 的受測者為整體連續型，但局部離散型佔整體的 60%，整體而言，實物組的操作方式是偏向局部離散型。在表

5-3 中，實物組的受測者只有 4 位(佔整體的 20%)激發出注意相對位置的想法，顯示出實物操作的方式不容易讓受測者注意到相對位置的變化。語意組的操作方式就明顯偏於局部離散，在表 5-4 中，語意組的受測者有 8 位(佔整體的 54%)激發出注意相對位置的想法，顯示出語意組的心像操作方式雖不偏向於整體連續，但仍會注意到相對位置的變化。

對於以上統計結果的原因，研究者認為可能動畫呈現出整體滾動的過程，因此受測者注意到了滾動的銅板的整體變化，心像的操作方式比較偏向整體連續，而容易注意到了相對位置的關係，又動畫所呈現的滾動方式為正確的，導致動畫組的答對率比其它兩組高。語意組雖然操作方式偏向於局部離散，但有半數的人也會注意到相對位置的關係，研究者認為可能受測者在畫出滾動的銅板上的定點位置變化後，經由提取出類似的舊經驗，發現相對位置關係是判斷的關鍵因素，導致答對率近五成。實物組的操作方式偏向於局部離散，但答對率卻是三組中最低，研究者認為可能受測者在操作銅板上產生困難，例如銅板會滑動、手會遮到銅板....等，因此受測者受到物件性質的干擾，導致不容易注意到相對位置的關係。

二、 受測者對於點軌跡的心像呈現型式

本部分在探討受測者的點軌跡的心像呈現型式，研究者觀察受測者所畫出的軌跡圖形、關於軌跡圖形的文字描述、數學方式表達的意願、關於軌跡的數學性質，將編碼的方式陳述於下。

研究者將受測者畫出的軌跡圖形分為正確與不正確，再依軌跡的型式分為連續型及離散型，編碼方式為：圖形正確且連續編為 1，圖形正確且離散編為 2，圖形不正確且連續編為 3，圖形不正確且離散編為 4；對於圖形的不一樣的軌跡圖形，將圓型編為 C，橢圓編為 E，拋物線編為 P，例如：受測者的軌跡圖形為平滑的封閉曲線且為心型，則編碼為 1；軌跡圖型為一些不連續的點構成且為心型，則編碼為 2。對於受測者的文字描述分為兩種，第一種為直接由圖形轉譯，例如：長得像愛心、心臟線等的描述，第二種為對圖形的結構做一些性質上的描述，例如：圖形為對稱且有結點、點會繞出去再繞回原處，研究者將第一種編碼為 T，第二種編碼為 S。對於受測者是否想用數學方式表達，Y 表是，N 表否。關於受測者想到的數學性質，研究

者依數學性質的類型分為以下四種編碼方式，a 表示座標：泛指一切有關引入座標系的答案，如極座標、方程式、解析幾何...等；b 表示弧角關係：指有明顯注意到接觸弧長或角度相等的答案；c 表示電腦工具：指有提到有 GSP 之類的電腦軟體輔助；d 表示參數關係：指有牽涉到參數表達的答案，如參數式、三角函數...等。受測者在同一種類型的編碼可能不唯一，如圖形的描述有包含第一、二種，則編碼則為 TS，關於各組的編碼結果，以表 5-5 做呈現。

表 5-5：第一個實驗活動之軌跡的心像呈現型式編碼分佈表

動畫組	軌跡型式	編碼生	軌跡型式	編碼生	軌跡型式
D1	1 T Y a	P1	3P T Y cd	V1	3 T N a
D2	1 T Y d	P2	1 Y ad	V2	
D3	1 S N ad	P3	1 T Y ad	V3	4 T Y cd
D4	1 T Y bd	P4	1 S Y a	V4	1 S Y a
D5	1 T Y ad	P5	3M S Y ad	V5	1 T N a
D6	1 TS Y d	P6	3 S N d	V6	1 T N a
D7	1 T Y ad	P7	1 T Y ad	V7	1 T Y a
D8	1 S Y d	P8	1 T Y d	V8	2S N cd
D9	1 T Y a	P9	1 T Y acd	V9	1 T N
D10	1 T Y a	P10	1 T N d	V10	3P S Y a
D11	3E T Y a	P11	1 T Y a	V11	3E T Y a
D12	3E T Y ad	P12	1 S Y ad	V12	4 N a
D13	1 T Y d	P13	3C TS Y ad	V13	1 T Y ad
D14	1 T Y d	P14	1 T Y c	V14	3P T Y cd
D15	1 T Y d	P15	1 T N	V15	3 S Y d
D16	1 T Y	P16	4 T N a		
D17	3E T N	P17	1 S Y c		
D18	1 T Y a	P18	1 T Y abd		
D19	1 T Y cd	P19	3M T N acd		
D20	1 S Y d	P20	3C TS Y a		

由表 5-4 的編碼結果，可以統計出，動畫組：1 佔 85%、3 佔 15%，T 佔 85%、S 佔 25%，Y 佔 90%、N 佔 10%，a 佔 45%、b 佔 5%、c 佔 5%、d 佔 65%。實物組：1 佔 65%、3 佔 30%、4 佔 5%，T 佔 70%、S 佔 35%，Y

佔 75%、N 佔 25%，a 佔 65%、b 佔 5%、c 佔 25%、d 佔 65%。語意組：1 佔 40%、2 佔 6.7%、3 佔 26.7%、4 佔 26.7%，T 佔 60%、S 佔 26.7%，Y 佔 60%、N 佔 40%，a 佔 60%、b 佔 0%、c 佔 20%、d 佔 33.3%。研究者想探討三組在圖形認知及提取數學概念的差異性，將軌跡圖形與文字描述的分佈圖以圖 5-3 表示；將數學表示意願及數學性質以圖 5-4 表示。

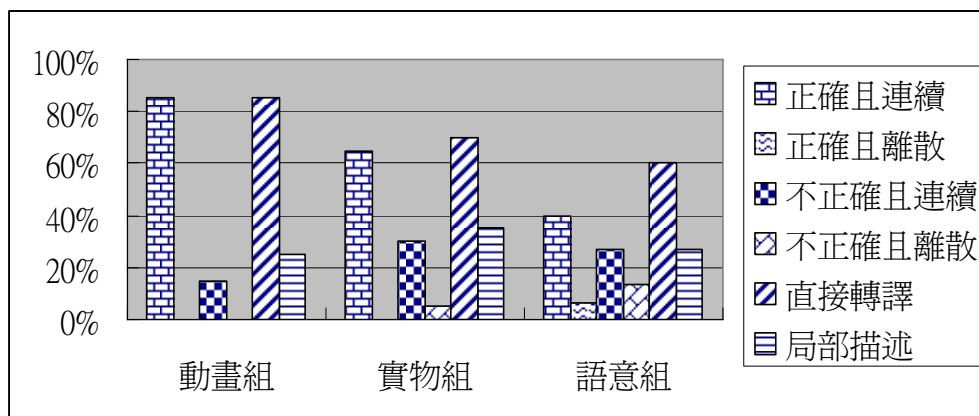


圖 5-3：第一個實驗活動之軌跡型式分佈圖

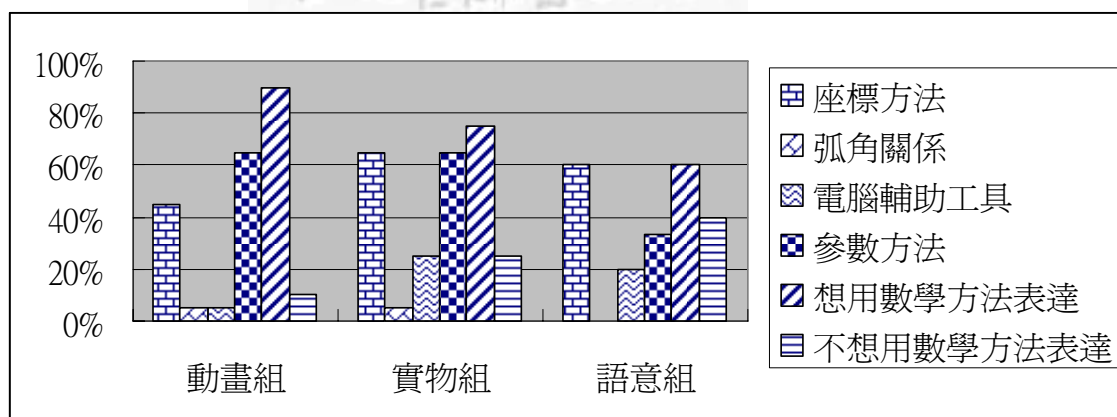


圖 5-4：第一個實驗活動之軌跡數學性質分佈圖

由圖 5-3 中，從 1：正確且連續的軌跡圖形、2：正確且離散的軌跡圖形、3：不正確且連續的軌跡圖形、4：不正確且離散的軌跡圖形中，其各自在三組中所佔的比例來看。動畫組的受測者所畫出的軌跡圖形的正確度最高，而語意組的受測者所畫出的軌跡圖形的正確性最低且軌跡圖形為離散型的比例為三組中最高，實物組的受測者所畫出軌跡圖形為不正確且連續型的比

例為三組中最高。這些統計結果顯示出動畫觀察及實物操作，可以幫助受測者建構出較正確且連續的點軌跡的心像呈現型式，但實物操作亦容易產生不正確且連續的點軌跡的心像呈現型式。圖 5-3 中，圖形的文字描述情形，三組並沒有特別顯著的差異。

造成上述結果的可能原因，研究者認為動畫是一個完整的連續圖，受測者容易觀察出紅點的整體軌跡；實物操作上，由於操作的因素會造成圖形的偏差，導致有些受測者不易觀察出紅點整體軌跡，而克服的方法，可能要多多熟練銅板的操作；語意組的受測者只能透過思考，由心像操作或構圖來觀察點軌跡，可能會造成部分受測者無法有連續的點軌跡的心像呈現。

由圖 5-4 中，從 a：座標方法、b：弧角關係、c：電腦輔助工具、d：參數方法中，其各自在三組中所佔的比例來看，動畫組與實物組中，有很高比例的人數認為軌跡圖形可用參數方式表達，而語意組中，則傾向以座標方式表達軌跡圖形。從 Y：想用數學方法表達與 N：不想用數學方法表達，其各自在三組中所佔的比例來看，動畫組最高，其次是實物組，最低是語意組，顯示出受測者在數學表達的意願上，動畫組最高，而語意組最低。

上述結果顯示出動畫組及實物組的受測者對於軌跡的數學形式傾向以動態型式的參數式來表達，而語意組對於軌跡的數學形式傾向於以靜態型式的座標方式來表達；實物組與語意組有大約 1/5 的比例認為需要電腦輔助工具，顯示出此兩組的受測者較動畫組的受測者沒信心能掌握住軌跡圖形。由數學意願的結果來看，動畫觀察及實物操作可以增加受測者將圖形與符號表徵連結的意願。

三、圖形結構與符號的參照

本部分在探討受測者由觀察自己畫出的圖形結構後，與數學符號的參照連結情形。研究者由受測者畫出下列兩種情形的圖形：第一種情形為動圓滾動 1/4 圈後的 A 點位置，第二種情形為動圓滾動 30 度後的 A 點位置，並由受測者觀察 A 點位置的構圖，進而表達出 A 點的座標過程中，以構圖及座標表示的正確性來回應本部分的研究目的。

研究者由受測者構圖及以座標表示動圓滾動 1/4 圈後的 A 點位置的答案

中，以 P1 表示構圖正確、P0 表示構圖不正確、Q1 表示座標表示正確、Q0 表示座標表示不正確；由受測者構圖及以座標表示動圓滾動 30 度後的 A 點位置的答案中，以 R1 表示構圖正確、R0 表示構圖不正確、S1 表示座標表示正確、S0 表示座標表示不正確。研究者將各組受測者的編碼結果以表 5-6 呈現。

表 5-6：各組構圖與座標表示的編碼情形

動畫組	編碼情形	實物組	編碼情形	語意組	編碼情形
D1	P1 Q0 R1 S0	P1	P1 Q1 R0 S0	V1	P1 Q1 R1 S1
D2	P1 Q1 R1 S1	P2	P1 Q1 R1 S0	V2	P1 Q1 R1 S1
D3	P1 Q1 R1 S1	P3	P1 Q1 R0 S0	V3	P1 Q1 R1 S1
D4	P1 Q1 R1 S1	P4	P0 Q0 R0 S0	V4	P1 Q1 R1 S0
D5	P1 Q0 R1 S1	P5	P1 Q1 R1 S1	V5	P0 Q0 R0 S0
D6	P1 Q1 R1 S1	P6	P1 Q0 R0 S0	V6	P0 Q0 R0 S0
D7	P1 Q1 R1 S1	P7	P1 Q1 R1 S0	V7	P1 Q1 R1 S1
D8	P1 Q1 R1 S0	P8	P1 Q1 R1 S1	V8	P1 Q1 R1 S1
D9	P1 Q1 R0 S0	P9	P1 Q1 R1 S1	V9	P1 Q1 R1 S1
D10	P1 Q0 R0 S0	P10	P1 Q1 R0 S0	V10	P1 Q1 R1 S1
D11	P1 Q1 R1 S1	P11	P1 Q1 R1 S1	V11	P1 Q0 R0 S0
D12	P1 Q1 R0 S0	P12	P1 Q1 R1 S1	V12	P1 Q0 R0 S1
D13	P1 Q0 R1 S1	P13	P1 Q0 R1 S0	V13	P0 Q0 R0 S0
D14	P1 Q1 R1 S1	P14	P1 Q1 R1 S1	V14	P0 Q0 R0 S0
D15	P1 Q1 R1 S1	P15	P1 Q1 R0 S0	V15	P1 Q1 R1 S0
D16	P1 Q1 R1 S0	P16	P1 Q1 R1 S1		
D17	P1 Q0 R0 S0	P17	P1 Q1 R1 S1		
D18	P1 Q1 R0 S1	P18	P1 Q1 R1 S1		
D19	P1 Q1 R1 S1	P19	P1 Q1 R1 S1		
D20	P1 Q0 R1 S1	P20	P0 Q0 R0 S0		

由表 5-5 可以統計出三組在第一種情形及第二種情形中，構圖及座標表達的答對率，動畫組：P1 佔 100%、Q1 佔 70%、R1 佔 75%、S1 佔 65%；實物組：P1 佔 90%、Q1 佔 80%、R1 佔 65%、S1 佔 55%；語意組：P1 佔 73.3%、Q1 佔 60%、R1 佔 66.7%、S1 佔 53.3%。以圖 5-5 呈現出各組答對率的分佈情形。

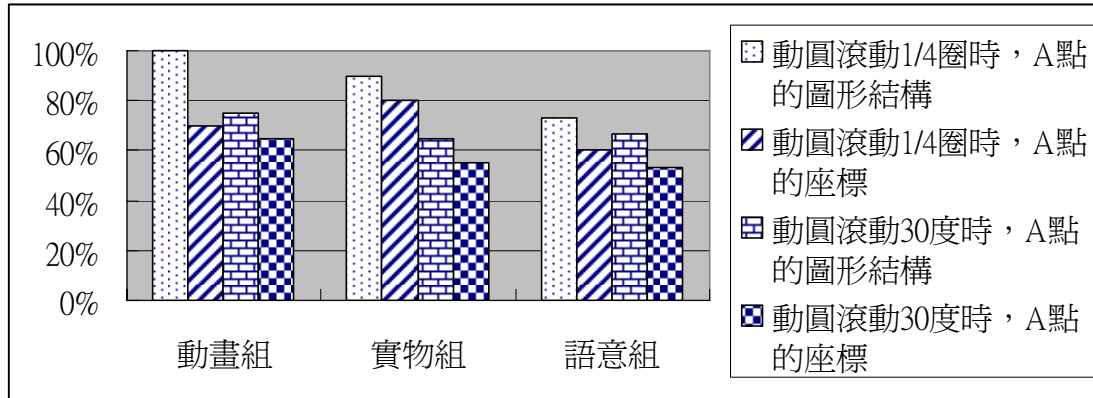


圖 5-5 第一個實驗活動之構圖及座標答對率分佈圖

動畫觀察能幫助受測者掌握住兩種情形的動點圖形結構。實物操作能幫助受測者掌握住較容易的第一種情形的動點圖形結構，第二種情形的掌握情形則與語意組的受測者差不多。三組在圖形與符號的參照上，表現情形並無特別顯著的差別。

由圖 5-5 中，三組雖然沒有很明顯的差距，整體而言，動畫組的答對率是優於其它兩組，而語意組則是最差。由結果發現，動畫組在兩種情形的構圖正確性上是優於其它兩組，顯示出動畫觀察能幫助受測者掌握住圖形結構。實物組在第一種情形的構圖及座標表示皆優於語意組，但在第二種情形的構圖及座標表示的答對率上非常接近，顯示出實物操作可以幫助受測者掌握住較容易的情形，但在較困難的情形下，實物組與語意組是呈現出差不多的情形。在第二種情形的構圖及座標表示的答對率差異上，三組沒有特別顯著的差異，顯示出三組的受測者在圖形與符號的參照上，表現情形差不多。

由上述結果中發現，動畫觀察可以讓受測者更能掌握住軌跡點的圖形結構，進而順利與符號參照。實物操作可以讓受測者掌握住較容易處理的軌跡點的圖形結構，但在較不易處理的情形中，則與只透過語意思考的受測者差不多，顯示出實物操作對於受測者處理某些容易的圖形結構是有正面的效果。

四、圖形結構與符號的變換

本部分在探討受測者在圖形結構與數學符號間的變換情形。由研究者觀

察受測者從掌握住表達參數式的關鍵因素而能表達軌跡的參數式過程中，將關鍵因素設定為「掌握住 A 點自轉角為 2θ 」，即動圓滾動後的 A 點座標與動圓滾動前的 A 點座標對於動圓圓心來說改變了 2θ ，並以受測者表達軌跡參數式的型式來回應本部分的研究目的。將掌握住 A 點自轉角為 2θ 編碼為 I、不能掌握住 A 點自轉角為 2θ 編碼為 II；正確的軌跡參數式為 1、計算錯誤的軌跡參數式為 2、特殊圖形參數式為 3、無填寫編碼為 0，並加上特別編碼做註解，C 表圓參數式、E 表橢圓參數式。根據此編碼方式，以表 5-7 呈現出各組受測者對於軌跡圖形與符號間變換的情形。

表 5-7：第一個實驗活動之參數式的編碼分佈表

動畫組	編碼情形	實物組	編碼情形	語意組	編碼情形
D1	0	P1	I 2	V1	II 2
D2	I 1	P2	I 1	V2	I 1
D3	I 1	P3	II 0	V3	I 1
D4	I 1	P4	0 3C	V4	II 2
D5	I 1	P5	I 1	V5	II 2
D6	I 1	P6	0 3E	V6	II 0
D7	I 1	P7	0	V7	I 1
D8	I 1	P8	I 1	V8	I 1
D9	II 3C	P9	I 1	V9	0
D10	0	P10	I 2	V10	II 2
D11	I 1	P11	I 1	V11	II 2
D12	0	P12	I 1	V12	I 1
D13	I 1	P13	I 2	V13	II 3E
D14	I 1	P14	I 1	V14	II 3C
D15	I 1	P15	0 3C	V15	II 0
D16	I 1	P16	I 1		
D17	II 0	P17	I 0		
D18	I 1	P18	I 1		
D19	I 1	P19	I 1		
D20	I 1	P20	0 3C		

由表 5-7 中，可以統計出各組的比例分佈情形，動畫組：I 佔 75%、II 佔 10%，1 佔 75%、3 佔 5%，實物組：I 佔 70%、II 佔 30%，1 佔 50%、2 佔 10%、3 佔 20%，語意組：I 佔 33.3%、II 佔 60%，1 佔 33.3%、2 佔 33.3%

、3 佔 13.4%。依據統計結果，以圖 5-6 表示各組參數式表達的情形。

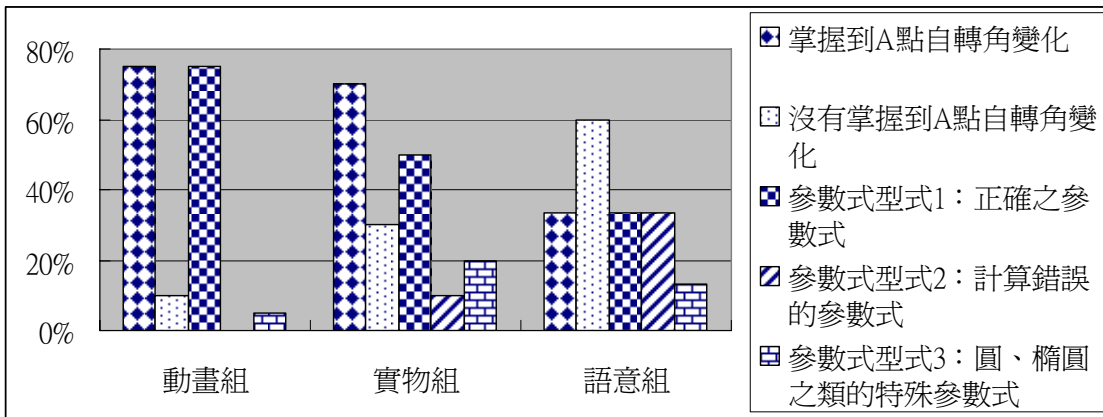


圖 5-6：第一個實驗活動之參數式型式的分佈圖

動畫組及實物組的受測者較語意組的受測者容易掌握住表達參數式的關鍵因素。動畫組的受測者較其它兩組的受測者更易發展出心臟線的參數式；實物組的受測者因為有部分雖掌握住表達參數式的關鍵因素，但無法有效利用之，以致於表達參數式的答對率低於動畫組的受測者；語意組的受測者則是不易掌握主表達參數式的關鍵因素，以致於表達參數式的答對率低於其它兩組的受測者。

由圖 5-6 中，從 I：掌握住 A 點自轉角為 2θ 編碼為、II：不能掌握住 A 點自轉角為 2θ ，其在三組中所佔之比例中，可以觀察出動畫組與實物組掌握住「A 點自轉角為 2θ 」的比例人數明顯高於語意組，顯示出動畫觀察與實物操作可以幫助受測者掌握住表達參數式的關鍵因素。

由各組表達表數式的型式中，動畫組正確性最高，其次是實物組，再由表 5-7 觀察出，實物組中有 20% 的人雖掌握住「A 點自轉角為 2θ 」，但卻計算錯誤或根本不會寫如 P1、P10、P13、P17 等受測者，而動畫組及語意組沒有這個現象，顯示出動畫組與語意組的受測者可以有效利用「A 點自轉角為 2θ 」的關鍵因素進而成功表達參數式。由表 5-5 中，P1、P10、P13、P17 等受測者中，P1 及 P13 的點軌跡心像呈現型式皆為錯誤類型，研究者推測造成受測者知道關鍵因素卻不能有效利用之的原因可能在於部分實物組的受測者會受到物件性質的影響例如點軌跡圖形的錯誤，而無法集中注意在 A 點自轉角為 2θ 的關鍵因素上。由表 5-7 觀察出，實物組有 20% 會寫出圓錐曲線的參數式，語意物則有 13.3% 的人有此情形，明顯高於動畫組的

5%，顯示出實物操作容易令部分受測者產生軌跡圖形的認知錯誤。

由以上結果來看，可以發現到動畫觀察可以幫助受測者掌握表達參數式的關鍵因素，並有效利用關鍵因素進而順利達到參數式的表達；實物操作也可以幫助受測者掌握表達參數式的關鍵因素，但並非都能有效利用關鍵因素進而達到參數式的表達；語意描述比較不能幫助受測者掌握表達參數式的關鍵因素，造成容易因計算錯誤而無法順利表達參數式。



第二節 縱向分析之研究發現

本發現在探討不同的心像表徵型式、點軌跡的心像呈現型式、圖形與符號的參照、關鍵因素的掌握是如何影響受測者建構出不同參數式型式。研究者將追溯受測者一開始所產生的心像表徵型式、點軌跡的心像呈現型式，到引入座標系後的第二種情形的構圖與座標的參照、掌握到表達參數式的關鍵因素，最後表達出參數式等五個階段。研究者主要在探討不同參數式型式之受測者在各階段所受的影響及五個階段的縱向序列發展情形。

一、動畫組的受測者之縱向分析

為探討動畫組之受測者的縱向發展情形，研究者將受測者先依參數式型式做一個分類，以表 5-8 表示動畫組中，不同參數式型式的受測者，其關鍵因素的掌握、圖形與符號的參照情形、點軌跡的心像呈現型式、心像表徵型式的編碼情形。

表 5-8：動畫組之縱向編碼分佈表

受測者	參數式型式	關鍵因素	圖形與符號參照	點軌跡	心像表徵
D2	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
D3	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
D4	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
D5	1	I	P1 Q0 R1 S1	1	2+3(a)
D6	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
D7	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2+3(b)
D8	1	I	P1 Q1 R1 S0	1	2+3(b)
D11	1	I	P1 Q1 R1 S1	3E	3(v)
D13	1	I	P1 Q0 R1 S1	1	1
D14	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	1
D15	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	0
D16	1	I	P1 Q1 R1 S0	1	2(v)
D18	1	I	P1 Q1 R0 S1	1	2(v)
D19	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2(v)
D20	1	I	P1 Q0 R1 S1	1	3(c)
D1	0	0	P1 Q0 R1 S0	1	2
D10	0	0	P1 Q0 R0 S0	1	2+3(b)
D12	0	0	P1 Q1 R0 S0	3E	3(c)
D17	0	II	P1 Q0 R0 S0	3E	2(v)
D9	3c	II	P1 Q1 R0 S0	1	3(c)

(一) 不同階段的建構對參數式型式的影響

研究者想探討不同階段的建構對參數式型式的影響，首先由表 5-8，先不論主碼裡的附碼補充，並將心像表徵型式含兩種主碼的類型，採較高數字者，如類型為 2+3(b) 視為類型 3。依表 5-8 可以發現各階段對參數式型式的關係情形，以圖 5-7、圖 5-8、圖 5-9、圖 5-10 呈現出各階段對參數式型式的影響。

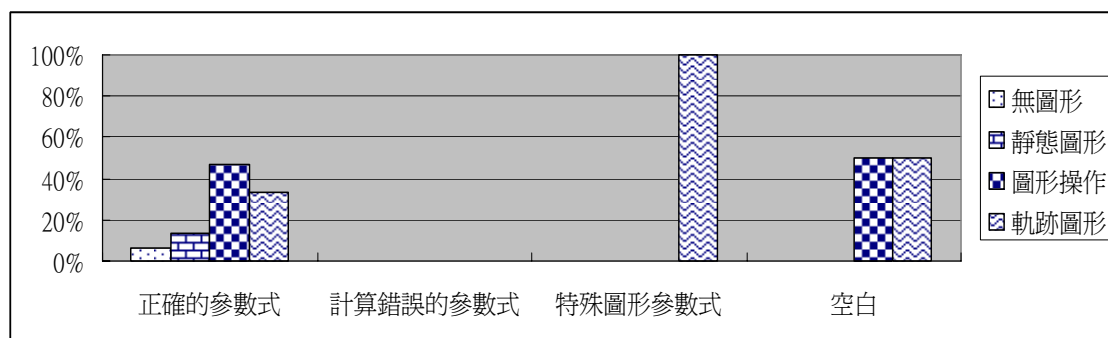


圖 5-7：動畫組之參數式型式與心像表徵型式的關係圖

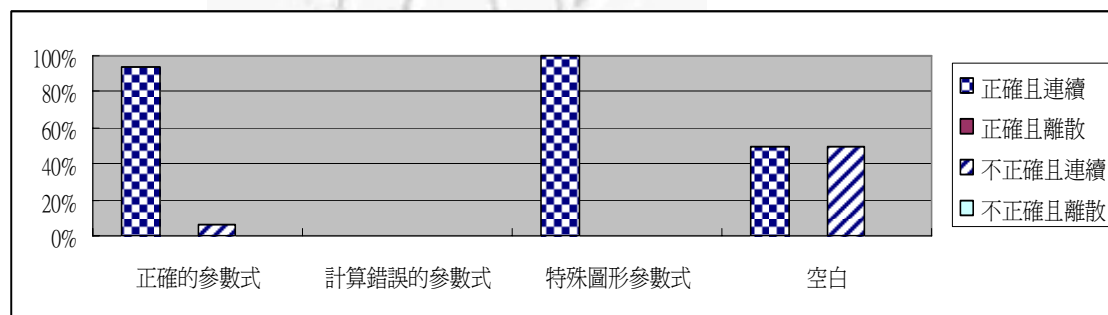


圖 5-8：動畫組之參數式型式與點軌跡心像呈現的關係圖

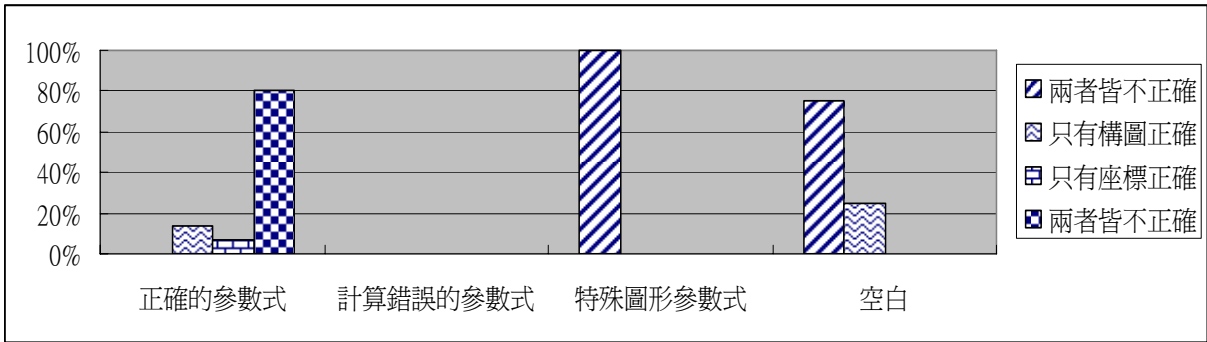


圖 5-9：動畫組之參數式型式與第二種情形的構圖及座標表達的關係圖

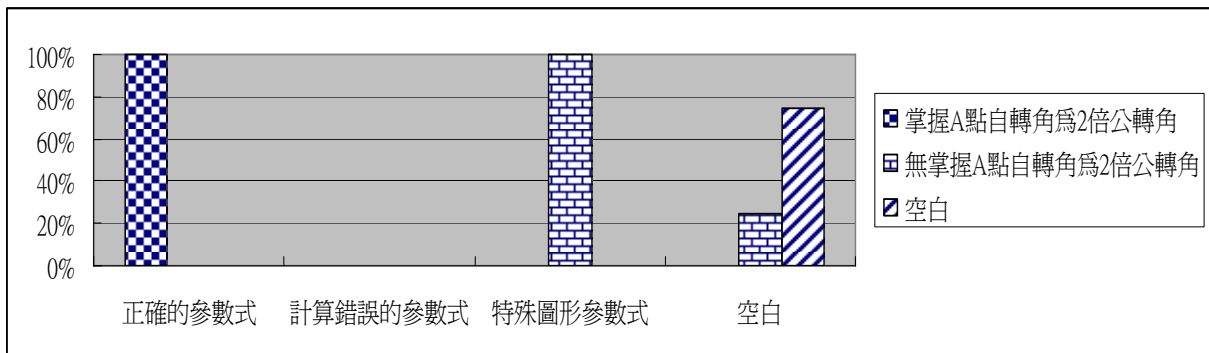


圖 5-10：動畫組之參數式型式與掌握關鍵因素的關係圖

由以上結果來看，參數式型式為計算錯誤參數式的受測者為 0 位，參數式型式為 3；特殊圖形參數式的受測者只有一位，人數過少的原因，研究者只討論參數式型式為空白及參數式型式為正確的參數式之受測者。

由圖 5-8 中，顯示出動畫組的受測者中，順利表達出參數式的受測者，亦有高比例的人數具有正確且連續的心像呈現型式。具有不正確且連續的點軌跡之心像呈現型式的受測者，可能會影響受測者不易掌握住圖形結構，如 D12、D17 在第二種情形的構圖上失敗，因此傾向不去表達參數式。

由圖 5-7 顯示出，在心像表徵的影響性上，表達正確的參數式及空白的受測者，其心像表徵的類型以圖形操作為主，雖有部分人會產生軌跡圖形，但皆為非動圓上定點的軌跡，無關於本活動的點軌跡，所以在動畫組中，心像表徵型式對參數式型式的影響不大。

由圖 5-9 顯示出，在圖形與符號的參照上，表達正確參數式的受測者，有很高比例的人數在第二種情形下可以順利構圖及表達座標；表達空白的受

測者則有很高比例的人數在二種情形下無法順利構圖及表達座標。由以上結果顯示出，第二種情形的構圖及座標的表達狀況會影響參數式型式的表現，能掌握動圓上定點的圖形結構及表達其座標，會大大地影響受測者表達參數式的正確性。

由圖 5-10 顯示出，在關鍵因素對參數式型式的影響上，表達正確參數式的受測者都能掌握住 A 點自轉角與公轉角的關係；表達空白的受測者則是無法掌握住 A 點自轉角與公轉角的關係或根本不知道關係。顯示出動畫組的受測者若無法掌握住關鍵因素的受測者，亦無法表達出正確的參數式型式，但只要掌握住關鍵因素，則都可以順利將圖形與符號做變換。

由以上結果發現，除了一開始的心像表徵型式對於參數式型式沒有顯著的影響外，其餘各階段的情形都對參數式的型式有影響。



(二)不同階段的序列性發展情形

為了探討動畫組之受測者在不同階段的序列發展情形，研究者以圖 5-11 來表示動畫組之受測者在五個不同階段的發展情形。

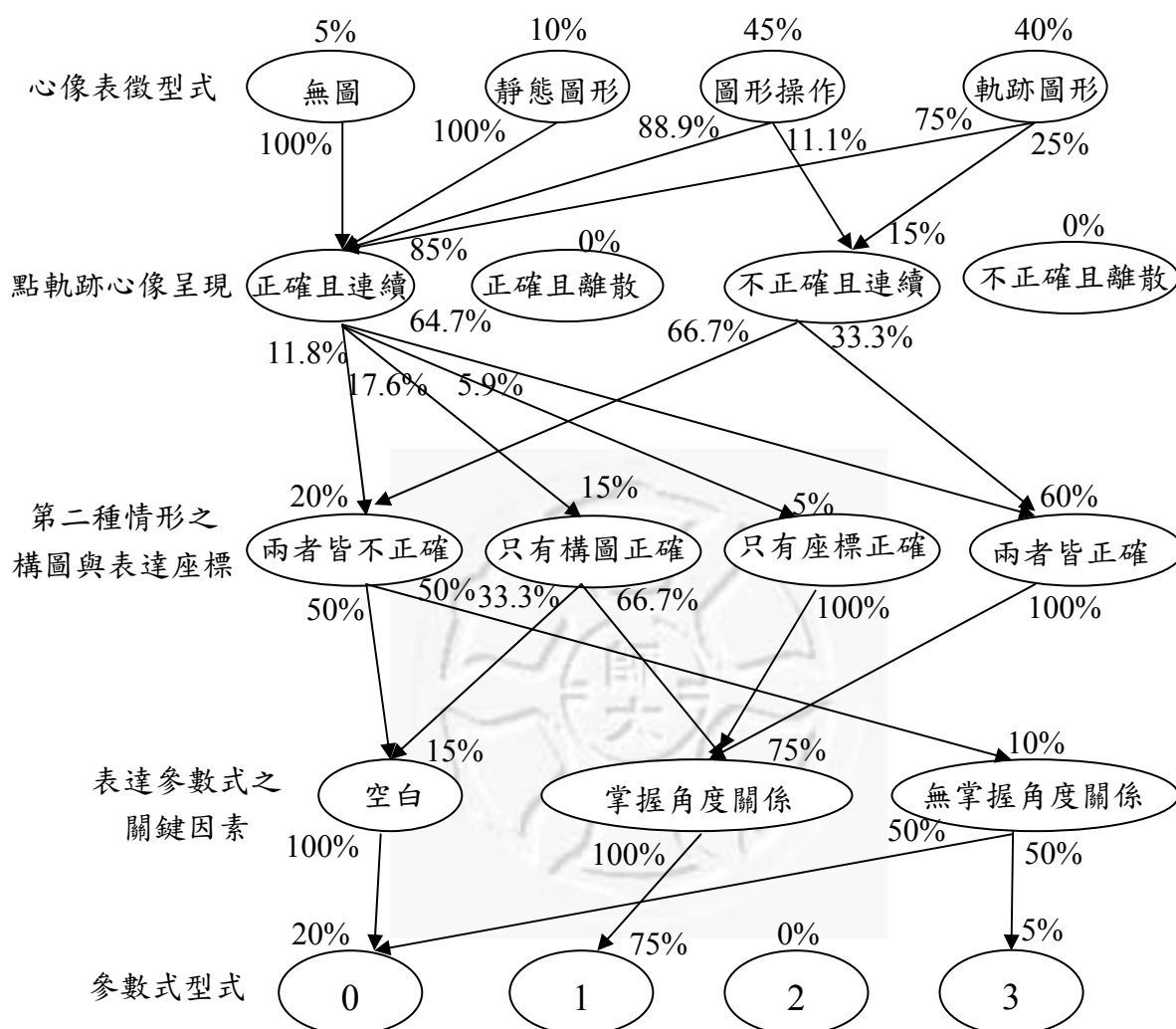


圖 5-11：動畫組縱向序列圖

由圖 5-11 中，可以發現大部分動畫組的受測者在一開始的心像表徵型式主要以圖形操作和軌跡圖形為主；當問題迫使受測者注意點軌跡時，容易產生正確且連續的點軌跡圖形；當問題迫使受測者注意點的局部圖形結構時，容易具有正確的圖形結構及表達正確的點座標；當問題迫使受測者將點軌跡的圖形與符號變換時，可以順利掌握到連結符號的關鍵因素，接著可以順利的表達出點軌跡的參數式以達到圖形與符號的變換。有半數以上的受測者以此路徑的順序而達到圖形與符號的變換。

由上面的現象可以發現，動畫觀察可以有效讓受測者建構出正確的點軌跡心像並幫助受測者掌握住點的局部圖形結構，且可以有效地將特殊情形的圖形與符號順利參照，並可以從參照過程中，掌握到表達參數式的關鍵因素，進而順利將軌跡表達成參數式。在受測者的認知中，可以容易地掌握到動點的整體圖形及局部圖形的結構，所以動畫觀察是能幫助受測者在心像中建構出動點圖形的結構。在第二種情形中的圖形與符號的參照過程中，受測者容易順利地將點位置與座標參照成功，並可以掌握到表達參數式的關鍵因素，顯示出動畫觀察是能幫助受測者注意到動點圖形結構的改變與角度變化的關係。

對於以上現象的結果與意義，研究者認為動畫模擬出銅板及銅板上一定點的完整的滾動過程，根據 Paivio 的雙碼理論提及：當個體感官系統接收到非語文刺激，便將其編碼與原有的心像表徵連結，而後產生反應。所以藉著動畫觀察可以激發出受測者在心像中產生對應的圖形操作。當問題具有目標導向時，動畫可以幫助受測者注意到動點圖形結構的變化，激發出受測者操弄心像以掌握住圖形結構的變化關係。研究者認為動畫不斷的播放，且研究者在問卷中有提示參數為角度，以致於受測者在不斷注意到動點與角度變化的關係的過程中，容易讓大部分的人可以正確掌握到其關係。

二、實物組的受測者之縱向分析

為探討實物組之受測者的縱向發展情形，研究者將受測者先依參數式型式做一個分類，以表 5-9 表示實物組中，不同參數式型式的受測者，其關鍵因素的掌握、圖形與符號的參照情形、點軌跡的心像呈現型式、心像表徵型式的編碼情形。

表 5-9：實物組之縱向編碼分佈表

實物組	參數式型式	關鍵因素	圖形與符號參照	點軌跡	心像表徵
P2	1	I	P1 Q1 R1 S0	1	2
P5	1	I	P1 Q1 R1 S1	3M	2
P8	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
P9	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
P11	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
P12	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2

P14	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2+3(b)
P16	1	I	P1 Q1 R1 S1	4	2
P18	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
P19	1	I	P1 Q1 R1 S1	3M	2
P1	2	I	P1 Q1 R0 S0	3P	1
P10	2	I	P1 Q1 R0 S0	1	2
P13	2	I	P1 Q0 R1 S0	3C	3(a)(b)
P4	3	0	P0 Q0 R0 S0	1	2(V)
P6	3	0	P1 Q0 R0 S0	3S	2
P15	3	0	P1 Q1 R0 S0	1	3(c)
P20	3	0	P0 Q0 R0 S0	3C	2+3(a)
P3	0	II	P1 Q1 R0 S0	1	1
P7	0	0	P1 Q1 R1 S0	1	2
P17	0	I	P1 Q1 R1 S1	1	2

(一) 不同階段的建構對參數式型式的影響

研究者想探討不同階段的建構對參數式型式的影響，首先由表 5-9，先不論主碼裡的附碼補充，並將心像表徵型式含兩種主碼的類型，採較高數字者，如類型為 2+3(b)視為類型 3。依表 5-9 可以發現各階段對參數式型式的關係情形，以圖 5-12、圖 5-13、圖 5-14、圖 5-15 呈現出各階段對參數式型式的影響。

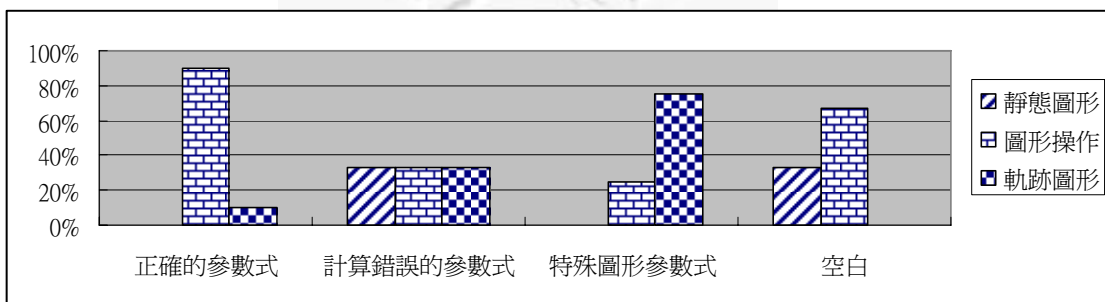


圖 5-12：實物組之參數式型式與心像表徵型式的關係圖

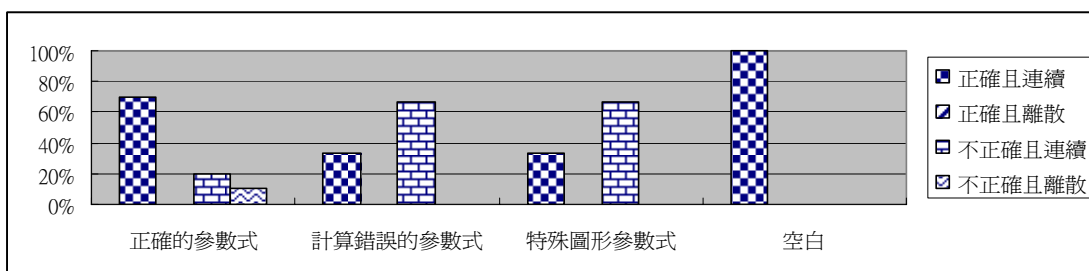


圖 5-13：實物組之參數式型式與點軌跡心像呈現的關係圖

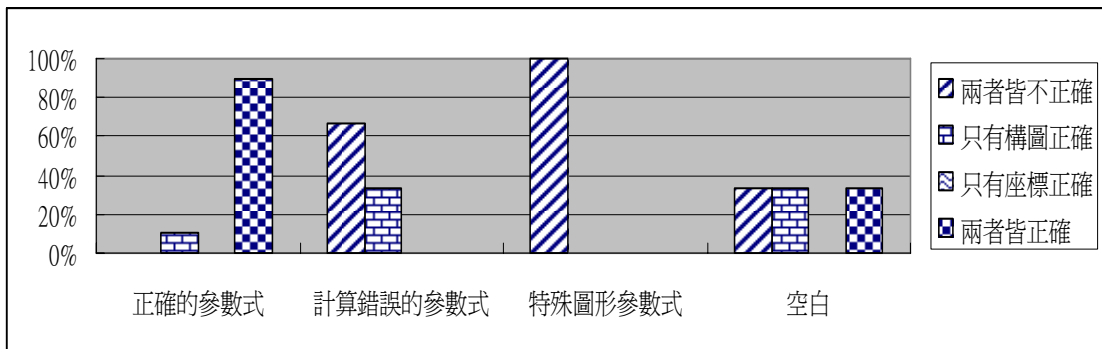


圖 5-14：實物組之參數式型式與第二種情形的構圖與座標表達的關係圖

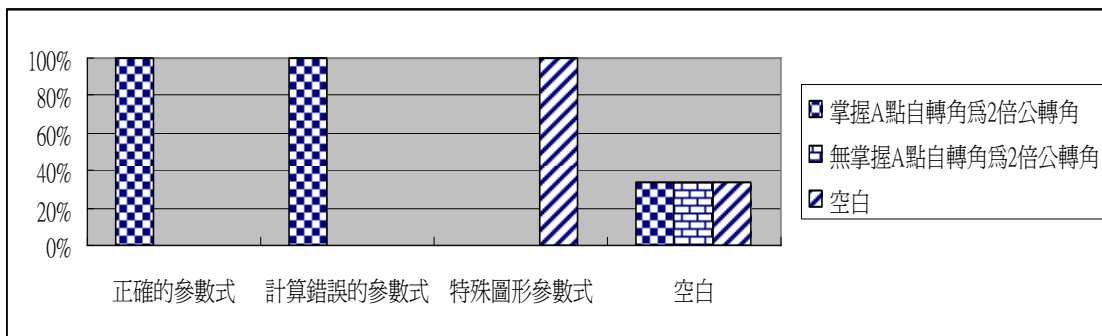


圖 5-15：實物組之參數式型式與掌握關鍵因素的關係圖

由圖 5-13 可以發現，表達計算錯誤的參數式及表達特殊圖形參數式之受測者，其點軌跡的心像呈現為不正確且連續的圖形所佔的比例明顯高於另外兩種參數式型式之受測者，由這個結果中，顯示出受測者具有不正確且連續的點軌跡的心像呈現型式，會影響受測者傾向錯誤的符號變換。但研究者發現參數式型式為空白的受測者，其點軌跡的心像呈現型式皆為為正確且連續的圖形，不過僅有 1/3 的受測者掌握到表達參數式的關鍵因素，顯示出有正確且連續的圖形並不一定可以幫助受測容易掌握到動點圖形結構與角度變化的關係，研究者認為造成此結果的原因在於，實物操作上的困難，使得這些受測者雖知道動點整體的圖形結構，卻不易馬上掌握到動點變化的局部圖形結構與角度的關係，因此對於圖形與符號的變換就顯得不知所措。

由表 5-9 可以發現，表達正確參數式的受測者，有 70% 的點軌跡心像呈現型式為正確且連續型，但有 3 位的點跡心像呈現型式卻並非是正確且連續型，其中 P5 與 P19 的編碼為 3M：不正確且連續型，圖形為多結點封閉曲

線；P16 的編碼為 4：不正確離散型，這三位受測者雖有不正確的軌跡的心像呈現，但卻能順利與符號變換，顯示出不正確的點軌跡圖形並不影響這些受測者對於圖形結構與符號之變換。研究者認為可能造成此結果的原因在於，多結點封閉曲線不像橢圓或圓等幾種曾經學習過的幾何圖形，在表達參數的過程中，受測者依然要仔細觀察動點的圖形結構，逐漸熟悉動點局部圖形結構及動點圖形結構的變化。P16 雖不能馬上知道軌跡的整體圖形，但藉著不斷的畫出動點變化的圖形結構，逐漸熟悉動點局部圖形結構及動點圖形結構的變化，因此促進受測者掌握住連結符號表徵的關鍵因素。

由圖 5-12 可以發現，在心像表徵的影響性上，四種參數式型式之受測者，其心像表徵的類型以圖形操作為主，雖有部分人會產生軌跡圖形，但皆為非動圓上定點的軌跡，無關於本活動的點軌跡，所以在實物組中，心像表徵型式對參數式型式的影響不大。

由圖 5-14 可以發現，在圖形與符號的參照上，表達正確參數式的受測者在第二種情形下的狀況會有很高的比例可以有正確的構圖及座標表達，而計算錯誤的受測者及表達特殊圖形參數式有很高的比例呈現錯誤的構圖及座標表達，而空白的受測者的情形比較分散。由以上結果顯示出，第二種情形的構圖及座標的表達狀況會影響參數式型式的表現，能掌握動圓上定點的圖形結構及表達其座標，會大大地影響受測者表達參數式的正確性。

由圖 5-15 可以發現，在關鍵因素上對參數式型式的影響上，表達正確參數式的受測者，其關鍵因素皆為掌握 A 點角度變化；計算錯誤參數式的受測者，其關鍵因素也皆為掌握 A 點角度變化；表達特殊圖形參數式的受測者，其關鍵因素則皆呈現空白；空白參數式的受測者，其關鍵因素有一半可以掌握 A 點角度變化，另一半則無法正確掌握 A 點角度變化。顯示出實物組的受測者若無法掌握住關鍵因素，亦無法表達出正確的參數式型式，但就算掌握住關鍵因素，也不一定可以順利將圖形與符號做變換。研究者推測可能的原因是因為受測者可能受到物件性質或操作因素的影響而無法有效利用關鍵因素發展出正確的參數式。

由以上結果發現，除了一開始的心像表徵型式對於參數式型式沒有顯著的影響外，其餘各階段的情形都對參數式的型式有關係。

(二)不同階段的序列性發展情形

為了探討實物組之受測者在各階段的發展情形，研究者以圖 5-16 來表示實物組之受測者在五個不同階段的發展情形。

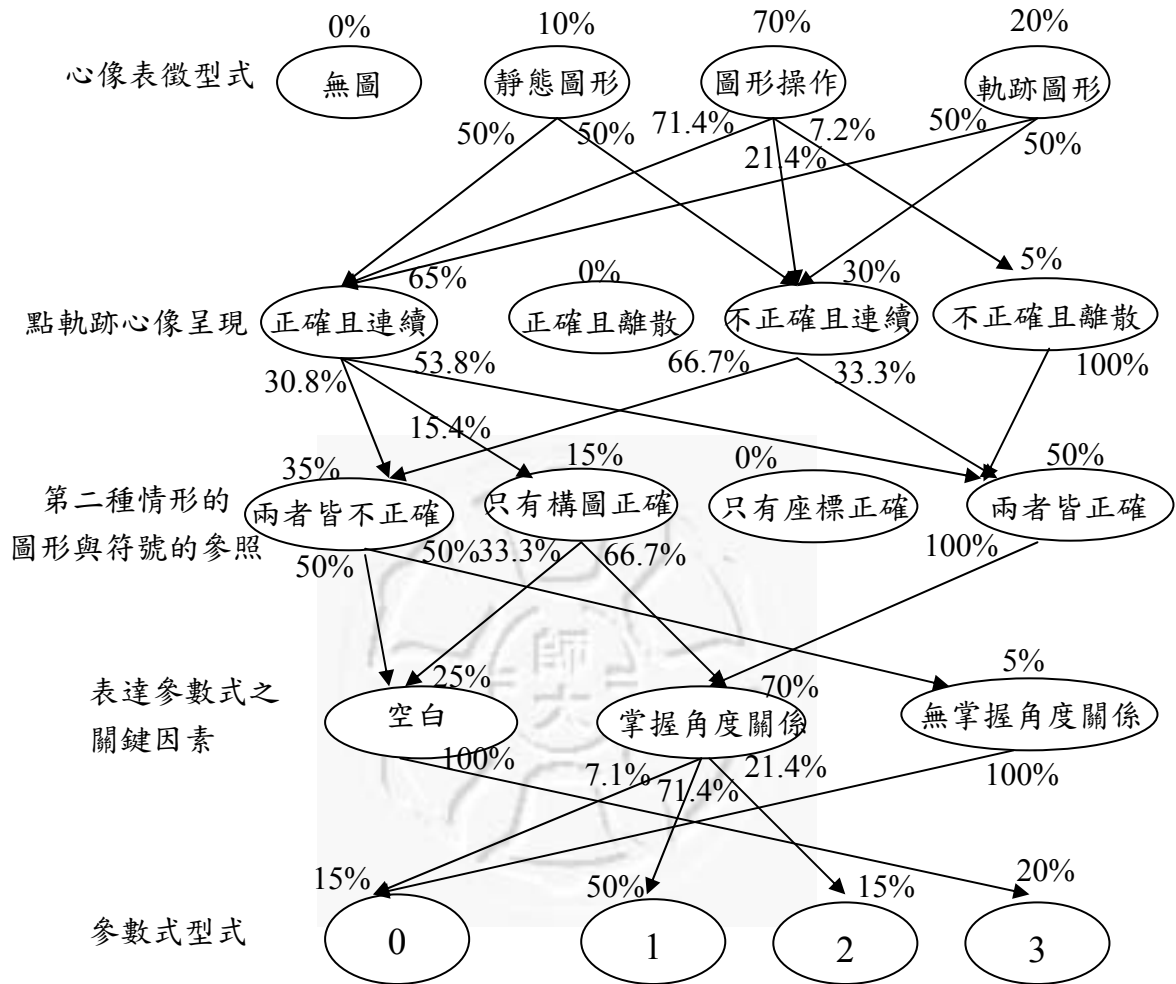


圖 5-16：實物組縱向序列圖

由圖 5-16 中，研究者發現大部分實物組的受測者在一開始的心像表徵型式主要以圖形操作為主；當問題迫使受測者注意點軌跡時，容易產生正確且連續或不正確且連續的點軌跡圖形；當問題迫使受測者注意點的局部圖形結構時，容易具有正確的圖形結構及表達正確的點座標或具有不正確的圖形結構及表達不正確的點座標等兩極化的情形產生；當問題迫使受測者將點軌跡的圖形與符號變換時，大多數的人在第二種情形的正確構圖下，可以順利掌握到連結符號的關鍵因素，接著可以順利的表達出點軌跡的參數式以達到圖形與符號的變換，但有少部分的人雖掌握到關鍵因素，卻不能順利達到圖形

與符號的變換。

由上面的現象可以發現，實物操作可能會產生兩極化的效應，所以利用實物操作的方式，順利的話可以掌握住動點的圖形結構，但不順利的話，反而會產生更大的困難。在受測者的認知中，雖不一定容易掌握到動點的整體圖形，及局部圖形的結構，但若掌握到動點的局部圖形結構，也容易令受測者掌握到表達參數式的關鍵因素。這個現象顯示出，實物操作是可以幫助受測者掌握到動點圖形結構變化與角度的關係。

對於以上現象的結果與意義，研究者認為實物操作的過程，可能會受到操作因素如滑動或銅板性質的影響而對受測者產生不同的認知，以致於有兩極化的情形產生。根據 Paivio 的雙碼理論提及：當個體感官系統接收到非語文刺激，便將其編碼與原有的心像表徵連結，而後產生反應。所以藉著實物操作可以激發出受測者在心像中產生對應的圖形操作，如果實物操作不正確，在心像中可能會產生不正確的圖形操作。當問題具有目標導向時，正確的實物操作可以幫助受測者注意到動點圖形結構的變化，激發出受測者操弄心像以掌握住圖形結構的變化關係，但不正確的實物操作則可能讓受測者注意到錯誤的圖形結構，而影響建構參數式的情形。

三、語意組的受測者之縱向分析

為探討語意組之受測者的縱向發展情形，研究者將受測者先依參數式型式做一個分類，以表 5-10 表示語意組中，不同參數式型式的受測者，其關鍵因素的掌握、圖形與符號的參照情形、點軌跡的心像呈現型式、心像表徵型式的編碼情形。

表 5-10：語意組之縱向編碼分佈表

語意組	參數式型式	關鍵因素	圖形與符號參照	點軌跡	心像表徵
V2	1	I	P1 Q1 R1 S1	0	2
V3	1	I	P1 Q1 R1 S1	4	2
V7	1	I	P1 Q1 R1 S1	1	2
V8	1	I	P1 Q1 R1 S1	2	2
V12	1	I	P1 Q0 R0 S1	4	2
V1	2	II	P1 Q1 R1 S1	3	2(p)
V4	2	II	P1 Q1 R1 S0	1	2
V5	2	II	P0 Q0 R0 S0	1	2
V10	2	II	P1 Q1 R1 S1	3P	2

V11	2	II	P1 Q0 R0 S0	3E	3(a)
V13	3	II	P0 Q0 R0 S0	1	2
V14	3	II	P0 Q0 R0 S0	3P	2+3(a)(b)
V6	0	II	P0 Q0 R0 S0	1	2(p)
V9	0	0	P1 Q1 R1 S1	1	2
V15	0	II	P1 Q1 R1 S0	3	2

(一) 不同階段的建構對參數式型式的影響

研究者想探討不同階段的建構對參數式型式的影響，首先由表 5-10，先不論主碼裡的附碼補充，並將心像表徵型式含兩種主碼的類型，採較高數字者，如類型為 2+3(b)視為類型 3。依表 5-10 可以發現各階段對參數式型式的關係情形，以圖 5-17、圖 5-18、圖 5-19、圖 5-20 呈現出各階段對參數式型式的影響。

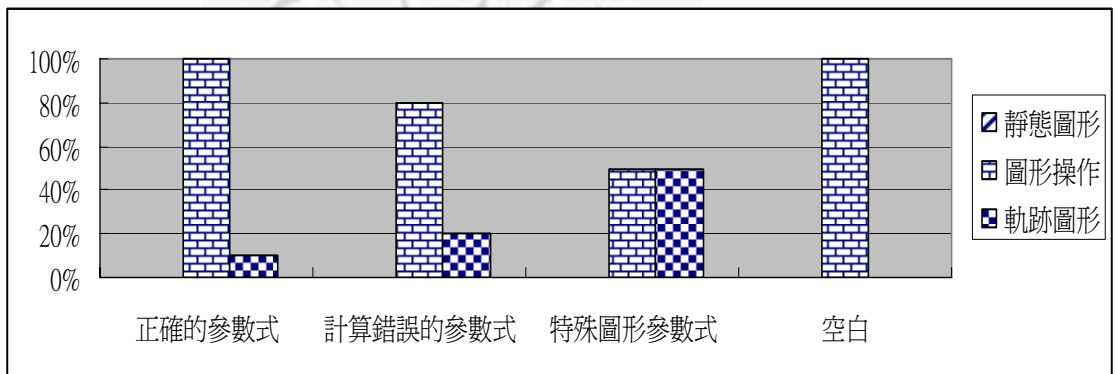


圖 5-17：語意組之參數式型式與心像表徵型式的關係圖

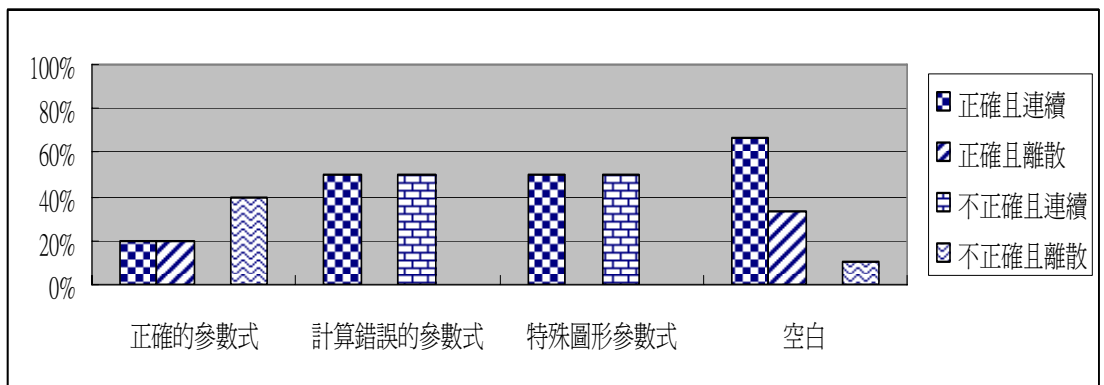


圖 5-18：語意組之參數式型式與點軌跡心像呈現的關係圖

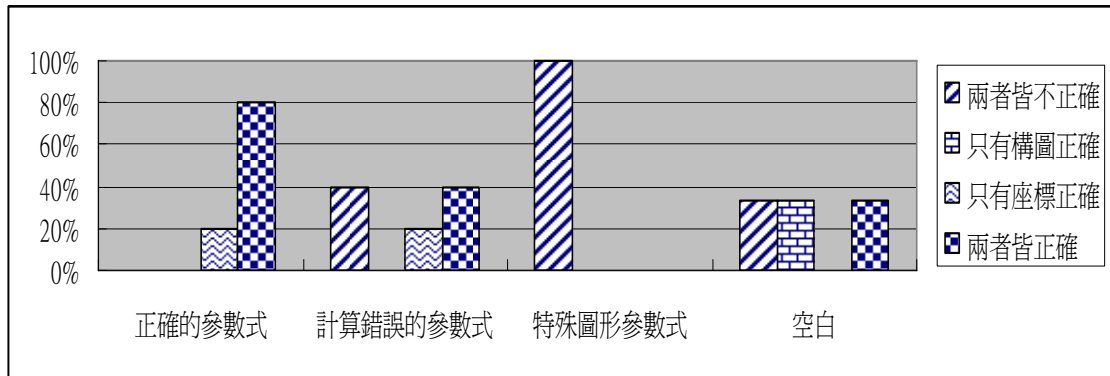


圖 5-19：語意組之參數式型式與第二種情形的構圖與座標表達的關係圖

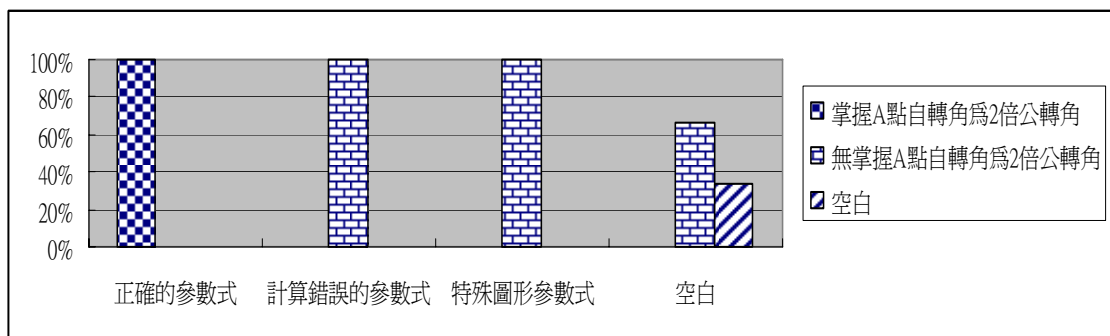


圖 5-20：語意組之參數式型式與掌握關鍵因素的關係圖

由圖 5-18 可以發現，表達正確參數式的受測者，以點軌跡為不正確且離散型所佔的比例較高，研究者觀察其它組的情形，發現在實物組中，P16 的受測者之點軌跡亦屬於不正確且離散型，且最後表達正確的參數式。這個結果顯示出不正確且離散之點軌跡的心像呈現並不會造成與符號表徵連結錯誤的問題，反而促進了符號變換。研究者認為造成此結果的原因在於，受測者雖不能馬上知道軌跡的整體圖形，但藉著不斷的畫出動點變化的圖形結構，逐漸熟悉動點局部圖形結構及動點圖形結構的變化，因此促進受測者掌握住連結符號表徵的關鍵因素。計算錯誤參數式之受測者，以點軌跡為不正確且連續型所佔的比例較高，加上研究者觀察表 5-10 中，發現在語意組中，沒有表達出正確參數式型式的受測者中，發現點軌跡心像呈現型式為不正確且連續的圖形的受測者佔了 50%，相對於表達正確參數式型式之受測者只佔了 0%，顯示出不正確且連續的點軌跡圖形會影響受測者不易順利將圖形與符號變換成功。而無法表達出參數式之受測者，其點軌跡以正確且連續型所佔的比例較高，顯示出有正確且連續之點軌跡心像呈現型式並不一定促

使受測者將圖形與符號變換成功，研究者認為造成此結果的原因可能在於，受測者可能沒有掌握到動點的局部圖形結構，並加上點軌跡圖形並不像以前所學過的圖形那樣熟悉，以致於受測者對於圖形與符號的變換顯得不知所措而無法表達出參數式。

由圖 5-17 可以發現，在心像表徵的影響性上，四種參數式型式之受測者，其心像表徵的類型以圖形操作為主，雖有部分人會產生軌跡圖形，但皆為非動圓上定點的軌跡，無關於本活動的點軌跡，所以在語意組中，心像表徵型式對參數式型式的影響不大。

由圖 5-19 可以發現，在圖形與符號的參照上，表達出正確參數式的受測者有很高比例的人數可以表達出正確構圖及座標，明顯高於其它參數式型式之受測者；計算錯誤參數式的受測者則以構圖與座標同時表達正確和同時表達錯誤為主；表達不出參數式的受測者則比較平均；表達特殊圖形參數式之受測者則都無法表達出正確構圖及座標。由以上結果顯示出，第二種情形的構圖及座標的表達狀況會影響參數式型式的表現，能掌握動圓上定點的圖形結構及表達其座標，會影響受測者表達參數式的正確性。

由圖 5-20 可以發現，在關鍵因素對參數式型式的影響上，表達正確參數式的受測者，其關鍵因素皆為掌握 A 點角度變化；計算錯誤參數式的受測者，其關鍵因素皆為無法掌握 A 點角度變化；參數式型式為 3 的受測者，其關鍵因素也皆為無法掌握 A 點角度變化；參數式型式為 0 的受測者，其關鍵因素有一半為無法掌握 A 點角度變化，另一半則為空白。顯示出語意組的受測者如果掌握住關鍵因素，就可以表達出正確的參數式型式。

由以上結果發現，除了一開始的心像表徵型式對於參數式型式沒有顯著的影響外，其餘各階段的情形都對參數式的型式有關係。

(二)不同階段的序列性發展情形

為探討語意組之受測者在五個階段的序列發展，研究者以圖 5-21 來表示語意組之受測者在五個不同階段的發展情形。

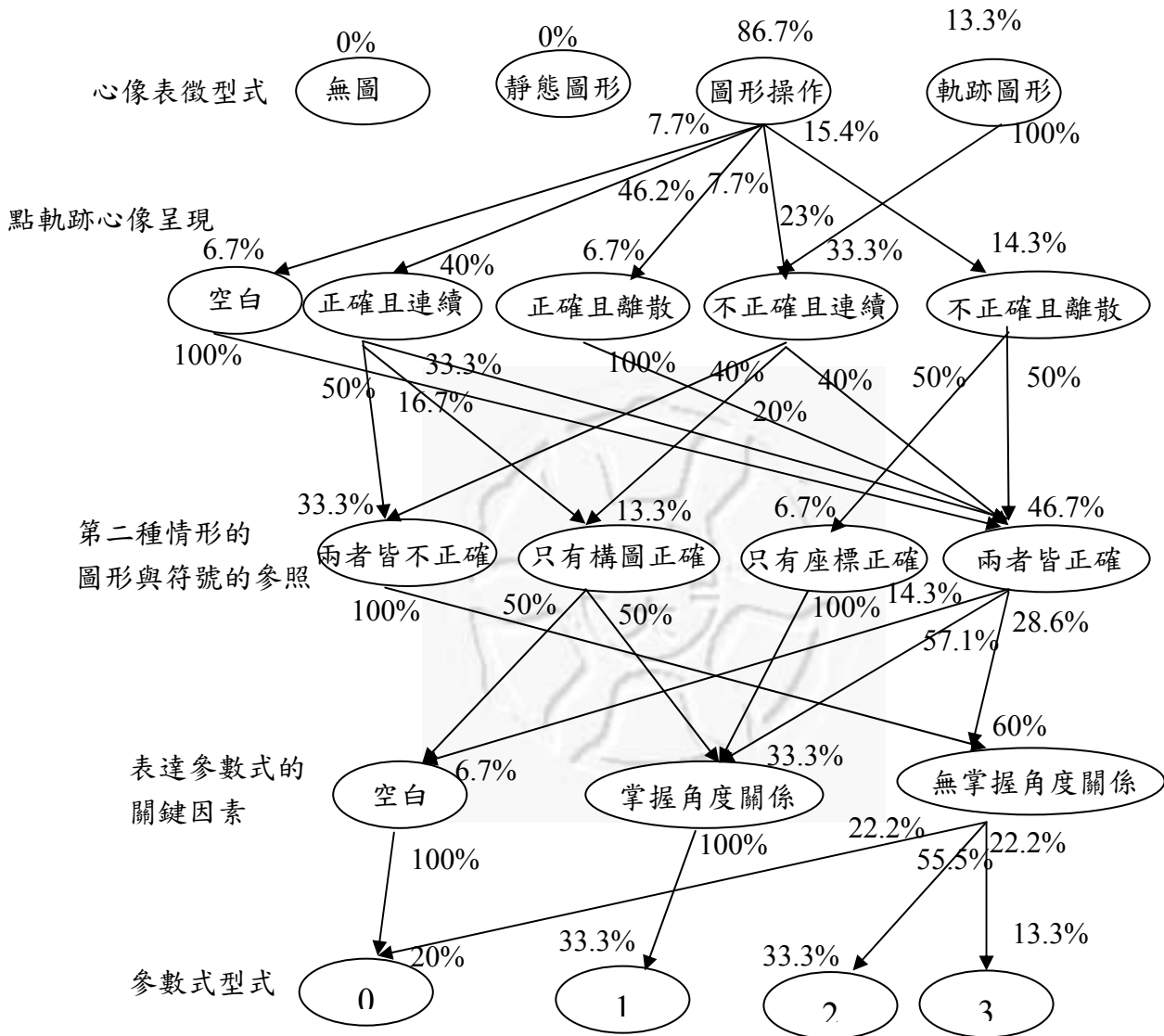


圖 5-21：語意組縱向序列圖

由圖 5-21 中，研究者發現大部分語意組的受測者在一開始的心像表徵型式主要以圖形操作為主；當問題迫使受測者注意點軌跡時，可能產生正確且連續或不正確且連續的點軌跡圖形等兩極化的情形；當問題迫使受測者注意點的局部圖形結構時，容易具有正確的圖形結構及表達正確的點座標或具有不正確的圖形結構及表達不正確的點座標等兩極化的情形產生；當問題迫使

受測者將點軌跡的圖形與符號變換時，即使前一階段具有正確的圖形結構及表達正確的点座標的受測者也只有約 60%可以順利掌握到連結符號的關鍵因素，以致於大部分的受測者不能順利的表達出點軌跡的參數式以達到圖形與符號的變換，但只要能掌握住關鍵因素的受測者，其也都能順利表達出參數式。

由上面的現象可以發現，語意描述可能會產生兩極化的效應，所以利用語意描述的方式，順利的話可以掌握住動點的圖形結構，但不順利的話，反而會產生更大的困難。在受測者的認知中，不容易掌握到動點的整體圖形，及局部圖形的結構，而即使掌握到動點的局部圖形結構，也不容易令受測者掌握到表達參數式的關鍵因素。這個現象顯示出，語意描述不太能幫助受測者掌握到動點圖形結構變化與角度的關係。

對於以上現象的結果與意義，研究者認為只藉著語意描述的過程，可能會受到受測者提取其舊經驗而產生不同的認知，以致於有兩極化的情形產生。根據 Paivio 的雙碼理論提及：當個體感官系統接收到語文刺激，便將其編碼與原有的心像表徵連結，而後產生反應。所以藉著語意描述可以激發出受測者在心像中產生對應的文字概念並參照或轉換成圖形操作。如果受測者之前沒有銅板滾動的相關經驗，在心像中可能會產生不正確的圖形操作。當問題具有目標導向時，只靠語意描述來思考的受測者，可能受制於心像操弄上的困難如不容易想像點之圖形結構的動態改變，而不太能幫助受測者注意到動點圖形結構的變化，以致於受測者不容易掌握住圖形結構與角度之間的變化關係。

四、三組綜合結果分析

從三組的受測者之各階段對參數式型式的影響結果中，順利表達出參數式的受測者，其點軌跡的心像呈現型式傾向於正確且連續型、正確且離散型、不正確且離散型、不正確且連續型之多結點封閉曲線。無法順利表達出參數式的受測者，點軌跡的心像呈現型式傾向於不正確且連續型之橢圓、圓、拋物線。

點軌跡的呈現型式會影響受測者表達參數式的情形。當點軌跡呈現出比

較熟悉的幾何圖形，受測者可能會受其影響而可能無法掌握住動點的局部圖形結構如 P20、V14；或可能掌握住動點的局部圖形結構，但無法有效利用連結符號表徵的關鍵因素，因此無法順利與符號表徵做變換如 P13。

從三組的受測者之五個階段的序列影響結果中，可以發現動畫組的受測者從心像表徵型式到點軌跡心像的呈現之過程，都比較趨向於正確且連續的點軌跡圖像，而實物組與語意組的受測者則比較有兩極化的現象。在點軌跡心像的呈現到第二種情形的圖形與符號參照之過程，動畫組比較趨向於順利將圖形與符號參照成功，而實物組與語意組的受測者則比較有兩極化的現象。在第二種情形的圖形與符號參照及設法掌握關鍵因素之過程，動畫組與實物組趨向於順利掌握到關鍵因素，而語意組的受測者則較不容易掌握到關鍵因素。在掌握關鍵因素及表達參數式的過程中，若受測者沒有掌握住關鍵因素，則都無法順利表達出參數式；若受測者有掌握住關鍵因素，動畫組與語意組的受測者都能順利表達出參數式，實物組則有少部分無法順利表達出參數式。

由三組的受測者之五個階段的序列發展情形中，會產生上述所說的相同及相異的現象。這些現象顯示說，動畫觀察可以有效地幫助受測者在每一個階段的銜接過程獲得較好的發展。實物操作及語意操作在前三個階段中，都會產生兩極化的情形，而在第三階段到第四階段中，實物操作有助於受測者掌握住關鍵因素。這些現象顯示說，實物操作可以幫助受測者掌握圖形結構變化與角度的關係，但在圖形結構的摸索過程中，則類似於語意組。

由上述所論述的現象及意義上，研究者認為動畫觀察減輕了受測者操弄心像時所造成的負荷，所以在每個階段的過渡期間，比較能有效注意到圖形結構上的特點如點的軌跡及點與角度的關係。實物操作的影響上，研究者認為受測者因個人因素關係，可能一開始尚未熟悉銅板的操作方式，而產生兩極化的情形，但在比較熟悉銅板的操作後，大部分的人可以藉著觀察銅板的情形而逐漸掌握到圖形結構改變的機制，不過可能有少數人會受到之前點軌跡心像呈現錯誤的影響，而導致即使知道關鍵因素也不會善用的情形產生。語意描述的影響上，研究者認為由於沒有參考物，所以在心像操弄上，大部分的受測者都常需經由構圖來進行參照，才能順利進行心像操弄，所以在受測者的認知上就會產生一些由文字到圖形操弄間的連結負荷，而其它組

因為有參考物，所以認知上就比較能直接在心像中進行圖形的操弄。由於語意組的受測者在心像操弄上的困難，不容易有整體動態連續的銅板滾動過程，所以不容易掌握到圖形結構改變的機制。

第三節 結果分析與討論

針對第一節中受測者心像表徵型式及操作方式、點軌跡的心像呈現方式、圖形結構與符號的參照、圖形結構與符號的變換等四部分的結果中，本節將依不同媒介工具的特質及教學上可能的意義對結果予以討論。

一、動畫組受測者的心像建構與連結符號表徵

動畫組的受測者在心像表徵型式及操作方式上，以圖形操作及軌跡圖形的心像表徵型式為主，可以激發出半數以上的人注意到整體連續的性質；在點軌跡的心像呈現方式上，86% 的受測者有正確且連續的軌跡圖形；在圖形結構與符號的參照上，大部分的人可以掌握住圖形結構並進而以符號表示特殊情形的點座標；圖形結構與符號的變換上，75% 受測者可以掌握住表達參數式的關鍵因素：A 點自轉角為 2θ ，並有效利用此關鍵因素，進而順利表達參數式。

由動畫組在此四部分的表現情形上，動畫觀察容易激發出受測者產生整體連續的心像及促進掌握軌跡圖形的結構，並幫助受測者掌握連結符號過程中所需要的關鍵因素，進而達到與符號的變換。

動畫觀察的特質為：受測者有參考物可以觀察、動畫可以整體連續的完整呈現出圖形結構的變化。因此容易幫助受測者產生整體連續的心像操弄，並促進受測者掌握住圖形結構及變化關係，進而掌握住與符號轉換的關鍵因素。

由 Vinner 所提出的概念心像來看動畫組的受測者所建構的心臟線的概念心像。心智圖形是指動點軌跡的圖形結構，概念性質則是指角度與動點圖形結構的關係。動畫觀察可以有效幫助受測者建構出正確且連續的點軌跡的心像呈現，並可以幫助受測者建立出「A 點自轉角為 2θ 」的概念性質。動

畫組的受測者利用此概念心像進而擬定出有效連結符號表徵的策略，進而容易表達出正確的參數式，達到與符號表徵的變換。

依左台益(2006)所提出的幾何認知雙碼訊息處理模式中，提到視覺化主要在表徵歷程進行，構圖主要在參照歷程中進行，推理會在變換歷程中進行。動畫觀察可以幫助受測者將動點的圖形表徵成正確且連續的點軌跡的心像呈現；受測者在兩種情形的構圖中，容易掌握住圖形結構而與符號順利參照；在參數式的推理中，容易因掌握住表達參數式的關鍵因素，進而與符號順利變換。

由動畫組受測者的心像建構與連結符號表徵的研究結果中，研究者提出利用類似本研究的動畫來教學時，教學上可能的意義。就學生的認知上，動畫可以激發學生產生整體連續的心像，所以教學上，可以避免傳達過多有關軌跡的離散訊息，使得學生在語意與心像的連結上產生困擾。就數學本質上，動畫可以促使學生掌握住圖形結構及變化關係，所以教學上，教師可能只需要提點一下如何以數學方式表達圖形的概念及連結符號過程中的關鍵因素，學生便可以容易掌握到連結符號的關鍵因素，進而幫助學生將圖形表徵變換成符號表徵。

二、實物組受測者的心像建構與連結符號表徵

實物組的受測者在心像表徵型式及操作方式上，半數以上的人只注意到局部離散的性質；在點軌跡的心像呈現方式上，有 65% 的受測者可以產生正確且連續的軌跡圖形；在圖形結構與符號的參照上，大部分的人可以掌握住圖形結構並進而以符號表示特殊情形的點座標；圖形結構與符號的變換上，70% 受測者可以掌握住表達參數式的關鍵因素，但其中有 1/5 的受測者不能有效利用關鍵因素，進而無法順利表達參數式。

由實物組在此四部分的表現情形上，實物操作容易激發出受測者產生局部離散的心像及促進掌握軌跡圖形的結構，並幫助大部分的受測者掌握連結符號過程中所需要的關鍵因素，進而達到與符號的變換。

實物操作的特質為：受測者有參考物可以觀察、受測者必須操作才能讓實物呈現出圖形結構的變化。因此受測者容易受操作因素或物件性質的影響

，而容易產生局部離散的心像操弄，且可能造成錯誤的點軌跡的心像呈現型式；由於有參考物的觀察，受測者容易掌握住圖形結構及變化關係，進而使得大部分的受測者可以掌握住與符號轉換的關鍵因素。

實物操作可以幫助受測者建構出連續的點軌跡的心像呈現，但不一定為正確的圖形。並可以幫助受測者建立出「A 點自轉角為 2θ 」的概念性質。實物組的受測者利用此概念心像進而擬定出有效連結符號表徵的策略，進而容易表達出正確的參數式，達到與符號表徵的轉換，但部分受測者可能會受到物件性質的影響如點軌跡的心像呈現型式錯誤而導致無法順利利用「A 點自轉角為 2θ 」的概念性質而擬定出有效的連結符號表徵的策略。

實物操作可以幫助受測者將動點的圖形表徵成連續的點軌跡的心像的呈現，但可能容易會產生錯誤的圖形；受測者在兩種情形的構圖中，容易掌握住第一種情形的圖形結構而與符號順利參照，較不容易掌握住第二種情形的圖形結構。在參數式的推理中，容易掌握住表達參數式的關鍵因素，但亦會受到物件性質的影響而導致無法有效利用關鍵因素，所以在符號變換上，能掌握住表達參數式的關鍵因素及有效利用關鍵因素的受測者，比較容易順利將圖形與符號變換成功。

由實物受測者的心像建構與連結符號表徵的研究結果中，研究者提出利用類似本研究的實物操作來教學時，教學上可能的意義。就學生的認知上，實物操作會讓學生容易產生局部離散的心像，所以教學上，必須先讓學生熟悉實物的操作，才能幫助學生建立出比較正確且連續的心像。就數學本質上，熟悉後的實物操作可以促使學生掌握住圖形結構及變化關係，但卻可能會受到物件性質的影響而不能專注在利用關鍵因素的符號發展。所以教學上，教師可能需要提點一下數學方式表達的概念並加強闡述軌跡圖形、圖形與連結符號間的關鍵關係，學生便可以有效掌握到連結符號的關鍵因素，進而幫助學生將圖形表徵變換成符號表徵。

三、語意組受測者的心像建構與連結符號表徵

語意組的受測者在心像表徵型式及操作方式上，半數以上的人只注意到局部離散的性質；在點軌跡的心像呈現方式上，有 40% 的受測者可以產生

正確且連續的軌跡圖形；在圖形結構與符號的參照上，約 60%的人可以掌握住圖形結構及以符號表示特殊情形的點座標；圖形結構與符號的變換上，60%的受測者不能掌握住表達參數式的關鍵因素，進而只有約 1/3 的人可以順利表達參數式。

由語意組在此四部分的表現情形上，語意描述容易激發出受測者產生局部離散的心像，且不能有效掌握軌跡圖形的整體結構，並讓大部分的受測者無法掌握連結符號過程中所需要的關鍵因素，進而無法達到與符號的變換。

語意描述的特質為：受測者沒有參考物可以觀察、受測者必須提取舊經驗來構圖，才能呈現出圖形結構的變化。因此受測者容易因舊經驗的複雜，而容易產生局部離散的心像操弄。由於沒有參考物的觀察，受測者不容易掌握住軌跡圖形的整體結構、圖形結構及變化關係，進而使得大部分的受測者可以不能掌握住圖形與符號變換的關鍵因素。

語意描述容易使部分受測者建構出離散的點軌跡的心像呈現，大部分的受測者會呈現出不正確的圖形，其中點軌跡心像呈現型式為不正確連續之橢圓、圓等熟悉的幾何圖形，則很難幫助受測者建立出「A 點自轉角為 2θ 」的概念性質。動畫組的受測者利用此概念心像擬定出連結符號表徵的策略時，容易因掌握不到表達參數的關鍵因素，進而因計算錯誤而表達出不正確的參數式。

語意描述不容易幫助受測者將動點的圖形表徵成正確且連續的點軌跡的心像呈現；受測者在兩種情形的構圖中，較不容易掌握住第一種情形及第二種的圖形結構，進而與符號順利參照的人數約佔 50%。在參數式的推理中，較不容易掌握住表達參數式的關鍵因素，所以在符號轉換上，能掌握住表達參數式的關鍵因素及有效利用關鍵因素的受測者只佔總體的 1/3。

由語意組受測者的心像建構與連結符號表徵的研究結果中，研究者認為語意描述是傳統教學上常使用的教學方法，教學上可能的意義。就學生的認知上，語意描述會讓學生容易產生局部離散的心像，所以教學上，必須充分解釋或以實例表達，才能幫助學生建立出比較整體連續的心像。就數學本質上，語意的描述不能促使學生掌握住圖形結構及變化關係。所以教學上，教師可能需要仔細說明數學方式表達的概念並加強闡述軌跡圖形、動點圖形結構、圖形結構與連結符號間的關鍵關係，才能使學生有效掌握到連結符號的

關鍵因素，進而幫助學生將圖形表徵變換成符號表徵。

