

中學生通訊解題第八十九期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

8901

設 m, n 為實數， $f(x) = x^2 + mx + n$ ，若不等式 $|f(x)| > 2$ 在區間 $[1, 5]$ 上無解，

- (1) 求 $f(1) - 2f(3) + f(5)$ 的值。
- (2) 求所有的數對 (m, n) 。

簡答：(1) 8 ; (2) $(-6, 7)$

參考解答：

$$(1) f(1) - 2f(3) + f(5) = 1 + m + n - 2(9 + 3m + n) + 25 + 5m + n = 8$$

(2) 【方法一】

假設存在這樣的實數對 (m, n) ，則 $|f(x)| \leq 2$ ，對一切 $x \in [1, 5]$ 恆成立，分別取 $x = 1, 3, 5$ ，得

$$|f(1)| = |1 + m + n| \leq 2,$$

$$|f(3)| = |9 + 3m + n| \leq 2,$$

$$|f(5)| = |25 + 5m + n| \leq 2$$

又 $f(1) - 2f(3) + f(5) = 8$ ，則

$$8 = |f(1) - 2f(3) + f(5)|$$

$$\leq |f(1)| + 2|f(3)| + |f(5)|$$

$$\leq 2 + 2 \times 2 + 2 = 8$$

$$\text{所以 } \begin{cases} f(1) = f(5) = 2 \\ f(3) = -2 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 1 + m + n = 25 + 5m + n = 2 \\ 9 + 3m + n = -2 \end{cases},$$

得 $m = -6, n = 7$ 。

當 $m = -6, n = 7$ 時， $f(x) = x^2 - 6x + 7$ 在 $x \in [1, 5]$ 上滿足 $|f(x)| \leq 2$

綜上所述，所求實數對 $(m, n) = (-6, 7)$ 。

(3) 【方法二】 (王同學的解法)

由題意 $-2 \leq f(x) = x^2 + mx + n \leq 2$ ，對一切 $x \in [1, 5]$ 恆成立

分別取 $x = 1, 3, 5$ ，得 $-2 \leq 1 + m + n \leq 2$ ，
 $-2 \leq 9 + 3m + n \leq 2$ ， $-2 \leq 25 + 5m + n \leq 2$
得 $-3 \leq m + n \leq 1 \dots \textcircled{1}$

$$-11 \leq 3m + n \leq -7 \dots \textcircled{2},$$

$$-27 \leq 5m + n \leq -23 \dots \textcircled{3}$$

由 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 及 $\textcircled{3} - \textcircled{2}$ 得 $-6 \leq m \leq -2$ ，

$-10 \leq m \leq -6$ ，所以 $m = -6$ ，

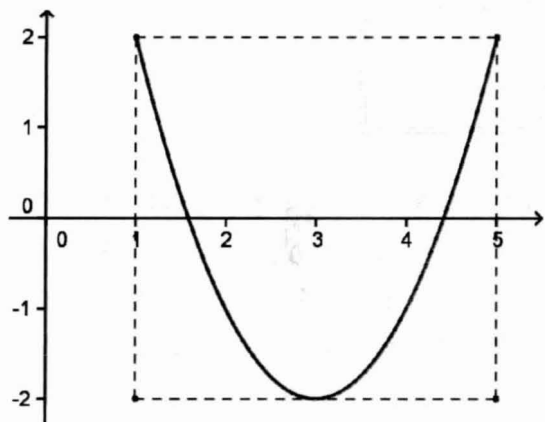
再代入 $\textcircled{1} \textcircled{2}$ ，得 $n = 7$ 當 $m = -6, n = 7$ 時， $f(x) = x^2 - 6x + 7$

在 $x \in [1, 5]$ 上滿足 $|f(x)| \leq 2$

綜上所述，所求實數對 $(m, n) = (-6, 7)$ 。

【解題評註】

1. 此題【方法一】利用的代數性質主要為：設 $a, b \in R$ ，則 $|a + b| \leq |a| + |b|$ ，等號成立 $\Leftrightarrow ab \geq 0$
2. 此題【方法二】利用不等式的運算，滿足三個不等式，以找出 m, n
3. 所求的二次函數圖形如下，並且過點 $(1, 2), (3, -2), (5, 2)$ 。



$$\Rightarrow y+10=1,2,4,5,8$$

$$\Rightarrow y=-9,-8,-6,-5,-2。$$

【解題評註】

從此式 $y = \frac{10x}{100-x}$ 中，難以觀察或計算出 y

值。因此必須經過適當轉換成如 $x = \frac{100y}{y+10}$

形式，根據正負關係，估計出 y 的範圍，進而討論出 y 的解。

問題編號

8902

已知 x, y 均為負整數，且滿足 $y = \frac{10x}{100-x}$ ，求 y 的所有解。

簡答：-9, -8, -6, -5, -2

參考解答：

$$(1) \quad y = \frac{10x}{100-x}$$

$$\Rightarrow y(100-x) = 10x$$

$$\Rightarrow 100y - xy = 10x$$

$$\Rightarrow x = \frac{100y}{y+10} \dots\dots\dots(a)$$

$$= 100 - \frac{1000}{y+10} \dots\dots\dots(b)$$

(2) 由(a)且 x, y 均為負整數，得 $y+10 > 0$

$$\Rightarrow -10 < y < 0$$

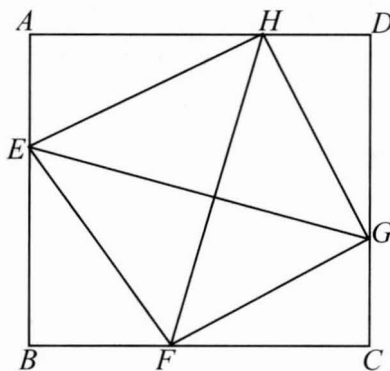
$$\Rightarrow 0 < y+10 < 10$$

(3) 由(b)與(2)可知： $y+10$ 為 1000 的正因數

問題編號

8903

設 $EFGH$ 為正方形 $ABCD$ 的內接四邊形， $\angle BEG$ 與 $\angle CFH$ 均為銳角，若 $\overline{EG} = 15$ ， $\overline{FH} = 20$ ，四邊形 $EFGH$ 的面積為 125，求正方形 $ABCD$ 的面積？



簡答：220

參考解答：

在正方形 $ABCD$ 中，分別過 E, F, G, H 作對邊之垂線，得矩形 $PQRT$ ，設正方形

$ABCD$ 的邊長為 a , $\overline{PQ} = b$, $\overline{QR} = c$, 由畢氏定理知 $b = \sqrt{15^2 - a^2}$, $c = \sqrt{20^2 - a^2}$

$\therefore \triangle AEH = \triangle TEH$, $\triangle BEF = \triangle PEF$,

$\triangle CFG = \triangle QFG$, $\triangle DGH = \triangle RGH$

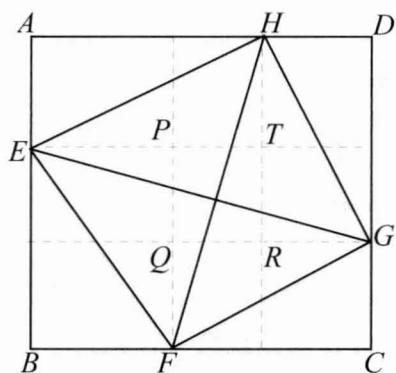
$\therefore \blacksquare ABCD + \blacksquare PQRT = 2\blacksquare EFGH$

$\Rightarrow a^2 + bc = 2 \times 125$

$\Rightarrow \sqrt{15^2 - a^2} \cdot \sqrt{20^2 - a^2} = 250 - a^2$

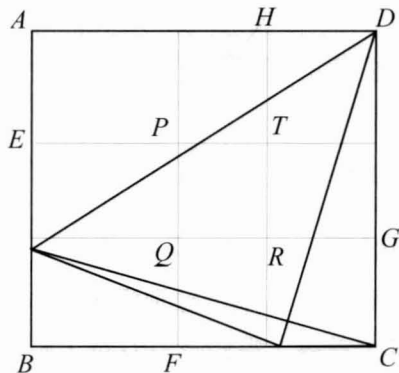
平方 $\Rightarrow 125a^2 = 27500$

$\Rightarrow \blacksquare ABCD = a^2 = 220$ 。



【解題評註】

國昌國中的吳同學，則是將 \overline{EG} 向下平移使得點 G 與點 C 重合，將 \overline{HF} 向右平移使得點 H 與點 I 重合，再利用平移後四邊形面積不變，求得正方形面積。吳同學能利用面積的基本性質簡化問題，也是很好的作法。



問題編號

8904

現有六位評審及九位選手，每位評審皆對這九名選手評分，分數分別為 1,2,3,4,5,6,7,8,9 分，各出現一次；對每個選手而言，皆會得到六個分數，而這六個分數中最大與最小的值差不超過 3，問這九位選手中最低分的選手最多會幾分？

簡答：16 分

參考解答：

設有 a 個選手得到過 1 分，而這九位選手中最低分的選手得到 b 分。

- (i) 若 $a = 1$ ，表示只有一人得到過 1 分，故他就是最低分且 $b = 1 \times 6 = 6$ 。
- (ii) 若 $a = 2$ ，表示恰有二人得到過 1 分，所以至少有一人得到過三次 1 分，故 $b \leq 1 \times 3 + 4 \times 3 = 15$ 。
- (iii) 若 $a = 3$ ，表示恰有三人得到過 1 分，為了讓最低分的選手高分一些，那三個人剩餘的分數都用 3 或 4 分去填滿，故 $b \leq \frac{1}{3} \times 6 \times (1 + 3 + 4) = 16$ 。
- (iv) 若 $a = 4$ ，表示恰有四人得到過 1 分，而這四個人的所有分數都是 1~4 分，而六位評審總共恰能夠給出 24 個 1~4 分，故 $b \leq \frac{1}{4} \times 6 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 15$ 。
- (v) 若 $a \geq 5$ ，表示至少有五人得到過 1 分，而這些人的所有分數都是 1~4 分，但是六位評審總共只能夠給出 24 個 1~4 分，故不可能。

而以下是可以達到 $b=16$ 的例子。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
甲	1	4	3	2	5	6	8	7	9
乙	1	4	3	2	5	6	8	7	9
丙	3	1	4	2	5	7	6	8	9
丁	3	1	4	5	2	7	6	8	9
戊	4	3	1	5	2	8	7	6	9
己	4	3	1	5	2	8	7	6	9

問題編號

8905

已知 $x_1^7 + x_2^7 + \dots + x_{98}^7 + x_{99}^7 - x_{100}^7$ 的個位數字是 4，其中 x_1, x_2, \dots, x_{100} 是 $1, 2, \dots, 100$ 中的 100 個不同的數，且 x_{100} 是介於 50 到 100 的質數，試求 x_{100} 的值。

簡答：67,97

參考解答：

個位數字為 $1, 2, \dots, 9, 0$ 的正整數經過 7 次方後，個位數字變成 $1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, 0$ ，再因 x_1, x_2, \dots, x_{100} 是 $1, 2, \dots, 100$ 中的 100 個不同的數，所以 $x_1^7 + x_2^7 + \dots + x_{98}^7 + x_{99}^7 + x_{100}^7$ 的個位數字是 0，根據題意，我們知道 $2x_{100}^7$ 的個位數字是 6（即 x_{100}^7 的個位數字是 3,8），所以 x_{100} 的個位數字是 7,2，加上 x_{100} 是介於 50 到 100 的質數，故 $x_{100}^7 = 67,97$ 。