

## 第貳章 文獻探討

### 有關解題歷程的探討

解題是一思考的內在心理活動的歷程。認知心理學認為在這複雜的心理活動歷程裏，如思考、語言及解題等，都是學習歷程中。個體組織經驗形成的認知結構，而認知結構的獲得與發展方式即為認知的歷程，在此歷程中解題即為認知結構重組的主要途徑。

美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematic)在 1989 年出版的「課程與評量標準」，提到數學解題是數學教學的重心。而我國中小學的數學課程標準中，亦強調教材應選擇適當題材，以設計解題活動，使學生得到解非常見問題的思考過程之經驗，進而養成學生善用數學知識和方法解決問題的習慣。

以下就各學者所提出的解題歷程分述如下：

#### (一) Polya 的解題歷程

當談到數學解題的歷程時，我們就不得不提及研究解題的始祖 Polya，其在 1945 年出版的《How to solve it》「怎樣解題」一書，幫助教育者與研究者在發展數學解題理論及發展解題策略教學上，作了許多有意義的貢獻。在書中，Polya 將解題的過程分成下列四個步驟：

1. 瞭解問題：了解問題中未知數是什麼？已知數是什麼？條件是什麼？要求的是什麼？
2. 擬定計劃：找出未知數和已知數之間的關係，如果找不到就考慮輔助問題。想辦法獲得解題的想法。

3. 執行計劃：實行所擬定的計畫，並檢驗每一步驟。
4. 回顧：驗證所得答案。

同時也在這四個階段中分別提出一些幫助解題的啟發推理。而 Polya 也指出這只是提供一種啟發解題的方法，解題者並不是要固定地依照這四個階段來進行解題，因若遇到擬定的計劃無法執行時，就需回去重新檢視，看看題意是否有所誤解，是否忽略掉某些已知條件，重新瞭解題意後，再擬定計劃，進行解題，。

## (二) Goldin 的解題歷程

Goldin(1985) 提出數學解題是由四個高階語言系統所共同運作的一個數學解題模式，這些高階語言為內在的認知表徵系統。此模式的四個高階語言系統分別為：

1. 處理語言及語法上的「自然」語言系統，用以說明工作語法變因的影響。
2. 意像(非語文的)處理系統，用以說明工作內容及情境變因的影響。
3. 形式符號語言的運作系統，用以說明工作結構變因的影響。
4. 啟發計劃與執行的控制系統，用以說明工作行為變因的影響。

Goldin 並於 1987 年加入情意的系統為第五個語言系統，以便使此模式能夠更有效地模擬人類數學解題的結構。而情意系統主要用以表示解題者在解題歷程的感受，也扮演著監督解題進行的重要功能。

另外 Goldin 指出學生在解數學教科書上的問題時，經常設法直接轉譯問題敘述(自然語言)到算術或代數的敘述(形式符號語言)，

而對新情境的問題無法建構一個意像表徵，經常是用「關鍵字」直接促成轉譯。亦即低解題能力者進行解題活動時，經常是直接從語言表徵到形式表徵；然而高解題能力者進行解題活動時，首先是從語文到意像，最後才到形式表徵。由於低解題能力者無法以意像處理這些問題，因此導致無法成功地啟發出更有效的計劃。

### (三) Schoenfeld 的解題歷程

Schoenfeld(1980)依據 Polya 的解題策略將解題歷程分為：讀題、分析、擬定計畫、探討、執行、驗證等六階段。又在其所出版的「數學解題」一書中，認為數學解題是由下列四個部分所組成：

1. 資源：個人能立即有效應用於此問題的相關數學知識。包含個人直觀的與非形式化的知識、事實、算則和例行性的程序等。
2. 啟發：在不熟悉或非標準的問題中有進展的策略和技巧。包含畫圖、引入適當的符號、利用相關的問題、重新形成問題、逆推法、檢驗和驗證等廣泛的策略。
3. 控制：對資源與策略的選擇及管理的決策，使得個人能適當的執行活動。主要包含監督、評估、制定決策和後設認知等活動。
4. 信念系統：個人的「數學世界觀」，個人行為決定因素(不一定是意識的)的集合。個人的數學信仰能決定使用何種解題方法、使用或避免使用哪一種技巧、要花多少時間或作多少努力在這個問題上等。信仰是操作在資源、啟發與控制的情境上。

#### (四) Lester 的解題歷程

Lester(1980)以六個階段來描述數學解題，並且強調各個階段雖不同，但卻有相互的關係存在。茲分述如下：

1. 問題的察覺(problem awarness)：解題者對所面臨的情境，能察覺到是一個問題，且有想解決的意願。
2. 問題的理解(problem comprehension)：此階段有兩個子階段：
  - (1) 轉譯(translation)：解題者將問題提供的訊息譯成自己可以了解的語句。
  - (2) 內化(internalization)：解題者從問題中選取自己需要，對解題有幫助的相關訊息。
3. 目標分析(goal analysis)：將問題變形以便應用熟悉的策略與技巧。
4. 計畫的發展(plan development)：解題者擬定一個攻擊計畫，認清可行的策略，仔細的運算。
5. 計畫的執行(plan implementation)：解題者徹底試驗擬好的計畫。
6. 過程和解答的評估(procedures and solution evaluation)：不僅檢查答案是否有意義，且從目標分析到發現解答的整個過程皆屬於評估範圍。

#### (五) Mayer 的解題歷程

Mayer(1986)從認知的觀點提出成功解出數學問題所需的步驟如下：

1. 問題表徵(problem representation)：將文字或圖案轉換成心理表徵，包含：
  - (1)問題轉譯：解題者需要有能力將問題中的每一個句子轉譯成某種內在的心理表徵。而在轉譯的過程中，解題者必須了解每個句子的意義(即所謂的語言知識)。
  - (2)問題整合：解題者能夠將問題中的每個陳述句整合而成連貫一致的問題表徵。而在問題整合的歷程中，需要解題者能夠認識問題的類型(即所謂的基模知識)。另外在整合的過程中，解題者也需要知道哪些資訊與解答有關，而哪些資訊與解答無關。
2. 問題解決(problem solution)：將問題的心理表徵進行到最後答案的過程包含：
  - (1)解題計劃和監控：解題者必須能夠想出和監控解題計劃，並保持計劃到找出答案的線索。
  - (2)解題執行：當順利進行完成前面步驟後，最後就是解題者要能夠應用算術的法則來進行求解。

另在 Simon(1980)的研究中指出：數學解題的困難經常來自問題的不適當表徵(在瞭解問題時)，而不是在解題過程中。然而大部分的教學則強調求解的演算程序，而將如何應用程序與如何表徵問題因此 Mayer 建議要求學生用他們自己的語言來重述問題的已知條件和解題的目標，這樣可能可以改善轉譯困難的情況。

綜合上述學者對於解題歷程的探討，我們知道解題歷程的第一步為瞭解問題，瞭解問題後方能繼續進行以下的步驟，此時就需要語言和語意的知識。因而教師們在命題時，所用的語句與布題的情

境就有相當的重要性，它將影響學生對題意之解讀的恰當與否。

### 有關語言方面

語言不是生理學上的遺傳而是從已經會使用語言的人那邊學來的。因此，語言有其傳統性質，是一代一代的傳習下去的，這種特性使人類的知識累積起來，而且可以透過別人的或前人的經驗去適應環境而不必每一件事都得經過親身的經驗才能學到，所以說語言的使用有利於知識的累積，而知識累積的速度則更能促使我們對環境的控制與適應(謝國平，民 74)。除此之外，謝國平在其給生活語言的能力下的定義中提到：生活語言除了語音、詞彙以外，還有能力判斷句子的合法性，句子的同義性、多義性，以及句子省略部分的語意判斷等。

通常在學習一種新的語言時，首先須學習該種語言的語彙或詞彙所代表的意義，之後再學習它所特有的語句規則或語言結構。這裡，我們可以由小孩子學習語言的方式，觀察到這一點，如果對於該種語言的語詞，認識不清時，就可能造成語意混淆或語句結構的邏輯誤差(郭夢瑤，1995)。在現今的高中新教材中，邏輯語言對學生而言是一全新的語言模式(舊教材並未特別獨立這單元)，突然接受此種語言模式對學生會造成何種影響？該是我們必須去做深入瞭解的。

Vygotsky 認為“語言在思維上佔有一席之地且有統整的(integral)功用，但卻質疑思維和言辭(speech)的發展並非平行，而當兩種發展曲線彼此交合時，就形成了另一種新的行為

表現。”，此後學生的學習開始由言辭的語法所主控，甚至可以正確的使用一些從屬子句(subordinate clauses)，如：“因為”、“若 則”、“但是”等等，但就如同 Piaget 指出，這並不代表學生已經領悟這些(從屬子句)對應於邏輯(數學)文法的語彙形式的意義(Austjn & Howson, 1979)。從 Piaget 的說法可知，生活語言和數學語言之間確實有一段認知的距離存在。

對於這樣的認知距離，語言在這兩者--生活脈絡和數學內容--之間扮演什麼樣的角色呢？Cuevas(1989)認為語言的功用為：在特定文化環境裡，對數學內容的一種溝通媒介。Laborde(1990)進一步表示，語言在數學思維發展中，扮演兩種功能：表徵的意義和溝通的意義。這結果顯示：在數學教育裡，語言的角色是不容被忽略的。

劉蘭英和孫全洲(民 79)曾指出『語言表達的交際功能首先來自反應人們對客觀事物認識的詞語的意義，掌握和辨析詞語的意義是提高語言表達效果的最基本條件。』而詞義間的關係是多樣的：有的是同義、近義或類義的關係，有的是反義的關係，等等。

郭夢瑤(1995)在其“語彙在列代數式問題所扮演的角色”這篇研究論文中，有一些重要的結果：

1. 學生在讀題時，有時會過分專注語彙的口語意思，而忽略本身所代表的數學意義，就造成列式時的錯誤。
2. 有時學生會因為命題中的某個語彙的刺激，而聯結到某個解題類型，但這種聯結有時是不恰當的。

在數學語言中，擁有許許多多的數學語彙，這些語彙各自

有它本身的意義與性質，而其間的關係也具有多樣性。但在數學的文字敘述中也有一些是令人含糊不清的語彙型態，如：“結果”、“情形”，“完全不”、“不完全”等易造成學生的誤解；又如：“依序”、“來回”、“進出”等易造成多解的情形。當學生在學習這些語彙時，是否會有所偏差？是否會對其解題有所影響？目前在我國尚無正式的研究報導。

### 有關生活經驗方面

洪瑞鎡(2000)曾提到「我國多數的學生對於數學知識與運算技巧可以瞭解和使用，但對於非教材內常見的問題，與生活上實際應用需要量感、數感的試題，以及需要自行產生推論和解釋過程的問題，學生的表現則顯得薄弱不熟悉。較缺乏與生活經驗相連結與數學溝通的能力。」

近年來，國內一些教育團體常建議教育部與大考中心，應盡量多出一些生活化的考題，不要都只是一些制式化的題型，當然，這些試務中心也頗順從眾意的，已盡量在改進。

但是，每個人的生活背景不全相同，在不同的環境中生活其所認知的也不盡相似。因此命題的生活化，雖是一個較活的測試模式，也可使試題更多元化，不致流於枯燥乏味且比較有趣味性。然，命題老師所認知的會否只偏向某些同學而與某些同學是不盡相同呢？此未可預知，如此一來是否會造成所謂的不公平甚或洩題情事呢？故在此對命題老師來說是很難拿捏且對他們也是不公平的。

學生對一些較生活化的試題的答題表現比較薄弱的原因，真如



前面所說：“較缺乏與生活經驗相連結與數學溝通的能力” 洪瑞鎡 (2000)，亦或與命題老師的生活背景不同所致，此未必盡然。

### 對於排列的相關研究

綜觀國內的一些研究對高中課程的探討實是不多，若是要找深入一點的，那就更少了。當然，有排列組合這個主題的研究亦復如是，僅能找到幾篇有關的報導，大致可分成以下兩類：

#### (一) 提出不同的教學方法

許振忠 (1996) 利用電腦的輔助將排列組合中的題目之結果一一列出來，給學生一個“清楚的”答案。

賴惠穗 (1988) 利用「多元序組判別法」 - 幫助學生判別排列組合的類型，對台中師院五專部三年級的學生進行實驗教學，並於試後做面談，發現受試者解題錯誤的原因有：題意的理解、無法判定條件改變所造成的影響、無關因素的干擾、未深入思考、放棄以及方法的錯誤配對。

#### (二) 探討學生的解題錯誤類型

張哲榮 (2001) 及 劉宏輝 (1994) 均曾對高三學生進行測試，來探討學生解排列組合時可能的錯誤概念及類型。劉宏輝 於試後再利用面談的方式深入了解學生在解題當時的想法，並分析學生產生錯誤的原因，而得到以下幾點重要結論：

1. 學生計算時錯誤的主要原因是，學生對於各種不同的計數方法所使用的時機混淆不清，造成使用錯誤的計數公式。例如：組合問題用排列的方法計算，相異物的重複排列用相同物的重複選取計算。
2. 學生解重複排列問題，常將不可重複的東西作重複計數。
3. 對於相同物的重複選取問題，學生普遍感到困擾，原因是學生不知道符號  $H(m, n)$  中  $m$  與  $n$  要怎麼判斷。
4. 學生計算環狀排列問題時，由於不了解該種排列的特性，往往無法與環狀排列的實際變化配合，造成排列計數時，沒有考慮環狀排列或過度考慮環狀排列。
5. 學生的分類能力不佳。對於需要分成好幾類計算的問題，學生容易犯的錯誤：(1) 分類不完全的錯誤；(2) 重複分類；(3) 正確分類後分類項計數錯誤。
6. 關於綜合問題，學生的主要錯誤是不知道要用什麼計數方法計算，造成學生用猜測、找關鍵字等方法來決定自己的解題策略。
7. 對於類似的問題，學生往往未注意問題條件的變化，將不恰當的計數方法類推到類似問題作計算。
8. 對於排列組合這種實際生活問題，學生解題時往往未考慮組合時的實際情況，造成答案與實際的情況不合。

整體來看，從上述研究者的研究，我們可知排列組合這單元對高中生來說確實是一大困擾。如對題意的理解與否產生疑義；與實際生活問題相關的問題考慮不清，但為何會造成這些困擾的研究仍相當缺乏；又其所針對的是利用不同的教學法或對高三學生做解題的

錯誤類型分析，這些學生都已受傳統或教師自己的教學方式所影響，或許想法已因此改變，而學生本身真正的想法如何又未可知？所以有必要做進一步的探討，若因此能釐清學生產生困擾的原因，不也可以作為教科書的編寫及教師教學等等之參考。