

我國與美國小學數學教育比較研究—美國 波斯頓小學數學課程與我國小學數學課程比較

理學院 數學系

陳 梅 生
吳 德 邦

第一章 緒 言

1~1 研究動機

美國數學教育，在 1950 ~ 75 年代，常與「新數學」(New Mathemtics)，「數學革命」(Revolution in Mathematics) 以及「史潑尼克」(Sputnik) 等名詞混合在一起。在此一期間，數學教育目標，數學課程內容以及數學教學方法等，均確實發生了實質的改變。在美國本土，多少純數學家 (Pure mathematician)，數學教育家 (Mathematics educators)，心理學家，課程專家以及從事研究的專業人員等，均曾參與其事，形成廣大的數學課程研究與數學改革運動。(註一) 影響所及，慢慢擴大至美國以外其他國家，如：加拿大、蘇聯、德國、丹麥、比利時、法國及英國等 (註二)。亞洲地區如日本、韓國、菲律賓及我國等，亦均受其波及。對於所謂新數學的教材，亦納入各級學校的數學教學之中，稱之為「新數學教學」，或「現代數學」(Modern mathematics) 數學。

但是，在美國本土，反對這項運動的人，卻自始即已存在。如克蘭恩 (M. Kline) 在 1958 年，發表了「古老與現代」(The Ancients Vesus the Moderns) 的文章，提出數學無所謂「新」與「舊」的論點。他認為數學是從累積中慢慢發展出來的，沒有舊的作基礎，不可能有新的數學。不像物理學，物理學可能因發明一項新的理論，將舊理論全部翻新 (註三) 然而，大致上說，1950 ~ 75 年間，可說是美國新數學的全盛時代。大概在 1945 ~ 50 年間，世界大戰結束，美國在戰勝之餘，國內經濟分外繁榮，百業大大擴充，在這樣一種社會背景下，各行各業都感人力不足，尤其對新科技方面的人員，所需尤殷。因之各大學都擴充理工科學生的招生人數，但很奇怪的是往往不足學生名額。原因是高中本身亦因極度缺乏理科師資，所以選修理組的學生少，選修文組的學生多。大學方面曾一度採取補救措施，放棄原本規定要進理工科系的數學入學標準，而代之以在大學一年級開設數學「先修課程」(Prerequisite)。因之伊利諾大學工學院教授白褒曼 (Beberman) 為文指出，大學工學院新生數學程度的缺點 (註四)。亦因

之以白氏爲中心，大學教授有改進高中數學教學的提議，故在 1951 年，美國伊利諾大學，首先組織「中小學數學教育委員會」(The University of Illinois Committee on School Mathematics, UICSM)。採用新式的，與傳統數學不同的課程內容來編輯高中數學教科書，先編中學九年級以至十二年級(美國八一四學制)的教材，在二十五個州，二百位教師，一萬多學生的參與下，從事先驅計畫(Pilot project)(註五)。接著 1953 年，組成大學部數學課程改進委員會(CUPM)。1955 年，包爾州立師資學院幾何數學計畫成立，(Ball State Program Work in Geomerry)，1957 年馬里蘭大學數學計畫(University of Maryland Mathematics Project)開始。最重要的是 1957 年十月四日，蘇俄搶先發射人造衛星「史潑尼克一號」成功，造成學世震撼，美國尤其驚慌。全國朝野上下，立刻投入大量人力財力，從事科學教育振興工作，有所謂「戰場決勝於教室」的口號。1958 年，可以作爲新數學的標幟的「中小學數學研究小組」(School Mathematics Study Group, SMSG)於焉成立。編輯自幼稚園起以至十二年級止的中小學全部數學教材(K—12)。(註六)自此，新數學教育自小學起以至高中，大學爲止，才全部貫穿，系統亦全部確立。至 1963 年，舉行劍橋會議，討論學校數學教育目標(Goals for School Mathematics)，並發表了劍橋報告。(註七)主張中小學的數學教育，要淘汰過時的數材，增加新穎的教材，要提早教學，加深加廣，不以社會應用爲目的，而以達成數學教育本身的結構性(Structure)，關聯性(Relation)、抽象性(Abstract)與理論性(Generalization)。照 SMSG 主持人白格爾(E. G. Begle)自己的說法：

「我知道很多教師看新教材，以爲是學校數學教育的革命，在某一方面來看，這是對的，但這只是數學本身改變的一部份，而且已進行了一百五十年之久……另一方面，新課程與傳統課程主要的不同，是在數系統的結構方面，以及數觀念與他們的關係方面，當然亦有基本的數結合與運算技術方面等。」(註八)新數學教育如燦爛的慧星，劃過長空，其興也驟，其殞也速。到了 1975 年代，由於下列諸多原因，如：

1. 標準成就測驗及大學入學考試成就測驗成績降低。
2. 全國教育成就評量(NAEP)的反應結果。
3. 由於計畫經費的增加，要求經濟績效的提高。
4. 數學教育重點的改變，從前只重視教材，而今亦重視教法。
5. 體會到診斷及補救教學的重要性。
6. 重視家長及廣大社會群衆的意見。(註九)

因之 1976 年，在全國數學督學協會(The National Council of Supervisors of Mathematics, NCSM)在亞特蘭大市(Atlanta)召開年會，認爲需要將數學教育再回轉頭來，所以指定小組研議「數學基本技巧大綱」(Basic mathematics skills)。於是次年 1977 年六月發表了「數學基本技巧大綱」(A Position Paper on Basic Mathematical Skills)，(註十)文中明白說明要放棄新數學而「

我國與美國小學數學教育比較研究—美國波斯頓小學數學課程與我國小學數學課程比較
返回基本」(Back-to-Basics)，這就是所謂「返回基本運動」(Back-to-Basics Movement)。

而今，到了1980年代，美國小學數學教育，已在「返回基本」的口號中，重新實施基本技巧的課程教材。在上述宣言中，說明基本計算技巧，有其新的界定與內容，不完全與1950年代以前的教材內容相同，美國數學教師協會(NCTM)出版了「數學行動大綱」(An Agenda for Action)。(註十一)對於各州改進數學教育，提供了實際的方向。我們現在如能蒐集到一份各州(市)出版的地方性數學課程目標之類，將之好好研究，必可獲知其最近改進的動向。卻巧，吳明清先生，影印波斯頓市(Boston)最新小學數學教育目標(Objectives of Mathematics K—8) (註十二)，正好作為本研究之資料。

如所週知，我國小學數學教育，在民國五十七年(1968年)修訂課程標準時，亦納入新數學教材內容，至民國六十四年第八次修訂標準時，仍舊保持新數學部份內容，但在教材出現的年級地位，稍予延後。我國六十四年小學數學課程標準之修訂，聘請數位新從美國回國的學人參與其事，當時已了解「新數學」在美國實施情形，故已有所改正，但美國自己要至1977年才正式宣告停止，故如對1980年代的美國小學數學教材綱要有所研究，對我們將來修訂課程標準工作，自然仍有參考價值。

1～2 研究目的

本研究的主要目的，是在探討兩國的小學階段(一年級至六年級)的數學課程及教材大綱的異同情形，從而研究我國小學數學課程標準改進的方向。此項相同相異之比較，擬從其課程目標，課程編制方法，教材內容，教材排列順序，以及教材分量等來入手。析言之，本研究希望獲得下列問題的具體答案：

1. 美國現行小學數學課程，其理論根據為何？
2. 美國現行小學數學課程，其教學目標為何？
3. 美國現行小學數學課程，其編制方法為何？
4. 美國現行小學數學課程，其教材內容為何？
5. 美國現行小學數學課程，其教材排列情形如何？
6. 美國現行小學數學課程，其教材分量分配如何？
7. 上述各項問題與我國同年、階的數學課程大綱比較情形如何？

1～3 研究方法

本研究的方法，採資料分析法，及比較研究法進行。資料分析是將兩國有關文獻，依其歷史演進方式敘述，以明瞭其課程發展之理論根據，及心理學的基礎，從而比較其異同情形。至於比較方法，是選取美國波斯頓市(Boston)教育委員會所出版的「數學教育目標(K—8)」為藍本，而將我國同年級教學之目標，以之作兩國的比較。至於比較的準則(Criteria)則以上述問題為據，為：(一)教學目標，(二)教材組織，(三)教材

內容，(四)教材順序，(五)教材分量等，作為比較分析的基準，同一年級之內，不一定求全部之比較，但將整個年級的資料作比較時，則以上述準則均可以用到。亦一定有其結論。

1~4 研究範圍

美國國情與我國不同，美國聯邦政府，雖然現在亦設有教育部 (Department of Education)，但教育工作被定為地方自治事務，由各州州政府掌理。所以教育部不像我國一樣，具有全國性的課程標準，故選取波斯頓市自行編纂的課程作標準。該一教育目標 K—8，原包括幼稚園至八年級第九個年級教材大綱，但我國小學階段只是一至六年級六個年級，故只以此六個年級階段為比較時間。如所週知波斯頓市為全美著名都市，人口衆多，歷史悠久，為美國最早開發地區之一。境內有哈佛大學及麻州理工學院等有名學府。故認定他們所出版的課程資料，有其時代的代表性，及國家的代表性。且該一課程資料，全以「行為目標」 (Behavioral objectives) 方式來敘寫。目標清晰，範圍確定，適我國台灣省教師研習會所編 (現採用為國定本) 的現行教材之各年級學指引， (註十三) 亦用行為目標敘寫。兩者定義雖不全同，但在同一年級內施教，以之兩國對照比較，頗可解答上列各項問題。

第二章 美國小學數學教育概況

因為美國自一九五〇年左右開始「新數學」運動。故將一九五〇年前的美國小學數學教育，稱之為傳統數學教育時期；一九五〇至一九七五年代稱之為新數學教育時期。一九七五以後迄今稱之為「返回基本」數學教育時期。因要比較美國數學課程，特將波斯頓市的數學教育目標予以介紹，茲分述之：

2~1 傳統的數學教育時期

2-1-1 十九世紀的官能學派：美國開國歷史不久，在殖民地時代，居民稀少，村莊分散，所以只有都市地區或人口較集中之地，才設有學校。此等學校，規模不大，常只有一位教師或稱校長 (Master) 負責管教。沒有一定的課程，也不一定要求教學算術。當時的算術稱為「計算術」 (Ciphering) 只教基本四則運算，沒有太多內容。即連當時的哈佛大學 (創於一六三六年)，其一年級新生的算學課程，亦只教到目前的七年或八年級 (相當於我國中一或二年級) 的數學程度而已，同時女生不教數學 (註十四)。

最初的算術教科書，多由其英國引進，到十八世紀後期，才有美國自編的小學算術教科書問世。在未有教科書時期，常只「校長」手上有一本，要學生自己抄在筆記本上，然後再行施教。一七八八年派克 (Nicholas Pike) 與達包爾 (Nathan Dabole) 合編了一本書稱為校長助理 (The School Master Assistant)，這時算術教書才風行起來。這些教科書的編法，大致都是：(1)先說明定理定則，(2)再說明計算方法，不過只是

我國與美國小學數學教育比較研究—美國波斯頓小學數學課程與我國小學數學課程比較
計算步驟，並不涉及計算原因或理由。內容亦多是英國錢幣問題的換算。下列問題形式較為常見：茲舉問題的例子，及附答案如下。（註十五）

* 如果一個人的收入一年為 2555 元，問他每天得多少元？一年有 365 天。答案：7 元

* 有 671 塊鷹洋，每塊值 10 元，可換多少先令，以及三便士，和便士？答案：40260 先令，161040 三便士。

到十九世紀二十年代，美國的教育，亦接受到歐洲大教育家裴斯泰洛齊（Joseph Pestalozzi）的影響，裴氏主張直觀教學（Intuitive teaching），在當時被視為如目前之視聽教育，常利用觀察、操作方法，進行教學。最先採用此法的美國學人為高爾本（Warren Colburn），他編的一本教科書：「智慧的算術」（Intellectual Arithmetic），出版於一八二一年，他用自問自答的方法來編寫。例如：「你的右手有幾個大姆指？你的左手呢？那麼，你兩隻手合起來有幾個大姆指？在他教科書的序言中，他建議「這些實例的計算應由心算得來，或利用實物如豆子，核果等先排列出來，然後再演算，並說出理由」。（註十六）

同一時期中，還有從德國引進的「葛魯勃氏法」（A. W. Grube），他的教材組織，雖然為不完整的螺旋法（Spiral），一年級一開始就將加、減、乘、除四則運算，但數字只限在 10 以內，而且亦採用具體實物操作的方法入手。（註十七）

但在整個十九世紀中，除了上述少數學者外，其他絕大部份教科書編輯人員都崇奉「官能心理學說」（Faculty Psychology），相信算術是訓練頭腦亦即所謂「頭腦操練」（Mental discipline）的最好學科，不但能訓練，而且能轉移（Transfer），可一如拉丁文能訓練記憶一樣。所以當時有一位學者雷約瑟（Joseph Ray）曾說：

「算術一科要達成兩個學習的目的，一是達成頭腦訓練的功能，一是日常生活中計算的技術。」（註十八）

2-1-2 二十世紀初的兒童心理學：進入二十世紀以後，美國全國人口大大增加，由一千六百萬，增至二千四百萬人，原來的「八一四」學制，逐漸改為「六一三一三」學制，算術一科，原來只在大學和中學才學習，至此已全部在小學中施教，從前整個小學中只唸一本書，所謂「計算術」或「校長助理」的時代亦已過去，變成每二年讀一本，或一年讀一本。更有進者，在二十世紀初，實驗心理學派踴躍，常用「觀察」和「實驗」的方法來研究人類的學習行為，或研究動物心理，來說明人類的學習，著名心理學者桑戴克（E. Thorndike）的博士論文，題目即為「雞的行為研究」。（註十九）

1901 年，桑戴克與另一位著名心理學家吳偉士（Woodworth）根據一連串的實驗結果，發表一篇有名的論文：「一項心理功能對其他心理功能的影響」。（註二十）認為官能學派訓練轉移之說不能成立，它只是一項假設，無法具體明證。他們兩位指明，訓練對一短線段長短的估計，雖經相當時間訓練，但對一長線段的估計能力，並無作用。

因為從前採用官能心理學派時，算術教學的目的是在訓練頭腦，因之對教材的編選，常不顧兒童學習的能力以及兒童心理發展的成熟（Readiness）與否，只顧到教材難易的層次是否有訓練的作用。但自被實驗心理學派攻擊後，基本理論發生動搖。兼之，到了十九世紀二十年代，心理學的研究開始大大蓬勃起來，以兒童為對象研究的，稱為「兒童心理學」（Child psychology），最初由美國學者霍爾（G. Stanley Hall）奠定了兒童心理學研究的基礎。這一派學者們對兒童學習的最大影響是強調兒童的成熟原則（Readiness）來編選教材，不能超過兒童接受的能力。因之主張延遲較抽象的算術教學時間，實施所謂「隨機教學」（Incidental learning）。所謂隨機教學也者，即算術本身不排正式教學時間，而在國語及其他學科教學時隨機會而教算術。此一運動的實施約開始於1920年前後，要到1945年第二次世界大戰結束才被廢止。

當時另外有一股促使小學數學課程改進的力量，是當時流行的所謂「社會應用說」（Social utility）。這一派學者的意見，算術的學習不單要適合兒童學習的能力，而且亦要配合社會的應用。著名的學者，如威爾遜（Buy Willson）於1905年，首先調查在美國當時社會生活上，究竟要用到怎麼樣的計算技能，結果發現大部份計算技巧只以四則運算為主，所用的方法，以乘法最多，加法次之，減法再次之，除法最少。數學的問題以錢幣的問題為多，並以整數為主，小數用得不多，分數只有幾個普通分數如 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{8}$ ， $\frac{1}{16}$ 等（註二十一）。威爾遜氏與他的學生們做過很多類似的調查研究，呼籲當時的小學算術課程難度，應該大大減化，以符合社會用途。威氏此法，在我中華民國亦曾經實施過，由筆者與郭雲欽先生設計方法，調查苗栗建功國小五年級學生，其家長所用到的計算方法範圍，其結果幾乎與威爾遜氏的結果完全相同（註二十二）。威氏曾說：「算術教學的內容，限制在社會應用（Social utility）範圍，不但可減輕學童的課業負擔，並可使實際數學進行得更好。」（註二十三）

2-1-3 1920年代的S-R學說：此一時期心理學家桑戴克氏的「刺激—反應」（S-R）學說甚為流行。他推翻了官能學派的理論，卻形成了他自己的學說。即所謂刺激與反應的聯結學說（S-R bonds）。例如： $4 + 2 = 6$ ， $4 + 2$ 為一項刺激，然後可能獲得一項得數6，即為反應。此6構成一項聯結（bond），此一聯結必須在第一次學習時，即已建立，其後便加之以練習（Exercise），其聯結的效果便愈牢固。桑氏有學習三大定律的發明，其中之一即為「練習律」（Law of Exercise）。此一學習定律，為本世紀二十年代算術教學方法的主流。桑氏在1922年出版了「算術心理學」（The Psychology of Arithmetic）（註二十四）便是以此項學習定律所編寫的。

桑氏的學生耐特（Knight）吸取他老師的發明，更引申而創立「單元技術」（Unit still）來編寫教科書。將教材依照計算步驟或觀念確立的層次，排列教材的次序，先學習前面的基礎章節，再學習後面的較複雜方法。此種單元編制技術，迄今猶為一般數學教科書所採用。至1950年代，經史肯納（Skinner）的發揚修正，促成了編序教學（Programmed instruction）及教學機（Teaching machine）的發明。

2-1-4 1930年代的意義化學習：到了1930年來，又盛行「完形心理學說」

或「格式心理學」(Gestalt Psychology)，這一派學說，又稱場域學說(Field Theory)，他們認為學習是個人知覺場域受個人經驗意義化的演進過程。即新的意義，建築在舊經驗的了解基礎之上。所以學習是一種領悟(insight)和成熟(Maturation)的功能，格式塔心理學家，重視了解與意義化，並強調創造、發現與抽象概念的獲得。

勃朗耐爾(Brownell)與莫叟(Moser)在算術學上，做了一個有名的實驗研究：「意義化與機械學習的效果實驗」(The Brownell-Moser Study of Meaningful Vs Mechanical Learning)(註二十五)。此項的實驗設計，係針對桑戴克的機械練習主張而來，當時桑氏的心理學說大行其道，以致「傳統的數學教育，太偏重機械式演算教學，迫使學生只求死記不求理解」(註二十六)。所謂「意義說」，是指學生做練習題之前，先要明瞭演算的原因及意義，才做演算。勃氏自己曾有以下的說明：

「有意義(Meaningful)的算術教學與無意義(Meaningless)的算術相對，算術的數學要先了解算術的意義，教兒童透過算術的理解，而產生算術的感覺……。」(註二十七)

在此同一時期，更有以「社會應用」，和「有意義數學」，兩者連接，兩者並重之說，以白金漢氏(B. R. Buckingham)為代表，他認為：

「一位教師如承認算術應用的說法，他就是一位主張算術需要意義化的人，換句話說，也就是主張算術為重要學科之人。依我個人觀點，給算術意義化即是要使之社會化。我們甚至可以說，社會化與意義化兩者是彼此相輔相成的。」(註二十八)

在1950年以前，此項有意義化算術教學，是當時小學數學教育的主流。至此，自十九世紀以至1950年左右，小學算術教育的演變，大致經過三個階段：(一)權威教學時期(Authoritative learning stage)(二)隨機教學時期(Incidental learning stage)(三)有意義教學時期(Meaningful learning stage)。

2-2 新數學教育時期

2-2-1 新數學運動興起的背景：1945年，世界大戰結束，美國全國對教育革新工作有甚多要求，其中美國數學教師協會所組織的「戰後計畫委員會」(The Commission on Post-War Plans of the NCTM)曾建議要取消完全失去意義的小學數學「隨機教學」(Incidental Learning)，同時認為小學算術教學目標，只以狹隘的「社會應用說」作為設計課程的依據，他們認為數學應該扮演數學本身的角色(Role of mathematics)，充實數學本身的生命，不能看為全然是一種應用的計算技巧，這一建議，影響以後新數學革命的發源；另一方面，社會上工業界缺乏大量的理工人力，學校裏缺乏大量的數理老師。這些人才的培育，都要靠對數理具有基本能力的學生，才能順利接受教育。不過，相反的，一方面社會上缺乏人才，一方面大學入學申請理工相關學系的學生人數卻年年減少。所以學校當局為了增加錄取理工學生人數，不得不將原來規定要求數學的標準予以放寬甚至放棄，於是進入學校的學生數學程度就大大低落。學校為謀

補救措施，故在大學一年級課程上，加了部份數學教材，以作為先修課程（Prerequisite）。但雖然如此作法，於事並未有太補。所以當時的全國數學教師協會（NCTM）主席謝司特（C. N. Shaster）倡導改進高中數學課程，於1948年舉行「大學入學標準研討會」（Symposium on College Entrance Requirements）（註二十九），事後由學者筱林博士等組織一個小組加以研究，準備採取課程改進的行動。（註三十）

所以新數學的興起，一方面是由為人才缺乏，學生不足；一方面則是大學教授對已入學的學生程度感到不滿。伊利諾大學的白褒曼（Beberman）博士，對該校工學院一年級學生指出下列缺失：(1)數學的計算能力太差，(2)數學的概念不清，(3)除了幾何學之外，缺乏證明（proof）及組織（structure）方面的能力，(4)缺乏對自然科學，社會科學以及專門名詞的闡釋能力（註三十一）。換句話說，白博士是指責當時的大學數學課程不健全之處甚多，不能反映出數學本身所應具有的數學本質，他認為數學應不僅是一門工具學科（Tool subject），數學還有它本身的獨特性質。如果能將數學課程編制得宜的話，數學本身亦可能成為一門很有興趣，很有內在誘力的學門。當時有很多數學教授，都認為組織（Structure），證明（Proof），類化原則（Generalization）以及抽象概念（Abstraction）等四種要素為數學本身內在要素，必須及早教給學生，使他們明瞭其用途及重要性。所以數學的學習有兩方面的作用都應注意到，一是能在應用方面解決問題，一是應明瞭數學本身的嚴謹，演繹推演的特性與抽象化的本質。這兩者的結合，使數學的學習意義才能完美。當時有一項非常驚人的理論，認為這樣做是「官能心理學派」理論的重生。（註三十二）意為數學本身嚴謹組織推演，抽象化理論把握這些數學本身的特質的學習，對於人類腦力鍛煉（Mental discipline）具有特殊作用，促使人們對於事物的考慮有不同的訓練。在1950年代，美國整個社會已歸入科技導向的社會，故對數學這方面的陶冶，對下一代國民有重大的意義。

2-2-2 新數學的興起：由上所述，最先開始新數學計畫，是伊利諾大學的計畫。起先於1951年該校出版了一本小冊子，名為「伊利諾大學工學院學生對數學的需求」（Mathematics Needs of Perspective Students in the College of Engineering of the University of Illinois）。這是該校取了高中未接受數學（未有三角及代數）訓練的學生的一種研究分析。所以當年十二月，伊大組織了學校數學教育委員會（University of Illinois Committee on School Mathematics，UICSM）以研究高中9~12年級的數學教材問題。由卡耐奇基金會（Carnegie Foundation）斥資支助。另外美國科學基金會（NSF）及美國聯邦教育署（USOE）亦有適當補助，計畫的領導人是白褒曼（M. Beberman）。它的課程有下列六項假設：

- (1)高中學校數學教材採用新的觀點來組織，是有其可能的。
- (2)學生在觀念上對數學是有興趣的。
- (3)用手操作（Manipulative tasks），所謂具體學習的教學方法，可被使用做為基本觀念培養的方法的。
- (4)使用的數學語言（Mathematical Language）是可以盡量使它正確明白的。

(5)教材的組織可以提供學生“發現”(Discovery)許多概念的。

(6)學生可以“了解”(Understand)他所學的數學的。(註十三)

由於上述，新數學之興起，與收受未受數學訓練的學生的標準有關，所以一向對大學考試服務的教育測驗服務處(Educational Testing Service, ETS)，舉行了一項高中數學教育現況的調查研究，此項調查結果交由大學入學考試局(Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board, CEEB)發表。對改進高中數學教育亦有以下的幾點建議：新的數學教育計畫，應強調觀念與技巧兩者的平衡，應在全部學程內重視演繹推理的功能，應展示及運用數學的結構，應教授等式與不等式的相關性。應強調共同為集合(Set)和函數為數學的共同觀念，應重整幾何、三角的教材，並實施十二年的數學教育(美國高中實施選修教學，選文組能不修數學)。他們此一報告提出後，也致力於高中數學課程的改進，來編寫他們所提議課程，並遊說各州共同採用。

在1955年印地安那州有包爾州立師範學院(Ball State Teacher College, Indiana)，對幾何教材的實施研究，領導人為勃魯菲爾(Charles F. Brumfiel)，經費由NSF提供。1957年九月，馬里蘭大學有數學教育研究計畫(University of Maryland Mathematics Project, UMMAP)，主持七八兩年級的實驗，主持人為梅攸(Tohn R. Mayor)(註三十四)心理學家蓋聶參與此一計畫，發表了數學學習見解，後來成為有名的課程理論根據。(註三十五)。1957年十月，蘇俄人造衛星司潑尼克首先升入太空，震驚了全世界，尤其是科技一向領先的美國，更促使美國朝野上下實施科學教育的決心，於是熱心的民間基金會之類的組織，以及中央的聯邦政府，都提出大筆經費，幫助學校課程改革運動。一時美國的課程研究計畫，如雨後春筍般的蓬勃起來，先是科學教育，如新物理(PSSC)、新化學(CHEM)、新數學(SMSG)及新生物(BSCS等。在1969年一年之中，這裡課程研究計畫，即達七十餘個(註三十六)。其中新數學SMSG，為數學改革的代表，編有自動稚園以至高中三年級(K—12)的教科書。最初1958年是由耶魯大學(Yale University)的白格爾(Edward Begle)所主持的「中小學數學研究小組」(The School Mathematics Study Group, SMSG)，後來遷移到加州史丹福大學。此一計畫所編纂課程，系統一貫，材料齊全，因之出版發行亦較廣。可以說是「新數字」數學的代表。其他與小學數學教育有關的計畫，還有下列數個：

「學校數學教育計畫」SMSG(K—6) 主持人：白格爾(E. Begle)

「史丹福大學數學實驗計畫」 主持人：薩帕斯(P. Suppes)

大克里福蘭數學研究計畫(GCMP) 主持人：有數人

西薩寇斯大學—惠勃斯托麥迪遜數學計畫 主持人：R. B. Davis 明尼蘇達學校

數學及科學教育計畫(MINNEMAST)(K~9) 主持人：有數人

算術教學計畫(1~6) 主持人：Henry Van Engen

伊利諾大學算術計畫 主持人：David A. Page

牛頓級雷幾何數學計畫

主持人：有數人（註三十七）

上述不同計畫，雖主持學校不同，但大多數都持相同的數學哲學觀點，主張避免數學教材的零星化，希望包含各支共通的教材，其中最普遍的教材，要首推「集合論」，可以說集合論構成了新數學的標誌。另外一項較為普遍的是結構，所有計畫，也都強調邏輯結構，新數學教材上主要的特色，照全國數學教師協會NCTM 所稱，有下列幾點：

- (1)結構
- (2)運算及逆運算
- (3)實測
- (4)圖表的擴展
- (5)數系
- (6)數的性質、實數的
- (7)統計、機率
- (8)集合—語言及元素理論
- (9)邏輯演繹法
- (10)正確的概念（註三十八）

由此可見，結構（Structure）、證明（Proof）、一般化（Generalization）是新數學的要素。但在教法上，尚有下列幾點特色：

- 1.強調數學教材的組織，數學的原則，但甚重視教材的排列，由基礎發展到較高層次。
- 2.不強調數學在日常生活上的應用層面，（這一點是1950年以前的主要所在）它的觀念是：「你如果瞭解數學，你自然會解答問題」（If you know mathematics, you will be able to solve problems）。
- 3.強調要學生自己找出答案，這種教法有很多不同稱呼，如發現法（discovery）引導發現法（Guided discovery）發展法（Development）及歸納法（Inductive），但均爲了達成上述目標。
- 4.非常強調正確的數學術語，以嚴謹的數學術語符號來指認數學概念。他們認爲如果語詞不明確，寧可代以符號表示之。
- 5.強調教材的排列問題（本世紀所發行的教材，當時已被揚棄或排在較高年級），以證明學生本身是可以提早學習的。（註三十九）

許多的「新數字」計畫都對學童學習數學很有貢獻。但是對大多數的學童而言，新數學太抽象了，而且在計算技巧及解題技巧上幫助較少。（註四十）

2-2-3 1975年的返回基本運動：美國的新數學運動，如前所述，是由大學數學教授首先提倡，爲了要加強理工科學生的數理能力而起。所以一開始在數學教學目標及教材結構方面，均以推論的教材組織爲主，而忽略了一般學生的程度，特別是數學能力較低的學生。後來因爲蘇俄人造衛星事件的刺激，引起了美國廣大的課程改革運動，改

我國與美國小學數學教育比較研究—美國波士頓小學數學課程與我國小學數學課程比較

革逐漸下移到一般程度的中、小學校，情形就不同了，尤其目前電腦時代來臨，電算器及電腦普通使用，估計機器計算答案準確與否的能力，逐漸被重視。於是「計算技巧」又成爲學校數學課程的重點。然而新數學的課程內容是以符號邏輯 (Symbolic Logic)、布林代數 (Boolean Algebra)，集合論 (Set Theory)、拓樸 (Topology) 及抽象代數中的群 (Group)、體 (Field) 爲主，數學教師本人對這些抽象教材亦未必有深入了解，所以實際教學非常困難因之只能做若干表面解說，甚或跳過去不教，這可能是因爲由大學教授及專家學者所定的數字課程過於抽象化，理論化的關係。到了 1970 年代以後，新數學在各校實施情況不甚順利。各種評鑑、研究報告或著作多發現新數學的績效不如預期的理想。

從第一次 1972 ~ 73 的評鑑後，大家都認爲加強計算技巧是很需要的事，對實測及問題解決等基本概念亦需予以加強。

1974 年，「數學科學評鑑委員會」 (The Conference Board of the Mathematical Science) 下設「全國數學教育顧問委員會」 (National Advisory Committee on Mathematics Education，簡稱 NACOME)。NACOME 是由美國國科會 (NSF) 資助，由密蘇里大學 (Missouri University) 教授希爾 (S. Hill) 領導，致力於幼稚園到 12 年級數學教育的總覺與分析。1975 年，NACOME 出版了「幼稚園到 12 年中小學數學總覺與分析」 (Overview and Analysis of School Mathematics, Grades K ~ 12)，在評估一項中，提出下列兩個結論：

1. 比較傳統數學及現代數學的班級後，發現傳統數學班級的計算能力較強，但現代數學班級的理解能力較好。

2. 有明顯跡象顯示，學校對基本學術之研究討論有衰退的傾向，數學是其中之一。美國採地方分權的學制，小學採用新數學教材並未普及全國，但在採用新數學教材的學校裡，這種現象相當普遍。(註四十一)

新數學運動起動時期，恰巧遇上 1957 年「史潑尼克」 (Sputnik) 的危機，所以得到朝野一致支持，政府也投資大量經費在課程發展及教師進修上，家長也鼓勵孩子多多研讀數學，以便進入大學讀書。當時的社會大眾對學校教育的支持確實熱衷，尤其是數學教育。到了 1970 年中期，此一熱心情形，逐漸減退，情況與往日不可同日而語。(註四十二) 對新數學不滿之聲不絕於耳，下面是一些反應的標題：

強尼爲什麼不會做加法？ (Why Johnny Can't Add?)

新數學三振出局！ (New Math Strikes Out !)

消費者數學測驗不及格！ (Consumers Flunk Math Test !)

數學恐懼症 (Mathophobia)

美國新數學大騙術 (The Great American New Math Swindle) (註四十二)

由以上惡毒字眼，可見社會輿論，透過大眾傳播媒體，對新數學實施情形，表示不滿，雖然在學術上觀點上說新數學好話的，也不是沒有。如第一次全國教育成就評量 (NAEP) 在結論者述及：「強尼會做加法 (Johnny can add !) (註四十三) 但綜觀新

數學的課程內容，及教學方法，以及平時在各校實際實施情形，以及輿論的反對等。「新數學」、「數學革命」實施至此，亦不得不有所更張了。

2-2-4 基本技巧的教學範圍：到了1976年，「全國數學督學協會」(The National Council Supervisors of Mathematics, NCSM)於喬治亞州亞特蘭大城舉行年會時，與會人士超過一百多人，鑑於新數學運動實施種種，建議學校數學教育，應重新重視基本計算技巧的數學，並定下了「返回基本」(Back-To-Basics)的口號，1977年元月公佈會議紀錄，發表了「數學基本技巧宣言」。美國從此又回復到新數學實施以前的小學數學課程，但範圍不完全與從前的一樣。基本技巧只是新數學教學太不重視而已。

有許多理由足以說明為什麼基本技巧必須包含計算以外的範圍。現在科技社會裡，日常用到的技巧如「估計」(Estimating)、「解題」(Problem solving)「數據解說」(Interpreting data)、「資料結構」(Organizing data)、「測定」(Measuring)、「預測」(Predicting)及應用數學於日常生活情境中等等，早已超出以往計算技巧訓練的範圍，社會需要的改變，知識及大量資料的爆發，電腦及電算器的日益普遍，使得基本數學技巧的領域，不得不重新界定。(註四十四)

任何基本技巧都必須包含於計算在內，為什麼呢？因為計算技巧在數學課程中扮演著重要的角色，也對一個人在日常生活中使用數學的能力很有貢獻。「全國數學督學協會」(NCSM)指出基本技巧應包括十項重要領域，這十個領域彼此之間以及與其他學科之間都有關聯而且結合在一起。這十個領域提供學生的數學能力，足以應付不同場合所需的基本知能。

時代社會的演進改變我們的觀念，基本技巧也要跟著改變。誠如布魯納(J. S. Bruner)所言：「每一代的人都有某種新的期望，來塑造當代的教育。」(註四十五)例如美國學生今日必須學習英制及公制測量單位。將來英制系統將會成為歷史的名詞；而未來的社會更強調何時及如何用袖珍型電算器及其他電子產品於數學之中。

現在介紹十個基本數學技巧如下，但是其出現順序與教學順序或重要性順序無關。

1. 解題 (Problem Solving)

學習解決問題是研讀數學的緣由。問題解決是將舊有的知識應用到新的情境，不熟悉的情境中。除了解決教科書所列實際生活的問題之外，學生亦應有能力面對非教科書的問題，即包括日常生活問題在內。問題解決的策略包括提出問題 (Posing questions) 分析條件 (Analyzing situations)、轉述結果 (Translating results)、例證結果 (Illustrating results)、圖表繪製 (Drawing diagrams) 及運用嚐試錯誤 (Using trial-and-error)。在解決問題過程中，學生必須能應用邏輯的定律，以得到合理的結論。

2. 應用數學於日常生活情境中 (Applying Mathematics to Everyday Situations)

數學的所有應用，都與計算行為有關聯。學生應該有勇氣將日常生活情境的問題學式，解決數學式之後，再用結果說明原來問題。

3. 警覺於結果的合理性 (Alertness to the Reasonableness of Results)

學生應該學習從得到的結果去檢驗原來問題的合理性。社會上，電子計算器具的廣泛使用此項技能日趨重要。

4. 估計與近似 (Estimation and Approximation)

學生應具備概算數量、長度、距離、重量等簡單技術。另外也應具備利用手邊資料找出所需結果的能力。

5. 適度的計算技能 (Appropriate Computational Skills)

學生應該熟練整數和小數的加、減、乘、除運算。個位數基本結合的知識是必須的，也是算術中很有價值的一項技巧。另外，日常生活中也常需要一些分數的簡易計算。由於許多情況中，尤其是消費額的計算，常常用到百分數，所以必須發展並保存用百分數及熟悉百分數的能力。

6. 幾何 (Geometry)

學生應該學習幾何概念，包括點、線、平面、平行及垂直。也應該知道一些幾何圖形的基本性質，特別是那些有關實測和解題技巧的問題。也應該熟悉實物之間相似與相異之處。

7. 度量和實測 (Measurement)

學生應該具有測量距離、重量、時間、容量及溫度最少的技巧。角度的度量和簡單面積及體積的計算亦是必須具備的技能。學生應該並能應用公制或英制之適當工具實測。

8. 圖表的讀法、解釋及繪製 (Reading Interpreting and Constructing Tables, Charts and Graphs)

學生應該知道如何從簡易數值表、地圖、圖表去讀取所需資料及結論。他們應該能從圖表上有意義的術語中摘取數據資料。

9. 利用數學去預測結果 (Using Mathematics to Predict)

學生應該學習如何應用機率 (Probability) 去探求未來事件發生的可能性。他們應該熟悉如何利用數學幫忙來做有效的預測。

10. 電腦普及教育 (Computer Literacy)

所有的公民應該了解電腦「能做」及「不能做」些什麼？在目前電腦時代，這是很重要的。學生應該知道電腦在社會上的許多用途，例如用在數學上，金融機構、資料的儲存與尋找。政府機關，工商業的需求，使電腦的使用日益增加，所以必須了解電腦的用途及其限制。(註四十六)

此一宣言發表後，美國數學教育從此揚棄了新數學，在「返回基本」的呼聲中，開始實施其基本技巧的課程及教材。

2-2-5 美國波斯頓市小學數學課程簡介：美國波斯頓市小學數學課程教材完全採用了上述「數學基本技巧宣言」及「行動大綱」(註四十七)的規範，頗足以反映美

國數學教育的實況，所以本研究採為與我國教材相比較的對象。該課程提供波士頓市小學數學的教材範圍及明確的目標，以及數學基本能力測驗的標準。這些目標包含了所有麻薩諸塞州政府所要求的基本技巧，且提供各年級逐步的測驗，以評量學生個別的進步情形。不過它只提供學生應該知道的東西，卻沒有提供如何去教學生的方法。教學方法仍授權各校數學教師自行決定。

該目標分年編列，提列。提供每一年級最小至最大的課程目標，以適應學生的個利差異。每一目標題號有加圈符號予以區分，凡圈起來的是優先數學項目，即是一般學生應具備的能力，亦就是最小範圍課程，不加圈的，則由教師視學生能力情形，決定施教與否。（見附錄）

茲依其課程大綱的說明，分別摘錄介紹如下（註四十八）：

(一)數學教學目標及哲理基礎。

本教材提供數學教學目標，使學生在數學及問題解決能力上獲得最大發展。從幼稚園到8年級的數學訓練，可幫助學生：

- 1.了解十進位數字的系統。
- 2.了解數學加、減補法的做法。
- 3.了解數學術語。
- 4.熟練基本計算技巧，包括整數、分數及小數的四則運算。
- 5.熟練正確的驗算。
- 6.估算答案及檢驗計算結果的合理性，以期避免錯誤。
- 7.熟練基本概念及技巧之後，能運用電算器來檢查結果及解答問題。
- 8.了解時間和錢幣的單位，以及英制或公制的長度、容量、重量單位、並實際應用在適當場合。
- 9.了解幾何圖形及所用術語，並了解幾何在實際生活上的應用。
- 10.能依循公理並應用公式。
- 11.能闡釋不同類別的統計圖表及用途。
- 12.了解及應用基本的機率。
- 13.能有系統地逐步解答日常數學問題。
- 14.能應用數學技巧及知識到別的學科或其他場合。
- 15.發展及保持對數學正確的態度。

(二)教材分類

- 1.數與認數。
- 2.計算。
- 3.分數。
- 4.小數及百分數。
- 5.實測。
- 6.幾何。

7.概算、圖表等。

(三)課程發展

本教材資料的來源有：

- 1.前波斯頓課程教材。
- 2.麻州州立基本技巧規則。
- 3.國家課程教材的例題。
- 4.大部份教科書的內容。
- 5.大學數學教學論文。
- 6.數學專家及顧問的意見。
- 7.本教材綱要經由教師，行政人員，家長及其他人員的評判。
- 8.本教材經一千餘位波士頓市教師、家長、行政人員及其他人員的評論。

(四)新數學

本教材含有極少的集合論等等新數學內容，因為 1960 年代的課程，亦有一些觀念是值得學習。

(五)兩欄的格式

所有的目標及例題列成兩欄。左欄列的是目標的一般項目及教學的範圍。右欄列的是特別的例子，也就是學生所欲達到的目標。右欄可當做逐項評量，但不是考卷。（見附錄）

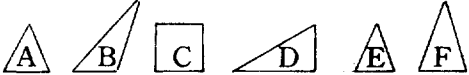
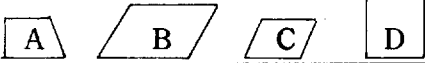



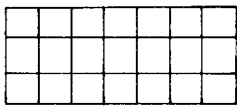
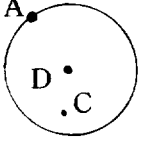
(六)課程編制

本教材係以螺旋式（Spiral）課程編制。小學數學教育可以說是算術與幾何的兩元課程。站在螺旋課程的說法，課程內容一圈一圈旋轉逐漸擴大。因之算術與幾何的概念，在小學數學課程中應逐年出現而逐年加深。

(七)目標個數

年 級	全部目標數	優先目標數
幼稚園	33	33
一年級	53	43
二年級	57	49
三年級	62	51
四年級	87	64
五年級	91	64
六年級	102	69

附 錄：

Level Two F	
<p>④ Classifying shapes by the number of sides.</p>	<p>4. Which shape is not a triangle? _____</p> <p>f </p>
<p>⑤ Identifying a rectangle and a square in a set of quadrilaterals.</p>	<p>5. Which figure is a rectangle? _____</p> <p>f </p>
<p>⑥ Identifying basic shapes: Square, circle, rectangle, triangle (maintained).</p>	<p>6. Write the letter of each shape, by its name:</p> <p>triangle _____</p> <p>square _____</p> <p>rectangle _____</p> <p>circle _____</p> <p>g </p>
<p>⑦ Relating the four basic shapes to everyday objects (maintained).</p>	<p>7. Which has the same shape as a rectangle? _____</p> <p>g a clock a door a pizza</p>
<p>⑧ Matching shapes of the same size (congruent).</p>	<p>8. Which rectangle is the same size as this one:  _____</p> <p>h </p>
<p>⑨ Counting small squares (finding the area) of a rectangle or Square (thirty units or fewer)</p>	<p>9. How many small squares are there in this figure? _____</p> <p>k </p>
<p>⑩ Identifying the center of a circle.</p>	<p>10. Which point is the center of the circle? _____</p> <p></p>
I	

第三章 中美兩國小學數學課程比較

我國教育部於民國 64 年，所頒佈的「國民小學課程標準」，其中數學教材綱要分為六大類，每類之下以大綱方式編列，並不以年級為段落。但因美國波斯頓市數學課程及數學目標，卻以分年的「行為目標」來敘寫，故兩者甚難比較。不過我國「國民小學數學科教學指引」，卻分年級並以單元編寫，每一單元之下均列有單元目標，此項目標亦用行為目標方式敘寫。因此，我們將用我國教學指引之單元目標，與美國波斯頓市之

我國與美國小學數學教育比較研究—美國波斯頓小學數學課程與我國小學數學課程比較課程教材目標兩組來對照，以作比較，以辨別兩者的教材目標為何？編制情形為何？彼此內容的分別為何？排列的先後，份量的多寡為何？都可以加以區別。爲了能使兩國數學目標比較得一目瞭然起見，現依照美國波斯頓市小學數學教育目標的原案所列爲準，而將我國各冊教學指引所列之單元目標，依照年級次序，予以配合列入，這樣就可以一一對照，全無遺漏。

波斯頓市的教材組織，每一年級皆分爲七大類，故以教材組織爲經，以此七類範圍爲緯，再根據螺旋課程編制原則，逐年加以發展，構成一完整的數學課程。茲將七類範圍名稱列如下：

1. 數與認數
2. 計算
3. 分數
4. 小數與百分數
5. 實測
6. 幾何
7. 概算、圖表等

爲使兩國數學目標比較的結果，能條理分明，而便於歸納結論起見，特別依上述七類，逐類討論，每一類之下將分爲兩部份，第一部份是兩國各年級數學目標（亦即教材大綱）的比較；第二部份是說明，將依(→)教材內容之有無與(↔)教材順序分別說明之。其中第一部份，爲方便比較，將美國教學目標置於左欄，我國部份放在右欄，又爲節省篇幅，我國教學目標不予一一照列，只列其出現的年級與單元數量，並以下列符號表示之：

「一上①」：前面的「一上」表示一年級上學期，後面的「①」表示第 1 單元。

「四下①③」：代表四年級下學期，第 1、3 兩單元，均爲對照美國該項目標的單元。

（我國教學指引中所列的目標爲具體目標，故重複機會較多。）

「———」：代表我國無是項教材目標。

餘類推。

3～1 數與認數

3-1-1 教學目標的比較（以認數教材爲例）

因爲全部列入，篇幅過大，故只以一二年級數與認數教材爲例，列述如下：

美 國	中 華 民 國		
一年級：			
①寫出零到九十九的數……………	一上①②③⑤⑧		一下①
②區別九十九以內各數別種寫法……………	一上①②③⑤⑧		一下①
③分辨出個位數和十位數……………	一下①		
④找出第一到第十的序數……………	一上②③⑤		
⑤能逆數二十到一……………	—————		
⑥寫出九十九以內各數“之前”或“之後”的數……………	一上①②③⑤⑧		一下①
⑦能用大於、小於和等於的符號，比較兩個數的大小……………	二上⑦		
⑧能兩個一數到二十，五個一數到五十，十個一數到一百……………	一上⑧		一下①
⑨分辨十以內的奇數或偶數……………	五上②		
二年級：	五上②		
①寫出零到九百九十九的數……………	一上①②③⑤⑧	一下①	二上⑦
②寫出九十九以內各數別種寫法……………	一上①②③⑤⑧	一下①	二上⑦
③辨別個位、十位及百位數……………	一上①②③⑤⑧	一下①	二上⑦
④找出第一到第二十分的序數……………	一上①②③⑤⑧		
⑤能逆數一百以內各數……………	—————		
⑥能寫出零到九百九十九各數“之前”或“之後”或“之間”的數……………	一上①②③⑤⑧	一下①	二上⑦
⑦能運用大於、小於或等於的符號，比較數的大小……………	二上⑦		

3-1-2 比較說明

(一)教材內容方面

如上所示，美國所有，而我國所沒有的教材，有下列各項：

- 1.美國一年級有逆數二十以內的數，二年級有逆數一百以內的數，我國無是項教材。
- 2.羅馬數字的教材，美國四年級認識到一百以內，五年級到一千以內，六年級到二千以內，我國無此項教材。
- 3.整數的質因數分解，美國在五、六年級有此教材，五年級在五十以內，六年級在一百以內；我國在小學階段無此教材。
- 4.美國在六年級已有正、負整數的介紹，從一組整數中區別出正整數，我國在六年級上學期綜合應用(三)亦介紹負整數，比大小，但無「正整數」、「負整數」等名詞，更無區別正整數的教材。

5.美國六年級列有指數的教材，我國無是項教材。

6.美國五年級有數 $\overline{2}$ 、數 $\overline{4}$ ，使後者為前者的兩倍，我國無是項教材。

(二)教材順序方面

中美兩國均列有該教材，但排列在某年級之順序不一，計有下列幾點：

1.用大於、小於、等於的符號比較數的大小，美國一年、二年及三年級均列有該教材，我國出現較美國慢一年，即在二年級列有此目標，以後即不再列出，但仍沿用。

2.奇數或偶數的分辨，美國一年級即列有十以內的認識，二年級為二十以內，三年級為一百以內，四年級列有運用奇數與偶數於實際生活上，五年級未列，六年級有奇數、偶數的區別。我國除五年級上學期列有該教材，其他年級未再出現。

3.寫出數的別種寫法，美國一、二年級皆限制在九十九以內，三年級在九百九十九以內，其他各年無列此項教材，我國一年級到一百以內，二年級到一千以內，三年級到一萬以內，四年級則在一兆以內。

4.序數的教材，美國一年級教第一到第十，二年級則第一到第二十，三年級為第一到一百，四年級為零到一萬的序數；我國除一年級列有第一到第十外，其餘各年級不再出現。

5.判別可被 2、3、5 和 10 整除的數，美國列於四年級、五年級至六年級，我國只出現在五年級，以一單元介紹完畢，以後即不再列出。

6.美國四年級即列有二十以內，判別質數或合數，五年級為五十以內，六年級為一百以內。我國則出現在五年級，一單元即達成此項目標，一開始限制在三十以內，其後不再出現。

7.美國對於因數的教材，自四年級就列出此教材，最大公因數、最小公倍數亦出現在四年級的分數範圍內；我國編列於五年級。

8.排列一組正負整數的大小，美國五年級限制在負十至正十之間，六年級則為負二十至正二十之間。我國除了六年級上學期之綜合應用(三)，出現過負十至正十之間的數線，排列大小等，其他單元未正式列有負整數的教學。

9.位數的認識，中美兩國一、二、三年級完全相同，但美國四年級到百萬位數，五年級到億位，六年級到十億位。我國四年級已介紹到萬以上，一兆以下的各位數。

10.寫出一數列順序，以算術或幾何步驟延伸的數列，美國出現於六年級。我國未特別編列此教材，但在數數時，已有算術數列的概念。但幾何數列的概念則缺乏。

(三)教材範圍

1.整數認數方面，中美兩國之範圍有些差異：

我國一、二、三年級分別到 100, 1000, 10000 以內，美國分別為 99,999,9999 以內的數，差異不大。但我國四年級認數到兆位以內，五、六年級不再教認數；美國四年級只到百萬位，五年級教到億位，六年級到十億位。

2.位數的認識，我國一至四年級分別從個位到十位數、百位數、千位數、兆位數。三年級(千位數)與四年級相去甚遠。美國一至六年級分別從個位到十位數，百位數、

千位數、百萬位數、億位數、十億位數。

3. 數數的教材，我國一年級列出兩個兩個一數，二年級以上各年級則配合認數的教學，以數線的方式表達五個一數、十個一數、百個一數、千個一數；對於三個一數，四個一數一向缺少。美國在此方面較為詳細，一年級有兩個一數，五個一數、十個一數；二年級增加百個一數；三年級增加三個一數、四個一數、二十五個一數、一千個一數。四年級沒增加，但從百萬位以下任一數開始數。五年級為數數使後者為前者的兩倍。

因篇幅關係，只舉「數與認數」這類的教學目標為例；其餘各類，只列出「比較說明」，不列各類之目標。

3～2 計算

3～2～1 比較說明

(一) 教材內容方面

美國所有而我國所無之教材，計有下列幾點：

1. 從右到左的加減法，美國列於一年級，以準備二年級進位加法。
2. 比某數多十、少十或多一百、少一百的數，美國列於二、三年級。
3. 函數問題，美國自三年至六年皆有該教材，由簡入繁。
4. 指數的運算，以二、三或四次方以下為限，美國出現於六年級。
5. 找出資料不足文字題中所需填入的資料，美國列之於六年級。
6. 計算 1 位正或負整數的加減法，美國列於六年級。

(二) 教材順序方面

中美兩國均列有該教材，但排列在某年級之順序不一，計有下列幾點：

1. 三個相同數的連加（不進位），美國一年級即列有該教材，我國到二年級才有此教材（有進位）。
2. 被加數和加數互換，其值不變，美國一年級有之，我國列於二年級。
3. 補餘加法及減法，美國列於一年級，我國列於二年級。
4. 2 位數減 1 位數，退位減法，美國列於二年級，我國則提早到一年級教學。
5. 將偶數個實物一對一對的分組，美國列於一年級，我國則列於二年級。
6. 9×9 的基本結合，美國列於三年級，我國則列於二年級。
7. 3 位數的進位加法與退位減法，美國列於三年級，我國於二年級。
8. 三個個位數的連乘法，美國列於三年級，我國則於四年級。
9. 12×12 的基本結合；美國於四年級，我國於三年級。
10. 4 位數或 3 位數的加法和減法，美國於四年級，我國則於三年級。
11. 2 位數乘以 1 位數與 3 位數或 4 位數除以 1 位數，美國於四年級，我國出現在三年級。
12. 計算一組數的平均數，美國四、五、六年級均有該教材，我國則於五年級教學。
13. 補法乘法，美國列於四年級，我國則於三年級。

14. 6 位數以下的減法，美國於五年級，我國則於四年級。
15. 4 位數乘以個位數，3 位數乘以 2 位數，4 位數除以 1 位數，美國皆列於五年級，我國則於三年級。
16. 3 位數除以 2 位數，美國於五年級，我國於四年級。
17. 先乘除後加減的運算次序，美國列於四、五、六年級，我國則於四年級。
18. 解答一步或二個步驟的文字題，美國四、五、六年級皆有該教材，我國列於四年級。

(二)教材範圍

1. 就基本結合加法及減法而言，美國細分得清楚，如一年級列有十以內，二年級十八以內，我國一年級即教完。
2. 就基本乘法而言，美國三年級為 9×9 ，四年級為 12×12 ，我國皆比美國早一年級教學。
3. 就基本除法而言，美國三年級有 $81 \div 9$ ，四年級有 $144 \div 12$ ，我國與美國相同。
4. 就進位加法及退位減法，美國二年級開始；我國於一年級即開始教學。
5. 九九乘法，美國出現於三年級，我國則出現於二年級。3 位數乘以個位數進位乘法美國列於三年級，我國亦列於三年級。一位數連乘法，美國出現在三年級，我國出現於四年級。
6. 除法的計算，美國與我國都出現於三年級。

3 ~ 3 分數

3 ~ 3 ~ 1 比較說明

(一)教材內容方面

分數這一部份在教材內上大同小異，美國所有之教材我國皆有之，但我國比美國更重視整數、小數、分數的統整，以及比與比例的教學，其中正比例、反比例、母數、子數、母子和、母子差等，均為美國所無，我國皆列於六年級。

(二)教材順序方面

兩國雖然都有該項教材，但其出現在某一年級的順序不一，茲條列如下：

1. 區分實物的全部、一半、四分之一等，美國一、二年級就已有此項教材，我國於一年級不教分數，二年級才有二分之一，四分之一的介紹。
2. 三分之一、三分之二、四分之一、四分之三等分數，美國於二年級出現，我國於三年級列此教材
3. 估計一個容器容量的一半，美國一年級有之，我國排在二年級。
4. 能將十或十以內，一列偶數個實物分成相等的數，美國列於一年級，我國列於二年級。
5. 寫出圖形中斜線部份的正確分數，美國二年級列出分母是二、三或四；三年級分

母是八以下，四年級分母是十六以下，五年級分母是二、三、四或八，六年級是二、三或四，分母分子的數字都不很大。我國則不然，二年級分母只有二或四，到了三年級分母已出現一百的分數。

6. 在比較分數大小，美國於三年級列有比較單位分數的大小，並以圖形配合。我國三年級亦有此教材，其後立刻以大於、小於、等於的符號表示大小。

7. 用大於、小於、等於符號比較真分母的大小，美國四年級分母限制在 5 以下，五年級限制在十以下，六年級分母限制在 12 以下；我國三年級限制在分母 100 或 100 以下，同分母真分數大小的比較，四年級有帶分數的大小，異分母分數大小的比較一直到五年級才有該教材。

8. 同分母帶分數的加減法，兩國皆列於四年級，但美國是不進位，不退位；我國已有進位，有退位了。

9. 帶分數乘以真分數的乘法，美國列於五年級，我國於六年級。

10. 真分數除以真分數的除法，美國列於五年級，我國列於六年級。

11. 找出真分數的倒數，美國列於五年級，我國出現在六年級。

12. 比及比例的出現，美國於五年級，我國於六年級。

13. 解答一步或二步驟有關分數的文字題，美國出現在五年級，我國出現在六年級。

14. 異分母分數的加減法，美國列於六年級，我國列於五年級。

15. 同分母帶分數的進位加法，退位減法，美國出現在六年級，我國則早了兩年，出現在四年級。

16. 計算異分母帶分數的不進位加法，不退位減法，美國列於六年級，我國出現在五年級，而且我國已有進位加法、退位減法了。

3 ~ 4 小數與百分數

3 ~ 4 ~ 1 比較說明

(一) 教材內容方面

美國錢幣之使用，尚使用分角等單位，我國則不使用該單位，故我國無此等教材，例如：一分、五分、十分、二角五分、五角等輔幣之認識、互換、找零、加減等。另外找出能化成循環小數的分數，我國亦有該教材，但無循環小數一詞。

(二) 教材順序方面

1. 寫出輔幣名稱，美國列於二年級，我國列於一年級。

2. 解答一元、五元、十元找餘的文字題，美國列於三年級、我國列於一年級。

3. 寫出小數到十分位、千分位、萬分位，美國分別列於四、五、六年級，我國則於三、四、五年級，各提早一年。

4. 比較小數的大小，美國列在五年級，我國在四年級。

5. 小數末位添零其值不變，小數加減法，小數乘以個位或二位數，帶小數除以個位或二位數，美國皆列於五年級，我國則列於四年級，皆比美國提早一年教學。

6. 用小數寫出以十萬及百萬為單位的記法，美國列在六年級，我國是以萬及億為單位，列在五年級。

7. 小數、帶小數乘以 2 位小數，小數除以 1 位小數，美國列於六年級，我國則於五年級。

8. 化分數成小數，美國在四年、五年、六年級皆有該教材，四年級化十分之幾或百分之幾的真分數成為小數，五年級是化十分之幾或百分之幾的帶分數成小數，六年級則是化可除盡的分數成小數。我國此項教材皆列在六年級，更有除不盡的，此項除不盡的教材則用四捨五入法取之。

3 ~ 5 實測

3 ~ 5 ~ 1 比較說明

(一) 教材內容方面

美國所有而我國所無的教材如下：

1. 四季的順序，美國列於一年至二年級，我國此項教材列於自然科。
2. 英制長度單位，如吋、呎、碼、哩等，美國一年至六年級皆有之。
3. 四季的冷熱、寒暑表、華氏攝氏溫度等，美國一年至六年級皆有之，我國列在自然科。

4. 英制重量單位，如盎司、磅、噸等，美國二年至六年級皆有之。

5. 英制容量單位，如品脫、加侖等，美國自三年至六年級皆有之。

6. 數字鐘的時間，AM, PM 表示上午、下午的時間等，美國列於三年級。

7. 用數字簡寫代表日期，美國列於六年級。

(二) 教材順序方面

兩國均有該教材，只是出現在某個年級出現不一如下：

1. 同半徑圓柱容量的大小，鐘錶為測量時間及尺為測量長短的工具，美國一年級已有，我國皆列於二年級。

2. 比較實物的輕重，美國列於一年級，我國列於二年級，慢了兩年。

3. 一週內各天的順序，由於美國各天名稱不同，故其一至三年級都有是項教材，我國則列於一年級，其他年級都不列。

4. 美國各月名稱不一樣，故每一年級都列有區別一年各月的順序，以及每月的日數之教材，我國則只列於二年級，其餘各年級不列。

5. 量尺的運用，美國一年級即已有之，我國至二年級才開始使用，且只以公分來量，並用 cm 代表。

6. 秤的使用，美國二年級即開始，我國三年級才開始。

7. 溫度計的使用，美國自二年級即開始，我國列於自然科。

8. 讀出鐘面上分針在兩個五分記號之間的時間，美國列於三年級，我國列於二年級。

9.用 24 小時制代表時間，美國列於三年級，我國列於四年級。

10.應用公制量尺量一線段到公厘，美國列於四、五年級，我國則在二年級，提早了兩年至三年。可能因為美國日常生活常用英制的關係。

11.計算公制長度單位的進位加法及退位減法，美國列於五年級，我國列於四年級。

12.公制重量單位一步驟的換算，美國列於五年級，我國列於三年級。

13.辨別測量工具的功能，如鐘、錶、碼錶、量尺、量杯、秤、溫度計、月曆等，美國自一至六年級都有列入。我國除一、二、三年級列入外，其餘各年皆不列。

14.辨別公制適當的單位，美國四、五、六皆有該教材，我國則於二、三、四年級有此教材。

15.估算長度、重量、容量及時間，美國自二年至六年級，都有此教材；我國除四年級取概數有略提一下，其他地方未出現過。

16.計算兩時刻之間的時間，美國五、六年級皆有該教材，我國列於五年級。

17.化不同說法的時間單位（例如 80 分）為兩進複名數（例如 1 時 20 分），美國出現於六年級，我國則列於四年級。

18.化公制容量單位為兩進複名數，美國列於六年級，我國出現於五年級。

19.化公制重量單位為兩進複名數，美國列於六年級，我國出現於三年級，早了三年。亦可能我國常使用公制單位的關係。

3 ~ 6 幾何

3 ~ 6 ~ 1 比較說明

(一)教材內容方面

美國所有而我國所無的教材，計有下列幾點：

1.判別一封閉域的“裡”或“外”，美國列於一年級。

2.寫出在一個參考點“之上”，“之下”，“之內”等字，美國列於一年級。

3.辨認封閉曲綫或開放曲綫。

4.判別上下左右，美國列於二年級。

5.美國三、四、五年級，皆有認識相似的圖形，六年級有相似三角形；我國各年級皆無此教材。

6.設定每邊長度，求出多邊形的周長，美國四、五年級皆有列此教材。

7.區別具有兩條對稱綫的圖形，美國列於六年級。

(二)教材順序方面

兩國皆列有該項教材，而其出現在某年級先後不一，茲分別說明如下：

1.對稱平分一圖形，美國一至六年級都列有此教材，我國只列在五年級。美國六年級都列有此教材，我國只列在五年級。美國六年級更列有兩條對稱綫的圖形，我國則無。

2.全等的概念，美國自一年至二年級皆有之，全等的術語，出現在四、五、六年級

。我國到了四年級才有此概念、術語的介紹。

3. 正方形及長方形的面積，美國自一年級至六年級都有，一至三年級是以數小方格教學，以後才用公式算。我國四年級才數小方格，數後就開始教公式，以後不給公式，就得算面積。美國四、五、六年級是給定公式之條件下求面積。

4. 判別兩直線的交點，美國列在二年級，我國於四年級。

5. 找出圓心的位置，美國列於二年級，我國列於三年級。

6. 辨別圓的直徑，美國三、四、五、六年級都有該教材，但三、四年級不提出“直徑”的術語，五、六年級才提。我國三年級即有“直徑”的術語。

7. 辨別直角，直角記號，美國列於四年級。我國列於二年級。

8. 長方體的體積，美國四、五、六年級都有此教材，四年級並給予虛線圖及公式，五年級給定公式，六年級增加求正方形體積，也給予公式。我國皆列於四年級，最後的求面積，是不給公式的。

9. 區別直角、銳角、鈍角，美國列於五、六年級，我國列在四年級。

10. 角的各部份名稱：頂點、邊、角，美國列於五、六年級。我國列於四年級。

11. 辨認正三角形，美國列於五年級，我國列於三年級，早了兩年。

12. 線段、點、垂直、平行等，美國出現於六年級，我國在四年級，且沒有綫段、點的名稱。

13. 區別等邊、等腰及不等邊的三角形，美國列於六年級，我國於五年級。

14. 找出文字題中正方形、長方形或三角形的周長，美國列在六年級，我國四年級有求正方形、長方形的周長，五年級有求三角形的周長。

15. 三角形或平行四邊形的面積，美國出現在六年級，我國在五年級。

16. 圓的圓心、直徑、半徑等，美國出現於五、六年級，我國在三年級。美國六年級有弦的介紹，我國則無。

17. 圓周的求法，圓周之名詞，美國出現在六年級，我國出現於五年級。

18. 區別七種立體幾何圖形，美國二至六年級皆有之，我國到六年級才介紹。

3～7 概算、圖表等

3～7～2 比較說明

(一) 教材內容方面

找出一組資料的「中位數」，美國有之，我國則沒有。

(二) 教材順序

兩國均有該教材，出現順序不一的有：

1. 取概數，美國三至六年級均有之，但我國則排在四年級。

2. 簡單機率，美國四至六年級都有，我國則於六年級。

3. 比例尺的應用，美國列在五、六年級，我國則列在六年級。

4. 畫出序對，美國於六年級，我國於五年級。

5. 估算文字題中的概數，美國列於六年級，我國列於五年級。

第四章 結論與建議

依第一章第三節「研究方法」中的說明，本研究採「比較研究法」，並以教學目標、教材內容、教材範圍、教材順序、教材分量等項作為參照準則，將中美兩國小學數學課程及教材，一一予以比較，其結果已散見上述各章，茲再歸納其結論及建議於後。

4~1 結論

(一) 教學目標方面

就教學目標而言，歸納起來可分為兩方面來說：一是目標內容本身；一是目標敘寫方法。前者是關於教學目標的內容；一般可分為數學的、社會的、心理的三個不同的層面。第一、所謂「數學的目標」是數學本身所需要表明的數學特性，數量系統，教材範圍等。目前美國數學教材，已摒棄新數學理論化、抽象化、通則化的範疇，恢復返回基本技巧的方向。第二、所謂「社會的目標」是指社會應用價值的提示；1950~75年代的「新數學」不重視社會的應用，其論點是：「如果你瞭解數學，你自然會解題。」但目前因電算機械的普遍，日常生活中必須具有估算其結果是否正確的能力，故特別重視計算技巧及估算方法等。第三、所謂「心理的目標」，「新數學」時代，常用到皮亞傑的階段理論、具體操作等，布魯納的螺旋課程編製，發現教學法等。現在，返回基本運動的提倡，又重視1930年代勃朗乃爾意義化及社會應用兩者並重學說，上述兩種說法，在美國波斯頓市的教材上，都可以明顯見到。

至於在目標的敘寫方法方面，美國波斯頓市小學數學課程，完全採用「行為目標」敘寫法來敘寫。課程編製上的總目標，亦以「行為目標」敘寫，稱之為「數學目標及哲學基礎」(Goal and Philosophy)，他們列了十五條目標，大多數數學教材內容方面的敘述，是所謂認知(Cognitive)、技能(Psychomotor)的目標，但亦列有情意(Affective)的目標，如第十五條，即最後一條：「發展及保持對數學正確的態度」等。

在我國方面，依課程標準所列，除總目標四條以外，另外分段目標，列出低、中、高年段的目標，亦述及數學教材範圍及社會應用的層面，並亦引有情意目標方面的措詞。但對布魯姆(Bloom)之教育目標分類學(The Taxonomy of Education Objectives)似尚無具體反應。分層未能如美國所列，分為認知、技能及情意目標，明顯敘列，此點頗值得注意，亦似乎可予改進，以達到理論上的要求。

(二) 教材編製方面

我國之教材綱要分為下列六大類：

1. 數與量
2. 實測與計算
3. 圖形與空間

4. 統計與圖表
5. 集合與關係
6. 術語與符號

美國的分類為下列七大類：

1. 數與認數
2. 計算
3. 分數
4. 小數與百分數
5. 實測
6. 幾何
7. 概算、圖表等

美國教材每一年級均以此七大類為經，而採螺旋編制為緯，逐年加廣加深，予以發展，所謂「課程發展」(Curriculum development)確有其實質的意義。我國採用六大類的分法，逐年發展的跡象完全不明顯，分類範圍亦不均勻，有些過大(如實測與計)，有些過小(如集合與關係)，似乎不利於每個目標逐年發展，此點亦值得我們重視，將來採取何種課程組織，值得研究。

在理論上說，教材組織或編制，除所謂「直線編制」及「圓周編制」或「螺旋編制」之外，尚有所謂「論理編制」及「心理編制」之說。理論編制是以數學本身系統為依據，採照數理邏輯的需要，發展教材，較不重視兒童的能力與興趣。心理編制則以學生的學習能力和興趣為依據，依教材難易為重點組成單元，先學習較容易的，然後再學習較困難的教材，藉以發展單元課程教材。美國所謂「課程發展」相當於我國的「課程標準」。兩者在不同的術語解釋上，似有相同的意義。課程是由低而高，由簡單而繁複的發展而來的，我國如能把握此點，則我國小學數學課程標準的改進，必更較為具體，亦可能較有實質的改進。

(二)教材內容有無方面

中美兩國教材，經過兩兩相對照比較之後，發現下列各項為美國所有而我國所無之教材：

1. 逆數
2. 羅馬數字
3. 整數的質因數分解
4. 負整數的加減
5. 指數及其四則運算(次數為二次、三次和四次)
6. 數數使後者為前者的兩倍(等比數列的概念)
7. 從右到左的加減法
8. 比某數大十，少十，大一百，少一百的數
9. 函數問題

10. 找出資料不足文字題中所需加入的資料
11. 分、角的使用法、互換、找零（錢幣）
12. 循環小數
13. 四季循環
14. 英制長度、容量、重量的單位
15. 冷熱、寒暑
16. 數字鐘
17. 用數字簡寫代表日期
18. 封閉曲綫的裡外
19. 在某一參考點“之上”、“之下”、“之內”等字
20. 封閉曲綫，開放曲綫
21. 判別上下左右
22. 相似圖形
23. 多邊形的周長
24. 求中位數

上述各項有些是國情不同，在社會應用上相異，所以有其分別，例如英制度量衡單位，輔幣的應用等。有些則是內容範圍的不同，如美國有負數、指數及函數，我國小學則無此項教材。大致上說，美國數學程度，不比我國高。美國所有而我國所無的教材，多為日常生活應用的教材；但我國所有而美國所無的教材則意義頗不同，似乎在程度上會加深一些。

下列各項為我國所有而美國所無的教材，依我國小學數學課本第一至十二冊為準：
（有*號部份，程度顯然不同）

1. 8×5 比 8×4 多「一個 8」
- * 2. 數綫
- * 3. 以萬億為單位之加減法
4. 珠算
5. 電算器的操作（美國數學目標中沒有列出，實際使用情況不得而知）
6. 用圖例列式，表示加減法的關係
7. 利用綫段圖做加減法
- * 8. 分配律的事實
- * 9. 理解交換律、結合律、分配律等法則
- * 10. 母子和、差、母數、子數
- * 11. 正比
- * 12. 反比
- * 13. 打折、加成
14. 用間接比較，個別單位比較；判斷具體物的長短

- 15.用天平理解重量的遞移性
- 16.速率、時速、分速、秒速等
- * 17.兩日期之間的日數
- 18.某日期開始，經過一段日數後的日期
- 19.應用容積的算法求出不規則物體的體積
- 20.理解平面和曲面
- * 21.用展開圖，確認平面圖形與立體圖形的關係
- * 22.數出長方體的頂點、面及邊的個數
- 23.圓規的功用，畫圓
- 24.用量角器實測角度，或畫角
- 25.四邊形對角綫的認識
- * 26.理解長方體與正方體邊、面的垂直關係及平行關係
- 27.求複合形體的面積及體積
- * 28.菱形的面積，梯形面積
- * 29.角柱、角錐的面、頂點與邊的個數及其展開圖、面積、體積
- * 30.圓柱、圓錐的展開圖、面積、體積
- 31.用「正」字的筆劃數，畫計各類資料的次數
- 32.理解「以下」、「以上」、「未滿」、「超過」等術語所表示的區間
- 33.點對稱的圖形

我國所有而美國所無的教材，有「*」符號部份似為難度相當高的教材。如百分數中：百分法應用題，求母子和、母子差、母數和求母數、子數、折扣等。比例的問題則有正比、反比等。有些是新數學遺留下來的，如理解交換律、結合律、分配律等。我國教材經過實驗試教，難度應尚為合適，美國則無此等教材。豈是美國小學生的程度比我國為低嗎？此點甚值得再加研究，我國因未實施小學數學教材評鑑，確實情形，亦難獲知，我們值得做如美國的各科學力評鑑工作。

四)教材範圍方面

美國波斯頓市小學數學課程的內容範圍，因嚴格依照返回基本技巧運動的規定，似已徹底摒棄新數學教材的影響。全看不到「集合」、「數線」等名詞。相反的，我國則仍保持該項名詞，例如課程標準中，六大類之中，有一類為「集合與關係」，四年級列有「集合、元素及集合的表示法」、「部份集合的具體例子」等教材，但細察教科書中則無此一單元。可能是因為課程標準起草在先，教科書編制在後，在編輯教科書時，美國已有「數學基本技巧宣言」(1977年1月)的發表，所以亦順應此一潮流，而刪去集合的教材了？

美國教材綱要，仍以整數、分數、小數、百分數為範圍，並十分重視加減乘除四則運算。不過，因為受「數學基本技巧宣言」的影響，很強調解題的能力。共包括問題解決、應用數學到日常生活中，留心結果的合理性，估計與概算，正確的計算技巧、幾何

、實測、圖表的讀法、解釋及繪製、應用數學為預測工具、電腦常識等十大領域教材。其中尤其重視估算、實測，認為是配合計算器械的發展，必須要具有的估算器械計算是否合理的能力。可見返回基本，並不完全與新數學之前的教材一樣，而有適應 1980 以後年代社會應用的影響存在。社會普遍使用電腦，使數學一科，肩負著更重大的使命，以使國民適應社會的潮流，此點亦需加以重視。

此外，美國提供了最大範圍及最小範圍的教材。最小範圍稱為「優先教學目標」是每一位學生必須達到的項目。最大範圍即是全部所列的教學目標，其中非優先教學目標項目，教師可依實際情況施教或略去不教。此項措施，對於適應個別差異，可以說有相當作用。我國的教材則無此項措施，不論上智下愚，或是盲聾啞等殘障學童，學習的數學都一樣多，此點甚值得加以研究。美國教育重視個人的學習，我國則重視團體的標準。但是。我國學童對數學的個別差異，仍然存在，如不顧學童是否能學習與否一律要學一樣多，一樣難的教材，可能不是很好的策略。

(五)教材排列順序方面

美國排在我國之前的有下列各項：

1. 用大於、小於和等於的符號比較數的大小
2. 奇偶數
3. 判別可被 2、3、5、10 整除的數
4. 質數、合數
5. 正負整數的大小
6. 三個相同數的相加
7. 偶數個實物一對一對分組
8. 補法加減法
9. 三個一位數連乘
10. 平均值
11. 用方框代表數字
12. 一半、三分之一、三分之二、四分之一、四分之三
13. 估計容量的一半
14. 最小公倍數、最大公因數
15. 帶分數乘以真分數
16. 真分數除以真分數
17. 分數的倒數
18. 簡單比及比例的文字題
19. 化分數或小數
20. 一年中各月的順序
21. 容量的大小
22. 重量的大小

23.量尺的使用

24.用 24 小時制代表時間

25.對稱平分一圖形

26.正方形或長方形內的小方格

27.直線的交點

28.圓心

29.立體幾何圖形

30.周長

31.概數

32.機率

33.用比例尺

我國排在美國之前的教材有下列各項：

1. 999 以內各數的別種寫法
2. 寫出億位、十億的數
3. 18 以內基本結合加減法
4. 2 位數減 1 位數退位減法
5. 乘法基本結合
6. 3 位數進退位加減法
7. 4 位數加減法
8. 2 位數乘以 1 位數
9. 3 位數除以 1 位數，不進位
10. 4 位數除以 1 位數，商為 3 位數
11. 一位數乘法中，補法乘法
12. 6 位數以下的減法
13. 4 位數乘以 1 位數，3 位數乘以 2 位數
14. 3 位數除以 2 位數
15. 括弧內先算乘除後加減
16. 解出包含一步驟的計算文字題
17. 6 位數以內的加法
18. 7 位數以內的減法
19. 4 位數乘以 3 位數的乘法
20. 4 位數除以 2 位數
21. 寫出圖形陰影部份的分數
22. 同分母帶分數的進位加法及退位減法
23. 寫出輔幣的名稱
24. 找零錢的文字題

- 25.寫出小數到十分位、千分位、萬分位
- 26.用大於、小於、等於表示小數的大小
- 27.小數點的本幾位填零，其值不變
- 28.帶小數的加減法
- 29.小數乘以 1 位或 2 位整數
- 30.小數除以 1 位或 2 位整數
- 31.用小數寫出百萬及十萬的縮寫
- 32.小數乘以 2 位小數
- 33.小數除以 1 位小數
- 34.化真分數為百分數
- 35.讀鐘面的時間
- 36.公制長度單位進退位加減法
- 37.辨別直角，用直角記號
- 38.直角、銳角、鈍角
- 39.全等的圖形
- 40.正三角形
- 41.長方體、正方體之體積
- 42.求概數數到十萬位、十分位、百分位

教材編製，如前所列，有所謂心理編制方法，即先具體後抽象，先簡單後複雜，先容易後較難，依照學童能力發展，以及學童的理解經驗，逐步加深加難，這是課程發展的重要意義所在。比如我國將進位加法及退位減法，放在一下，美國則放在二年級；乘法九九，我國放在二下，美國則放在三年級。一般而言，美國放在我國之前的教材，多為日常生活常識；我國放在美國之前的教材，則常為運算方法。就實質上說，我國要較美國之程度為高，此點亦值得重視。

(六)教材分量方面

我國的教材係以試教試編方式，經過嚴密的過程發展出來的，然後才成為國定本教科書，在教材分量方面，應該頗能合乎兒童的能力及興趣，但並未有實際的課程評鑑追蹤研究；究竟情形如何，則尚難知。美國則只列舉教學目標，其實施情形，亦未能了解，然而從其七大類中各類目標數量的比重來看，亦可看出教材分量的偏向。我國方面因具體目標過細，重複甚多，不方便一一列出，但可從小學數學教科書第一冊到第十二冊中，數出七大類各佔幾單元，以窺其教材份量的輕重。

美國方面目標個數如下表：

類 別	年 級						總 計	百分比
	一	二	三	四	五	六		
數 與 認 數	9	9	8	9	8	11	54	11.9
計 算	13	14	16	20	16	17	96	21.2
分 數	3	3	7	15	18	15	61	13.5
小數與百分數	4	4	5	7	10	18	48	10.6
實 測	11	15	15	18	16	13	88	19.5
幾 何	12	11	9	14	16	18	80	17.7
概算、圖表等	1	1	2	4	7	10	25	5.6
總 計	53	57	62	87	91	102	452	100

由上可見，各類目標數隨年級增加而增加，足見螺旋編制逐漸加廣加深。而各類目標數依次是：計算、實測、幾何、分數、數與認數、小數與百分數、概算圖表等。可見對計算技巧及社會應用（實測）重視的傾向最大。

我國方面各單元數如下表：

類 別	年 級						總 計	百分比
	一	二	三	四	五	六		
數 與 認 數	6	1	2	2	2	1	14	10.9
計算（含珠算）	6	10	8	10	6	4	44	34.1
分 數	0	1	1	2	4	8	16	12.4
小 數與百分數	0	0	1	3	3	3	10	7.8
實 測	3	3	5	1	2	1	15	11.6
幾 何	2	2	2	5	6	4	21	16.3
概算、圖表等	1	1	1	2	2	2	9	6.9
總 計	18	18	20	25	25	23	129	100

由上可見，我國單元數亦隨年級增加而增加，只有六年級稍減。各類單元數，由多至少依次是：計算、幾何、分數、實測、數與認數、小數與百分數、概算圖表等。可以看出我國是以計算技巧為重心（34.1%），實測部份以嫌太少（11.6%），而計算部份，則遠較美國為多，但美國是以日常生活應用問題為目的，份量亦只佔21.2%。我國此種情形，是否合適，值得我們作為追蹤研究，或進行如美國的教育評鑑（NAEP），用測試各年齡的學生，成人的計算能力，作為教材改進的基礎。此一點亦頗值得重視。

4~2 建議

就以上的整理歸納，現在已可抽出若干建議，茲列述如下：

1. 在教學目標上，應顧及社會的、心理的以及數學本身的目標三個層面，要顧到社

會的應用，學童的能力，以及數學本身應該施教的範圍。目前美國以國民對估算的能力為考慮重點。此點對我國亦甚重要。我國目標的改進，似應把握此一重要方向。

2.為達成上述目標，美國對「返回基本」運動，有十大範圍教材的宣佈。除了側重計算技巧之外，應更重視計算在生活上的應用，故已不是 1950 年以前的所謂計算範圍。又其第一類範圍即為「解題」，似特別重視一般生活上可以隨時發生的問題，並非特殊計算方法的問題，如只注意特殊計算方法，是一種個別方法的應用，似有以「難題為中心」的痕跡，下次修訂標準時，此類教材，似應加以避免。但對計算技巧方面，亦應有新的範圍及時代意義。

3.美國教材目標分為「優先目標」及「目標」兩類，優先目標是供全體學生共同學習的最低標準，一般無記號（即題號沒有加圓圈的）之目標，則供教師顧及學生能力，個別施教或跳過不教，亦不影響以後各年級的學習。此一措施，頗能符合實際需要，亦顧及學生的學習能力。此項數學的心理目標，以為解決個別差異的相當措施，我國亦應考慮及此。

4.課程目標的敘寫方法，美國完全採用「行為目標」來敘寫。我國課程標準所列教材大綱，仍不用行為目標方法，此點似值得研究。但我國在教學指引中，已用到此一方法。不過，嗣後我國對目標的敘寫範圍，似亦應顧及認知、技能、情意三方面的目標，並需注意敘寫方法的規則。對情意目標，尤應切實予以標明。

5.美國的教材編製，以分類來說，分為數與認數、計算、分數、小數與百分數、實測、幾何、概算圖表等七大類，我國則分為數與量、實測與計算、圖形與空間、統計與圖表、集合與關係、術語與符號第六大類。但我國分類之方法、教材範圍似有大小不等之弊，在個別發展時，可能教材的項目，多少不同，如採用美國類似的教材分類方法，似較易採行「課程發展」（Curriculum development）原則。我國目前在認數方面，由三年級「一萬」跳到四年級的「一兆」，就可能不會發生此一情況。

6.美國各年級課程教材之發展，明顯的可看出為「螺旋編制」方式的應用，這也許是上述第 5 點教材分類方法的具體優點。但此螺旋編制本身原則的應用，關係亦至大。嗣後我國課程編制，對螺旋編制原則，似應加強注意。

7.細察美國所無，我國所有之教材，常較為艱深的「計算方法」上的教材，如求兩天間的天數，某月某日至某月某日間經過幾天的天數，百分數的應用題等等，一般而論，此類教材，學童常最感困難。如上所述，似非為日常一般性的應用問題，故如上第 2 點建議所提，似應重新予以評估，是否需要該等教材？

8.我國目前四年級仍保持有極少部份「新數學」範圍的教材，如交換律、結合律、分配律等三大定律的說明，這也許是我國的長處。但似值得再行評估，是否繼續保留？抑或將此項教材排列的地位，應放在那一年級？

9.美國對於實測工具的應用及實際測量的提倡，似較我國為重。但我國為保持國粹，對於珠算的教學仍十分重視。在文化價值上，亦自有特殊價值，但對其他計算工具的介紹及使用，則未見加強，此後對於計算機械的應用，似應一如珠算，應有系統的予以

注意，以迎接電腦時代的來臨和需要。

10.我國課程編制的實驗，經過完整的實驗研究過程，如上第三章所述。美國的課程編制，其文獻的蒐集，雖甚齊全，但編造的過程，恐不如我國之嚴密。故我國的課程，分量是否過多？難度是否過難？我國都已經過實驗研究的階段，美國則因未見其統一教科書等具體資料，對教學目標是否過多，我們不得而知。但他們自己曾提出懷疑，認為過多，可見我國在課程編造步驟上，由專家學者與實際從事教學的教師參與，似要較美國為完全。此點我們頗值得自傲，應繼續保存。

【附註】

- 註 一：Douglas B. Achele & Robert E. Reys, "Readings in Secondary School Mathematics" (Boston Mass.) Prindle, Weber & Schmidt, Inc. 1977, P.2.
- 註 二：NCTM, "Overview and Analysis of School Mathematics Grade K-12" (Washington D. C.) 1975 P. xi
- 註 三：見註一，P.34-41
- 註 四：Max Beberman, "An Emerging Program of Secondary School Mathematics." (Cambridge Mass.) Harvard University Press, 1958
- 註 五：見註一，P.4
- 註 六：見前，P.6
- 註 七：見註一，P.63
- 註 八：NCTM, "A History of Mathematics Education in the United States and Canada" (Washington D. C.) P.146.
- 註 九：NCTM, NCSM, "Position paper on Basic Mathematical Skills" Jan. 1977
- 註 十：見前
- 註 十一：NCTM, "An Agenda for Action" (Washington D. C.) 1980
- 註 十二：Kim, Marshall, "Mathematics objectives K-8" (Boston, Mass.) 1981.
- 註 十三：國立編譯館，繆龍驥等，"小學數學各年級教學指引" (台北) 民國六十七年。
- 註 十四：C. Alan Riedesel, "Teaching Elementary School Mathematics" (New Jersey) Englewood Cliffs, 1980, P.31.
- 註 十五：見註八，P.11-27
- 註 十六：見註十四，P.32.
- 註 十七：見註十四，P.27.
- 註 十八：見註八，P.27.

- 註 十九：M. Vere De Vault and Thomas E. Kriewall , “ Perspective in Elementary School Mathematics ” (Columbur , Ohio) Charles E. Merrill Publishing Com . , 1969, P.42.
- 註 二十：見前 , P.44.
- 註二十一：見註八 P.36-44.
- 註二十二：陳梅生等, “國民學校課程標準實施概況調查報告”, 視聽教育叢書, 國立教育資料館視聽教育組, (台北)民國四十七年。 P.30
- 註二十三：Gug Wilson and Others, “ Teaching The New Arithmetics ” 1951.P.12
- 註二十四：E. L. Thorndike , The Psychology of Arithmetic. (New York ,) Maemillan Co., 1922
- 註二十五：見註十九 , P.57
- 註二十六：Morris, Kline 著, 方祖同譯“新數學爲什麼失敗”(台北)科學月刊社, 民國七十三年 PP.11-14.
- 註二十七：C. Alan Riedesel , “ Teaching Elementary School Mathematics ” (New Tersey) Englewood Cliffs , 1980,P.35
- 註二十八：見前 P.37
- 註二十九：A. J. Kempner , “ College Entrance Requirements in Mathemntics ” AMM 55 (Sep. 1948) pp. 414-18
- 註 三十：Ralelgh Schorling , “ The Need for Cooperative Action in Mathematics Education , ” AMM 52 (April 1945) pp.194-201.
- 註三十一：見註四
- 註三十二：見註八 P.70.
- 註三十三：Max Beberman “ An Emerging Program of Secondary School Mathematics (Cambridge , Mass.,) Harvard University Press , 1958 P.4
- 註三十四：見註八 P.147
- 註三十五：Robert Mi. Gagne “ Learning and Profieiciency in Mathematics ” The Mathematics Teacher , Dee. 1963 pp.620-626
- 註三十六：NCTM, NACOME “ Overview and Analysis of School Mathematics Grade K-12 ” (Washington D. C.) P.xi
- 註三十七：見註八 P . 45
- 註三十八：NCTM, “ The Revolution in School Mathematics (Washington D. C.) 1961,P.22
- 註三十九：見註二十七 , P.38
- 註 四十：見前 P.38
- 註四十一：見註二 P.118
- 註四十二：Shirley Hill , “ Issues From the NACOME Report ” The

Mathematics Teacher , Oct.1976, Vol. 69 , pp.440-446

- 註四十三：Shirley Hill “ Education in the 80's : Mathematics ” (National Education Association of the United States) 1982, P.15
- 註四十四：NCTM, NCSM, “ Position Paper on Basic Mathematics ”
(Washington D. C.)Jan. 1977.
- 註四十五：陳伯璋、陳伯達譯，“布魯納教育的過程”（台北）世界文物出版社，民國六十四年一月，頁1。
- 註四十六：NCTM, National Council of Supervisors & Mathematics. “ Position Paper on Basic Mathematical Skills. ” Jan. 1977.
- 註四十七：NCTM “ An Agenda for Action, Recommendation for School Mathematics of the 1980's” 1980. pp.1-29
- 註四十八：Kim Marshall , Mathematics Objectives , Unpublished documents P.i-xv .

A COMPARISON OF THE MATHEMATICS EDUCATION IN THE ROC WITH THAT IN THE U.S.

by

Wu Der-Bang

Abstract

The main purpose of this study is focused upon a comparison study between the curriculum and teaching materials of mathematics education of the 1st-to-6th-grade elementary schools in USA and those in the ROC. From the study, the researcher wishes to find out the differences concerned and the feature and progress of this aspect in USA so as to adopt them as a valuable reference for us in the ROC.

The information presented in this study is the "Mathematics Objective" published by Boston Public Elementary School Systems. After a comparison study, several conclusions and suggestions are made as follows:

1. Concerning the method of stating the outline of the content, USA adopts "behavioral objectives", which is still absent in Taiwan, and therefore worthy to be noted as a future direction.
2. Their "problem solving" is identically our 'utilized problem' or 'word problem'. However, our word problem is quite problem-centered, but theirs extends to the field of daily lives. Such a method is surely a matter worthy of attention.
3. The Curriculum Objectives in USA are divided into "priority objectives" and "objectives". The former allows a common study for all students while the latter allows individual study for the fast-learning students. This is much needed in our country.
4. The heading of categories of the objectives in USA are as Numeration, Computation, Fraction, Decimal and Percentage, Estimation, Geometry and Measurement in the spiral pattern for development. If we are to improve our teaching materials and methods, the spiral curriculum pattern seems to be most likely feasible.