第壹章 緒論

本章分別就研究的研究動機、研究目的、研究問題進行陳述，並對本研究涉及的相關名詞逐一定義，最後說明本研究之研究範圍與限制。

第一節 研究動機

1990 年孫霞繡和許桂敏(引自郭慧玲，民 91)調查國民的數學基本素養，從國內各報章雜誌出現的數學知識做調查，其中出現次數的前十名排行如下表 1-1-1 所示：

表 1-1-1 報章雜誌中數學概念出現次數前十名

	數學知識	出現次數
1	百分比	265
2	機率統計與資料整理	163
3	四則運算	141
4	分數小數	81
5	近似值	78
6	單位換算	66
7	比例	50
8	因數倍數	49
9	平面直角座標	20
10	利率	11

註：對於定期出現的同型資料(例如股價指數)，只紀錄一次。

資料來源：孫繡霞和許桂敏(1990；引自郭慧玲，民 91)：國民對數學基本素養調查研究(國科會研究報告，計畫編號：NSC78-0111-S001-002-B)

由表 1-1-1 可知出現次數最多的前十名依序為：百分比、機率統計與資料整理、四則運算、分數小數、近似值、單位換算、比例、因數倍數、平面直角座標和利率，比例概念出現的次數排名為第七名，這顯示出比例概念與我們日常生活息息相關，成為我們必備的數學知識。公元前 300 年前後，希臘數學家歐基里得所著的《幾何

原本(Elements)》(藍紀正、朱恩寬譯，民 81)第Ⅴ卷中即是對比例理論的精彩闡述，其中定義「有相同比的四個量叫做成比例的量」。除此之外，我國最重要的數學經典之一《九章算術》也在公元前一世紀完成，其中第二章粟米中的今有術，已具備完整的比例算法，衰分術、均輸術等也包含了比例與分配的問題(臺灣省中等學校教師研習會，民 84)。近來，研究者也實際從報紙雜誌收集資料，發現比例相關概念是生活上常見的數學語言，如：「12 至 35 歲民眾上網比例超過八成七」、「公私立大學學費比為 1：1.87」、「台北市青少年對婚前性行為接受比率逐年提高」等。因此，從古至今，比例概念存在於我們的生活周遭，可見其學習的重要性，而這也是現今九年一貫數學科課程所強調的部份，希望將數學與學生的生活經驗相結合，讓學生具備帶著走的能力。

Heller、Ahlgren、Post、Behr 及 Lesh(1989)指出科學和數學最古老且最基本的連結之一即是比例(proportionality)，數學為科學之母，它們之間的關係甚密，而比例可以說是科學課程中無所不在的數學工具(吳美滿，民 87)，它是一項基本的數學技能，不僅在數學上經常使用，在科學領域範圍中，我們也常常不知不覺的使用它來進行一些推理性的思考與運算，例如科學概念中的溫度、速度、加速度和密度等都是比例概念的應用，除此之外，它在物理、化學、生物、地球科學、經濟、統計、藝術、醫學、建築、教育…等不同的領域範圍上也經常出現。瞭解比例概念的重要性之後，在教學上當然要正確的教授此知識給學生，因此，這引發了研究者的興趣，想透過本研究瞭解學生學習完比例相關單元後是否真的具備比例的概念而能正確的解決比例問題。

多數人在國小時就已接觸到比和比例的概念了，但是，很多研究都得知學生對比和比例概念的瞭解是有困難的(Behr et al. 1983; Karplus, Pulos, and Stae 1983; Lovell and Butterworth 1966; Lunzer and Pumfrey 1966; 引自 Quintero, 1987)，在學完比和比例概念後，學生學會的似乎只是一項技能，懂得利用機械化的方式去計算比例問題而已，Lamon(1995)指出，只透過交叉相乘的方法去教學生如何解 $a/b=c/d$ 的比例問題並不能促進學生的比例推理能力，因為學生根本不瞭解其意涵，這只是形式上的操作而已，對於概念的理解並沒有幫助，大多數的人對比例的概念也似乎停留在這樣的印象。1988 年 Post、Behr 及 Lesh(引自 Cramer & Post, 1993)認為如果只是將解決比例缺項問題當作是檢驗學生是否具有比例推理能力的指標將會有很多限

制，因為答案會引導他們做純粹的計算及機械式的作法，實際上比例推理是更加的複雜，所以，即使能有效解決比例問題的學生並不見得是真正瞭解其概念及意涵，而不能有效解決比例問題的學生也不代表他沒有比例推理的能力。

比例概念既然為數學概念的基礎，且在生活當中出現的機率很大，所以在中小學階段的數學教育中，實為不容忽視的一環。因此，教師在教學時，比例概念的教導方式就成為研究者注目的焦點，到底要如何教授比例概念才能讓學生瞭解比例的真正意涵？而學生在學習的同時又會遇到怎麼樣的困難及問題？這都是研究者急於想瞭解的問題，在本研究中，研究者是透過比例問題的紙筆測驗去深入瞭解學生的解題過程及想法，雖然不直接觀察教師的教學，但希望從文獻及本研究去探究學生瞭解比例概念的程度為何？學生具備什麼樣的概念才算真正瞭解比例概念？學生在接受完比例概念的學習後是否能真正幫助學生解決問題？抑或只是學習到表面上的解題技巧而已？因此，如果只是單純從紙筆測驗來瞭解學生解決比例問題的能力，這其中似乎還有許多未知的影響因素，所以，研究者有鑑於此，為了能夠真正瞭解學生的困難與問題，研究者必須透過與學生較深入的訪談，實際去瞭解學生在解決比例問題時真實的想法，探查學生的思路及解決問題的方式。

從教育的角度上來看，期待能透過本研究的結果，發現學生真實瞭解比例概念的程度，進而能提供數學教師們教學上的建議，不管是在教授相關比例概念與解題策略時，都能更清楚學生的學習過程及想法，達到更有效的教學，適時的幫助學生瞭解問題及解決問題，以確切地提昇學生的學習表現，此乃本研究之最終目的。

第二節 研究目的

根據上述研究動機，本研究的主要目的是從比例問題的表面結構和深層結構來瞭解國一學生在解決比例問題時其解題的思路，透過訪談瞭解學生的解題方式，並分析解題過程及表現，進而探討學生從比例問題的表面結構解題與深層結構解題之間的關聯性，故本研究設定了三個研究目的，包括：

研究目的一　從比例問題的表面結構探究國一學生的解題表現及解題策略。

研究目的二　從比例問題的深層結構探究國一學生的解題表現及解題策略。

研究目的三　探究比例問題的表面結構與深層結構解題之間的關聯性。

第三節 研究問題

本研究期望能從國一學生在解決比例問題時的答題過程及表現來探討學生是否真正瞭解比例概念，主要由比例概念的表面結構及深層結構來討論，希望能進一步瞭解學生真實的學習狀況及幫助學生在比例課程上的學習。為了達到以上的研究目的，研究者藉由學生寫下的答案及研究者所做的訪談，分析學生解決比例問題的過程及結果，以便為日後的教學提供有利的訊息及資料。

根據研究目的一，引伸出以下的研究問題：

1-1 在「不同數字型式」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？

1-2 在「不同語意類型」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？

1-3 在「不同量的性質」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？

根據研究目的二，引伸出以下的研究問題：

2-1 在「比例概念的共變原則」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？

2-2 在「比例概念的不變原則」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？

2-3 在「比例概念的相對改變原則」的結構下，國一學生在比例問題的解題表現及解題策略是否有差異？

根據研究目的三，引伸出以下的研究問題：

3-1 探究國一學生在解比例問題時，表面結構的數字型式與深層結構的共變、不變和相對改變原則之間的關聯性為何？

3-2 探究國一學生在解比例問題時，表面結構的語意類型與深層結構的共變、不變和相對改變原則之間的關聯性為何？

3-3 探究國一學生在解比例問題時，表面結構的量的性質與深層結構的共變、不變和相對改變原則之間的關聯性為何？

第四節 名詞界定

一、 表面結構(surface structure)

本研究所定義的表面結構，乃是指學生在讀完題目後，依照題目上的數字型式結構、語意類型結構及量的性質結構去解題，這三類即為本研究探討之題目的表面結構。

二、 深層結構(deep structure)

本研究所定義的深層結構，乃是由 Lamon(1995)提出構成比例的三個數學重要要素－共變(covariance)原則、不變(invariance)原則和相對改變(relative change)原則所組成，意指學生在讀完題目後，能夠依照這三個原則來進行解題。

三、 數字型式(integer type)

本研究探討的比例問題為未知數在第四項的缺項問題(A：B=C：X)，其它已知數皆為正整數，研究者依據 Noelting(1980a, b)和林福來(民 73)的四種比例關係式，將數字的型式做些微的修正，共分成下表 1-4-1 的四類：

表 1-4-1 未知數在第四項的缺項問題之數字型式表

數字型式	數值特性		範例
第一式	第一個比的前後項有整數倍關係，且兩個比中，前對應項有一個是另一個的整數倍	C 同時是 B 和 A 的整數倍	$2：4＝8：x$
第二式	第一個比的前後項有整數倍關係	僅 B 是 A 的整數倍	$2：8＝7：x$
第三式	兩個比中，前對應項有一個是另一個的整數倍	僅 C 是 A 的整數倍	$3：5＝18：x$
第四式	兩個比皆為任意數值，第一個比的前後項及兩個比的前對應項都沒有整數倍關係	C 不是 A 或 B 的整數倍	$2：5＝7：x$

註：兩個比若相等，$a：b=c：d$，則 a 和 c 稱為比的前項，b 和 d 稱為比的後項；a 和 c 互為對應項，b 和 d 互為對應項。

四、 語意類型(semantic type)

Lamon(1993)依不同的語意結構將問題分為熟知的量數問題(Well-chunked measures)、部分-部分-全體(Part-part-whole)、關係集合(Associated sets)及放大縮小(Stretchers and shrinkers)四種類型，見表 2-3-2 之說明。而本研究的題目依這四類型做些微的修改，本研究的語意類型分為四大類：熟知的量數問題、部分-部分、關係集合及放大-縮小問題，其中又將部分-部分的問題分成兩種:「混合」及「不混合」兩類，另外，放大-縮小問題又分成「外在量」及「內在量」兩類，見表 3-4-2 之說明。

五、 部分-部分問題

本研究的部分-部分問題是指一個整體由兩個或以上的子集所組成，且子集之間具有比例關係，且本研究中又將此問題分成兩類，第一類為部分-部分-不混合問題，指的是子集中的元素為非液態，子集在整體當中時，仍為獨立個別存在，例如：教室中男生和女生的人數與全班的人數關係，這裡的男生和女生為全班的兩個子集，在全班中仍是每個人都是個別獨立的個體；第二類為部分-部分-混合問題，指的是子集中的元素為液態，子集在整體當中時，會混合在一起，例如：10 公克的水加入 5 公克的酒精，混合後得到一杯酒精溶液，此時的水和酒精為酒精溶液的部分子集，但加在一起後會混合在一起，不會獨立存在。

六、 外在量

外在量是指物體本身以外的數量，如：甲蛇每天吃 5 片食物的題目中，5 片是甲蛇身長以外的外在量(楊錦連，民 87)。

七、 內在量

內在量是指物體本身的數量，如：有一條蛇 3 公尺，2 年後變成 5 公尺，則這條蛇生長 2 公尺，此 2 公尺是蛇本身生長的長度，對蛇而言是它的內在量(楊錦連，民 87)。

八、 量的性質(quantitative properties)

量本身分為離散量與連續量兩大類，研究中又將其與內比和外比組合，形成離散量-離散量-內比、離散量-離散量-外比、離散量-連續量-外比、連續量-連續量-內比及連續量-連續量-外比共五類，此五類即為本研究中所稱之「量的性質」。

九、 內比(internal ratio)

在比例問題裡，如果比較的量是同一性質且其單位相同時，稱之為內比。例如：「4 枝原子筆和 8 枝鉛筆的價錢一樣，則 12 枝原子筆和幾枝鉛筆的價錢一樣？」，因為兩個比較的量都為"筆"且單位都為"枝"，稱之為內比的比例問題。

十、 外比(external ratio)

在比例問題裡，如果比較的量是不同性質且其單位不相同時，稱之為外比。例如：「4 本書可以換到好書交換計點卡 8 點，則 8 本書可以換到好書交換計點卡幾點？」，兩個比較的量一個是"書"、一個是"點數"，其單位和性質皆不相同，稱之為外比的比例問題。

十一、 絕對改變原則(absolute change)

比較數量大小的運算方法有兩種，一種是相減的方法，另一種是相除的方法，因為兩數相減所產生的差代表兩數之間絕對的改變量，因此，若學生在處理比例問題時出現使用兩數相減的方法，則稱為使用絕對改變原則來解題。例如，「有兩棵樹，樹 A 高 3 公尺，樹 B 高 5 公尺，5 年後，樹 A 高 5 公尺，樹 B 高 7 公尺，請問經過的這五年中，哪一棵樹長高的最多？」，若學生的回答是樹 A 長高 2 公尺(5-3=2)，樹 B 也長高 2 公尺(7-5=2)，所以這兩棵樹長高一樣多，則以上學生採用兩數相減的方式來回答問題時，即稱學生是使用絕對改變原則來解題。

十二、 相對改變原則(relative change)

將兩數相減的差除以原來的數量，其意涵為兩數之間相對的改變關係，因此，若學生在處理比例問題時出現使用兩數的差相對於原來的數量關係，則稱為使用相對改變原則來解題。例如，「有兩棵樹，樹 A 高 3 公尺，樹 B 高 5 公尺，5 年後，樹 A 高 5 公尺，樹 B 高 7 公尺，請問經過的這五年中，哪一棵樹長高的最多？」，若學生的回答是樹 A 長高 2 公尺，但是長高的部份佔原來樹高的 2/3，而樹 B 雖然也長高 2 公尺，但是長高的部份只佔原來樹高的 2/5，相較之下，2/3>2/5，所以樹 A 長高的比較多。以上學生主要是採用兩數相除的方式來回答問題，其依據乃由樹長高的部份相對於原來樹高的改變關係來判斷，所以即稱學生是使用相對改變原則來解題。

十三、 加法策略(additive strategy)

林福來、郭汾派和林光賢(民 75)提出加法策略就是以加、減代替乘、除求解比與比例問題的一種解題方法，這個策略比率的關係是由一個數減另一個數來計算，這個差數再應用到第二個比率(楊錦連，民 87)。但在本研究中研究者將此解題策略重新命名為「差數相等」策略，因為此策略乃是使用兩數之間的差數做運算，是為了區別另一種解題策略是使用兩數的和做運算，稱為「和數相等」策略，所以，文獻中所提的「加法策略」與本研究中的「差數相等策略」意義上相同。

十四、 比例推理(proportional reasoning)

Inhelder 和 Piaget(1958; 引自 Lamon, 1993)首度認定能成功解決出比和比例情境問題的過程稱之為比例推理，因為兒童能超越辨識比例等式兩端的相似性而成功得到正確的答案，包含能夠去構思和解決比例的代數問題。因此，在本研究中具備比例推理能力的學生就是指學生能成功解決研究者所問的比例情境問題，當學生具備有良好的解題邏輯和過程，且能夠適當的呈現出對問題的瞭解時，即使是使用不同的解題方式、用非正式的方法、不管是否能夠用符號呈現出關係來，只要能獲得正確的答案，即稱此學生具有比例推理的能力。

第五節 研究範圍與限制

一、 本研究的範圍限定於國一學生解決本研究設計的比例問題測驗之表現情形。

二、 限於人力、時間、經費等因素限制，本研究係採便利取樣，以彰化縣某國中的一年級學生為研究對象,所以研究結果未必能代表所有國中一年級學生的比例問題解題表現，但可推廣到同類型的學校。

三、 由於比例問題涵蓋範圍很廣,故本研究所設計的問題是將文獻中的題型加以分類編製，其中題目所使用的數字型態僅限於 30 以內的整數，且倍數也都保持在 10 倍以內，以求在比較不同比例問題時能達到較準確的結果。

四、 由於影響學生解題表現的相關因素眾多，本研究主要是探究「數字型式」、「語意類型」、「量的性質」、「數學學業成就」等因素與解題之間的關係，至於其它相關的因素則不在本研究的討論之內。

五、 本研究訪談時提出的問題乃是研究者有結構、有順序挑選出來，其題目是配合研究目的所發展出來的，故有其研究的適當性，所以在推廣時，必須考慮到題目的相似性，避免過度的推論，應注意是否與本研究有相關的概念，否則仍須透過相關的後續研究進行驗證後才可使用。

六、 本研究採用半結構式的訪談來瞭解學生的解題過程及表現,訪談的過程中已儘量避免產生激發學生思考的效應，儘量呈現學生最原始的想法，但是人常常會經過一些話語及刺激後就會幫助提取腦中的記憶或喚起相關的經驗,所以本研究不將此納入研究的考量，純粹研究學生整體的解題過程及結果，分析其使用各種策略解題的原因。