同分母真分數加減運算的教學建議

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系暨研究所教授

壹、 前言

近年來我國的教育改革變動快速。2000 年教育部公佈的九年一貫數學學習領域暫行綱要，編輯委員站在國民教育為大眾教育的立場，強調應該讓 80%的學生能夠學會，能力較好的學生則可以補充額外的教材；加上制度的變革，使得數學學習領域的上課時數比以前少（參見表一），因此數學課程比八二年版及六四年版慢了一點。此舉讓一些關心國家競爭力的學者感到憂心。學者的分析發現，暫行綱要的課程比美國加州課程慢了一至兩年的時間，加上學者對坊間所謂建構式教學的疑慮，使得數學學習領域課程綱要修訂的編輯委員大幅異動。至 2003 年教育部公佈九年一貫數學學習領域課程綱要，其內容與暫行綱要的內容差異可謂相當大。依據研究者的比對，課程綱要的內容比課程暫行綱要的內容多了許多，且有些內容的教學時程又提前一至兩年的時程，例如有關分數除法的教學課程暫行綱要放在七年級教，課程綱要則放在六年級教，兩者相差了一年。兩者之所以有如此的差距，是課程綱要的編輯委員考慮到國際競爭力的問題，因此把數學教材的難度提升 到前五、六成學童學習為主(民生報，2003)，其他的學生則建議利用補救教學幫助學生學習。

表一：九年一貫與八二年版數學學習領域每週學習節數一覽表

年級	一	二	三	四	五	六	七	八	九
九年一貫	2~3	2~3	2.5~3.75	2.5~3.75	2.7~4.05	2.7~4.05	2.8~4.2	2.8~4.2	3~4.5
彈性節數	2~4	2~4	3~6	3~6	3~6	3~6	4~6	4~6	5~7
八二年	3	3	4	4	6	6	3	4	2+(2)

通訊作者：
李源順 leeys@tmtc.edu.tw

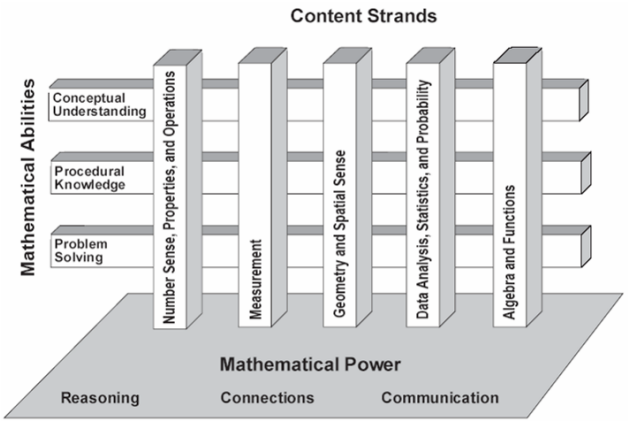
國科會為了因應此一課程改革，認為應有實徵的研究來支持國家課程的訂定，因此推動各數學單元的詮釋計劃。希望開發各單元的教學素材、教學活動、以及評量建議，做為課程改革的實徵資料與建議依據。

本研究在整個詮釋計劃的帶領下，負責分數四則運算單元的詮釋研究。本文則是有關同分母真分數加減法的相關研究成果。

本研究分析國內外相關教育與評量文獻(NAGB, 2002; 教育部, 2000，2003; 陳竹村、林淑君和陳俊瑜，2001; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002; Lesh, 1987)，發現同分母真分數加減法的教學素材與評量，應著重情境結構、語意結構、運算結構等數學內容，強調概念性知識、程序性知識與解題性知識等數學能力的培養，以及推理、連結、溝通等數學威力的培養。因此，我們設計了相關的評量活動，了解學生的概念之後，提出相關的教學活動建議。

貳、 教學素材

本研究探求可以做為研究理念的文獻，發現美國 National Assessment of Educational Progress [NAEP](NAGB, 2002)從 1996 年起到 2000 年、2003 年的數學教育成就評量，就提出數學內容(Content Strands)、 數學能力(Mathematical Abilities)、數學威力(Mathematical Power)三個向度的評量架構(參見圖一)。雖然它是一個評量的架構，但也適合做為教學的架構，因此，我們以此架構為基礎，做為探究同分母真分數四則運算的教學實驗理念架構。



圖一　　美國 NAEP 的數學評量架構圖

一、數學威力

現今數學教育的理念是要培養學生的數學威力(Mathematical Power)，因

此，美國 NAEP(NAGB, 2002)在 1996 年之後的評量架構增列了此一向度。此一向度的內涵，在我國九年一貫數學領域課程暫行綱要和課程綱要(教育部，2000，2003)中也可以看到。

美國 NAEP(NAGB, 2002)認為數學威力是***學生有全面性的能力能結合和使用數學知識去進行探究、臆測、邏輯推理、解決非例行性的問題；能進行數學的溝通；以及能在數學脈絡之內，或其他的學科脈絡進行連結***。因此，NAEP(NAGB, 2002)認為數學威力是由推理(Reasoning)、連結(Connections)和溝通(Communication)三個因子組成。

依據 National Council of Teachers of Mathematics[NCTM](2000)的學校數學原則與標準 (Principals and Standards for School Mathematics)：

- ***推理是指學生能認知數學的基本內容，學生能進行探究與數學臆測，學生能發展對數學論證的評價，學生能選擇使用不同的推理和證明方法。***
- ***連結是指學生能理解並進行數學概念間的連結，學生能了解數學概念是環環相扣的體系，學生能在數學外的領域辨認和使用數學。***
- ***溝通是指學生能透過溝通強化數學思維，學生能和同學、老師及他人溝通他們的數學思維，學生能分析和評估他人的數學思維和策略，學生能使用數學語言表達他的數學概念。***

我們認為培養學生的推理、連結和溝通能力不是短暫時間內可以達成的，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是只在正規的數學內容教學之外進行。因此，我們將探求一種可以在數學課室中培養學生數學威力的教學脈絡。

二、數學能力

美國 NAEP(NAGB, 2002)認為數學能力可以看成學生在特定的數學知識內展現他的數學能力。數學能力指的是概念性了解(Conceptual Understanding)、程序性知識(Procedural Knowledge)和解題(Problem Solving)三個因子。我國大學入學考試中心(林福來，1994)在進行學生試題分析時也採用此一數學能力做為分析的向度。

依據 NAEP(NAGB, 2002)的詮釋：

- ***概念性知識的了解是指學生能辨識以及利用模型、圖形、或符號等不同方式***

來表達出某一數學概念，或是舉出此概念的相關例子或是反例作為說明；此外，他應能知道一些數學原理（如加法原理、乘法原理）並將原理間做相互連結、比較、以及整合應用。

- ***程序性知識是指學生能在計算的過程中，選擇適當的程序並正確解題；同時，能用模式或符號來檢驗所使用的程序是否正確。***
- ***解題性知識是指學生能從資料中逐漸辨識並形成問題;他能瞭解這些資料的充分性與一致性，並能運用相關知識、推理能力，以及採取適合的策略，來找出答案；同時，更能去驗證這些答案的合理性與正確性，並將之推廣。***

我們同樣認為學生的數學能力的培養不是短暫時間內可以達成，它需要持久的進行。同時，最好也能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是只在正規的數學內容教學之外進行。因此，我們，將探求一種可以在數學課室中培養學生數學能力的教學脈絡。

三、數學內容

美國 NAEP(NAGB, 2002)所強調的數學威力與數學能力都和數學內容知識息息相關。因為數學內容知識涵蓋數感、性質與運算，測量，幾何與空間，資料分析、統計與機率，以及代數與函數等範疇，本研究無法全部顧及，只能聚焦在數感、性質與運算範疇中的同分母真分數的加減法的內容知識方面。

本研究為了對同分母真分數的加減運算做適切的詮釋，除了找尋文獻中相關的研究之外，也探究相關的書籍和學者的觀點，了解應如何進行教學，以便提出詮釋的證據。

(一) 概念性了解

在同分母真分數加減法的概念性知識方面，本研究認為應該***連結***學生的舊經驗 -- 分數概念，讓學生了解同分母真分數加減法的概念性了解是運用分數概念來進行***溝通***。此時才能夠培養學生類化分數加減法概念為其它概念的學習，培養學生了解如何利用既有概念進行學習新概念的數學***推理***，連結既有概念與新概念，以及利用既有概念溝通新概念的數學威力；同時，培養學生概念性了解的數學能力。

1. 教學時程

在分數概念的內容知識方面，課程暫行綱要(教育部，2000)的第一階段(一

到三年級)能力指標 N-1-7 說明「在等分好、整體 1 能明顯出現之具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能以真分數(分母在 20 以內)描述內容物為單一個物的幾份，並能延伸真分數的意義，進行同分母真分數的合成、分解活動(和<1)。」課程綱要(教育部，2003)的三年級能力指標 3-n-09 則說明「能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。」我們發現兩者對於教學時程的看法一致。

2. 情境結構

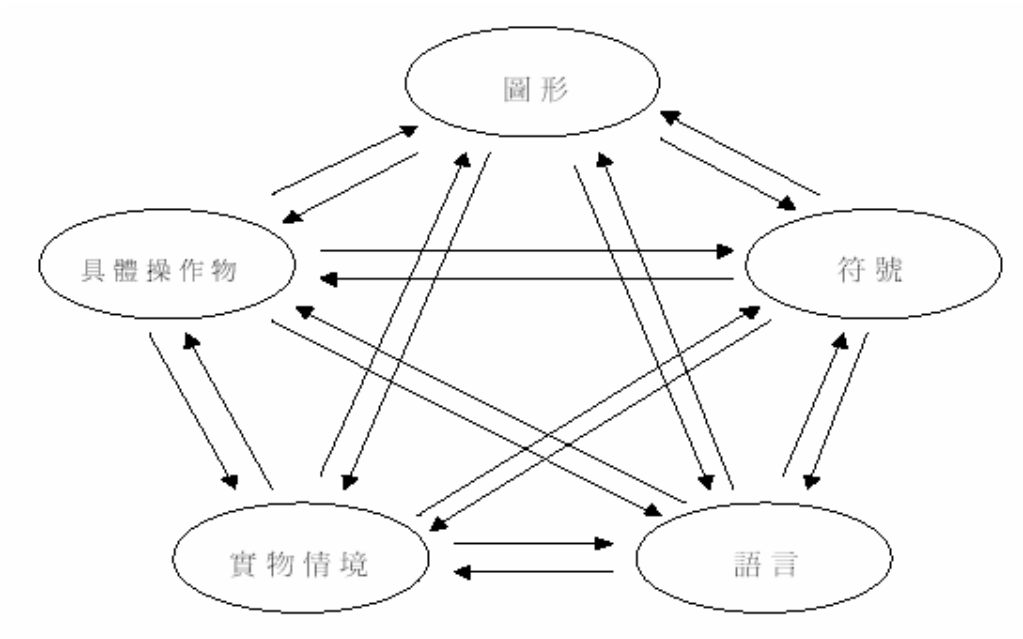
從學者們(Behr, Harel, Post. & Lesh, 1992；教育部，2000，2003; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002)的分析，分數概念的教學的情境結構可以分成一維連續量、二維連續量、離散量等情境。

- ***一維連續量指像一一條繩子、緞帶、彩帶等在還沒分割前是一個整體的一維物件。***
- ***二維續量指像蛋糕、披薩等在還沒分割前是一個整體的二維物件（一般我們在畫圖時，都把蛋糕等用二維平面的圓形或方形替代)。***
- ***離散量指像一盒雞蛋有十顆等一開始即以離散的個物存在的物件。***

依據研究者的詮釋，***連續量情境是學生學習分數概念的合理情境***(一般分數概念都會先從二維連續量入手，一維連續量又可以連結到數線概念)，***離散量則是讓學生連結整數除法與分數概念***（即分數表示整數相除的意涵）***的合理情境***。因此，這些情境結構，在同分母真分數加減法概念的佈題上，我們認為有其重要性，應延續採用。

3. 表徵

表徵是將不同事物以不同種類符號來代表的歷程，就認知心理學的訊息處理角度來看，是指訊息處理的過程中，將訊息編碼轉譯成另一種形式，以便處理的歷程（張春興，1989）。學者（Bruner,1966；Lesh, Post, & Behr,1987；Kaput,1987; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno, 1987; 蔣治邦，1994）曾從不同的角度，對表徵加以區分。本研究認為表徵的應用應該著重在概念性的溝通上，因此採用 Lesh（1987）的表徵分類：實物情境、具體操作物、圖形、口語、符號。如下圖

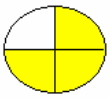
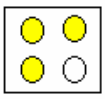


圖二　Lesh（1987）的表徵分類

Lesh（1987）的表徵分類可以讓學生經由實物情境、具體操作物、圖像等具體情境與人溝通分數加減法的概念性知識，再慢慢抽象化為口語、書寫符號等表徵。我國課程暫行綱要的編輯學者們(教育部，2000)認為分數概念的學習，實物情境與具體物操作適合低年級學生，當學生進入高年級以後已可以經由圖像表徵進行學習。

從學者們(教育部，2000，2003; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002)的分析發現，在上述內容物與情境結構之上，對分數概念的口語、書寫符號等表徵可以區分為三種，以 $\frac{3}{4}$ 盒蛋糕為例：

- ***可以從續連量的部份／全體(或離散量的子集合／集合)的觀點說成「把一盒蛋糕平分成 4 份，其中的 3 份」***
- ***可以從單位分數計數的觀點說成「3 個 $\frac{1}{4}$ 盒蛋糕」***
- ***也可以從強調單位量的觀點說成「一盒蛋糕的 $\frac{3}{4}$ 」。***

至於圖像表徵方面，可以使用  、 、  等方式來表徵。

(二) 解題性知識

本研究從文獻中探求分數加減法問題解題性知識的相關研究，發現這方面的研究不多。黃俊惟(2002)利用網路做為學生對分數加減法問題的擬題與解題進行探究。王瑞慶(2002)利用紙筆評量對國小六年級學童在分數加減法問題的解題行為進行探究，他將問題分為同分母和異分母等六類。周柏達(1998)曾問卷調查六年級學生在分數概念、計算、例行性文字題和非例行性問題的學習表現。

有學者(Fuson, 1992；謝堅、蔣治邦和林淑君，2002）從對整數加法的文字題進行有系統的語意結構和運算結構進行分類，但對分數加減法文字題的語意結構進行分類就沒有看到。

1. 語意結構

學者（Fuson, 1992；謝堅、蔣治邦和林淑君，2002）將整數加減法文字題的語意分類為四種基本的型態：

- ***合併型（Combine）：兩量同時併存於語意之中。例如，小明有 7 顆糖果，小華有 8 顆糖果，請問兩人合起來共有幾顆糖果？***
- ***改變型（Change）：已有一量，再加入（或拿走）一量的語意問題。例如，小明王有 5 顆糖果，小華給了他 3 顆糖果後，小明現在有幾顆糖果？***
- ***比較型（Compare）：兩量比較的語意問題。例如，小華有 3 顆糖果，小明比小華多 6 顆糖果，請問小明有幾顆糖果？***
- ***平衡型（Equalze）：已有甲量，乙量再加入或拿走一量後，甲乙兩量相等的語意問題。例如，小明有 7 顆糖果，小華有 8 顆糖果，小明再多幾顆糖果就和小華一樣多了？***

Morales, Shute, Pelligrino(1985)針對三年級與五、六年級在不同的整數加減題型研究中發現，最簡單的是改變型問題，最難的是比較型問題。

語意結構的區分也影響著我國教育，如在 82 年版（謝堅、蔣治邦和林淑君，2002）以及課程綱要(教育部，2003)的整數教材中，都將整數文字題的語意結構區分成改變型、合併型、比較型、與平衡型等四類問題。但有學者(陳竹村、林淑君和陳俊瑜, 2001)的見解認為學生先前「在整數加減問題的經驗累積，使得學生已將這些問題（併加型、追加型、加法標準算式填充題等等）歸納為加法問題，故在分數加法問題中已不須要再分為併加型、追加型等(p32)」。

本研究認為整數加減法的語意結構也應該做為學習同分母真分數加減法，

甚至小數加減法的解題性知識的分類結構。同時，站在學科內連結的角度，我們認為學習應該有它的發展性與延續性。因此除了從分數概念的內容物的特性區分之外，也應該從語意結構做為區分，讓在低年級時未能充份了解比較型問題與平衡型問題的學生能在較高的年級有機會再一次學習。讓學生了解同分母加減法問題的題型和他先前所學的整數語意結構相同，而進行整數加減法與分數、加減法解題之間連結，讓學生可以利用舊經驗來進行問題的溝通與推理。

2. 運算結構

再者，學者們(教育部, 2003)發現「85 年後出版的教科書上出現的“算式填充題”一詞，算式填充題是一種較高階的計算練習，可以讓學生在解題時，對數與運算性質有更深入的理解，這是在國小引介算式填充題主要目的。同時，在解題時，把問題恰當表述成正確的算式填充題（或未知數算式），對國小學生並不是容易的課題」。算式填充題可以區分為被***加(減)數未知、加(減)數未知以及和(差)數未知***三種情形。也有學者(教育部, 2003)將上述 ***“數”***的名稱改為 ***“量”***的稱呼，並分類如下：

- ***改變型問題***分為***起始量未知(即，加(減)數未知)、改變量未知(即，加(減)數未知)以及結果量未知(即，和(差)數未知)***
- ***合併型問題***分為***部份量未知(即，加(減)數未知、加(減)數未知)和總量未知(即，和(差)數未知)***
- ***比較型和平衡型問題***分為***基準量未知(即，加(減)數未知)、比較量未知(即，加(減)數未知)以及差異量未知(即，和(差)數未知)***

等三種情形。本研究用老師比較容易記的“數”的名稱（事實上用“量”的稱呼比較貼切)，稱為加減法的運算結構。

此外，我們從現今的教育理念得知學生應具有解答多餘資訊問題的能力，因此我們建議可以時放入一兩題相關問題，以了解學生的解題能力。

(三) 程序性知識

程序性知識的教學與評量也是重要的一環。我國九年一貫數學領域的編輯委員(教育部，2003)認為數學運算或計算並不只是機械式計算操作而已。所謂能熟練數學的運算或計算，係指在能夠理解數學概念或演算規則的情況下，所進行的純熟操作。這種透過理解並能將觀念與計算結合的能力，才是演算能力。某類

型數學問題演算的純熟，常能同時促使新舊數學觀念的連結與落實。演算亦是學童獲得新數學經驗的方法，新的經驗將會再形成學生下一階段新主題學習所需的具體經驗。

參、 學童概念

在評量學童的同分母真分數加運算概念時，一般考慮到的評量架構可以分為兩個維度。數學能力和數學知識(NAGB, 2002)。數學能力(NAGB, 2002)分為概念性知識、程序性知識和解題性知識。數學知識(陳竹村、林淑君和陳俊瑜，2001; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002)則是同分母真分數的加法和減法問題；它的變因如上面的素材分析，可以區分為分數的情境結構 – 一維和二維續量、離散量，加減運算的語意結構 – 合併、改變、比較、平衡型，算式填充題的運算結構 – 未知數在被加(減)數、加(減)數、和(差)，以及表徵(Lesh, Post, &Behr, 1987) – 實物情境、具體操作物、圖形、口語、符號。(在紙筆評量時我們只能使用圖形表徵和符號表徵兩種)。

我們對同分母真分數的加減運算和相關概念進行文獻探討(教育部，2000，2003; Cramer & Henry，2002；龐嘉芬，2001；Herman, Ilucova, Kremsova, Pribyl Ruppeldtova, Simpson, Stehlikova, Sulista，2004；林碧珍，2000；呂玉琴，1991a, 1991b, 1993；黃俊惟，2002；王瑞慶，2002；周柏達，1998；Fuson, 1992；楊壬孝，1987, 1988, 1989; Lukhele, Murray & Olivier, 1999；)之後，認為三年級國小學童進行同分母真分數加減概念探究可以使用上述的評量架構做為教學活動設計和評量的架構。因為利用上述變因可以設計的題目太多，同時學生在一堂課的時間內不可能把所有題目做完，因此某些變因可以做為評量之用。但是將試題分成兩份試卷，仍未能測完所有變因。兩份問卷的施測樣本是立意取樣的對台北市、台北縣和台中縣某國小隨機取樣兩班學生進行施測，問卷一的學生有 200 名，問卷二有 190 名。由於學童在兩份問卷上相同應用問題上的答對率在 t-test上都沒有顯著差異，因此我們將它們合在一起進行分析。

一、程序性知識 – 計算題

在程序性知識的計算上面，我們出了四題 $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ ，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=$ ，$\frac{73}{99}-\frac{37}{99}=$ ，

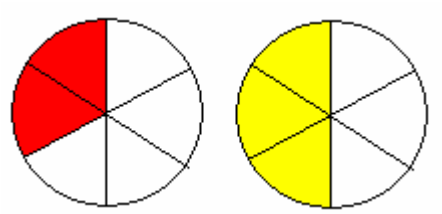
$\frac{17}{50}+\frac{28}{50}=$ 。其中試卷一的加法問題在前，減法問題在後，試卷二的次序如上。結果發現加法問題答對率 65%，減法問題的答對率 52%，兩者相差 10%以上，在統計上有顯著差異。經由答案分析發現，對於減法問題有 22%以上的學童用加法的方式計算（包括加法算對與算錯)。顯示學童沒有留意是加法問題或是減法問題。

此外，從數字大小來看學生的答對率發現沒有顯著差異。這表示學童在分數加減法的計算上，數字大小對他們沒有太大的區別。

在學童的迷思概念方面，加法問題主要出現在分母加分母與分子加分子的概念性迷思中約 20%。少部份學生只取分子相加，例如，$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ 2+3=5；或看成小數相加，例如，$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ 6.3+6.2=6.5；或將所有數字相加，例如，$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ 3+6+3+6=17，等因沒有運用正確分數概念而產生的迷思（概念性迷思)。減法問題主要出現在上面所談的將減法問題看成加法問題(包含加法計算錯誤)。少部份學生使用分子減分子，分母減分母，例如，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{4}{0}$；分子相減時大數減小數，例如，$\frac{73}{99}-\frac{37}{99}=\frac{44}{99}$；分子相減，但分母相加，例如，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{4}{20}$；只取分子相減，例如，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=$ 7-3=4；看成小數相減，例如，$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=$ 10.7-10.3=0.4，等概念性迷思。

至於學生加減法小心算錯的程序性迷思佔少部份。

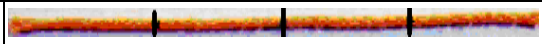
學童會有「分母加分母與分子加分子」的迷思，可能的原因是沒有考慮問題情境和分數的意義而將整數加減的概念過度一般化，以及考慮分數的意義但過份強調幾份中的幾份（沒有考慮全體量 – 一個）而受了圖形表徵(例如，畫兩個圓各塗 2 份和 3 份)的影響所致。



學童會有只取分子相加減的原因可能是老師過份強調部份量或者老師所“口述”的單位量（一個蛋糕）相對時間久遠而被學生遺漏掉所導致，例如，3 塊加 2 塊等於 5 塊。因此，建議老師應強調「一個蛋糕平分成 6 塊，6 塊中的 2 塊加上 6 塊中的 3 塊，就是一個蛋糕平分成 6 塊中的 5 塊」，同時運用圖形表徵讓學童理解。

二、程序性知識 － 文字題

對學童的學習而言，加法的併加型和添加型問題，以及減法的拿走型和併減型問題是一種基本的合成、分解題型，最容易被學童憶取與老師進行教學所列舉，因此，我們把它看成是程序性知識的文字題。

試卷	概念	圖形	內容物	具體抽象	維度	數字	答對率
1-09	爸爸拿一條彩帶綁兩個禮盒，他把這條彩帶平分成 4 段，用 $\frac{2}{4}$ 條彩帶綁圓形禮盒，用 $\frac{1}{4}$ 條彩帶綁方形禮盒，請問爸爸用去多少條彩帶？	無	有	連續	一維	小	57.5%
		併加型，和數未知:2/4+1/4=( )					
2-09	 爸爸拿一條彩帶綁兩個禮盒，他把這條彩帶平分成 4 段，用 $\frac{2}{4}$ 條彩帶綁圓形禮盒，用 $\frac{1}{4}$ 條彩帶綁方形禮盒，請問爸爸用去多少條彩帶？	有	有	連續	一維	小	65.8%
		併加型，和數未知:2/4+1/4=( )					
1-16	爸爸買了一箱橘子，這一箱橘子有 100 個，爸爸先送 $\frac{32}{100}$ 箱給伯伯，後來又送 $\frac{24}{100}$ 箱給伯伯，請問爸爸送給伯伯多少箱橘子？	無	有	離散		大	56.0%
		添加型，和數未知:32/100+24/100=( )					
2-14		無	無	離散		大	63.2%

	爸爸買了一箱橘子，爸爸先送 $\frac{32}{100}$ 箱給伯伯，後來又送 $\frac{24}{100}$ 箱給伯伯，請問爸爸送給伯伯多少箱橘子？	添加型，和數未知:32/100+24/100=( )					
10	店裏有一些年糕，賣了 $\frac{3}{5}$ 盒年糕以後，還剩下 $\frac{1}{5}$ 盒年糕，請問，店裏原來有多少盒年糕？	無	無	連續	二維	小	63%
		拿走型，被減數未知：( )-3/5=1/5					

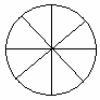
從上面五題，我們發現學童的答對率在 56%-66%之間，答對率不盡理想，顯示三年級學童對同分母真分數的加減問題，仍有待加強。此外，在語意結構方面，添加型、併加型和拿走型的答對率沒有顯著差異；在情境結構方面，一維連續量、二維連續量和離散量的答對率沒有顯著差異；第 1-16, 2-14 題看，內容物為單一個物和沒有內容物對答對率沒有影響。再從第 1-19, 2-19 題看，有沒有圖形表徵對答對率沒有影響；第 1-09, 1-16 題看，數字大小對答對率沒有影響。

在學生的迷思概念方面，發現犯了加法問題使用減法，或者減法問題使用加法的解性迷思學生佔 6%以內，顯示學生最大的錯誤仍然在分數加減法的概念性迷思。

三、解題性知識 － 文字題

由於學童比較少接觸比較型和平衡型的問題，因此，我們把它介定為解題性知識的文字題。

試卷	概念	圖形	內容物	具體抽象	維度	數字	答對率
1-13	爸爸買了一盒蘋果送給爺爺吃，這一盒蘋果有 6 個，昨天爺爺吃了 $\frac{2}{6}$ 盒，今天爺爺吃了 $\frac{1}{6}$ 盒，請問爺爺今天比昨天少吃了多少盒蘋果？	有	有	離散		小	62.5%
		比較型，多吃，差數未知:2/6-1/6=( )					
2-13	爸爸買了一盒富士蘋果送給爺爺吃，這一盒蘋果有 6 個，昨天爺爺吃了 $\frac{2}{6}$ 盒，今天爺爺吃了 $\frac{1}{6}$ 盒，請問爺爺昨天比今天多吃了多少盒蘋果？	無	有	離散		小	66.3%
		比較型，少吃，差數未知:2/6-1/6=( )					
1-12		無	無	離散		小	57.5%

	小華的鉛筆盒裡只有鉛筆和原子筆,鉛筆盒裡有 $\frac{5}{12}$ 打鉛筆,有 $\frac{3}{12}$ 打原子筆，小華的鉛筆盒裏鉛筆比原子筆多多少打？	比較型，多多少，差數未知: 5/12-3/12=( )					
2-12	小華的鉛筆盒裡只有鉛筆和原子筆,鉛筆盒裡有 $\frac{5}{12}$ 打鉛筆,有 $\frac{3}{12}$ 打原子筆，小華的鉛筆盒裏原子筆比鉛筆少多少打？	無	無	離散		小	54.2%
		比較型，少多少，差數未知: 5/12-3/12=( )					
1-11	 班上慶生會，小明吃了 $\frac{2}{8}$ 個蛋糕，小華比小明多吃了 $\frac{1}{8}$ 個蛋糕，請問小華吃了多少蛋糕？	有	無	連續	二維	小	61.0%
		比較型，多吃，被減數未知: ( )-2/8=1/8					
2-11	班上慶生會，小明吃了 $\frac{2}{8}$ 個蛋糕，小明比小華少吃了 $\frac{1}{8}$ 個蛋糕，請問小華吃了多少蛋糕？	無	無	連續	二維	小	36.8%
		比較型，少吃，被減數未知: ( )-2/8=1/8					
1-14	爸爸拿一條塑膠繩綁圓形和方形的禮盒，他用 $\frac{45}{96}$ 條塑膠繩綁圓形禮盒，綁圓形禮盒的塑膠繩比綁方形禮盒的塑膠繩長 $\frac{18}{96}$ 條，請問爸爸用多少條塑膠繩綁方形禮盒？	無	無	連續	一維	大	26.0%
		比較型，比長，減數未知: 45/96-( )=18/96					
2-16	爸爸拿一條 96 公分長的塑膠繩綁圓形和方形的禮盒，他用 $\frac{45}{96}$ 條塑膠繩綁圓形禮盒,綁方形禮盒的塑膠繩比綁圓形禮盒的塑膠繩短 $\frac{18}{96}$ 條，請問爸爸用多少條塑膠繩綁方形禮盒？	無	有	連續	一維	大	41.1%
		比較型，比短，減數未知: 45/96-( )=18/96					
15	有一袋花片，紅色花片有 $\frac{48}{79}$ 袋，黃色花片再多 $\frac{13}{79}$ 袋就和紅色花片一樣多。請問黃色花片有幾袋？	無	無	離散		大	50%
		平衡型，再多，被加數未知： ( )+13/79=48/79					

從上面九題，我們發現比較型，差數未知的問題，不管是比多或比少的問題(1-12, 1-13, 2-12, 2-13)，答對率在 54%-66%之間。其中僅有 2-12 和 2-13 的答對率有顯著差異；兩者都是比少用減的問題，且 2-12 和 2-13 各有 16%和 8%的學童犯了使用加法的解題性迷思。

對被減數未知的比較型問題，比較量未知(又稱少吃用加型)的問題(2-11)和基準量未知（又稱多吃用加型）的問題(1-11)，答對率分別是 37%和 61%，有顯著的差異，且分別有 39%和 9%的學童犯了使用減法的解題性迷思，顯示少吃用加型的問題對學童而言仍有相當的困難。

對減數未知的比較型問題，比較量未知(比長用減型)的問題(1-14)比基準量未知(比短用減型)的問題(2-16)的答對率分別是 26%和 41%，有顯著差異，且分別有 46%和 27%的學童犯了使用加法的解題性迷思，顯示比長用減型的問題對學童而言仍有相當的困難。

至於被加數未知的平衡型問題(15)學童的答對率為 50%，介於少吃用加型的問題(2-11)和多吃用加型的問題(1-11)之間。

研究發現，三年級學童的同分母真分數加減問題的解題性知識方面，在比長用減(1-14)和比少用加(1-11)的問題答對率偏低，只有 37%-26%，仍有待加強。

四、概念性知識 － 文字或畫圖題

為了探究學童是否了解同分母真分數的加減法的概念性知識，我們設計了四個問題，期望學童能利用文字或畫圖的方式表達他們的了解。

題	概念	概念性		程序性	只寫算式或答案	算錯或空白
		畫圖	文字			
17	一條綠色積木和六個白色積木一樣長。$\frac{2}{6}$條綠色積木和$\frac{3}{6}$條綠色積木合起來是多少條綠色積木？請用圖形或文字說明你是怎麼知道的？	25.3%	1.5%	4.4%	25.4%	43.3%
18	家裡有$\frac{3}{5}$瓶牛奶，小英喝了一些牛奶以後剩下$\frac{1}{5}$瓶，請問小英喝了多少瓶牛奶？請用圖形或文字說明你是怎麼知道的？	15.2%	1.2%	1.8%	29.7%	52.0%
19	請你用圖形或文字說明$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$的結果。	30.1%	0.7%	4.6%	20.1%	44.4%
20	請你用圖形或文字說明$\frac{38}{50}-\frac{12}{50}$的結果。	8.8%	1.1%	8.8%	27.7%	53.6%

從 17-20 題的答題情發情形發現，只有 31%-10%的學童能夠用畫圖或者文字表達的方式回答他們對同分母真分數加減法文字題的概念性了解。大部份的學童(69%-82%)不是只給答案就是算錯。從概念性回答的學童中發現，大部份的學童較能使用圖形表徵的方式回答問題，同時對數字小的問題回答的情形比數字大的問題來得好。

肆、 教學活動建議

從上面三年級學童對同分母真分數加減法的答題情形和文獻探討，我們研擬了一份同分母真分數加減法的教學活動建議。

一、相關概念結構

整數的加減問題是學童第一個學會的合成、分解問題，同分母真分數的加減問題則是第二個合成、分解問題。學童必須跳脫以前兩個整數相加、減的框架，重新從分數的概念檢視同分母真分數的加、減問題，如此才了解為何分母相同時，分子相加的概念性知識，而免於誤入分母相加(減)和分子相加(減)的過度一般化的迷思。

從數學威力的觀點，學童的學習要連結既有的知識、經驗出發學習，此時學生便可以知道如何在課堂之中進行推理與溝通概念。因此，分數加、減法的問題概念學習應該承襲分數概念的情境結構和整數加減法概念的情境結構、四則運算的運算結構、以及概念學習的表徵結構。唯有如此學生才能學會概念性知識、程序性知識和解題性知識的數學能力。

在分數的基本概念方面可分為三，以$\frac{3}{8}$為例：部份／全體（或子集合／集合）-- 即一個物體平分成八等分，其中的三份；單位分數的計數 – 即 3 個$\frac{1}{8}$，以及一個物體的相對比率概念 – 即一個物體的$\frac{3}{8}$。其中前兩個概念可以做為同分母真分數加減法的概念性詮釋。

在承襲整數加、減法的語意結構方面，可以分為合併型(或稱併加、併減)、改變型(或稱添加、拿走)、比較型、和平衡型（及它們的變型）。

在四則運算的運算結構方面可以分為被加(減)數未知、加(減)數未知、以及和(差)數未知。

在概念學習的表徵結構方面，Lesh, Post, & Behr(1987)把它區分為具體物表徵、教具表徵、圖形表徵、口語表徵、符號表徵。

二、教學建議

從學童的測驗結果和教學素材分析，我們對於同分母真分數加減的教學有

如下的建議：

(一) 整合分數概念和整數加減概念進行教學

由於分數加、減法的概念學習承襲分數概念和整數加減概念而來，因此老師教學時若承襲將兩個概念整合進行教學，此時學童的學習脈絡會很清晰，他可以運用以前所學會的概念來學習新的知識，他的學習效果理應更佳。

再者假如有學童無法理解分數問題為何要使用加法或使用減法時，老師可以先連結以前整數加、減問題，一方面提醒學童它是先前概念的擴展，一方面檢驗學童的先前概念是否鞏固。若學童的先前整數加減的概念不是很穩固，因為他的年齡已稍長，理應更容易理解整數加減的概念，因此可藉此時機補救其先前概念，進而學習新概念問題。

假如學童不知道如何解釋分數加減的結果的概念，老師可以連結分數的概念，讓學童了解在詮釋加減結果的概念時，是運用他已學會的相關概念，也就是分數概念，加以解釋即可。當學童理解每個新概念的詮釋都有此脈絡可循時，學童的學習效能會增加許多。

(二) 留意概念一般化的時機

測驗結果顯示，有些學童會過度一般化整數加減而出現「分母加(減)分母，分子加(減)分子」的情形，因此老師進行教學時一開始應強調分數加減法概念的理解，同時給與更豐富的生活實例，直到老師有意圖的檢驗程度較差的學童都能使用分數概念來解釋分數加減的結果。否則學童的分數概念無法和分數加法概念相結合，很快就會退回到先前所學的概念，而產生運用整數概念來解決新的問題的迷思概念。

在同分母真分數加減法概念的一般化，我們認為理論上應有兩種途徑：(1). 運用許多連續量、連散量等情境讓學生了解，它都可以同一種同分母真分數的加減法算式表示；(2). 給與許多單位分數的內容物為一個個物、多個個物、甚至非整數個個物的情形，都可以同一種同分母真分數的加減法算式表示。但是第二種情形涉及等值分數或者學生更難以了解的概念，因此，我們建議老師至少要運用第一種情形讓學生能充分一般化。

(三)　強調表徵間的連結

依據 Lesh, Post, & Behr(1987)的表徵結構，老師在教學時，應強調實物表徵、具體操作物表徵、圖形表徵、口語表徵、符號表徵之間的連結，因為學童在學習同分母真分數的加減法題時，已是三年級了，此時學童已漸漸脫離需要實物與具體操作物的時期，因此老師在教學時可以同時加強圖形表徵、口語表徵、符號表徵之間的連結。同時也應讓學童了解，當老師在評量時，可以運用他在課堂上所熟悉的圖形表徵或者把口語表徵文字化來說明他所了解的概念，才不會出現上述大部份學生只寫算式，不知道如何表達他的概念性知識。

(四)　留意學童是否正確接收到教師所用的話語

測驗結果顯示，雖然有些學童可以使用分數概念來學習分數加減法，但由於他所接收到的訊息和老師所傳達的有差距而出現迷思概念。以 $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=$ 為例，雖然老師在教學時會強調「一個蛋糕被等份成六份，六塊(份)中的三塊(份)是 $\frac{3}{6}$」，但是學童可能只接收到「六塊(份)中的三塊(份)」，因此當出現兩個圓形圖時，學童就會想成是 12 塊(份)中的 5 塊(份)；或者老師在解釋時，雖然說：「一個蛋糕被平分成六塊，兩塊加三塊變成五塊」，但學童只接收到「兩塊加三塊變成五塊」，因此結果變成 3+2=5。當然也有學童不小心的連結到小數概念，而將分數轉換成小數來計算。

諸如此類的問題，我們建議老師在教學時，應該特別留意自己的話語學童是否正確接收到，以避免學童的迷思概念。我們建議老師在教學時也要適度的強調 $\frac{3}{6}$ 個蛋糕的意思是對一個蛋糕而言，或者也可以用另外一句話說「它是一個蛋糕的 $\frac{3}{6}$」。當然有些老師會認為後者的用語對三年級學童而言太過抽象。我們認同這一點，但是假如我們只是把它想成另一種用語，或者利用「$\frac{1}{2}$ 個蛋糕」是「一個蛋糕的一半」，也就是「一個蛋糕的 $\frac{1}{2}$」並將它推廣，或者學童就不是覺得太過抽象了。

(五) 加減問題混在一起教學

測驗結果顯示有 22%的學童在做減法問題時把它當做加法來做。為了避免有些學童看到加法問題，便以為往後的問題都是加法問題的迷思，或者加、減符號仍然不很清楚的學童有進一步澄清符號的意義，我們建議老師在進行教學時，不必一定要全部教完加法問題之後，再教減法問題，而應加減法的問題混合一起教，甚至先教減法問題也無妨。畢竟學童對於整數的加、減語意結構的概念已學習過，且加、減的概念是互逆的概念，此時不需有先後之分。

三、教學示例

我們建議老師在教學時，可以從復習舊概念、學習新概念、最後再進行課程的總結。

(一) 複習舊概念

老師進行同分母真分數的教學前，建議先複習分數概念，讓學生清楚的了解兩種分數的概念性說明方式。

佈題一：今天是小明生日，爸爸買了一個蛋糕，小明全家共吃了八分之三個蛋糕，請問八分之三個蛋糕可應該怎麼寫？又可以怎麼說小明吃了多少？（二維續量）

本問題主要的目的希望學生能將口語表徵「八分之三」轉換成符號表徵「$\frac{3}{8}$」。再者，也希望學童能在全班溝通討論的過程中，清楚的知道「八分之三個蛋糕」說法有三種，「一個蛋糕平分成八份其中的三份」，「三個$\frac{1}{8}$」，以及「一個蛋糕的$\frac{3}{8}$」。同時，不管老師是否使用實物表徵或具體操作物表徵，老師後都應該讓學生利用圖形表徵畫出來，讓學生能將分數概念與圖形表徵做連結。

由於本問題只是檢驗學生的分數概念，因此不需要在否等分的“實作”上打轉。所以學生在回答分數概念時，特別留意學生是否說出平分，必要時可以利用明顯不平分的圖示，製造學生的認知衝突。至於是否讓學生實作八等分切割，並無所謂，只要在切割不是明顯不平分即可，同時，老師也強調學童雖然沒有畫得很平分，但我們可以將其看成平分。

(二) 學習新概念

學生在進行新概念的學習時，老師的佈題應考量情境結構、語意結構、運算結構的變化，使學生在豐富的學習環境中成長。限於篇幅，本研究只提出幾個重要的佈題供老師參考，老師在實際教學情境中，可以適時依據上述教學素材進行變化，例如，變化為離散量的情境等問題。

佈題二：萍萍班上要佈置教室，她買了兩條一樣長的紅色和黃色緞帶，班上用了$\frac{1}{10}$條紅色緞帶和$\frac{3}{10}$條黃色緞帶佈置公佈欄，請問班上共用了多少條緞帶？你是怎麼知道的？(和未知的一維連續量的合併型加法問題)

本題故意使用兩條一樣長的緞帶，目的在引起對單位量（一條）不是很清楚的學生的認知衝突。***假如老師認為一開始便這樣佈題，對學生而言太難，老師可以在此題之前先佈一個二維連續量改變型的加法問題(例如，爸爸買了一個蛋糕回家，萍萍早上吃了$\frac{3}{10}$個蛋糕，下午又吃了$\frac{1}{10}$個蛋糕，請問萍萍共吃了多少個蛋糕？你是怎麼知道的？)。之後再進行此題的教學。***

我們認為培養學生的解題能力非常重要，所以建議老師可以先利用個別實作、小組討論、或者全班溝通討論的方式進行教學。個別實作的方式是希望學生能獨自思考，想到可以運用先前所學的概念 － 分數概念 － 進行解題。小組合作學習則希望學生在小組討論的過程中，討論出答案為何，又要如何解釋這個結果，同時也希望程度好的學生能從概念性的解釋方面教導低成就的學童。全班溝通討論則希望老師有意圖的要求特定程度的學生回答，以合理臆測有多少學生能自行解題。

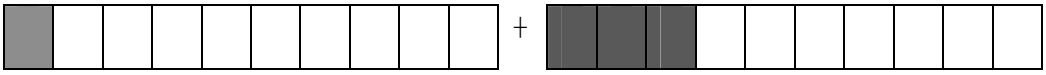
由於我國的社會環境，使得有些學生會先於老師教學之前就在安親班學到同分母真分數的加減法問題，然後太早就使用「分母相同，分子相加減」的口訣來回應老師。在此，我們建議老師應檢驗這些學生是否知道如何使用概念性的知識來回答問題。

無論如何，我們希望在討論的過程中能針對有迷思概念（$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{20}$或者其他迷思）的學生細膩的進行認知衝突，增強他的學習效果。當然要能讓這位學

生充份了解其迷思之處，以及正確的觀念為何，這樣才不會讓他產生學習的挫折，反而讓他感受到需要學習的內在動機。因此，老師應該把不同做法呈現在黑板上，然後讓有迷思概念的學生先解釋，再和其他正確回答的同學的答案對比或者回答，製造結果不同的認知衝突，然後在各自辯解的過程中澄清概念。了解清楚的了解他是忽略了單位量 － 一條 － 所造成的結果。假如學生一直堅持他的迷思概念，此時老師可以反問學生「$\frac{3}{10}$條」可以怎麼說？（連結所復習的舊概念），讓他了解是一條的$\frac{3}{10}$，而$\frac{4}{20}$則不一條的$\frac{4}{20}$。

老師在教過程中，也應讓學生了解「$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}$」的解釋方式，其實就是利用分數概念來解釋的，也就是說，我們可以這樣回答「$\frac{1}{10}$條就是把一條緞帶平分成十份其中的一份，$\frac{3}{10}$條就是把一條緞帶平分成十份的三份，合起來是一條緞帶被平分成十份的四份，所以是$\frac{4}{10}$條」，也可以回答「$\frac{3}{10}$條就是 3 個$\frac{1}{10}$，所以$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}$就是 1 個$\frac{1}{10}$加 3 個$\frac{1}{10}$，就是 4 個$\frac{1}{10}$，或者利用分數唱數$\frac{1}{10}$到$\frac{4}{10}$」。

當然在進行教學時，老師也別忘了連結到圖形表徵，也就是畫出下圖（最好是由學生自己畫出以診斷學生的迷思），故意讓有迷思概念的學生犯錯，製造認知衝突。在全班溝通討論的過程中，老師應留意往往是概念正確的學生回答最大聲，把有犯錯的聲音給掩蓋著了。因此，老師若發現沒有人說答案是$\frac{4}{20}$條，可以在學生回答$\frac{4}{10}$條後，再提問有沒有不同答案的，然後等個一分鐘，並眼觀四方。我們相信老師會有驚奇的發現。



佈題三：一箱橘子有 65 顆，爸爸買了一箱，總共送出$\frac{54}{65}$箱的橘子給隔壁的伯伯家和阿姨家，其中送給伯伯家$\frac{26}{65}$箱，問送給阿姨家幾箱橘子？（加數未知的離

散量合併型減法問題）

因為利用運算結構、情境結構、語意結構所進行的佈題變化有許多種，我們不必每一種都佈題，可以留一些做為學生的學習成效評量之用。因此，老師可以視學生的學習情形，考慮否在佈題三之前再佈一些較為簡單的問題。

學生在解答佈題三的時候，是否要求學生先列算式，我們沒有太多的意見。因為即使學生列完算式充題之後，他的解題策略也應回到生活情境，了解將全部送出去的橘子扣掉送給伯伯家的橘子之後，就是送給阿姨家的橘子（因為這樣可以訓練學生的抽象思考能力）。

我們之所以運用較大的數字主要是因為，我們覺得較大的數字應該不會影響學生對題意的了解。即使較大數字影響學生對題意的了解，老師應明白的讓學生了解他可以把數字換成較小的分數，甚至是換成整數（也就是連結先備知識）來了解題意，然後可以了解如何解題。

我們之所以運用較大的數字的另一個原因是要讓學童了解當數字較大時，並不需要運用圖形表徵來進行解題，否則會畫得很累。此時，他便需要運用兩種分數概念(65 份中的 54 份，54 個 $\frac{1}{65}$)來說明。

另外，我們也可以趁機了解學生在整數進退位問題是否出現困難。

佈題四：小明有 $\frac{5}{12}$ 打鉛筆，小明比小華多 $\frac{1}{12}$ 打鉛筆，問小華有幾打鉛筆？（減數未知的離散量減法問題）

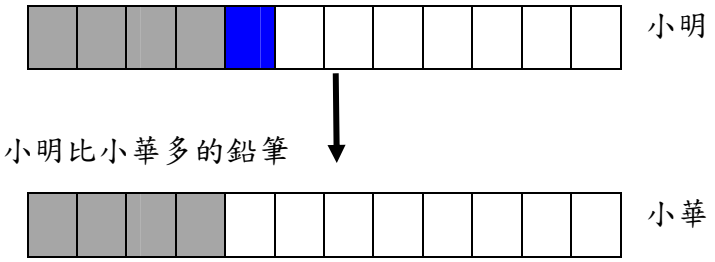
由於三年級學生應該可以了解比較型的問題，因此我們建議老師教學時應佈一些這樣的問題讓學生了解。當然，假如老師擔心有關比較型問題的佈題，一開始就佈這樣的問題，對學生而言太難，同時教學時間又允許的話，可以先佈一題差數未知的比較型問題（例如，小明有 $\frac{5}{12}$ 打鉛筆，小華有 $\frac{1}{12}$ 打鉛筆，問小明比小華多幾打鉛筆？）。

對於此時，老師可以視教學的目的讓學生個別實作練習，了解大約有多少學生還無法了解比較型的問題。對於這些學生，老師應讓學生了解，他應該連結先備知識，也就是把問題簡化為整數，然後利用整數來了解題意。假如老師發現

有些學生仍然無法了解簡化成整數問題的比較型問題，此時，老師應該利用圖形表徵讓學生了解題意。

當然，對於此數較小的比較型問題，老師也可以運用圖形表徵讓學生感覺更具體。

假如有同學問道，小華的鉛筆怎麼是小明的鉛筆（$\frac{5}{12}$打）去減掉小明比小華多的鉛筆（$\frac{1}{12}$打），此時老師應讓利用一對一對比的圖形表徵，讓學生了解它已經做了減法語意的推廣，也就是小華的鉛筆是和小明的鉛筆（$\frac{5}{12}$打）減掉（$\frac{1}{12}$打）鉛筆以後的鉛筆一樣多。



（三） 新概念的總結

佈題五：一條綠色積木和六個白色積木一樣長。$\frac{2}{6}$條綠色積木和$\frac{3}{6}$條綠色積木合起來是多少條綠色積木？請用圖形或文字說明你是怎麼知道的？

在總結同分母真分數加減法的問題的同時，應該出一些檢驗學生是否了解概念性知識的問題，之後再讓學生察覺同分母真分數加減的口訣，並進行抽象的數字計算問題。因此，我們應佈一些類似佈題四的問題，讓學生個別實作，讓了解他只是把他知道的想法利用先前所學的圖形表徵，或者口語寫成文字而已。我們的研究告訴我們，學生很不喜歡在評量上寫太多的文字，因此，老師應該認同學生使用圖形表徵來表達它對同分母真分數加減法的了解。

另一方面，國際上的評量也會出一些類似要學生用文字表達他對概念的了解的問題，因此，我們也應讓學生了解他也應該有能力把他所知道的概念用文字表達出來。當然這樣的問題在一次的評量過程中，不應出得太多。

伍、 結語

假如老師們在教學之前，對教學素材進行類似本文的分析，然後在教學過程之中，在關鍵的地方讓學生發表他的想法、進行解題。我們相信在這樣的教學脈絡下，一定可以培養學生的溝通、推理、連結等數學威力、一定可以培養學生的概念性知識、程序性知識和解題性知識的數學能力。我們也相信在這個脈絡下，學生的學習是有發性的。

有關本文所提的教學建議，我們將在適當時機進行教學實驗。其實驗成果，他日再行發表。

誌謝：本文是國科會專題研究計劃編號：92-2522-S-133-002-的部份結果。感謝在本研究中所提及的所有參與教師以及學童們分享他們的學習經驗，有了他們的參與使本研究得以順利完成。文中論點為作者所有，不代表國科會。

陸、 參考資料

王瑞慶(2002)。*國小六年級學童在分數加減法問題的解題研究*。屏東：國立屏東師範學院碩士論文(未出版)。

呂玉琴(1991a)。影響分數概念表現的因素。*台北師院學報，4*，573-606。

呂玉琴(1991b)。分數概念：文獻探討。*台北師院學報，4*，587。

呂玉琴(1993)。影響分數二分之一概念的因素。*國民教育，33*，2-11。

周柏達(1999)。*國民小學數學科新課程實驗班與普通班分數學習表現之比較研究*。台北市：台北市立師範學院國民教育研究所碩士論文(未出版)。

林碧珍(1990)。從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的 分數 概念。*新竹師院學報，4*，295-347。

林福來(1994)。*八十三年度基礎科目數學科試題研發工作計劃*。台北市：大學入學考試中心。

教育部(2000)。*國民中小學九年一貫數學學習領域課程暫行綱要*。台北市：教育部。

教育部(2003)。*國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要*。台北市：教育部。

陳竹村、林淑君和陳俊瑜(2001)。*國小數學教材分析 — 分數的數概念與運算*。

台北：國立教育研究院籌備處。

黃俊惟(2002)。***網路擬題練習在解分數加減法問題上之研究***。嘉義：國立嘉義大學碩士論文（未出版）。

楊壬孝(1987)。***國中小學生分數概念的發展***。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告（編號：NSC-76-0111-S-003-10）。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

楊壬孝(1988)。***國中小學生分數概念的發展***。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告（編號：NSC-77-0111-S-003-09A）。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

楊壬孝(1989)。***國中小學生分數概念的發展***。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告（編號：NSC-78-0111-S-003-06A）。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

蔣治邦(1994)。由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。出自台灣省國民教師研習會 91994)：***國民小學數學科新課程概說—低年級***。台北：台灣省國民教師研習會。

謝堅、蔣治邦和林淑娟(2002)。***國小數學教材分析 － 整數的數量關係***。台北：國立教育研究院籌備處。

龐嘉芬(2001)。***國小高年級學童分數概念與能力之研究***。屏東：國立屏東師範學院碩士論文(未出版)。

Bruner,J.S.(1966). ***Toward a theory of instruction.*** Cambridge, MA:Harvard University.

Cramer, K.; Henry, A., (2002) Using manipulative models to build number sense for addition of Fractions. In National Council of Teachers of Mathematics (2002). ***2002 Yearbook: Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions.*** (pp. 41-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dufour-Janvier, B.; Bednarz, N.; & Belanger, M. (1987) .Pedagogical considerations concerning the problem of representations . In C. Janvier(Ed.), ***Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*** (pp.109-122). Hillsdale , NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Fuson, K.C.(1992). Research on whole number addition and subtration. In D.A. Grouws(1992). ***Handbook of research on mathematics teaching and learning***

(pp.243-275). Macmillan publishing company, New York.

Greeno ,J.G .(1987). Instructional representations based on research about understanding . In A.H. Schoenfeld (Ed.) , ***Cognitive Science and Mathematics Education*** . Hillsdale .

Herman, J.; Ilucova, L.; Kremsova, V.; Pribyl,J.; Ruppeldtova, J.; Simpson, A.; Stehlikova,N.; & Sulista, M.(2004). Images of fractions as processes and images of fractions in processes. ***Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, 4***, 249–256.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.). ***Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp.***19-26). Hillsdale, NJ: Erbium.

Lesh, R.; Post, T.; & Behr, M. (1987). Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), ***Problem of representation in teaching and learning of mathematics*** (pp.33-40). Hillsdale,NJ:Erlbaum.

Lukhele, R. B.; Murray, H.; & Olivier, A.(1999). Learners' understanding of the addition of fractions. ***Paper presented at the 5th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA)***, Port Elizabeth, 5-9 July 1999.

Morales, R.V.; Shute, V.J.; & Pelligrino, J.W.(1985). Developmental difference in understanding and solving simple mathematics word problems. ***Cognition and Instruction, 2***, 41-57.

National Assessment Governing Board(2002). ***Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress.*** National Assessment Governing Board U.S. Department of Education

National Council of Teachers of Mathematics（2000）. ***Principal and Standards for school mathematics***. Reston:VA：NCTM.