第三章　規範變換和規範不變量

雖然我們只考量純量微擾，但變數仍多達四個。不過，我們可利用規範不變（gauge invariant）的條件進一步加以化簡。任何的物理定律或是物理現象，我們希望在相同的條件之下，不管所用的座標系為何，所看到的結果都是一樣的，這也就是廣義相對論中的廣義座標變換協變性（general coordinate covariance），它相當於一種規範對稱（gauge symmetry）。為了簡化分析，我們考慮一個無限小的座標變換（infinitesimal coordinate transformation）

$\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + f^{\mu}(x)$，$f^{\mu} \ll 1$，　　(3.1)

對於空間部分的向量 f^{i}，我們可以用一個純量構成的向量 $D^{i}f = f^{,i}$ 及一個垂直此向量的橫向（transverse）向量 f^{i}_{tr} 來合成，故

$f^{i} = f^{i}_{tr} + f^{,i}$，　　(3.2)

其中 f 為 $f^{,i}_{,i} = f^{i}_{,i}$ 方程式的解，因此 f^{i}_{tr} 滿足 $(f^{i}_{tr})_{,i} = 0$ 此限制條件，如此一來座標變換的自由度還是 4。不過 f^{i}_{tr} 只會對類似向量的度規微擾產生貢獻，如果只看純量微擾的部分，就可以將其忽略掉。最後 f^{μ} 的自由度只剩下時間 f^{0} 及純量 f。我們可寫下

$t \to \tilde{t} = t + f^{0}$，$x^{i} \to \tilde{x}^{i} = x^{i} + f^{,i}$。　　(3.3)

接下來，考慮純量微擾的度規張量全貌為

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^{2}(t)\delta_{ij} \end{pmatrix} + a^{2}(t)\begin{pmatrix} 2\phi & -B_{,i} \\ -B_{,i} & 2(\psi\delta_{ij} - E_{,ij}) \end{pmatrix}。$$

(3.4)

由於 CMB 的觀測結果顯示宇宙在空間的部分十分的平坦，因此往後我們只針對 FRW 宇宙$\mathcal{K}=0$的 FRW 宇宙來考量，所以$\gamma_{ij}\to\delta_{ij}$。因為$f$很小，協變導數$f^{,i}\to f^{i}\equiv\partial_i f$。而度規張量在座標變換下應滿足

$$g_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial\tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})。\tag{3.5}$$

將(3.3)代入(3.5)，並且取到一階微小，可得

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}(x)&=(\delta^{\alpha}_{\mu}+\partial_{\mu}f^{\alpha})(\delta^{\beta}_{\nu}+\partial_{\nu}f^{\beta})\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\\&=\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x})+(\partial_{\mu}f^{\alpha})\tilde{g}_{\alpha\nu}(\tilde{x})+(\partial_{\nu}f^{\beta})\tilde{g}_{\mu\beta}(\tilde{x})\end{aligned}。\tag{3.6}$$

為了將(3.6)中的$\tilde{x}$轉成x，再把(3.3)代入其中，同時只展開到一階。得到了$\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$之後，再用疊代法就可化成下式

$$g_{\mu\nu}(x)=\tilde{g}_{\mu\nu}(x)+f^{\alpha}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu}(x)+(\partial_{\mu}f^{\alpha})g_{\alpha\nu}(x)+(\partial_{\nu}f^{\beta})g_{\mu\beta}(x)。\tag{3.7}$$

我們定義$\Delta g_{\mu\nu}(x)\equiv\tilde{g}_{\mu\nu}(x)-g_{\mu\nu}(x)$，可得

$$\Delta g_{\mu\nu}(x)=\delta\tilde{g}_{\mu\nu}(x)-\delta g_{\mu\nu}(x)=-f^{\alpha}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu}(x)-(\partial_{\mu}f^{\alpha})g_{\alpha\nu}(x)-(\partial_{\nu}f^{\beta})g_{\mu\beta}(x)。\tag{3.8}$$

這是一個相當重要的式子，適用在所有的二階張量。由於我們只看一階微擾，所以我們可將$g_{\mu\nu}(x)$換為$^{(0)}g_{\mu\nu}(x)$

$$\Delta g_{\mu\nu}(x)=-f^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{(0)}g_{\mu\nu}(x)-(\partial_{\mu}f^{\alpha})^{(0)}g_{\alpha\nu}(x)-(\partial_{\nu}f^{\beta})^{(0)}g_{\mu\beta}(x)。\tag{3.9}$$

分別看每個分量給我們的結果：

1. $\Delta g_{00}(x)=\delta\tilde{g}_{00}(x)-\delta g_{00}(x)=-(\dot{f}^{0})g_{00}(x)-(\dot{f}^{0})g_{00}(x)=2\dot{f}^{0}$

$$\Rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \dot{f}^0 \text{，} \tag{3.10}$$

2. $\Delta g_{0i}(x) = \delta \tilde{g}_{0i}(x) - \delta g_{0i}(x) = -\dot{f}^i g_{ii} - (\partial_i f^0) g_{00}$

$$\Rightarrow a\partial_i \tilde{B} = a\partial_i B + \partial_i f^0 - a^2 \dot{f}^i \text{，} \tag{3.11}$$

3. $\Delta g_{ii}(x) = \delta \tilde{g}_{ii}(x) - \delta g_{ii}(x) = -f^0 \dot{g}_{ii} - (\partial_i f^i) g_{ii} - (\partial_i f^i) g_{ii}$

$$\Rightarrow \tilde{\psi} - \partial_i^2 \tilde{E} = \psi - \partial_i^2 E + (\dot{a}/a) f^0 + \partial_i f^i \text{，} \tag{3.12}$$

4. $\Delta g_{ij}(x) = \delta \tilde{g}_{ij}(x) - \delta g_{ij}(x) = -(\partial_i f^j) g_{jj} - (\partial_j f^i) g_{ii}$ ，$i \neq j$

$$\Rightarrow \partial_i \partial_j \tilde{E} = \partial_i \partial_j E - \tfrac{1}{2}(\partial_i f^j + \partial_j f^i) \text{，} \tag{3.13}$$

將(3.10)～(3.13)分別對四個純量微擾拆開討論後，我們得到這四個純量微擾在座標變換後的關係（注意$a = a(t)$）

$\tilde{\phi} = \phi - \dot{f}^0$，$\tilde{B} = B + f^0/a - a\dot{f}$，$\tilde{\psi} = \psi + (\dot{a}/a) f^0$，$\tilde{E} = E - f$。 (3.14)

由於f^0與f是由座標轉換得到，如果將上面四個式子做組合消去f^0與f，我們就可得到與座標變換無關的守恆量Φ與Ψ[4]

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi - [a^2 \dot{E} - aB]^* = \tilde{\phi} - [a^2 \dot{\tilde{E}} - a\tilde{B}]^* \\ \Psi &= \psi + (\dot{a}/a)[a^2 \dot{E} - aB] = \tilde{\psi} + (\dot{a}/a)[a^2 \dot{\tilde{E}} - a\tilde{B}] \end{aligned} \tag{3.15}$$

同規範場論的概念，任何由Φ與Ψ所組成的變數也是規範不變的。如同電磁規範場中電場及磁場所扮演的角色，由度規微擾所組成的Φ與Ψ也有其對應的運動方程(equation of motion , E.O.M)。雖然上面是是利用無限小的座標變換推得規範不變，但是我們還是可以用無限多個無限小的規範變換，來構成非無限小的座標變換。由於座

標變換只有兩個獨立變數 f^0 與 f ，因此我們可以將四個純量微擾的自由度減少到Φ與Ψ這兩個規範不變量。。就像在電磁場中我們可以選擇要用羅倫茲規範（Lorentz gauge）或是庫侖規範（Coulomb gauge)，在這裡也是相同的概念。在宇宙的微擾論中，我們介紹三種規範分別是平坦空間規範（spatially flat gauge)、同時規範（synchronous gauge）與縱向規範（longitudinal gauge，conformal-Newtonian gauge)，這些規範都是在(3.14)中適當選取 f^0 與 f 而成立的：

1. 空間平坦規範：空間平坦規範的定義是 $\tilde{\psi}=0$ 與 $\tilde{E}=0$。所得到的度規微擾就只剩下與時間有關的分量，所以我們才說空間是平坦。稍做說明，我們所謂的規範是在特定座標系所看到的，因此在原座標系可能四個純量微擾都不是零，我們加上帽子以作區別。

2. 同時規範：同時規範的定義是 $\tilde{\phi}=0$ 與 $\tilde{B}=0$。如此一來，在度規微擾中就只剩下空間部分的分量，這樣我們就不難理解為何叫做「同時」或是「同步」了。

3. 縱向規範：縱向規範的定義是 $\tilde{B}=0$ 與 $\tilde{E}=0$。這時，度規微擾就只剩下對角線的部分。由(3.15)，我們可發現在縱向規範下，剩下的純量微擾正好就是守恆量，即 $\Phi=\tilde{\phi}$ 和 $\Psi=\tilde{\psi}$。在下一個章節我們

會看到，當能量-動量張量的空間部分只有對角元時（即 $\delta T_j^i \propto \delta_j^i$），這兩個規範不變量會相等，因此理論的難度又降低了許多。