國立臺灣師範大學數學系 教學碩士班

碩士論文

指導教授：曹博盛 博士

高中生對於重複組合的理解分析

研究生：翁玉華

中華民國 **104** 年 **6** 月

致 謝

千里之行始於足，三年碩士終於謝。走了九百九十九里路，剩下的最後一里路，且讓我寫下綿延千里的感謝。

以最大的敬意，感謝我的指導教授—曹博盛博士，您諄諄教誨，我銘感五內，很榮幸成為您的關門弟子，祝福您退休愉快，平安健康。

感謝鄭英豪教授、楊凱琳教授，百忙之中撥冗審閱我的論文，除了給予肯定與鼓勵以外，提供我許多寶貴的意見，讓這篇論文更加完善，我由衷感激。

感謝朱啟台助教，謝謝您經常提醒我們注意重要的時程，並且常常鼓勵我要勇敢撐過去，在口試當天成為我的浮木，給予我莫大的幫助，我沒齒難忘。

感謝師大數學系的栽培，從大學到研究所的十幾年歲月之中，遇到許多老師—王惠中教授、黃文達教授、洪有情教授、金鈐教授、劉家新教授、林義雄教授、李恭晴教授、陳創義教授、謝豐瑞教授、游森棚教授(族繁不及備載)，帶領我們探索數學知識領域，培育我們成為數學教師，謝謝您們。

在我成為數學教師的波瀾之中，一座座引領我前進的燈塔，是我偏離航道的方向，是我黑暗之中的光明，藉此機會表達玉華的滿心感謝。

燈塔一號—連正惠老師，小一小二時有幸遇到您，謝謝您的信任與鼓勵，給予我擔任班長的機會，教導我認真負責的處事態度，老師我愛您。

燈塔二號—黃洪發老師，玉華何其有幸能在長安遇見您，小五某天的課堂上，您那第二大愛心板(橘色水管)著實打醒了我的鬥志，啟發我對數學的熱情，您的恩重如山，玉華刻骨銘心，希望您與師母都要健康百歲，平安幸福。

燈塔三號—李耀宗老師，永遠記得國一時在黑板上您寫下的「堅持理想，可以失敗，但不可以放棄！」成為我人生的座右銘，給予我堅持努力的信念。

燈塔四號—林建邑老師，國二時的某張數學考卷上，您用粗紅筆為我寫下的「重挫是再起的開始！」時常在心裡鼓勵著我不要害怕失敗，要勇敢面對挑戰。

燈塔五號—毛立甫老師，高一下學期考完指對數、三角函數(I)後，您對我說「山中無老虎，猴子稱大王。」提點著我人外有人，要謙虛求教，持續努力。

燈塔六號—鄭凱鐘老師，謝謝您在我高二迷惘時陪伴我突破瓶頸，也在我實習時不辭辛勞地指導我，您給我的不倒翁，是我人生中極其重要的收藏之一。

燈塔七號—吳孟珊老師，高中與您相處的過往歷歷在目，畢典時您提點著我「豈能盡如人意，但求無愧我心！」如雲似河，天上人間寄託著我無盡的思念。

燈塔八號—姜文娟老師，在實習時向您學習當導師的責任與用心，與您共創的小良記憶，時常讓我惦記，祝福您退休後的日子平安順心。

燈塔九號—曾子益老師，謝謝您在實習對我的關懷，在我住院時來看我，給予我安慰，並幫助我們及時脫離苦海，謝謝您。

燈塔十號—潘國華老師，七年前有幸得您牽成，不遺餘力提拔有著滿腔熱血卻毫無經驗的我，與師母時常的關心與提點，都讓我感到無比的溫暖與幸福，能夠遇見您們是我此生莫大的福氣，希望您們身體健康，萬事如意。

感謝學校的同事—嗣芬老師、淑惠老師、沂穎老師、曉涵老師、嘉玲老師、黎綺老師、麗燕老師、翠華老師、凱玲老師、健祥老師、曉薇老師、大偉老師、元貞老師、東岳老師、益儒老師、易霖老師、詠瑜老師、玉壐老師、立菁老師，有的給予我溫暖及關懷，有的給予我寶貴的資料與意見，有的陪我吃飯聽我傾訴，在此一併由衷感謝。

感謝參與本研究的十位學生—凱婷、冠雯、潔璘、韋融、韋均、絃綺、玥禎、昱綺、安履、子翔，謝謝你們提供老師研究的資料，有你們相挺真好。

感謝在我埋首撰寫論文期間，一直很乖巧懂事不讓我操心的 115 孩子們，能成為你們的導師，我感到非常非常地幸福，高二分班後也要繼續加油喔！

感謝所有我曾經教過的學生，與你們教學相長的緣分，我很珍惜。

感謝系羽的好夥伴們—郭君逸教授、君毅學長、美倫、軒豪、信翰、耿任、湘慧、嘉燕、子安、柏宇、柏瑋、家銓、敏閔、信憲、國銘、孟謙、亞倫、惠雯、采邑(族繁不及備載)，很高興與你們南征北討地奮戰，在我碩士修業期間，我們一同為系羽拿下三座大數盃冠軍、兩座校長盃冠軍，讓我此生無憾，永遠感激。

感謝我親愛的朋友與家人—碩涵、婉嘉學姊、凱翔學長、玉惇、雅婷、如婷、嵐婷、文傑、世偉、峻德、章瑋、以凡、美倫、怡琳、雅茹、玠如、照津、博朱、琇玲、冠蓉、小潘哥、千惠、承修哥(族繁不及備載)，在我撰寫論文的這段期間，即便只是默默的關心與小小的鼓勵，也都讓我感到無比的窩心。

感謝翁家祖先、開漳聖王、土地公、媽祖、觀世音菩薩的保佑。

感謝在天上親愛的外公，您的疼愛阿華一生感激。

感謝我的乾爹乾娘，無條件地愛護我這個乾女兒，並且相信我一定可以度過難關，照顧孫子們也要好好照顧您們的身體，健康吃百二。

最後，感謝我親愛的爹娘，從小到大您們不辭辛勞地用愛與責任栽培我、養育我，讓我成為全世界最幸福的小女兒，我所有的一切都是您們賜予我的，您們一定要健康吃百二，好好享我這個女兒的福。

天公伯仔對我很是眷顧，讓我在這一路上遇到這麼多的貴人，這麼多值得我感謝的人。我不會忘記當初想當老師的夢想，並會努力、用心實踐，將一路走來我所獲得的勇氣傳遞下去，盡我所能地為數學教育奉獻一己心力，一生！

研究生 翁玉華 謹致

國立臺灣師範大學 教學碩士班

中華民國 104 年 仲夏

摘 要

本研究目的是在探討高中生對於重複組合的理解情形。透過研究者設計三個階段的施測活動，蒐集十位學生在處理重複組合這個單元的過程中，所產生的具體行為，並根據 Skemp 理解架構進行分析，歸納學生的具體行為，形成重複組合的理解基模，並對於學生使用理解基模進行分析。

本研究的研究結果如下：

一、Skemp 理解架構中六個理解類別的具體行為、行為說明及其實例。

二、受測學生所形成的重複組合理解基模，可分為三種類型，總共五個基模。

(一) 三種類型：1.列舉討論的理解基模；2.有相同物的理解基模；3.符號 H_k^n 的理解基模。

(二) 五個基模：1.列舉所有情形接著點數總數的理解基模；2.列舉基本情形接著加總排列數的理解基模；3.討論異同情形接著加總組合數的理解基模；4.畫出兩類相同物作直線排列的理解基模；5.使用符號 H_k^n 的理解基模。

三、十位受測學生使用重複組合的理解基模分析要點：

(一) 分析個別學生使用理解基模：1.單一型有三位；2.綜合型有七位。

(二) 分析不同類組使用理解基模：1.文組學生使用列舉討論的理解基模平均比例較高；2.理組學生使用符號 H_k^n 的理解基模平均比例較高。

(三) 分析不同性別使用理解基模：1.女生使用符號 H_k^n 的理解基模平均比例較高；2.男生使用列舉討論的理解基模平均比例較高。

(四) 分析不同程度使用理解基模：1.中低程度學生使用列舉討論的理解基模平均比例較高；2.高程度學生使用符號 H_k^n 的理解基模平均比例較高。

(五) 分析不同題型使用理解基模：1.描述個別學生；2.描述整體學生。

關鍵字：理解、基模、重複組合

目 錄

參考文獻

附錄

表 次

圖 次

高中生對於重複組合的理解分析

第壹章 緒論

本章共分為四小節：第一節問題背景與研究動機，第二節研究目的與研究問題，第三節研究的理論依據，第四節名詞釋義。

第一節 問題背景與研究動機

比許多人幸運的是，從小我的數學能力一直是班上表現不俗的學生，而我也時常覺得，同儕們數學不好或是有數學學習困難，都是因為他們不去「理解」公式的來龍去脈，數學學習如果只會背公式是沒有用的！對學生時代的我而言，單純地認為真正的「理解」不僅是知道公式如何用(know how)，還要知道這些公式背後隱藏的道理為何(know why)。

進入北市某高中任教之後，民國九十九年三月，我有一個機會到上海的復旦大學參訪，與當地的大學生進行座談交流時，當時我向當地的大學生提出了一個問題：「可以請妳分享在高中階段時，是如何學習數學的嗎？」主要回答我的問題是一位來自廈門就讀文科的女學生，她不假思索地回答我：「就是題海戰術！」(見附錄一)語氣中還帶著相當的自信，她的老師每天都會給他們一張滿滿的考卷，要學生回家練習，起初她也是非常痛苦，但是她回應表示：「算久了你自然就明白怎麼算了。」而且面對考卷的題目也漸漸不會害怕，最後她們都練就了一身「好本領」，可以快速、正確、順利地處理數學問題，並且順利達成考上復旦大學的目標，旁邊同是復旦大學的一位四川學生，也在她回話過程中頻頻點頭表示高度認同。

這段回話讓我印象深刻，也著實讓我心頭一震。它所帶給我的反思是「題海戰術」一詞除了是表面上聽到的「填鴨式學習」或稱為「慣性學習」以外，當學生在算完題目之後，經過適當的訂正、檢討、反思，便有辦法形成「快速、正確、順利的處理數學問題能力」，在她們所謂的「熟能生巧」的過程之中，即便她們

不甚明白「why to do」，但是她們知道「how to do」，而且還能夠「well done」，她們所反覆練習(rote)的公式都是能被她們熟練使用的工具。以 Skemp 的理論來分析，這兩位廈門姑娘以及四川姑娘所使用的理解模式，即是表 1-1 中的 I_1 類別：工具式理解搭配直覺式的心智活動模式。

表 1-1

理解型式與心智活動模式的交互作用

理解型式與心智活動模式產生的交互作用		理解型式		
		工具式理解	關聯式理解	邏輯式理解
心智活動模式	直覺式	I_1	R_1	L_1
	反思式	I_2	R_2	L_2

資料來源：翻譯自 *Psychology of Learning Mathematics*(p. 172), by R. R. Skemp, 1987, Hillsdale, New Jersey: Hove and London.

仔細反省研究者學習數學的歷程，發現以前我自己認為的「理解」應該是 Skemp 所說的「關聯式理解(Relational understanding)」，前述四川姑娘的那種理解型式則是「工具式理解(Instrumental understanding)」，而這兩種「理解」對於學生的數學學習都很重要。研究者在投入教學現場的這幾年，對學生的數學學有一些體會，任教學校的輔導室邀請我為高一學生寫一篇文章(見附錄二)，文章目的有二：(1)輔導高一學生升高二時能選擇適當的類組；(2)對於學生學習數學的鼓勵與省思。當時我就已經把「工具式理解」融入到我的數學教學之中，而撰寫這篇文章距今已是三年前的事情了，現在看來特別有感覺。

學生在學習數學單元，一般都會經歷「經驗(具體)→理解→形式化(抽象)」三個階段。「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域(附錄五)」(民 97, p. 208)提到：『「認識」強調的是觀察、個例、經驗、歸納的學習初期階段，「理解」強調的是概念形成、練習、驗證、推廣的中期階段，「熟練」則在於形式與解題程序之流暢。「認識」與「理解」在具體情境中進行，「理解」與「熟練」在抽象情境中進行。「理解」本身則在具體與抽象情境間來回練習。』可以見得理解對於

連接具體經驗與抽象形式間，有著極其重要的地位。在就讀碩士的期間，我對「理解」也一直抱持著高度關注，在思考碩士論文主題時，希望可以更進一步探討研究「理解」這回事。

反思研究者在自己高中數學課程的學習歷程中，經歷從模糊到清晰，從不知所措到柳暗花明的單元，就是令現在很多高中生恨的牙癢癢的「重複組合」單元。因為印象太深刻，所以即使距離研究者就讀高中已經過了十多年，當初理解重複組合的概念與符號 H_k^n 的「感動」至今仍然鮮明如昨。想要有效學習重複組合這個單元，是多麼需要「概念的理解」與「符號的操作」，學生在學習重複組合之前，就已經學過「n 階乘 $n!$、直線排列 P_k^n 、有相同物的直線排列 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 、重複排列 n^k 、一般組合 C_k^n 」等內容，對於這些符號及概念即便有些人對於排列組合感到困難，卻也還不至於完全失去信心，研究者發現，壓垮學生對於排列組合學習信心的最後一根稻草，往往就是重複組合這個單元。

許多平時數學成績表現不俗的學生，也很容易在重複組合這個單元慘遭滑鐵盧，這樣的結果恰恰與研究者自身的學習經驗完全相反！讓研究者很想探究學生在處理重複組合的題目時，有哪些想法？透過這些想法學生會表現出哪些具體行為？這些具體行為與他對於重複組合理解的交互作用，在會產生哪些理解基模？而各種理解基模背後，到底代表的是怎麼樣的理解類型？也希望藉由這篇論文，能夠更完整地分析學生的理解，並反省研究者自身的教學，期望對於未來長路漫漫的教育旅程能有所助益。

第二節 研究目的與研究問題

本研究的目的是想要透過 Skemp 的理解架構，藉由觀察學生在處理重複組合這個單元的問題，所產生的各種具體行為進行分析，以便能夠更完整地知道學生在重複組合這個單元理解情形。

基於研究目的，產生下列三個研究問題：

根據 Skemp 的理解架構，所產生的理解型式與心智活動模式的交互作用表，學生在處理重複組合的問題時，

一、Skemp 理解架構的每個類別分別出現哪些對應的具體行為表現？

二、從學生的具體行為之中，可歸納出哪些理解基模？

三、學生使用理解基模的差異為何？

(一) 個別學生使用理解基模有何差異？

(二) 不同類組的學生使用理解基模有何差異？

(三) 不同性別的學生使用理解基模有何差異？

(四) 不同程度的學生使用理解基模有何差異？

(五) 不同題型學生使用理解基模有何差異？

第三節 研究的理論依據

本研究的理論依據，是根據 Skemp 的理解架構，如表 1-1 所示「理解型式與心智活動模式所產生的交互作用」，其中直向的三行代表的是理解型式(Kinds of understanding)，橫向的兩列心智活動模式代表的是指導系統(Direct system)。

直行向度的三種理解型式包括：工具式理解(Instrumental understanding)、關聯式理解(Relational understanding)、邏輯式理解(Logical understanding)。橫列向度的指導系統中如下圖 1-1 所示，第一指導系統(Delta one)所反應的是直覺式(Intuitive)心智模式，接收外在環境所提供的資訊，以及做出具體行動；第二指導系統(Delta two)所反應的是反思式(Reflective)心智模式，接收第一指導系統所提供的訊息，作用在第一指導系統之上。第二指導系統的主要功能是優化第一指導系統，使第一指導系統發揮最佳功用。

圖 1-1 Skemp 指導系統
資料來源：翻譯自 *Psychology of Learning Mathematics*(p. 107), by R. R. Skemp, 1987, Hillsdale, New Jersey: Hove and London.

Skemp (1987)表示，想要知道學生理解了什麼，要先觀察他們的行為，並且反思他們的目標為何。行為是目標導向(goal-directed)，處理數學問題主要牽涉操作心智物件，也就是數學概念，藉由數學概念本身的性質引發我們使用或結合符號，在給定的數學內容之中，基模(schema)也決定了數學概念的可行性。換言之，使用符號就是執行心智數學概念的具體行為。

表 1-1 中的行與列交互作用，產生六種理解類別(I1、R1、L1、I2、R2、L2)，其各類別的行為特徵，研究者在精讀完 Skemp (1987)的著作後，整理出表 1-2「理解型式與心智活動模式產生的交互作用行為特徵表」。本研究將依照此架構，敘寫學生在處理重複組合的問題時，所產生的各種具體行為，並組裝這些具體行為

形成重複組合的「理解基模」，加以整合分析。

表 1-2

理解型式與心智活動模式產生的交互作用行為特徵表

理解型式與心智活動模式產生的交互作用		理解型式		
		工具式理解	關聯式理解	邏輯式理解
心智活動模式	直覺模式 Δ_1	類別 I1 在處理問題的過程中，學生 I1-1. 能以機械式演算的方式給出答案 I1-2. 能夠流暢且不假思索地執行一個適當已記憶的規則 I1-3. 知道可以使用一個適當已記憶的規則，卻不知道這個規則如何操作 I1-4. 使得已記憶的規則在遭遇不同情境時退化 I1-5. 操作一些沒有聯結到題目概念的符號	類別 R1 在處理問題的過程中，學生 R1-1. 能夠確定對於題目的一些感知 R1-2. 能夠掌握題目的意義、特性或結構 R1-3. 能夠將來自外在環境的訊息，直接同化到一個適當的基模中 R1-4. 輸入訊息後啟動不適當的想法	類別 L1 在處理問題的過程中，學生 L1-1. 能夠察覺題目敘述中的怪異處 L1-2. 能夠針對題目的敘述給出一些推論 L1-3. 透過一個例子來說明他的推論
	反思模式 Δ_2	類別 I2 在處理問題的過程中，學生 I2-1. 修正他所操作的演算過程 I2-2. 說明他如何操作一個適當已記憶的規則，卻不知道這個規則運作的數學概念	類別 R2 在處理問題的過程中，學生 R2-1. 能夠推論出特定的列舉程序 R2-2. 能夠推論出特定的符號規則 R2-3. 能夠以關聯式的理由確認驗證他所應用的規則 R2-4. 能夠結合一些常規而得到答案 R2-5. 能夠修正不適當的想法	類別 L2 在處理問題的過程中，學生 L2-1. 能夠聯結具有相應數學概念的符號 L2-2. 以一連串合乎邏輯的嚴格推論，展示對於問題完整的數學論述

第四節 名詞釋義

本節說明三個名詞：一、重複組合，二、工具式理解，三、理解基模。

一、重複組合

根據教育部(民 97)發布之「普通高級中學必修科目數學課程綱要」(於民國 99 年正式實施，故簡稱「99 課綱」)，數學 II 第二章 2.2「重複組合」單元中，敘述的細項有以下三點：

(一) 從 n 個元素的集合中每次取出 k 個元素，允許重複取出同樣的元素，則不同取法的總數為重複組合數 C_k^{n+k-1}。

(二) 球與籃子模式：把 k 個沒有編號且不可分辨差異的球，放入編號是 1 到 n 的籃子裡，每個籃子裡的球數沒有限制，放法總數為重複組合數 C_k^{n+k-1}。

(三) 對於給定的 n 與 k，方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的非負整數解總數也是重複組合數 C_k^{n+k-1}。

二、工具式理解(instrumental understanding)

研究者將「instrumental understanding」解讀成「工具式理解」，根據 Skemp 指的就是「能夠應用一個適當的已記憶規則，卻不知道規則背後的數學概念為何。」

三、理解基模

藉由理解重複組合的數學概念，產生一系列處理重複組合問題的具體行為，形成的基本行為模式，研究者將此稱之為重複組合的「理解基模」。

第貳章 文獻探討

本研究探討高中生對於重複組合單元的理解情形，理解是本篇論文的核心，並且加以分析由學生具體行為所歸納的理解基模。本章共分為三節：第一節有關理解的研究，第二節有關基模的研究，第三節重複組合的研究。

第一節 有關理解的研究

本節共分為三個部分：一、有關 Skemp 的理解理論，二、數學理解的相關研究，三、理解相關的實徵性研究。

一、有關 Skemp 的理解理論

(一) Skemp 的觀點

對於理解的分類，Skemp (1987)提出了他的看法。他原先也是將「understanding」視為「relational understanding」，但是 Skemp 注意到 Stieg Mellin-Olsen (引自 Skemp, 1987, p.153)的文章提及 relational understanding 與 instrumental understanding，Skemp 才思索著他自己所認知的 understanding 並不盡然就是 relational understanding。

Skemp 反思 Mellin-Olsen、Byers & Herscovics (1977)、Backhouse (1978)、Buxton (1978)等學者對於理解的分類(引自 Skemp, 1987, p.166)，並給出三種理解型式的定義：

1. 工具式理解(Instrumental understanding)

   產生工具式理解的證據是能夠應用一個適當已記憶的規則解決問題的能力，而不知道這個規則何以能夠作用。

2. 關聯式理解(Relational understanding)

   產生關聯式理解的證據是能夠從更一般的數學關係推論出特定規則或程序的能力。

3. 邏輯式理解(Logical understanding)

   產生邏輯式理解的證據是能夠將數學符號與記數法和相關的

數學想法連結起來的能力，並將這些想法結合到一連串的邏輯論述之中。

Skemp (1987/1995)指出：「因果式理解(relational understanding)的學習目標是要建立整體的概念結構，並通曉其中相互關聯。當新的概念透過教學同化到適當的基模中，概念結構又會成長一點。面對特定問題(見過或沒見過)都可能推論出適當解決方法。」(p. 222)然而，工具式理解必然存在於學習之中，從小到大我們經由各種理解而記憶的數學公式，或是背誦公式的口訣(如三角形面積為底乘以高之半、圓周長為直徑乘以π、四則運算先乘除後加減、負負得正等)，透過學習漸漸成為未來開拓新的知識版圖之先備知識，存於 Skemp 指導系統理論的第一指導系統之中，成為學習者能夠靈活運用的工具，有助於智性學習。

在 Skemp (1987)的文章裡面提到了「instrumental」，另外也提到了「mechanical」，顯見這兩個字對於 Skemp 所提出的理解觀點，有著不一樣的意義。instrumental understanding 指的並不是只有會操作已記憶的規則而已，機械式操作已記憶的規則(remembered rules)只是 instrumental understanding 的一部分，將常規計算自動化，使常規計算得以成為靈活運用的工具，也在 instrumental understanding 的範圍內。誠如 Skemp (1987)所言，機器並不知道它自己在做什麼，而我們人類卻擁有智慧可以操作機器！如果一個學生知道如何代入一個公式得到答案，卻不知道公式背後的數學概念為何，那他就是把公式當作是一台機器，他去按下了開關，機器能夠運轉，便能夠幫助他解決問題。而當他知道要去按哪台機器的開關，實則亦為一種理解，就 Skemp 的理論來說，便是「instrumental understanding (工具式理解)」。

除了對於理解有更清楚的分類系統以外，另一個也是 Skemp 很重要的貢獻之一，就是提出指導系統的模型，來描述學生透過學習獲得各

種理解而產生行動的心智結構。指導系統中包含的結構有五個項目，分別敘述如下(見圖 2-1)。

1. 感知器(sensor)：接收外在環境提供的資訊。
2. 現在情境(Present State)：感知器接收訊息後，將有關於現在情境的操作物，以內在的方式呈現。
3. 目標情境(Goal State)：目標情境也以內在的方式呈現。
4. 比較器(Comparator)：比較現在情境與目標情境。
5. 行動計畫(a plan of action)：產生行動計畫，執行後可將操作物從現在情境轉為目標情境。

Skemp 提到，指導系統的一個主要特徵，就是辨別行動計畫的可能來源，以及形成這些行動計畫的本質。

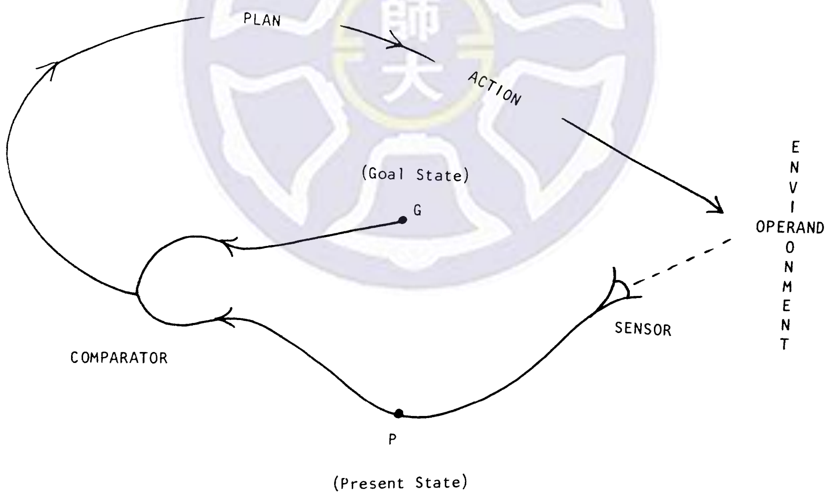


圖 2-1 指導系統的細部結構
Note. From "A new model of intelligence," by R. R. Skemp, 1987, *Psychology of Learning Mathematics* (p. 106). Hillsdale, New Jersey: Hove and London

(二) 一些學者對於 Skemp 的見解

D. Tall & M. Thomas (2002)統整了許多學者對於 Skemp 的貢獻提出看法，其中的幾位學者的見解研究者整理如下。

1. J. Olive & L. P. Steffe：關於指導系統(director system)

J. Olive & L. P. Steffe 指出，第二指導系統的目標是提升第一指導系統的功能，這也應是教育的目標，而當我們檢視學生建立的數學基模時，Skemp 所提出的智性學習模型具有相當的鑑別力。在直覺的過程之中，個體自覺為第一指導系統的中心；而在反思的過程之中，第二指導系統提供了許多重要的功能，J. Olive & L. P. Steffe 將這些功能摘要如下：

(1) 覺察某人的基模—藉由形成新的概念與連結而提升某人的基模、檢驗基模的預測能力以及內部一致性、必要的時候對基模進行校正。

(2) 從概念及基模中一般化—形成更高階序的概念與基模。

(3) 提升並系統化既有的知識。

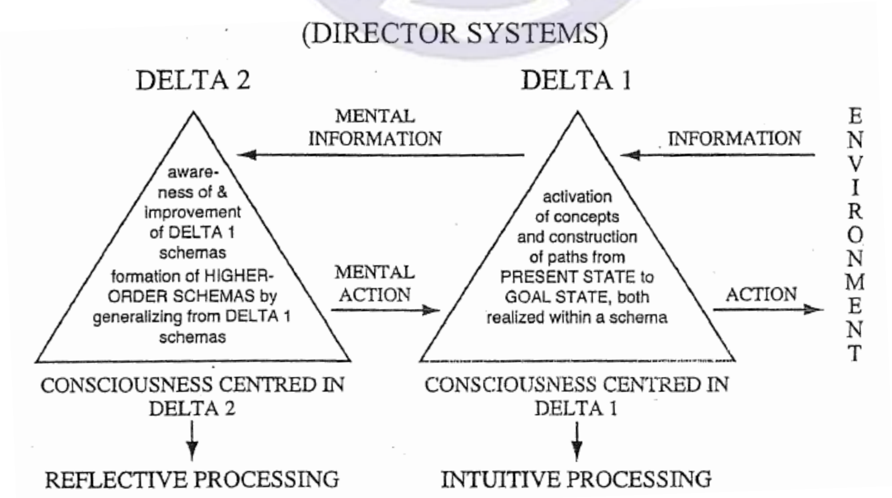


圖 2-2 解讀 Skemp 的指導系統

Note. From “Schemes, schemas and director systems (An integration of Piagetian scheme theory with Skemp’s model of intelligent learning,” by J. Olive & L. P. Steffe, 2002, In D. Tall & M. Thomas (Ed.), *Intelligence, learning and understanding in mathematics* (p.107). Flaxton, Australia:

2. G. Davis & D. Tall：關於基模(schema)

G. Davis & D. Tall 相信對於 Skemp 強調的大腦活動與大腦數學思維模型，概念的分類過程提供了作用機理。Skemp 在智力、學習及行動中探討了類別與基模的連結，建立人類行為與大腦運作的連結，並把數學學習的研究視為發展更高階的智性模型。

G. Davis & D. Tall 將 Skemp 所提出有關基模的理論與 E. Dubinsky (1992)提出的 APOS (Action-Process-Object-Schema)理論作連結(見圖 2-3)：

(1) 行動(Action)：一種身體或心理物件的變換，以獲得其它物件。

(2) 過程(Process)：當一個人能夠反思並對於行動建立有意識的控制時，行動便引發了過程。

(3) 物件(Object)：當個體感受到過程的全部，瞭解變換能在過程中行動，並能建構這些變換時，過程便成為了物件。

(4) 基模(Schema)：基模為整合行動、過程和物件的結構性組織。

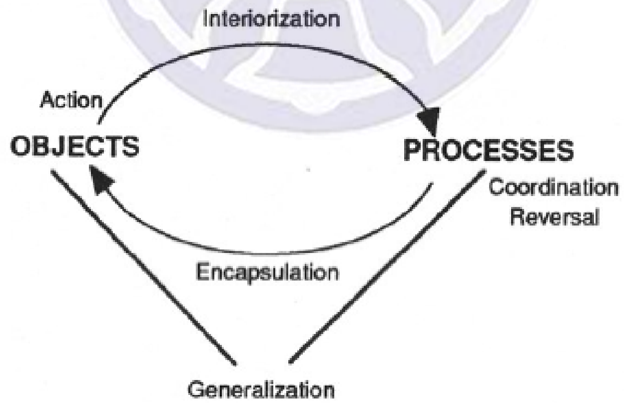


圖 2-3 APOS 理論的模型
Note. From "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking," by E. Dubinsky, 1992, In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (p.106), Kluwer: Dordrecht, pp. 95-126.

G. Davis & D. Tall 也指出 Skemp 提出的理論鞏固了近代心理學及神經學的發展。在 Skemp (1987)的第六章也提到了腦半球的功能(如圖 2-4)，顯見 Skemp 對於心理學的研究，有著前瞻性的貢獻。

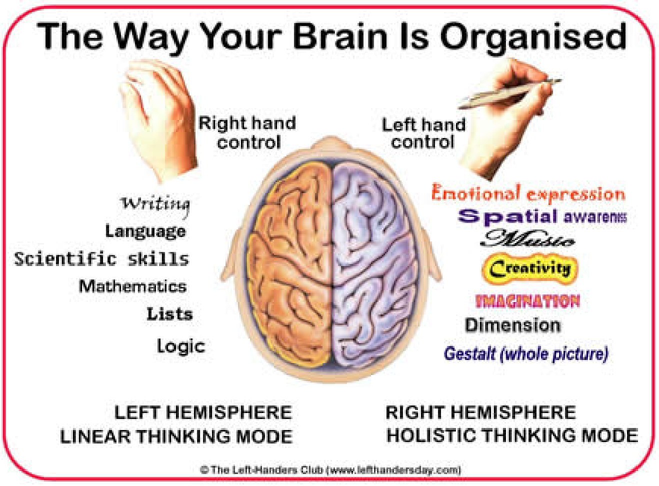


圖 2-4 腦半球的功能
Note. Retrieved from http://www.lefthandersday.com/tour/being-left-handed

二、數學理解的相關研究

(一) Pirie & Kieren 的理解理論

Pirie & Kieren (1988, 1989, 1994*a*, 1994*b*)所發表的「數學理解成長的動態理論(A Dynamic Theory of the Growth of Mathematics Understanding)」，說明學生在數學學習之中的理解是動態(dynamic)、非線性(nonlinear)、遞迴(recursive)的成長過程，將學生的數學理解成長歷程細分成八個層次，如圖 2-5 所示。

Pirie & Kieren 所提出的動態理解模型，將理解成長的動態過程分為八個階層，數學理解並非靜態取得知識的成果，而是在各階層之間來回穿梭的動態結果，此為動態可折回論特徵之一「動態的(dynamic)」；八個階層的構造層層套疊猶如洋蔥結構(如圖 2-6)，將理解成長依照層級分析，此為動態可折回論的特徵之二「層級化(levelled)」；八個階層有一個共切點，各階層可透過此共切點自由來回穿梭到其他階層，此為動態可折回論的特徵之三「非線性(non-linear)」；每一個外階層與內階層有著類似的結構，卻又超越內階層，此為動態可折回論的特徵之四「超越遞迴(transcendent recursion)」。

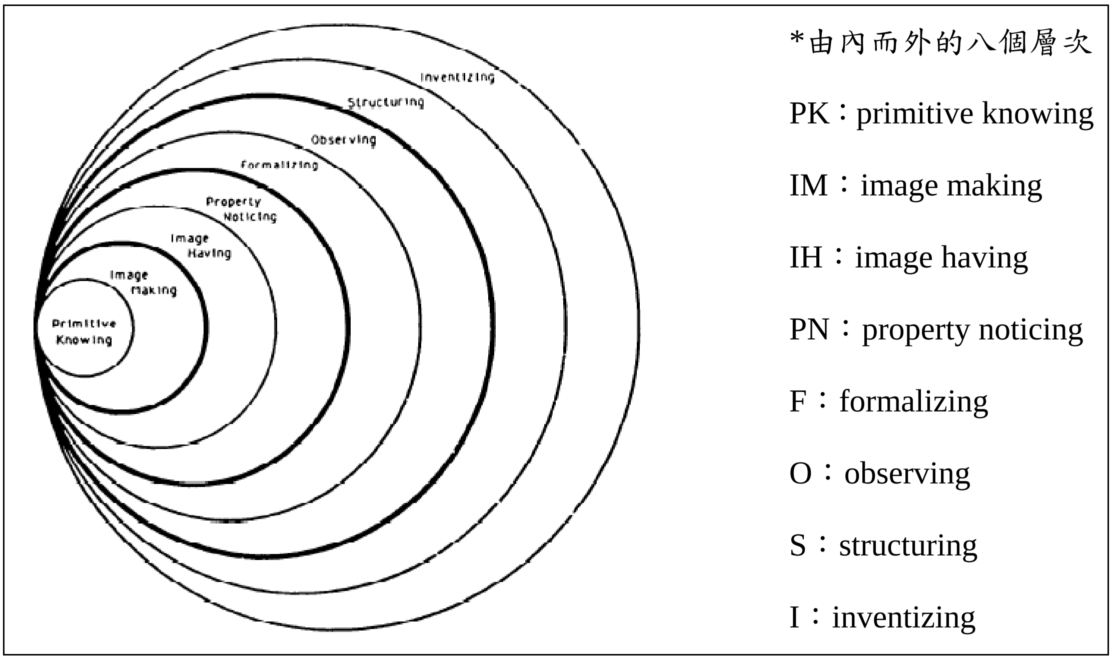


圖 2-5 Pirie & Kieren 數學理解成長的動態模型

Note. From “Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?,” by S. E. B. Pirie and T. E. Kieren, 1994(*b*), *Educational studies in Mathematics* (p.167), 26(2-3), 165-190.

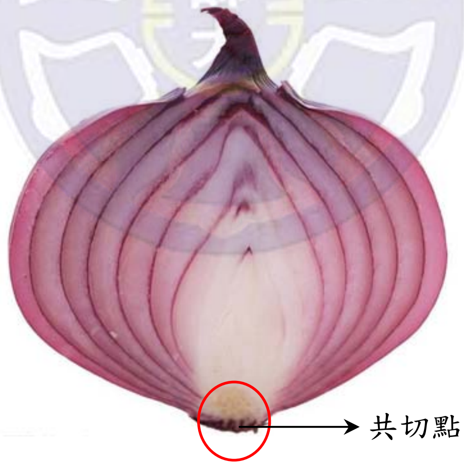


圖 2-6 洋蔥剖面圖

(二) Bloom 的教育目標分類系統

2001 年版 Bloom 認知領域教育目標修訂了先前的舊版教育目標分類，探討學習者對於「知識向度(Knowledge Dimension)」和「認知歷程向度(Cognitive Process Dimension)」兩個向度，其中「知識向度」分成事實知識、概念知識、程序知識，以及後設認知知識等四大類別；而「認知歷程向度」說明了記憶、了解、應用、分析、評鑑、創作等六大教育目標，其宗旨在於促進學生「保留(retention)」和「遷移(transfer)」所習得的知識(葉連祺、林淑萍，民 94)，各類別改以動詞詞態呈現，如圖 2-7 所示，並以漸增複雜性的階層排序(increasing complexity hierarchy)，如圖 2-8(鐘翠芬，98)。

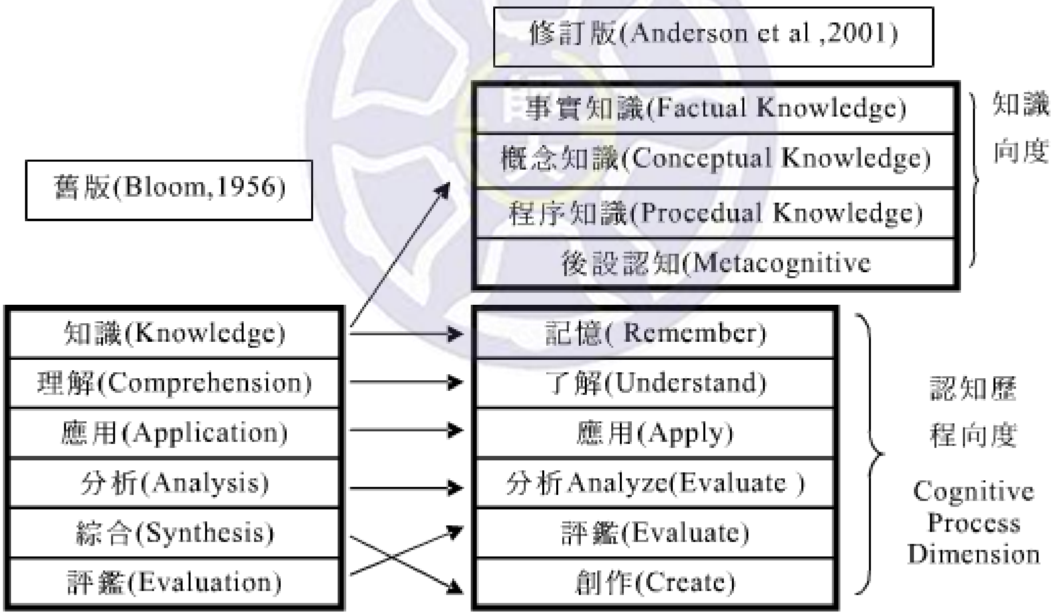


圖 2-7 Bloom 教育目標分類系統新舊版本對照圖

資料來源：葉連祺、林淑萍(民 94)。布魯姆認知領域教育部標分類修訂版之探討。**教育研究月刊，第 105 期**。

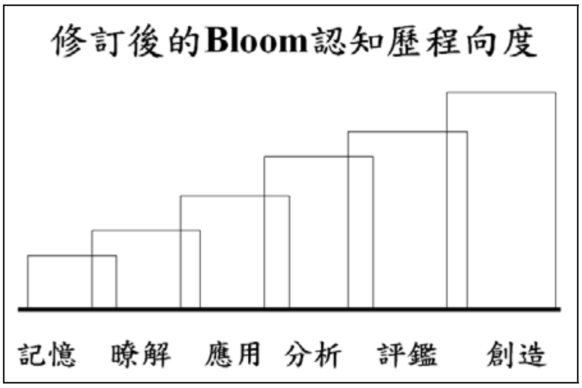


圖 2-8 漸增複雜性的階層排序
資料來源：鐘翠芬(98)。**人權教育能力指標解析與教學轉化**。第 8047 期人權教育國教輔導團輔導員初階研習。桃園縣。

知識向度與認知歷程向度之間的交互作用，在各個學科領域之中，常被用來當作內容校度檢核的「雙向細目表」(表 2-1)。研究者認為在雙向細目表中，「記憶程序知識」與 Skemp 所指的「工具式理解」頗為類似；另一方面，「了解概念知識」則與 Skemp 所指的「關聯式理解」也有異曲同工之妙。

表 2-1
2001 年新版 Bloom 認知領域教育目標雙向細目表

認知歷程向度 / 知識向度	記憶	了解	應用	分析	評鑑	創作
事實知識						
概念知識		●				
程序知識	●					
後設知識						

三、理解相關的實徵性研究

有許多的期刊與文章(如李源順，2004；喻平，民 91；游經祥，2003)，都在探討 Skemp 的理論，而透過 Skemp 的理解理論，也有不少相關的實徵性研究，如楊中宜(民 96)探討符號理解、楊嘉勝(民 100)探討學習策略、許淑珠(民 94)探討數學溝通能力等。

與 Pirie & Kieren 所提出的動態理解理論有關的實徵性研究也不少，如王幸鵑(民 102)表示此理論適合用來描述學生在短時間內學習數學概念層次改變的情形；吳淑琳(2000)探討國二學生的線型函數概念的發展情形；陳正明(2002)描述補救教學過程中，學生的線型函數三個主要表徵之概念改變情形。幾乎所有與此理論相關的實徵性研究，都有一個重要的結論，那就是學生的概念發展均出現「動態」、「非線性」、「遞迴」的現象。

另外，在數學領域運用 Bloom 的教育目標分類系統進行分析的實徵性研究，如鄭蕙如、林世華(2004) 探討九年一貫課程數學領域分段能力指標、李牧桓(民 98)比較芬蘭與台灣國小一年級數學教科書等。

第二節 有關基模的研究

本節共分為兩個部分：一、有關基模的理論，二、基模的遞迴關係。

一、有關基模的理論

(一) Piaget—認知發展理論

偉大的心理學家Piaget所提出的「cognitive-developmental theory (認知發展理論)」，在發展心理學的過程中佔有舉足輕重的地位(張春興，2004)。Piaget 將「基模(schema)」視為「人類吸收知識的基本架構」，認知結構(cognitive structure)的名字就是基模！

Piaget 所提出的「認知發展期」共分為四個階段：

1. 感官動作期(sensorimotor stage)：0~2 歲。
2. 前運思期(preoperational stage)：2~7 歲。
3. 具體運思期(concrete operational stage)：7~11 歲。
4. 形式運思期(formal operational stage)：11 歲以上。

Piaget 肯定了教育的功能，並以階段論的觀點描述兒童的認知發展歷程。每一階段的發展都是後一階段發展的基礎，這也代表著一個事實，每一階段所形成的基模，都會成為學習新事物的先備知識(prior knowledge)，學會了新的知識以後，前一階段習得的基模就能形成更大的基模，幫助學習者繼續下一個階段的學習。

(二) Ausubel—認知同化論

「Meaningful Learning (有意義的學習)」是 Ausubel 認知同化理論中的主要核心概念。要如何產生有意義的學習呢？「只要學習者有意識地將新知識與其已經知道的舊概念或舊命題相聯結時，有意義的學習便告產生。」(余民寧，1997)此段敘述中「已經知道的舊概念或舊命題」，就是學習者「已經知道的事」，亦即所謂的先備知識。學習者習得新知識後，新知識也將同化(assimilate)到舊知識之中，成為學習下一個新知

識的既有基模，繼續學習更多新的知識。

(三) Pirie & Kieren—動態可折回論

Pirie & Kieren 數學理解成長的動態模型中(圖 2-5)，最內圈第一層的初始知曉(primitive knowing)包含了學習新領域的先備知識以及理解歷程的初始行為，每一個階層皆通過一個共切點，說明了學習者在需要的時候，可以不用透過任何階層而往返內層，取得必要的知識，進而跨越更高的階層。學習者在經歷每一次的動態、非線性、遞迴的理解成長，如同洋蔥吸收土壤的養分成長，小洋蔥變成大洋蔥，就能成為學習下一個新知識的「小洋蔥」，藉此吸收更多的知識。

(四) Skemp—智性學習論

Skemp (1987)提到基模的功能至少有三點：

1. 整合既存知識(integrate existing knowledge)。
2. 產生可能的理解(make possible understanding)。
3. 作為未來學習的工具(act as a tool for future learning)。

相較於背誦式學習(rote learning)，基模式學習(schematic learning)不僅是更好的學習，也更有利於保留(retain)知識。研究者整理了 Skemp (1987)中提到基模式學習的優點，條列如下：

1. 學習更有效率。
2. 減低記憶負擔。
3. 促進理解。
4. 更有適應力。
5. 鞏固既有的基模。
6. 使用有彈性的行動計畫。
7. 準備一套應用於未來學習的心智工具。
8. 具有可自我成長的特性。

9. 成效較長遠。

10.兼具心理價值與數學價值。

基模式學習固然有它許多的優點，但是爲什麼不是每個人都能夠接受這樣的學習方式呢？Skemp (1987)指出，基模式學習相較於背誦式學習也有一些「可能的缺點」，研究者將它整理如下：

1. 基模式學習可能較花時間，背誦式學習較快速得到答案。
2. 基模式學習可能較困難，背誦學習式較簡單。
3. 基模式學習成效較緩慢，背誦式學習成效較立即。
4. 基模對於我們的經驗具有高度選擇性，容易喜新厭舊顧此失彼。
5. 不合適的基模是學習新知識或新概念很大的阻礙。

二、基模的遞迴關係

根據本節第一部分整理有關於基模的理論，研究者注意到，似乎每一位學者提出的理論都有一個共通點，那就是在學習新知識或新概念時，都會運用到「既有的基模」，等到新知識或新概念與既有的基模，經過一番同化(assimilate)、調適(accommodate)、平衡(equilibrate)等心智活動之後，既有的基模便能夠增長一些，而增長的基模，再經過重組(reconstruction)、內化(interiorization)、壓縮(condensation)、物化(reification)的發展歷程，又將形成下一次學習的基礎。

如此遞迴下去，小洋蔥就會變成大洋蔥(如圖 2-9)，小膠囊就會變成大膠囊(如圖 2-10)，小方案(scheme)也就變成大方案(如圖 2-11)，而小系統也就變成大系統(如圖 2-12)，幫助學習者學習更多的新知識，擴張知識領域的版圖。同時這也說明了，學習是一個動態的過程，包含了複雜的遞迴關係。

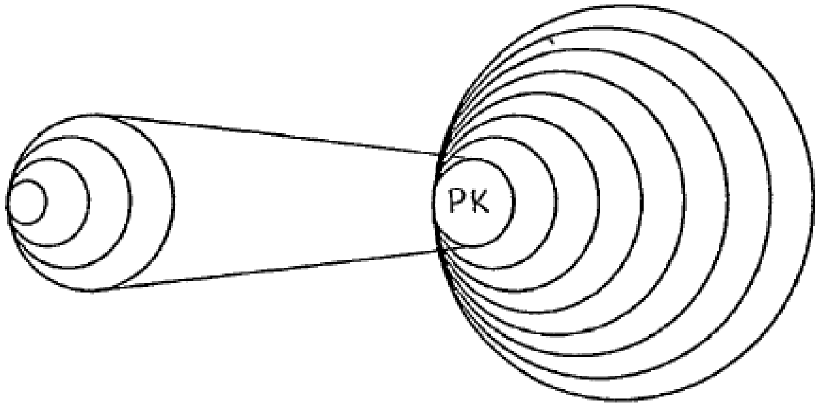


圖 2-9 大洋蔥裡有小洋蔥

Note. From “Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?,” by S. E. B. Pirie and T. E. Kieren, 1994, *Educational studies in Mathematics*(p.172), 26(2-3), 165-190.

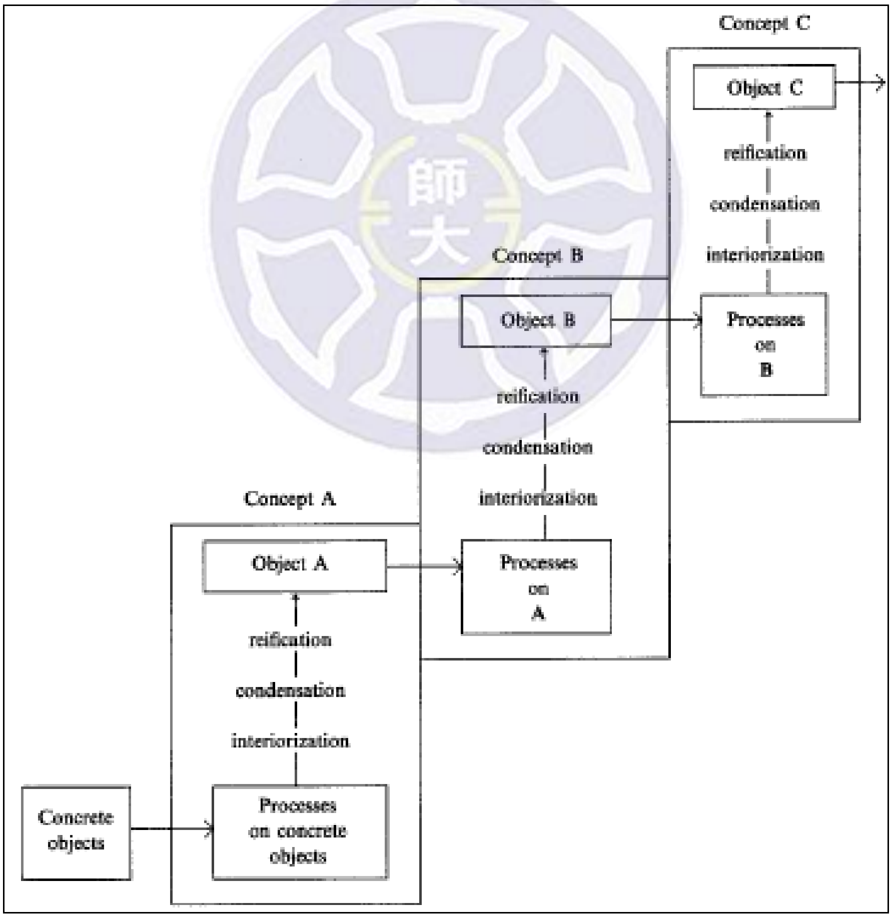


圖 2-10 大膠囊裡有小膠囊

Note. From “On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin,” by A. Sfard, 1991, *Educational studies in mathematics*(p.22), 22(1), 1-36.

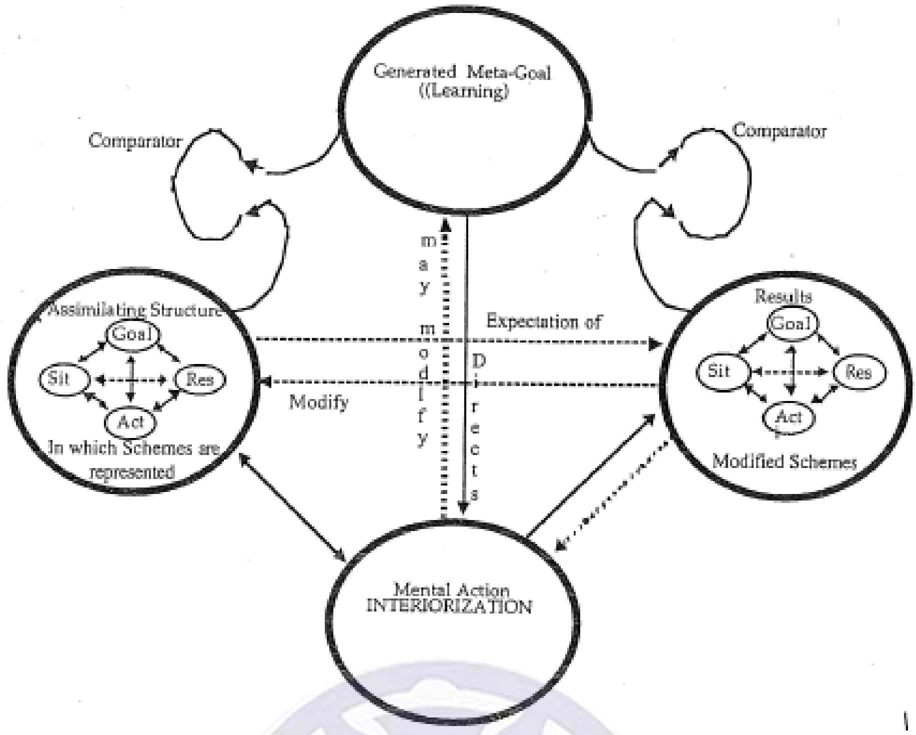


圖 2-11 大方案裡有小方案

Note. From "Schemes, schemas and director systems (an integration of Piagetian scheme theory with Skemp's model of intelligent learning)," by J. Olive & L. P. Steffe, 2002, In D. Tall & M. Thomas (Ed.), *Intelligence, learning and understanding in mathematics* (p.120). Flaxton, Australia.

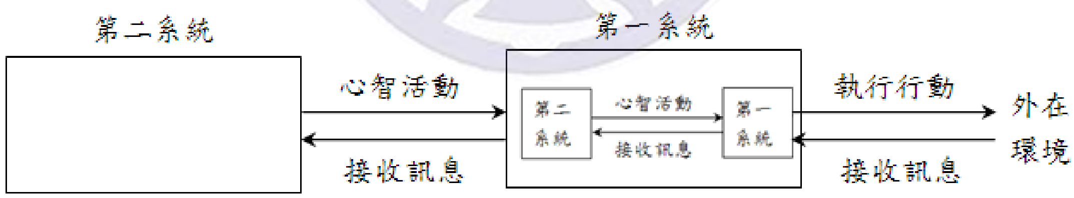


圖 2-12 大系統裡有小系統

第三節 重複組合的實徵性研究

重複組合是排列組合的子單元，大部分有關於重複組合的實徵性研究都包含在排列組合的整個單元之中。本節共分為三個部分：一、有關 99 課綱的研究，二、有關錯誤類型的研究，三、有關重複組合的思維研究。

一、有關 99 課綱的研究

根據教育部發布的 99 課綱，將原本置於高中二年級下學期的單元排列組合，挪動到高一下學期，楊宜蓁(民 98)整理出三個挪動的理由：

(一) 提早提供學生在各學科進行量化分析所需要的數學基礎。

(二) 與生活關聯性高，應較早學習。

(三) 調整後不會發生邏輯順序錯置的教學問題。

而課綱的改變，在實施 99 課綱的第一年，造成高一生與高二生同時學習「排列組合」單元，甚至高三要參加大學指定考科的學生，也可能在複習「排列組合」單元，形成所有高中學生在同一時間面對「排列組合」單元的有趣現象。劉康君(2012)以「調查研究法」探究排列組合可否在高一學習的結論如下：

(一) 在排列組合單元中，適用 99 課綱的高一學生的學習表現不亞於 95 暫綱的高二學生的學習表現，因此，高一是可以學習排列組合的。

(二) 取才程度高的學生在排列組合的學習表現優於取才程度低的學生。

(三) 男生在排列組合的學習表現優於女生。

(四) 高中數學教師認為高一學生可以學習排列組合。

(五) 高中學生在排列組合單元的錯誤情形如下：

1. 高中學生解「重複排列」、「組合」、「重複組合」的題型，答對率較低，且普遍容易犯下「重複分類、分類不完全」與「自行加入其他條件解題」的錯誤類型。

2. 教師指出高中學生在排列組合單元的學習時，統整型的概念（重複排列、組合與重複組合）較容易出現學習困難。

3. 教師指出高中學生在排列組合解題時，主要錯誤來自於學生無法辨識題意的訊息而做出正確判斷，應用適當的概念解題，進而導致錯誤情形產生。

另外，林世偉(2012)研究高一與高二學生在排列組合這個單元相關的數學能力與成就，經由發展問卷蒐集資料，調查結論整理如下：

(一) 學習前高一高二學生大致上研究中唯有樹狀圖的先備知識需要複習。高程度學校的學生較具備完整的數學過程能力，對排列組合問題使用算式的比例較高。中程度學校的學生仍需要去使用列舉的數學模式去解決排列組合問題，並透過列舉的過程了解物件間的關係與連結。高一學生對應的數學模式以算式為主，高二學生則是以列舉的模式為主。

(二) 高程度學校的高一學生解題過程較不細膩。高二學生較有完整的數學過程能力相較於高一學生，學習成就也比高一學生來得好。

(三) 中程度學校的高一學生在排列組合相關數學能力和學習成就上的表現皆贏高二的學生且高二學生的數學模式是很散亂的，尤其分不清楚如何將題目條件對應到數學模式。

二、有關錯誤類型的研究

謝佩真(2003)分析受測學生在解這個重複組合(如圖 2-13)的題目。此研究指出，有 73.2%的學生答對；有 17.3%的學生把重複排列與重複組合搞混而選(B)或(E)；有 8.5%的學生直接寫出 H，但是在符號轉換的過程中產生錯誤；有 1.1%的學生想成直線排列，寫出錯誤答案 P_4^6 。

問題：六朵相同的花要分給 4 個人，請問有幾種分法？

(A)84　(B) 4096　(C) 9　(D) 126　(E) 1296

圖 2-13 一道重複組合題目

資料來源：謝佩真(2003)。**高二學生排列組合擬題活動對解題表現影響之研究**(未出版之碩士論文)。國立高雄師範大學，高雄市。

謝佩真(2003)整理了學生在排列組合這個單元的十個錯誤類型，其中與重複組合直接相關的有兩點：

(一) 錯誤類型三：對符號定義認識不清楚

學生對符號的認識不清楚，因此造成許多錯誤，但是並非概念不清楚例如：第一部分第四題(圖 2-13)，有 8.5%的學生是直接寫出 H 解題，但是在把 H 換成 C 的時候，換算錯誤，如 $H_6^4 = C_4^9$，或者用 H 標記的時候類別和總數寫顛倒了，如 H_4^6。

(二) 錯誤類型五：重覆排列與重複組合概念不清楚

在同與不同的條件之間，學生總是搞不清楚該用何種方法解題

1. 相同物的重覆組合卻以不同物的重複排列計數。

   例如：第一部分的第四題，14.3%的學生想成是不同物，所以答案是 4^6。

2. 不同物的重複排列卻以相同物的重複組合計數

   例如：學生在解第二部分第三題時，約有 3%的學生使用求正整數解的方式解題，假設 Mary 拿到 x 顆、George 拿到 y 顆，$x+y=5$，因為每人至少要一顆，所以先各自給一顆，然後只剩 $x''+y''=3$，然後用 H 的方式去解題，但是他只考慮到每人拿到的數目而沒有考慮蛋的不同。

另外，李俊緯(民 104)探討高雄地區某校高一學生 220 人，在排列組合單元的學習狀況，並整理出錯誤類型及可能的錯誤原因，其研究結果如下：

(一) 高雄地區高一學生解排列組合單元問題之錯誤類型有：

1. 忽略條件限制產生的錯誤
2. 考慮不夠縝密導致錯誤
3. 利用窮舉法但討論不完全
4. 概念混淆產生錯誤
5. 誤解題意敘述導致錯誤
6. 運算技術上發生的錯誤
7. 未熟練基本公式定理
8. 分不清排列和組合的差異
9. 誤用其他模式解題
10. 分類組合分類不完全

(二) 高雄地區高一學生解排列組合單元問題之錯誤原因有：

1. 粗心、思慮不周全而忽略題目條件
2. 基本概念不周全
3. 在分類討論時考慮不夠周全
4. 基本的運算法則不熟練
5. 運算能力不足導致技術上的錯誤
6. 任意猜測解答而未經過驗證
7. 無法分辨清楚排列和組合之差異性
8. 與先前學過的知識做了不適當的聯結，錯誤引用其他模式解題
9. 不合邏輯的推論
10. 語文能力不足，以致閱讀題目解讀錯誤

三、有關重複組合的思維研究

楊宜蓁(民 98)探討高二學生在學習「重複組合」單元時數學思維的啟動、轉化，以及造成這些現象的原因，此論文把「將 H_n^m 轉化為 C_n^{m+n-1} 中一系列的運思過程，合成一整套有系統的運作方法」，稱之為「『H』的套裝思維」，與本研究的「理解基模」有相似之處。

有排列組合教學經驗的教師應該不難發現，在重複組合這個單元之中，學生非常容易與既有基模產生「失衡(disequilibrium)」的心理狀態。何謂失衡？當個體既有基模不能同化環境中新知識經驗時，在心理上就會感到失衡(張春興，1996)。

與重複組合有關的實徵性研究，多半整理了學生對於排列組合的學習所產生的錯誤類型，而不能深入了解學生造成錯誤的理解型式為何；另一方面，在重複組合這個單元中，根據學生理解的型式不同，而產生不同類型的理解基模，使用符號 H_k^n 只是其中一種。

國內少有研究描述學生在處理數學問題的過程中，有哪些具體行為？而這些具體行為並不是孤立出現的，組裝這些具體行為而產生的理解基模，將能夠更完整地幫助學生處理數學問題，進而提升理解的層次。因此，本研究期望透過 Skemp 的理解理論，達成這些目標。

第參章 研究方法

本章共分為五節：第一節研究流程與規劃執行內容，第二節研究對象，第三節研究的工具，第四節研究的設計，第五節研究可能的限制。

第一節 研究流程與規劃執行內容

表 3-1

研究流程與規劃執行內容

研究流程	規劃執行內容	研究時程
一、研究預備	(一) 廣泛閱讀數學教育文獻 (二) 學習研究方法與理論 (三) 思考研究方向 (四) 擬定研究主題	(2012.07~2013.08)
二、理論探討	(一) 深入探討 Skemp 理論 (二) 編製研究工具 (三) 規劃施測流程 (四) 設計施測題目	(2013.08~2014.05)
三、資料蒐集	(一) 執行施測活動 (二) 書寫資料及影音資料建檔	(2014.05~2014.06)
四、分析撰寫	(一) 整理學生錄影逐字稿 (二) 分析學生具體行為與基模 (三) 撰寫論文	(2014.06~2015.06)

表 3-1 研究流程與規劃執行內容說明如下：

一、研究預備

(一) 廣泛閱讀數學教育文獻

攻讀碩士期間，在眾多教授的引領之下，我們投身進入了數學教育的領域，修業期間與教授及同學們探討數學教育的經典論文，理論的基礎絕對是應用的基石，深知研究者本身僅有四年教學經驗的不足，積極利用寒暑假與課餘時間進修學習，以期在短程目標中完成碩士學位，進而達成增進教學知能的長程目標。

(二) 學習研究方法與理論

修業期間選修了一門「數學教育研究法」的課程，在教授指導與同學分組報告的過程中，我們學習到各種研究方法的基礎知識，配合不同的研究目的與研究方法，有著不同的研究設計與研究工具，資料的歸納、統整與分析更是「落花水面皆文章，蛛絲馬跡皆學問」哪！

(三) 思考研究方向

在廣泛地閱讀數學教育文獻期間，對於「理解(understanding)」這件事情特別有感覺，身為一個數學教師，希望學生能理解數學是如此的理所當然，然而，理解本身是如此的博大精深，許多數學教育界的巨人對理解這件事情有著獨到的見解，在與指導教授討論研究的方向之後，決定以「理解」作為本篇論文研究的核心概念。

(四) 擬定研究主題

在研究者的高中求學階段，學習數學的過程之中，一直對重複組合這個單元情有獨鍾，其中緣由於第一章研究動機已有較詳細的說明，在此不再贅述。因此，我將此份論文的主題定下，開啟了我對理解這件事情重新認知的大門，也對我鍾愛的重複組合單元有更深刻的教學反思。

二、理論探討

(一) 深入探討 Skemp 理論

在眾多數學教育界有關於「理解」的鉅作之中，Skemp 於 1976 年所發表的論文「Relational Understanding and Instrumental Understanding」堪稱經典中的經典，在 Google 學術搜尋引擎中，可搜尋到這篇論文被引用高達 1200 次以上，顯見此篇論文的重要性。Skemp 對數學教育的貢獻與熱情，豎立了一座高塔，引領我們世世代代前進，在決定研究主題並與指導教授討論之後，研究者便決定將論文研究聚焦在 Skemp 所提出有關於理解的理論，將 Skemp 於 1987 年所出版的大作「The Psychology of Learning Mathematics」鉅細靡遺地研讀一番，從中整理出「理解型式與心智活動模式產生的交互作用(見表 1-2)」，以此作為研究者分析學生具體行為的重要依據。

(二) 編製研究工具

誠如方才所言，為了分析學生的具體行為中反映出來的理解本質，研究者經過一段長時間的閱讀、理解、反思、再閱讀、再理解、再反思的遞迴過程，統整出「理解型式與心智活動模式產生的交互作用行為特徵表(見表 1-2)」，其中描述了學生的三種理解型式(IU、RU、LU)與二維向度的心智活動模式(Delta 1、Delta 2)，交互作用而產生六大類別的行為特徵，結合 Skemp 在各章節所提到的概念，編製這項研究工具。

(三) 規劃施測流程

本研究目的是觀察學生在處理重複組合問題的過程中，所產生的具體行為進行分析探究，依此研究者規劃施測流程分為三個階段。每位學生均在同一天的施測活動期間，連續完成三個階段的任務。研究者要求學生與學生之間避免互相談論受測內容，以取得每位學生最忠實對於重複組合單元的理解所產生的具體行為，並以錄影方式記錄學生的所有行為，進行研究分析。此研究須要求學生上台表達處理問題的想法，考量

到師生的信賴關係，所有的受測學生均為研究者所熟識的高三學生，十位學生中文理組參半，針對受測學生的分析請參看本章的第二節介紹研究對象。施測活動三個階段的規範說明如表 3-2。

表 3-2

施測活動三個階段規範說明

此研究活動分以下三個階段，各階段均沒有時間限制： 第一階段：學生獨立解題 1.學生自己進行解題活動。 2.盡可能把所有腦中的想法、解題的過程，忠實呈現出來。 3.讀題或解題過程之中可發出聲音，或是在卷上寫下任何的註記。 4.本測驗著重在解題歷程中，學生的想法與使用策略，答案正確與否是其次。 5.此階段教師只在旁靜默觀察，不與學生進行對談。 第二階段：學生上台講解 1.所有題目完成解題後，學生上台講解每一題的解題內容。 2.盡可能將自己的想法完整的呈現，並將計算過程寫在黑板上，慢慢說，說清楚。 3.此階段教師只在旁靜默觀察，不與學生進行對談。 第三階段：師生對談 1.此階段教師與學生將進行交談。 2.教師就前兩階段的觀察，對學生提出疑問或確認學生理解的情形。 3.學生就教師的問題提出說明，真切的反映出自己的想法即可。 4.若學生不會寫，或在解題過程中遇到困難，教師將在必要時給學生不同層級的提示，引導並協助學生進行解題活動。 衷心感謝你的配合。

(四) 設計施測題目

依照教育部 99 課綱，必修數學 II 第二章 2.2「重複組合」單元，並且參考高中課本龍騰版(民 99)中所引入的三種重複組合問題類型—「選物類型、方程式類型、分物類型」，進行施測題目設計，施測題目

為研究工具之一，詳見本章第三節。另外，為避免各題目之間產生作答的干擾，印製施測題目每一頁只有列印一個問題，各題目之下皆有足夠的空白處供學生記錄處理問題的過程，並以 B5 大小的紙張雙面印製，一份試題共有四張，每位學生均依序從第 1 題開始作答。

三、資料蒐集

(一) 執行施測活動

為避免學生有升學的考試壓力，研究者選取的所有學生受測當時，均為高三的準大學生，他們在受測當時皆早已透過繁星推薦、個人申請等多元入學的管道，各別錄取優秀的大學校系準備就讀，研究者邀請他們於畢業前夕進行施測活動，每位學生均各別獨立與研究者進行三個階段的施測活動，施測活動的紙張資料也全數收回。研究者架設攝影器材全程錄影錄音，以利資料分析，事前也都有告知學生並取得同意，為防止學生之間談論受測時的內容干擾資料蒐集，除了要求所有學生避免討論受測內容，研究者亦於三天內完成所有學生的施測活動，每位學生皆高度配合此研究的施測活動。

(二) 書寫資料及影音資料建檔

將所有學生的在第一階段的書寫資料，分別掃描建檔，三個階段的錄影檔案也存取於隨身硬碟之中，並對所蒐集到的資料作初步的分類整理，以利日後研究分析。

四、分析撰寫

(一) 整理學生錄影逐字稿

整理影音檔案的逐字稿，著實為一項浩大的工程，為了配合研究目的以及回答研究問題，研究者花了些時間在整理影音檔案的逐字稿，將學生的口語表達訴諸於文字符號，再進行研究的分析與論文的撰寫。

(二) 分析學生具體行為與基模

學生的具體行為包括靜態的書寫資料，以及動態的影音過程。本研究將依照 Skemp 的理解架構進行分析，分析流程請看圖 3-1，分析結果詳見本篇論文第肆章所述。

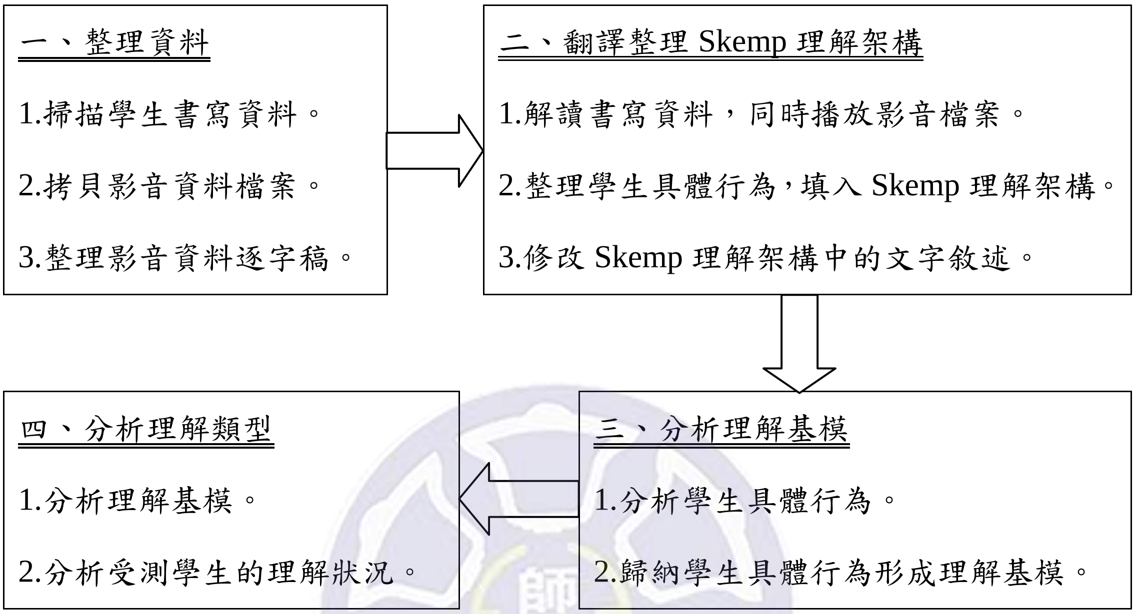


圖 3-1 分析資料的流程圖

在 Skemp (1987)的文章中經常提到的「基模(schema)」，指的就是「概念結構(concept structure)」，研究者在利用 Skemp「理解型式與心智活動產生的交互作用」分析學生的具體行為時，領悟到 Skemp 所指「概念結構」的意涵，即「基模是由許多概念所組成的一個結構！」當我這麼理解 Skemp 所指的基模，我突然豁然開朗，除了分析學生處理重複組合問題時所產生的具體行為，並也整理出學生在重複組合單元會出現的理解基模。

(三) 撰寫論文

零散的資料是不容易閱讀的，研究者整理與分析資料，同時回答研究問題，與讀者分享研究結果，也期望可以從中獲取寶貴的經驗，精進自己的教學，在未來能夠實際應用在學生的數學學習之上。

第二節 研究對象

本節分為四個部份：一、介紹受測學生及說明學生代碼，二、受測學生的數學程度分析，三、簡述受測學生的個人特質，四、受測學生的選取。

一、介紹受測學生及說明學生代碼

本研究共十位本校高三學生，他們已透過多元入學的管道，在受測前皆考取理想的大學。這些學生都是民國 100 年進入本校就讀，當屆高中入學基測 PR 值為 84 (此為學生當屆高中入學基測 PR 值全校的中位數)，當屆入學本校人數約有 870 人。以下介紹學生代碼的編碼方式。

表 3-3 中的矩陣 S 為一個 2×5 矩陣，其中第 1 列的五位學生均為本校第一類組的學生，於高二、高三階段在研究者任教的導師班學習；第 2 列的五位學生均為本校第二類組的學生，僅於高一時在研究者任教的導師班學習，而高二分班以後雖然沒有繼續在研究者的導師班學習，仍與研究者經常保持聯繫。舉例說明：學生代碼 S_{13} 為第一類組的女學生；學生代碼 S_{25} 為第二類組的男學生。

表 3-3

十位受測學生代碼說明

$$S=\begin{array}{l}\left[\begin{array}{ccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ \underbrace{S_{21} \quad S_{22} \quad S_{23}}_{\text{女生}} & & & \underbrace{S_{24} \quad S_{25}}_{\text{男生}} & \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\text{第一類組}\\ \text{第二類組}\end{array}$$

受測學生代碼 S_{ij} 說明

i：類組	j：性別
i=1：第一類組	j=1, 2, 3：女生
i=2：第二類組	j=4, 5　：男生

二、受測學生的數學程度分析

接著分析十位受測學生的數學程度，研究者蒐集十位學生兩種成績進行數學程度上的探討。矩陣 A 顯示出十位學生在本校六個學期的數學學業成績表現，研究者將每位學生於本校就讀的六個學期數學學業成績取平均值，形成矩陣 A，A 中各元 a_{ij} 即為學生 S_{ij} 所得六個學期數學學業成績平均分數；

矩陣 B 顯示十位學生於大學學科能力測驗數學考科所得級分，其中 B 中各元 b_{ij} 即為學生 S_{ij} 所得大學學測數學考科的級分，( )中顯示該學生達到 103 年大學學測數學考科全國五標之一；$\overline{A}$ 與 $\overline{B}$ 則分別為矩陣 A、B 中各元的平均分數。

(一) 矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times5}=\begin{bmatrix}75 & 76 & 76 & 82 & 70\\ 81 & 82 & 84 & 71 & 78\end{bmatrix}$；$\overline{A}=\dfrac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}}{10}=77.5$。

(二) 矩陣 $B=\left[b_{ij}\right]_{2\times5}=\begin{bmatrix}10(\text{均}) & 10(\text{均}) & 9(\text{均}) & 13(\text{頂}) & 10(\text{均})\\ 15(\text{頂}) & 15(\text{頂}) & 12(\text{前}) & 12(\text{前}) & 13(\text{頂})\end{bmatrix}$；

$$\overline{B}=\frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{5}b_{ij}}{10}=11.9(\text{前})$$

舉例來說，由矩陣 A 可知，學生 S_{11} 六個學期在校數學學業平均為 75 分；由矩陣 B 可知，學生 S_{11} 在學測數學考科的表現為 10 級分，達全國均標水準。

現將矩陣 A 中各元，若高於 $\overline{A}$ 記錄符號為 O，若低於 $\overline{A}$ 記錄符號為 X；同樣的，矩陣 B 中各元，若高於 $\overline{B}$ 記錄符號為 O，若低於 $\overline{B}$ 記錄符號為 X，形成數對矩陣 C：

$$C=\left[c_{ij}\right]_{2\times5}=\begin{bmatrix}(X,X) & (X,X) & (X,X) & (O,O) & (X,X)\\ (O,O) & (O,O) & (O,O) & (X,O) & (O,O)\end{bmatrix}$$

舉例來說，$c_{11}=(X,X)$ 代表學生 S_{11}，在校數學成績表現低於十位學生的平均，大學學測數學考科成績也低於十位學生的平均，判定學生 S_{11} 的數學程度較低。研究者由矩陣 C 判定，十位學生的數學程度，若得到兩個記號均為 X，則判定數學程度較低；若得到兩個記號均為 O，則判定數學程度較高；若得到兩個記號為 X、O 各一，則判定數學程度中等，形成矩陣 D：

$$D=\left[d_{ij}\right]_{2\times5}=\begin{bmatrix}\text{低} & \text{低} & \text{低} & \text{高} & \text{低}\\ \text{高} & \text{高} & \text{高} & \text{中} & \text{高}\end{bmatrix}$$

三、簡述受測學生的個人特質

研究者曾經擔任過十位學生的導師，透過與十位學生直接接觸的相處過程，以下簡述研究者對十位學生的個人特質與學習態度的觀察。

S_{11}：第一類組女生，個性溫和沉靜，語文能力頗佳，做事勤快，老師交代的作業都會盡力完成，學習態度乖巧認真，但理科學習較為困難。

S_{12}：第一類組女生，個性樂觀開朗，擅於整理文史筆記並能夠統合比較，數理方面雖然較為使不上力，但也是個學習態度認真的好孩子。

S_{13}：第一類組女生，個性活潑外向，對話劇表演充滿熱忱，善於人際交際，對數學學習常感困惑而產生放棄念頭。

S_{14}：第一類組男生，個性獨立自主，思辨與表達能力頗強，曾擔任本校演辯社社長，對於知識領域有著追本朔源的探究精神。

S_{15}：第一類組男生，個性敦厚老實，對攝影專業興趣濃厚，藝術領域方面表現突出，在學習數學知識的時候常感焦慮與挫折。

S_{21}：第二類組女生，個性沉穩踏實，會畫可愛的人物小插圖，熱衷於吉他表演，擔任班級幹部非常認真盡責，學習能按部就班一步一腳印。

S_{22}：第二類組女生，個性積極奮勉，能夠經常對於生活週遭發生的事情深切內省，在學習時相當活躍聰敏，並且經常能夠舉一反三的優秀學生。

S_{23}：第二類組女生，個性坦率真誠，主觀意識較強，情感方面較為脆弱，常與導師談話時激動落淚，學習方面認真積極，但有時不知如何變通。

S_{24}：第二類組男生，個性頑皮好動，腦筋很靈活，但是較為愛玩，對於課業學習方面較不積極認真，容易滿足於現狀覺得這樣就好。

S_{25}：第二類組男生，個性直來直往，熱衷於管樂表演，擅於電腦程式設計，能接受老師的建議而改進，學習不拘小節故經常粗心。

四、受測學生的選取

本研究的受測學生，執行第一階段的施測活動時，學生在處理問題時，研究者會在學生身邊就近觀察，即便與研究者熟識的學生亦會有些不自在。為了避免降低學生的焦慮與不安，所有學生皆為研究者所曾經教導過一年以上的學生，已建立的師生關係作為研究互動的信賴基礎。研究者在邀請學生受測前給予鼓勵與肯定，並保證此施測活動不會影響到學生的學業成績，所有施測活動僅提供本研究進行分析，個人資料絕對不會外洩。執行第二階段的施測活動時，邀請學生上台講述處理問題的過程，此階段需要學生勇敢、清楚、明確的表達能力，已建立的師生關係再次作為信賴的基礎，使學生願意忠實的將想法表達出來。

重複組合是高中數學第二冊第二章排列組合單元中的內容，受測學生於高中一年級下學期首次接觸，高二升高三的暑假進行學測總複習時，會進行重複組合的複習。參與本研究的十位學生中，文組的五位學生$(S_{1j},\forall j)$皆於高二分班以後，才在研究者的導師班完成高中學業，研究者並非他們高一的數學老師；另一方面，理組的五位學生$(S_{2j},\forall j)$恰好相反，他們都是研究者高一的導師班學生，研究者並沒有擔任他們高二分班以後的數學老師。

第三節 研究的工具

本節分為兩個部分：一、蒐集資料的工具，二、分析資料的工具。

一、蒐集資料的工具

(一) 重複組合試題

1. 重複組合試題的發展

受測學生是高三的學生，研究者假設他們應該習得完整的重複組合概念，並且可以靈活運用，從而能夠處理較複雜的重複組合題目。在正式對學生施測之前，研究者設計了如表 3-4 所示的 13 道與重複組合相關的應用問題，並且找幾位學校數學教師與前導測試學生(非正式受測的十位學生)進行前導測試。

表 3-4

重複組合非正式施測題目

重複組合題目
1. 五男三女排成一列，女生不相鄰，共有幾種排法？ →先排男生 →先排女生
2. 六種不同口味的飲料，小華一人買三杯，飲料可重複選取，其方法數共有幾種？
3. 六種不同口味的飲料，倒入三個相同的杯子，每種飲料不限倒一杯，共有幾種倒法？
4. 將六支相同的原子筆，分給甲乙丙三人，每人所拿不限，共有幾種分法？
5. 將六顆相同的乒乓球放入三個不同的箱子，每箱球數不限，共有幾種放法？
(續下頁)

6. 由 1、2、3、4、5、6 等六種數字所組成的三位數 $N=100a+10b+c$，其中 a,b,c 分別表示 N 的百位數字、十位數字、個位數字，則滿足 $a\geq b\geq c$ 的 N 有幾個？

7. 丟擲三個相同的公正骰子，出現的點數組合有幾種？

8. 袋中有紅、橙、黃、綠、藍、靛等六種顏色的球，每種顏色各有五顆，同時抽出三顆，共有幾種不同顏色的組合？

9. 方程式 $a+b+c+d+e+f=3$ 的非負整數解的個數為何？

10. 方程式 $a+b+c+d+e+f=9$ 的正整數解的個數為何？

11. 方程式 $a+b+c+d+e+f=6$ 的非負偶數解的個數為何？

12. 優勝籃球隊從編號 1 到 12 號的 12 位選手中，要選出 5 位編號不連續的人先發出賽，共有幾種選法？

13. 甲乙丙丁戊等五個人在排成一列的 12 個空位中，選坐五個不相鄰的座位，共有幾種坐法？

2. 非正式試題的缺失

在前導測試時，研究者發現了一些問題，像是題目太多容易讓學生不耐煩，造成答題不完整；題目較為複雜，學生沒有辦法想出來，蒐集不到資料也無法進行分析等等。研究者整理出以下五點缺失：

(1) 前導測試學生在有別於題目卷的計算紙上，僅列出計算的過程，研究者無從看出前導測試學生整個處理問題過程中的細部具體行為，這是由於題與題之間無適當的空白處，可供受測學生記錄。

(2) 雖然可以從學生計算紙上看出計算過程，但是無法得知學生處理問題的順序，以及重複讀題等行為。

(3) 施測題數過多，同類型但以不同文字敘述的題目，應避免重複出現。

(4) 前導受測學生是一位第二類組的女學生，雖然她是理組的學生，但由於題目較為複雜，造成她有許多題目無法作答，研究者無法蒐集資料，便無法進行分析。

(5) 學生在使用符號 H 處理問題時，並無從得知其使用工具的背後是否有「關聯式理解」的成分。

3. 針對非正式試題缺失的對策

研究者與指導教授充分討論後，修改以上五點缺失，分別對應如下：

(1) 印製施測題目時，為了防止題目與題目之間作答的干擾，一頁僅印製一道問題，並提供足夠的空白處給學生記錄過程，以 B5 紙張雙面列印，如圖 3-2 所示。

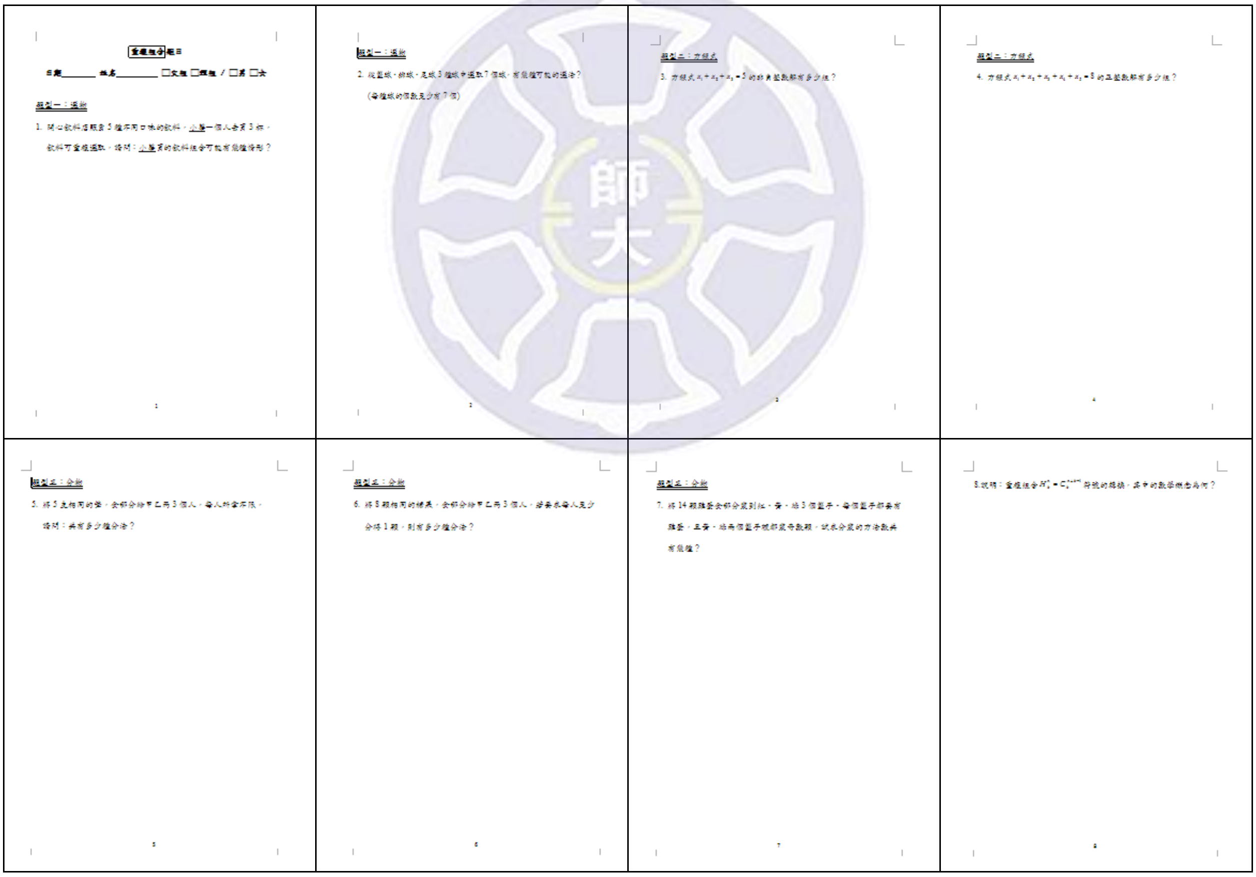


圖 3-2 重複組合正式施測題目印製樣貌

(2) 除了繼續保留蒐集學生書寫手稿，另外採用錄影的方式，詳實記錄學生動態的過程，並規劃三個階段的施測活動，如表 3-2 所示。

(3) 施測題數從 13 題減少至 8 題。

(4) 降低題目的難易度，以最直接讓學生可以聯想到「重複組合」的文字來敘述題目，避免綜合性排列組合的題目。

(5) 增加說明題型，並放在最後一題，避免學生先看到 H 轉換成 C 的公式，影響他們思考的方式。另一方面，當學生在前七題的處理過程中，若有使用符號 H 的具體行為，則能否說明第 8 題公式的轉換，可以幫助研究者區分學生屬於哪一種理解類型。

4. 正式施測試題

重複組合正式施測題目，如表 3-5 所示。

表 3-5

重複組合正式施測題目

重複組合題目

日期________ 姓名__________ □文組 □理組 / □男 □女

題型一：選物

1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？

題型一：選物

2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？(每種球的個數至少有 7 個)

題型二：方程式

3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？

題型二：方程式

4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？

(續下頁)

題型三：分物

5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，
   請問：共有多少種分法？

題型三：分物

6. 將 8 顆相同的糖果，全部分給甲乙丙 3 個人，若要求每人至少
   分得 1 顆，則有多少種分法？

題型三：分物

7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有
   雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共
   有幾種？

8. 說明：重複組合 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 符號的轉換，其中的數學概念為何？

表 3-5 中各施測題目設計細節說明如下：

(1) 第 1、2 題為「選物類型」。這一類型的題目敘述，是從 n 種不同的類別之中，選取 k 件物品，每種類別可重複挑選，而且每一種物品至少都有 k 件，求其選取方法數的問題。第 1 題設定要選取的物品個數較種類少($n>k$)，第 2 題設定要選取的物品個數較種類多($n<k$)，此兩題敘述中的「種類」均無特殊限制，每一個種類都有足夠的物品數量可供重複選取。

(2) 第 3、4 題為「方程式類型」。這一類型的題目是給定一個 n 元一次不定方程式，且各元的係數均為 1，常數項為某正整數，各元之解均為非負的整數解或正整數解等，求其解共有多少組數的問題。其中第 3 題要求方程式解的情形是非負的整數解，第 4 題要求方程式解的情形是正整數解。

(3) 第 5、6、7 題為「分物類型」。這一類型的題目敘述，會有 k 個相同的物品，要全數分入 n 種不同類別之中(n 個人、n 個不同的籃子或箱子)，每種類別不限分配到物品的個數，求有多少種分配物品的

方法數。第 5 題設定每人「所拿不限」，可對應到第 3 題所要求的解為「非負的整數解」的條件；第 6 題設定每人「至少分得 1 顆」，可對應到第 4 題所要求的解為「正整數解」的條件；第 7 題是參考「102 年大學學科能力測驗數學考科單選題第 5 題」，將雞蛋個數略為降低，原本有 24 顆雞蛋改為 14 顆進行分裝，此題敘述中「每個籃子都要有雞蛋」可對應到第 4 題所要求的解為「正整數解」的條件，除此之外還有「黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆」的特殊要求。

(4) 第 8 題獨立於各類型，要求學生說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 中轉換的數學概念，目的是區分學生對於轉換符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的理解型式是「工具式理解」或「關聯式理解」。

5. 正式施測試題的難易度

正式施測題目中，前六題是要蒐集學生對於重複組合題目的想法與具體行為，題目難易度為中偏易；較為困難的題目有第 7 題的分物類型，以及第 8 題的說明題，研究者預估的施測題目難易度如表 3-6。

表 3-6

研究者預估的施測題目難易度

題目類型	選物		方程式		分物			說明
題號 / 難易度	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
易	✓		✓		✓			
中		✓		✓		✓		
難							✓	✓

6. 重複組合正式施測題目的效度

基於以上對於正式施測題目的設計過程，研究者與指導教授一同討論修改，並參酌兩名學校數學科教師的意見—他們均有兩年以上的實際教學經驗，其中一人獲有碩士學位，以增加試題的「專家效度」。

7. 施測試題要蒐集書寫資料

本研究的「書寫資料」指的是受測學生於第一階段寫在試題紙上的所有手寫記錄。研究者將所有學生書寫資料一一掃描建檔，每位學生 8 題，共有 80 筆資料。

(二) 施測場地與攝影器材

1. 施測場地

選擇本研究適當的施測場地，須滿足以下四點：

(1) 避免不相干人士進入施測現場，干擾施測活動的進行。

(2) 有足夠的空間，避免讓受測學生有壓迫感。

(3) 要有桌椅，可供學生第一階段施測活動的書寫。

(4) 要有黑板，可供學生第二階段講解時記錄處理問題的過程。

基於以上四點考量，研究者選定校內 A 棟五樓較為安靜的階梯教室，進行施測活動。在施測場地之中，只有受測學生與研究者二人在場。

2. 攝影器材

本研究需要蒐集學生在解重複組合題目的過程中，學生何時、何序、何以說了什麼話、寫了什麼字、做了什麼事情，詳實的具體行為，所以錄影機是必要的工具之一。而透過錄影錄音的檔案，可以蒐集各階段的重要資料：

(1) 第一階段學生寫下書寫資料與具體行為出現的先後順序。

(2) 第二階段學生上台寫的板書資料與講解逐字稿。

(3) 第三階段師生對話的逐字稿與板書資料。

(三) 研究者

郭生玉(2012)提到：「研究者扮演直接收集資料的角色。」以下就兩點說明研究者的數學學習歷程，以及我對數學教育的看法。

1. 研究者的數學學習歷程

(1) 小學階段

研究者在小學二年級時便能夠熟記九九乘法表，當時覺得這些數字有規律，很好記所以一下子就記起來了。學習數學需要的背頌或理解，對當時的我並不困難，再加上小學五年級受到黃洪發老師的啟發，激起我對於數學的熱情，從此我便立下志向─成為一位數學老師。

(2) 國中階段

國中就讀私校的緣故，學校的數學老師時常出了非常多的功課，但由於興趣使然，我都會盡全力完成這些數學作業，幫助我在末代聯招的制度下，數學這一科拿了 119 分(滿分 120 分)。我認為這段時間的訓練，奠定了計算能力的基礎，對於學習更高階的數學有直接的影響。填鴨式學習是否真的全然不好？值得反思。

(3) 高中階段

以研究者高中六個學期的數學學業成績「91、99、95、95、99、99」來看，研究者對於體制內的數學課程並沒有太多的學習障礙，而對於體制外的數學學習也很積極，研究者除了經常閱讀數學相關的科普書籍，積極參加數學營，校內校外的數學競試也有不錯的成果表現。

高中時期的我認為，「理解」是學好數學的第一要務，所以同學經常來問我數學問題時，我都很盡力去教他們「爲什麼」這件事情，現在反省起來，其中某些為了「分數」的同學，可能只想知道「怎麼做」，並不想知道「爲什麼」。

(4) 大學階段

透過推薦甄試進入臺灣師範大學數學系，才知道什麼叫做「坐井觀天」，數學的知識猶如宇宙般浩瀚，猶如大海般深不可測，雖然是順利地大學畢業，但對於許多的高等數學課程(如高微、複變等)，無法真正地理解，僅能以背誦的方式學習，現在想想真是汗顏。

2. 研究者對於數學教育的看法

(1) 教育理念

在當上正式教師之前，研究者自身的學習歷程，以及非正式的教學經驗，逐漸形成我對教育的理想與信念。研究者致力於實踐當一位教師的夢想，偉大的教育家福祿貝爾有句名言：「教育無他，唯愛與榜樣。」研究者除了相當愛護我的學生以外，自我要求頗高，也期勉自己勤於學、樂於學，努力成為學生的榜樣。

(2) 數學教育

項武義教授(林思華整理，民 97)曾說過：「小乘應用數學獨善其身，大乘應用數學普渡眾生。」前者指的是解決個別問題的「數學研究」，而後者指的是與廣大人類有關的「數學教育」，「數學教育」要訓練學生的思維，讓他們能夠善於認識問題。

然而，數學「太完美」了！是否正因為數學「太完美」，才讓許多人「高攀不起」或「無法高攀」？「數學」成為許多青年學子最害怕的科目(石厚高，1997)。「教」與「學」是不同的事情，「自己學會」與「教會他人」也是兩回事。不同的老師教同一個單元，會有不一樣的引導；同一個老師教不同的學生，學生學習的成果也必然存在著個別差異。

當了數學老師之後，慢慢驚覺自己以前「輕易」習得的數學知識，竟有許多複雜的細節與脈絡，透過教學經驗的累積，研究者雖是漸漸熟悉了高中教材，但仍希望能夠更完整地幫助學生理解數學。

(3) 教學模式

教學是教師和學生共同參與的一種活動歷程(余民寧，2012)。依照研究者的教學經驗，高中的數學課程對於大部分的學生來說，是一個困難的科目，他們都需要老師的幫助，其中有些學生以前的數學基礎不夠紮實，更需要老師的協助。

由於研究者高中時期遇到的數學老師，都是非常認真且仔細地上「課本」，研究者耳濡目染，上課的方式也以課本為主、補充講義為輔。研究者執行的教學模式(見圖 3-3)說明如下：

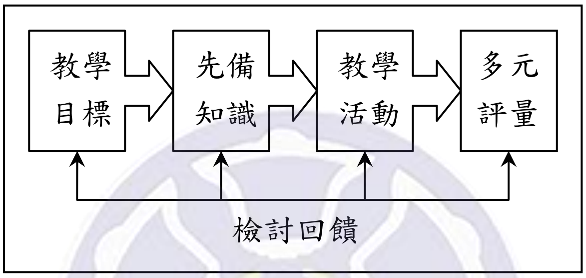


圖 3-3 研究者的教學模式

a. 教學目標：讓學生學會新的單元或概念。

b. 先備知識：研究者會先檢驗學生的先備知識夠不夠，如果不夠，研究者就會先補足他所缺乏的先備知識。

c. 教學活動：在學生具備先備知識的情況下，研究者會先以故事、連結舊經驗的方式，利用學生的先備知識，在課堂上與學生的互動和討論，引起學生動機。研究者竭力將數學課程深入淺出的授與學生，在授課期間遇到容易混淆的數學概念，研究者會進行提問或分組討論等，引導學生發現問題、思考問題，進而解決問題。

d. 多元評量：上完一個新單元或概念後，研究者也會協助學生統整新舊知識，並進行「(a)習題講解」、「(b)作業批閱」、「(c)紙筆測驗」與「(d)考卷訂正」，如下說明。

(a)「習題講解」是由學生分組上台寫習題，而老師利用學生的過程進行講解與補充，鼓勵學生表達自己的想法，也會進行課堂上的討論。

(b)「作業批閱」指的是研究者會把學生的課本與課堂講義收過來，親自批閱打平時成績，主要是能看出學生上課的用心程度，以及他寫作業的情況。

(c)「紙筆測驗」是指有單選題、多重選擇題、填充題，與計算題等題型的考試卷，每週固定有一到二次的紙筆測驗，考完後會讓學生交換批改成績。

(d)「考卷訂正」是指紙筆測驗後，不管成績好壞，研究者要求學生一定要訂正考卷上有錯誤的地方，即便是自己寫對的題目，有疑問的地方也要提出來討論。研究者除了會在課堂上檢討評量測驗卷比較困難或容易寫錯的題目，也會於課後要求每位學生親自繳交訂正，請他講解考卷上錯誤的部分，給予個別化輔導。

e. 檢討回饋：在教學模式之中，教學目標、先備知識、教學活動、多元評量的四個向度，雖然大致上呈現出次序性，但是彼此之間都可以隨時檢討回饋，讓研究者能即時掌握學生的學習進度，也能了解學生有哪些概念不正確或混淆的地方，隨時可以修正這些概念。特別是當學生確實完成「考卷訂正」，能夠提供師生之間相當直接且實際的回饋。

研究者發現自己在教一個新單元的教學模式，與 Robert Glaser (1962)的基本教學模式頗為類似。

(4) 課程教材

研究者就讀高中時期，適用的是教育部於民國 88 發布的「數學學習領域課程教材(暫訂)綱要」；研究者成為正式教師帶到的第一屆學生(97 學年度入學)，適用的是教育部於民國 95 年度發布的「95 高中數學課程暫行綱要」；研究者帶到的第二屆學生，也就是本研究的研究對象於 100 學年度入學，適用的是教育部於民國 97 年度發布的「普通高級中學課程綱要(99 課綱)」。目前我帶到第三屆的學生(103 學年度入學)，則是「十二年國民基本教育」正式實施的第一批學生，適用的是教育部於民國 102 年發布的「修正普通高級中學課程綱要」。

在數學課程「朝令夕改」的情況下，研究者一方面慶幸的是自己是數學教師，因為如果教材內容的順序改變，不會影響到數學內容本身的邏輯順序，那麼這樣的挪動對數學老師並沒有太大的影響。但是不可否認的是在第一線教學時，因為數學課程的先後順序，有時候會讓研究者感覺「卡卡的」，譬如說我國現行高中數學課程綱要第二冊第四章「二維數據分析」單元中「迴歸直線」其中的一種型式，卻是第三冊第二章「直線方程式」中的點斜式。教育部改變傳統的塊狀課程編排，99 課綱的部分內容以螺旋式設計，然而在高一下的數學課程中，就有高二上數學課程的需求，經歷「塊狀學習」的教師或多或少需要一些智慧「調適」，才能達到「平衡」。

另一方面是教學時數的問題，研究對象是高一時，一個禮拜有五個小時的正式數學教學時數，沒有輔導課。但是目前研究者帶的高一，一個禮拜僅有四個小時的正式數學教學時數，同樣沒有輔導課。在面對學生差異極大的國中基礎，以及高中數學課程與國中數學課程難度差距的鴻溝，對高中教師真是一大考驗！

二、分析資料的工具

Skemp 理解架構是本研究重要分析資料的工具，以下說明研究者發展 Skemp 理解架構的歷程。

(一) 從表 1-1 出發

本研究以 Skemp 理論為分析學生具體行為的工具，研究者首先針對表 1-1 中，兩個橫列向度的「直覺式心智活動」與「反思式心智活動」，以及三個直行向度的「工具式理解」、「關聯式理解」、「邏輯式理解」，進行各項細部特徵的了解。研究者參考了陳澤民(1995)，整理出表 3-7 與表 3-8。

表 3-7

對於表 1-1 心智活動模式的細部特徵說明

心智活動	直覺式心智活動 Intuitive Mental Activity	反思式心智活動 Reflective Mental Activity
說明	1. Δ_1 (Delta one)：第一指導系統。 2. 處理外在物理環境。 3. 個體自覺性只停留在 Δ_1 上，可以說是反射動作的立即反應。	1. Δ_2 (Delta two)：第二指導系統。 2. 處理內在心智物件。 3. 能將個體自覺性集中到 Δ_2 上，知覺到 Δ_1 的存在、運作，及了解背後的原因。

表 3-8

對於表 1-1 理解型式的細部特徵說明

理解型式	工具式理解 Instrumental Understanding	關聯式理解 Relational Understanding	邏輯式理解 Logical Understanding
說明	1.只要能算得出正確答案就好。 2.只是操作一些數學符號，符號是空虛沒有靈魂的概念軀殼。 3.學生只要透過Δ_1接收資訊、產生反應就完成學習。	1.建立整體的概念結構，並通曉其中相互關連。 2.符號是腦中概念具體的把手與標誌，有符號才能操作，溝通個人概念。 3.學生必須根據Δ_1中既存的基模，以Δ_2監控Δ_1處理新概念。	1.其目標是使基模或解題過程，適當地呈現出來。 2.數學表達能力，安排敘述之間的邏輯，轉接通順與否。 3.說服自己只要關聯式理解，說服別人應有正確的邏輯式理解。
	4.建立短期基模，像公式、規則是容易退化的基模。 5.有有限的適應力，互相有關聯的新舊概念，無法有效的連結，學習新的概念與原本舊有的概念各自獨立存在於腦中。 6.為了獲取分數、文憑、工作，少有樂趣。	4.建立長期基模，面對特定問題都可能推論出適當的解決方法。 5.具有較強的適應力，新的概念透過教學同化到適當的基模中，概念結構在關聯式學習之後，有一番重組、凝聚、增長、強化。 6.讓概念結構增長，本身就帶來愉悅。	4.數學證明相當於自然科學中「可精確重現的實驗」，有內在一致性。 5.如同 Bruner(1960)所說的「個體分析儀」：為我們展示的證明、推演過程做一系列的分析，建立妥適、合理的邏輯程序。 6.產生邏輯式理解有一項重要誘因，即來自同儕的批評、建議。

(二) 遇到瓶頸後的突破

研究者雖然可以整理出表 3-7 與表 3-8，但是百般思索，仍無法具體整合出六種理解類別的細部特徵，重新研讀 Skemp (1987)「The Psychology of Learning Mathematics」的原文，發現橫列中的兩種心智活動模式，很類似郭生玉(2010)敘寫行為目標的「情境」與「動詞」要素，研究者隨即整理出表 3-9。再者，直行中的三種理解型式，很類似郭生玉(2010)敘寫行為目標的「標準」與「結果」要素，整理出表 3-10。

表 3-9

Skemp 理解架構具體行為目標的「情境」與「動詞」要素

心智活動	直覺式心智活動 Intuitive Mental Activity	反思式心智活動 Reflective Mental Activity
情境要素	資訊來自於外在環境 Information comes from external environment	資訊來自於自我的概念系統 Information comes from our own conceptual systems
動詞要素	給出題目的答案 Give something to the question	解釋你如何做的 Explain how you did it
	確認某事物 Be sure of something	知道為何他能確定這件事情 Know why one is sure (學生自己知道為什麼他能確定) (老師知道為什麼學生可以確定)
	能夠做某事 Be able to do something	知道他如何做這件事情 Know how one does it (學生自己知道他如何做這件事情) (老師知道學生如何做這件事情)

表 3-10

Skemp 理解架構具體行為目標的「標準」與「結果」要素

理解型式	工具式理解 Instrumental Understanding	關聯式理解 Relational Understanding	邏輯式理解 Logical Understanding
標準要素	工具式理解是可以應用一個適當已記憶的規則到一個問題解決的能力，而不知道為何這個規則有用。	關聯式理解是可以從較一般的數學關係，推論出特定規則或程序的能力。	邏輯式理解是可以將數學符號與記數法和相關的數學想法作連結，並且將這些想法與一連串邏輯推論作結合的能力。
	工具式學習形成的基模是短期的、最不耗時的、且最快速可習得的，我們可以將規則視為退化的基模。	關聯式學習形成的基模雖比學習規則花時間，卻是長效的，且在本質上是有機的。	
結果要素	工具式理解的目標是對於老師問的問題能給出正確答案，且越多越好。	關聯式學習的目標就是建構這些關聯式基模。	邏輯式理解是能夠展示這些接續說明邏輯必然性的能力。
	藉由工具式學習而習得的心智結構適應力有限，因為這些規則是操作符號的方法，而且連結發生在符號之間而非概念之間。	關聯式數學更能夠適應新的任務。符號是結合相關概念的把手與標記，沒有符號我們便無法討論。	

(三) 完成 Skemp 理解架構

經過研究者多次修訂，整理了 Skemp 理解架構的行為特徵，得到「理解型式與心智活動模式產生的交互作用行為特徵表」，見表 1-2。

第四節 研究的設計

在探究與理解相關的文獻之際，研究者便著手規劃研究如何進行。研究者想蒐集的資料是學生在處理數學問題的過程中，會做哪些事情，探討他們產生的具體行為，並對照 Skemp 所提出的理解模式進行分析，基於「過程重於結果」的立場，學生在處理問題過程中的所有細節，都是本研究的分析依據。

本節分成四個部分說明：一、研究目標與流程，二、規劃施測活動，三、蒐集資料與整理資料的流程，四、分析並撰寫論文。

一、研究目標與流程

本研究的目標是經由觀察學生在處理重複組合問題的過程中，所產生的具體行為，依照 Skemp 的理解理論進行研究的分析。為了達到這個目標，研究者設計的流程有四個：

(一) 研究預備。

(二) 理論探討。

(三) 資料蒐集。

(四) 分析撰寫。

各個研究流程所規劃要執行的內容，請參看本章第一節表 3-1 的說明。

二、規劃施測活動

爲了能夠蒐集到本研究所需的資料，研究者規劃了三個階段的施測活動，蒐集學生產生的具體行為，蒐集到的資料再經過整理，便形成回答研究問題的依據。在執行施測活動三個階段之前，研究者均先向受測學生說明施測活動的規範(表 3-2)。由於本施測活動希望蒐集學生處理問題的過程中詳實的具體行為，為防止學生在有時間壓力下無法盡情思考，故各階段施測活動沒有時間的限制。

三個階段施測活動的設計，以及施測活動的目標與規劃詳述如下。

(一) 第一階段：學生獨立解題

施測活動的第一階段，主要目標為蒐集學生的書寫資料與具體行為，採用紙筆測驗的方式。紙筆測驗中，因為選擇題或填充題的題型容易讓學生有猜測答案的行為，故本研究施測題目皆採取計算或說明的題型，要求學生盡量寫出詳細的計算過程。各題題目如圖 3-2 所示，每一頁僅印製一道問題，不提供計算紙，所有想法均記錄在該題及該頁空白處。透過影像的記錄，研究者可以更精確地掌握學生處理問題的過程，以及他在處理問題時所產生的各種具體行為。

這一階段屬於學生獨立處理問題，研究者坐在受測學生身邊靜默觀察，如圖 3-4，不與學生互動，盡量避免干擾他們思考，同時要求學生不能與研究者對話，但是學生可以發出聲音(自言自語)進行，等待問題全數完成或學生主動停止作答，才結束施測活動的第一階段。

從施測活動規範說明開始，到第一階段結束，研究者將錄影機架設在受測學生與研究者中間的正前方，如圖 3-4 所示，第一階段施測活動結束之前，錄影機固定錄影方向，可以同時拍攝受測學生的具體行為，以及研究者觀察學生受測的情形。

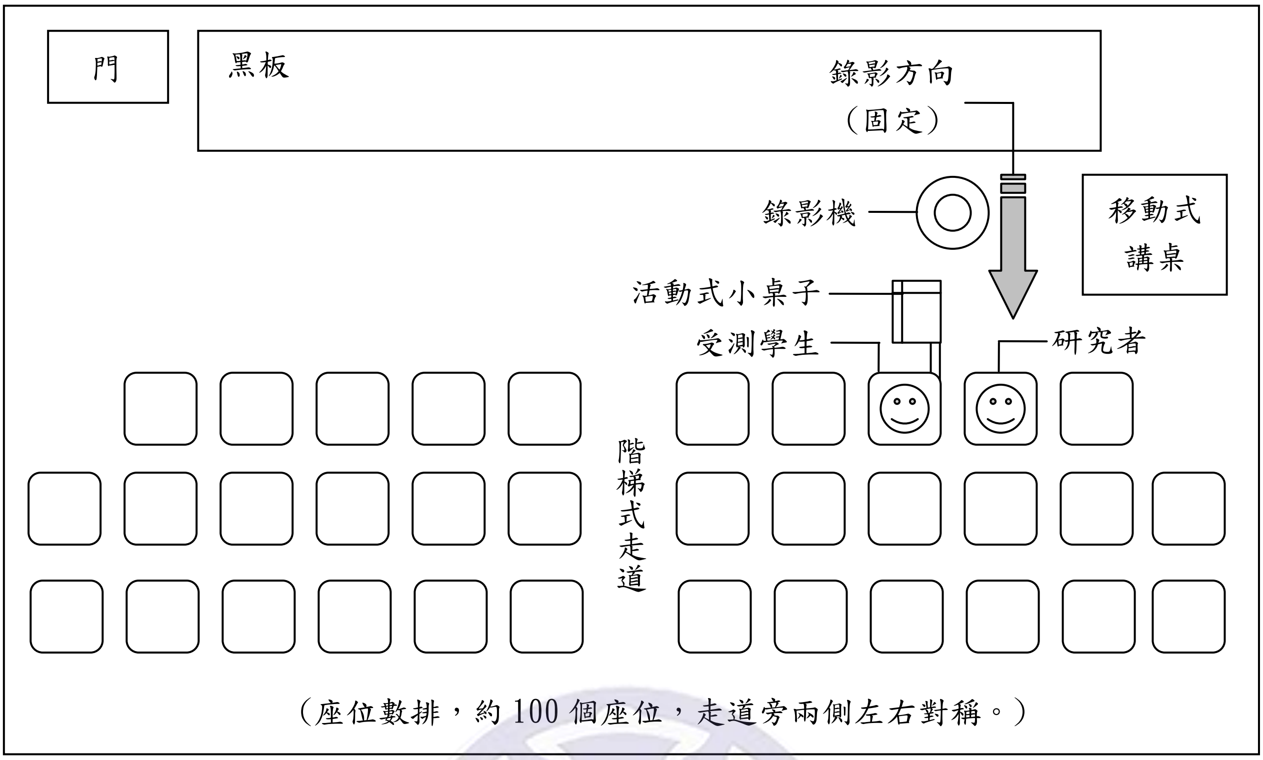


圖 3-4 施測活動規範說明到第一階段的配置圖

(二) 第二階段：學生上台講解

第一階段紙筆測驗的活動完成後，立即執行第二階段的活動。每位學生均被邀請上台講解剛才針對每道問題的想法，說明他是如何依照題目的敘述，使用何種想法處理問題。這一階段的目標是要求學生能夠將第一階段的想法講解一遍，研究者期望可以藉由每位學生上台解說，讓學生有第二次的思考機會。學生會把處理的過程寫在黑板上，並講解他的想法與做法。

這一個階段也是學生自己完成上台講解，研究者在台下錄影記錄，如圖 3-5 所示，不與學生對話，僅提醒學生在黑板上哪裡還有空白處可進行作答，盡量避免干擾學生講解的思緒，並鼓勵學生盡量說，慢慢說、說清楚。

從施測活動的第二階段開始到第三階段結束，研究者將錄影機架設在研究者正前方，如圖 3-5 所示，邀請學生上台講解，由研究者控制錄影機，拍攝方向隨著學生走動而轉動，並視情況控制錄影機鏡頭的遠近。

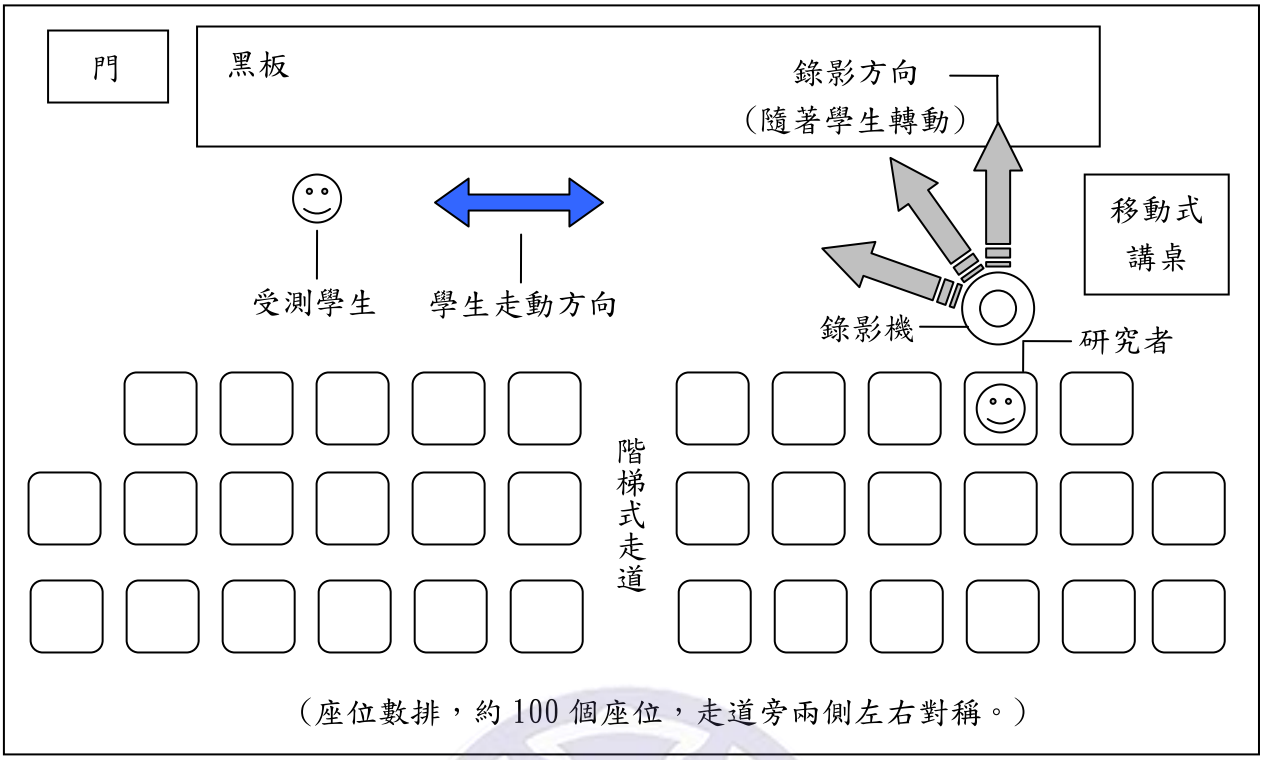


圖 3-5 施測活動第二階段到第三階段的配置圖

(三) 第三階段：師生對談

當學生所有問題都講解完畢之後，針對剛才前兩個階段研究者的現場觀察，研究者對學生提出詢問，並與學生進行對談。Skemp (1987)指出，討論(discussion)有助於反思(reflection)，這個階段的目標是希望學生透過與研究者的溝通(communicate)，並針對研究者於前兩個階段的施測活動所觀察到的行為，正確的部分要求學生進行確認(confirm)或說明(explain)，錯誤的部分要求學生進行檢查(check)或修正(modify)，至於不會處理的問題，研究者給予不同層級的提示，引導學生處理問題。

由於學生之間必然存在著個別化的差異，事先無法知道學生的處理過程，所以研究者無法預先設計第三階段固定要提問的問題，因此本研究對於第三階段的分析，著重在探究學生能否透過與教師的對話，受測學生運用 Delta 2 的反思智慧，確認他所處理的問題，並透過對話的方式，期望協助學生提升理解能力，針對不會的問題協助學生進行處理。

三、蒐集資料與整理資料的流程

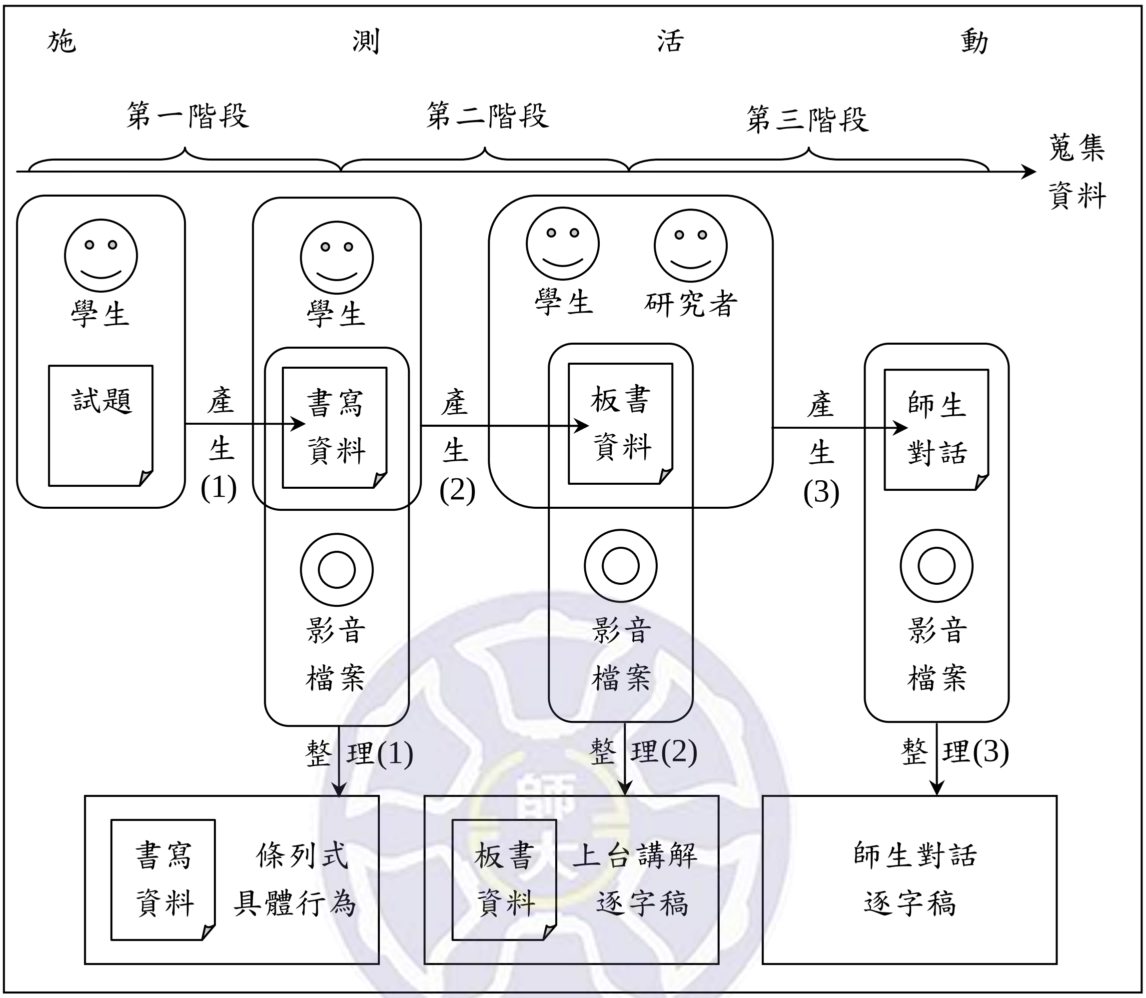


圖 3-6 蒐集資料與整理資料流程圖

由施測活動中所產生的靜態資料，搭配動態影音檔案可以整理出三類的整合性資料，說明如下：

(一) 書寫資料搭配條列式具體行為

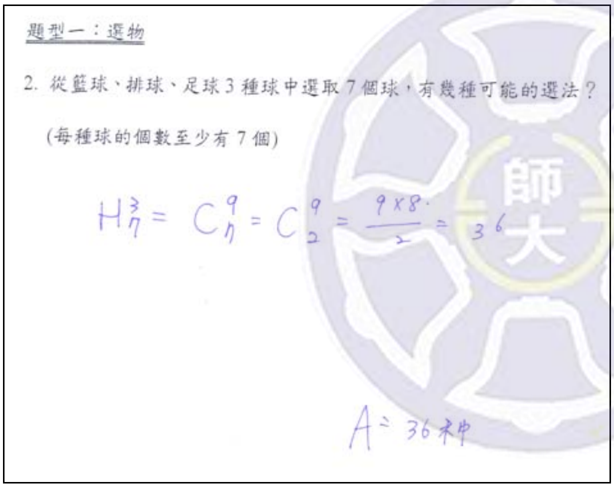
當學生主動向研究者示意說他已經完成所有題目的作答，書寫資料就完成了，見圖 3-6 產生(1)，第一階段的施測活動也隨之結束。緊接著研究者請學生上台講解他的想法，進入施測活動的第二階段。學生上台講解以後，就不會再更改書寫資料上面的任何記號，以「上台講解」這個時間點作為第一階段書寫資料，與第二階段板書資料的區隔。

蒐集學生的書寫資料並掃描建檔後，由於學生書寫的紙本資料是個靜態的資料，學生寫下任何註記的動態過程必須搭配影音檔案進行分析，見圖 3-6 中的整理(1)。研究者在分析資料的時候，就是看著學生的手稿，同時播放影音檔案，詳實記錄學生在第一階段的具體行為，並以 Skemp 的理論為基礎所編製的行為特徵，將學生在處理問題的過程中所產生的具體行為，對應 Skemp 理解架構裡的敘述，條列式整理學生的具體行為。

「書寫資料搭配條列式具體行為」資料示例如表 3-11。

表 3-11

S_{22} 第一階段書寫資料(左)搭配條列式具體行為(右)

 題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個) $H_7^3 = C_7^9 = C_2^9 = \frac{9\times8}{2} = 36$ A = 36 種	S_{22} 第一階段第 2 題具體行為： 1. 念完整個題目。 2. 口語推論：那就是把 7 個裡面塞進 3 個選項。 3. 念出括號中的條件：每種球的個數至少有 7 個。 4. 口語推論：那就是 H_7^3。 5. 寫下符號 H_7^3。 6. 轉換符號 $H_7^3 = C_7^9$。 7. 轉換符號 $C_7^9 = C_2^9$。 8. 計算 $\frac{9\times8}{2} = 36$。 9. 寫出答案「A：36 種」。

(二) 板書資料搭配講解逐字稿

第二階段學生上台講解時，他會拿著剛才第一階段的書寫資料，一邊看一邊講解，講解的過程除了有學生口頭上的想法，還有他寫在黑板上的板書資料，見圖 3-6 產生(2)。為了不干擾學生上台講解，研究者在

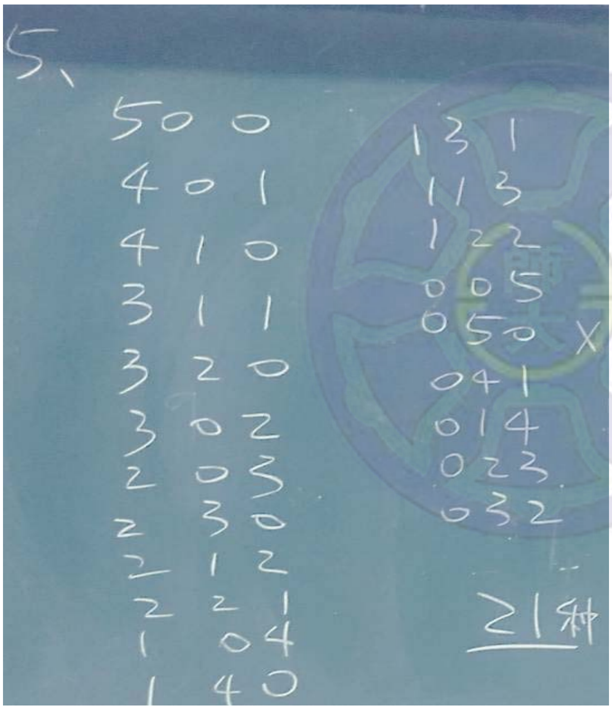
台下聆聽時只有移動攝影機的拍攝角度，沒有拿照相機拍照，也沒有跟學生對話，而板書資料為整理錄影檔案的螢幕截圖。

第二階段所蒐集的資料是透過學生上台講解，讓學生有再一次思考的時間與機會，並利用放聲思考(think aloud)的方式，蒐集學生對於題目的解讀、說明其解法、能夠修正錯誤，或無法修正錯誤等具體行為，並透過影音檔案整理學生講解逐字稿，見圖 3-6 整理(2)。

「板書資料搭配講解逐字稿」資料示例如表 3-12。

表 3-12

***S_{24}* 第二階段板書資料(左)搭配講解逐字稿(右)**

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>S_{24} 第二階段第 5 題講解逐字稿：
5 支相同的筆分給甲乙丙三個人，因為這個數字很少，所以就全部列出來，我來列唷。(邊列邊說數字，列到 055)我是以最左邊為基準，(修改 055 寫為 005，然後繼續列完)，這樣，總共有 21 種，這第五題。</td>
</tr>
</table>

(三) 師生對話逐字稿

第三階段時，研究者會針對前兩個階段觀察學生產生的行為，與學生進行交談，見圖 3-6 產生(3)。第三階段主要是讓研究者進行確認，依照學生於前兩個階段的施測活動，出現的各種行為進行提問，並根據學生的程度給予不同層級的提示，讓學生針對未完成的題目進行處理或說明。師生對話時，學生在講台上針對研究者的提問，有時候以口語回應，

有時候會寫板書回應，研究者透過影音檔案整理出師生對話逐字稿，見圖 3-6 整理(3)。

此階段研究者提問的三個目標如下：

1. 確認學生在處理問題過程中的具體行為。
2. 引導學生對於自己所處理的資料進行檢查、確認、修正等。
3. 提升學生對於「重複組合」的理解。

「師生對話逐字稿」資料示例如表 3-13。

表 3-13

第三階段師生對話逐字稿(取自 S_{22} 030528 第三階段)

3001	師：	好，你好優秀唷！真不愧是我們…高材生呵呵呵…
3002	S_{22}：	呵呵呵…
3003	師：	好，那我針對你的問題，來進行喔，我們從第一題開始。
3004	S_{22}：	好的。
3005	師：	好，去第一題那裡。嗯…我不太知道你「塞」的意思是什麼意思？
3006	S_{22}：	塞的意思就是說我把它這個東西塞進去啊，就是等於是…如果是從這邊出發的話就是變成是說，就是我要選東西，但是如果是…我按照…因為我是覺得就是用排列的方法會比較好去想啦，所以我就是說就是塞進去，就是排列的概念，把它重新排列，那它的那個數學概念就是排列出來的那個樣子，就是可能你塞的情況，就是代表你選取的情況，就是把這個東西塞進去，這是一種排列的…形容詞啦！呵呵呵…

註：表 3-13 中的流水編號是指每一個說話者開口講一段話，就會有一個「四個位元的編號」，從左邊數來第一位號碼代表的是在第幾階段出現的對話，剩下的右方三碼為對話出現順序，例如：逐字稿編號 3005 代表第三階段第 5 個出現的說話內容。

四、分析並撰寫論文

本研究分析資料的工具是「Skemp 理解架構」，這項工具的發展可詳見本章第三節。分析物件為「書寫資料」與「影音檔案」，如圖 3-7 所示，圖中「雙箭頭」指的是「分析資料的工具」與「蒐集的資料」之間的交互作用，達成「分析資料、提供證據、校正分析」三位一體。

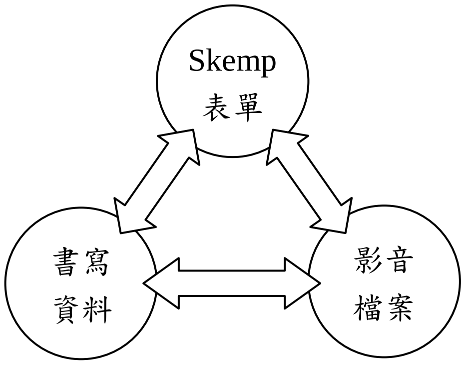


圖 3-7 「分析資料的工具」與「蒐集的資料」之間的交互作用

(一) 填寫 Skemp 理解架構中的具體行為

蒐集完學生的各種行為，研究者分析其符合 Skemp 理解架構中所敘述的行為特徵，在 Skemp 的理論敘述下，找尋符合其行為特徵的具體實例，所有研究結果將在第肆章裡有詳細的說明。

(二) 歸納學生具體行為形成理解基模

填寫 Skemp 理解架構的同時，研究者發現學生的這些行為之中，有明顯的個別化差異，每位學生在處理重複組合的題目時，由於他們對於重複組合的理解型式不同，會出現的行為大不相同，而 Skemp (1987) 第十三章提到的例子，僅敘述學生在做出某一項行為，屬於哪一個理解類別，沒有分析學生在處理問題時，會出現不只一項行為所歸納的基模分析。

(三) 分析學生理解狀況

因此研究者不僅蒐集資料完成 Skemp 理解架構，更試圖希望可以整合學生的具體行為形成理解基模，根據學生產生具體行為的特性，實際描述在重複組合的單元中，學生會產生哪些不同類型的理解基模，並分析不同屬性的學生使用理解基模的狀況為何。

第五節 研究可能的限制

本節說明第一部分為執行施測活動可能的限制，以及研究者所做的因應，盡可能降低這些限制所帶來的影響；第二部分為結論推廣的限制。

一、執行施測活動可能的限制

(一) 施測活動的第一階段

學生在第一階段處理問題時，研究者原先希望受測學生能依照題目的順序，從第1題寫到第8題，而前後題之間雖然有題型上的相關，但基本上研究者希望學生處理每一道問題的過程獨立，寫完之後就不再回去寫前面的問題。

有些學生寫到後面的問題，會翻回去前面的問題進行修改，這種舉動其實就顯示了這樣的學生啓用了他第二系統的修正(modify)功能，但是這樣的舉動並沒有在研究者原本的預期之中，所以在說明施測活動的規範時，沒有嚴格禁止學生不能翻回去前面的題目修改。

如果學生有這些行為，研究者會在第三個階段的提問，詢問學生為何有這樣回翻的動作，從而得知他是因為什麼原因而知道要翻回去前面的題目進行修正。

(二) 施測活動的第二階段

第二階段學生上台講解，由於研究者沒有事前訓練學生如何上台講解，因此找尋的十位學生都是研究者教過且熟識的學生，讓師生既有的信賴關係於施測期間發揮安撫的作用，當學生上台講解出現害羞或不擅於表達的情況，此時研究者就會口頭安撫他：「沒關係、慢慢講。」適時的鼓勵學生盡量講出處理問題的想法，而這種害羞或不擅於表達的情況，文組的學生出現的頻率較理組學生高。

(三) 施測活動的第三階段

第三階段進行師生對話，研究者主要是根據學生在受測期間出現的行為，從中詢問學生產生這些行為背後的原因，以及他們是如何想到這些想法的，學生經常出現計算上的小失誤，研究者也會提醒他們「要不要檢查一下？」讓他們啟動第二系統的修正功能，大部分的學生都有能力檢查出計算上的小失誤；另一方面，如果是學生有概念上的錯誤，當他們沒有辦法修正時，研究者就會給予不同層級的提示，引導學生處理問題。

二、結論推廣的限制

(一) 理解基模

本研究受測學生為研究者服務學校的十位高三學生(PR 值約 84)，可能仍有一些具體行為無法蒐集到，因此本研究的結論無法推測所有的高中生都能出現同樣的理解基模。

(二) 學生的理解狀況

同一個學生，在處理不同單元的問題，也有可能依照題目的敘述或呈現的方式，而有不同理解狀況的行為。因此本研究分析學生在「重複組合」這個單元使用理解基模的情況，但不代表該生在別的單元也是同樣的情形。

第肆章 研究結果與分析

本研究透過觀察學生在處理重複組合問題的過程中，蒐集學生產生的具體行為，以 Skemp 所提出的理解架構進行分析，來探討高中生對於重複組合的理解情形。本章共分為三節：第一節 Skemp 理解架構中的具體行為，第二節分析重複組合理解基模，第三節分析學生理解基模使用情形。

第一節 Skemp 理解架構中的具體行為

研究者整理 Skemp 所提出的理解交互作用表(表 1-2)，分析學生在處理重複組合問題的過程中，所產生的具體行為，將其對應到六大理解類別中符合的行為特徵的細項，各項行為特徵皆給出受測學生的具體行為，並說明如下。

一、類別 I1：工具式理解搭配直覺式心智活動

表 4-1

Skemp 理解架構類別 I1

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解型式與心智活動
模式產生的交互作用</td><td>理解型式</td></tr>
<tr><td>工具式理解 Instrumental understanding</td></tr>
<tr><td>心智
活動
模式</td><td>直覺模式</td><td><u>類別 I1</u>
在處理問題的過程中，學生
I1-1.能以機械式演算的方式給出答案
I1-2.能夠流暢且不假思索地執行一個適當已記憶的規則
I1-3.知道可以使用一個適當已記憶的規則，卻不知道這個規則如何操作
I1-4.使得已記憶的規則在遭遇不同情境時退化
I1-5.操作一些沒有聯結到題目概念的符號</td></tr>
</table>

表 4-1 具體行為、行為說明及其實例如下：

I1-1.能以機械式演算的方式給出答案

(一) 具體行為：

(1) 一一列舉可能的「所有情形」。

(2) 點數總數得到結果。

(3) 一一列舉可能的「基本情形」。

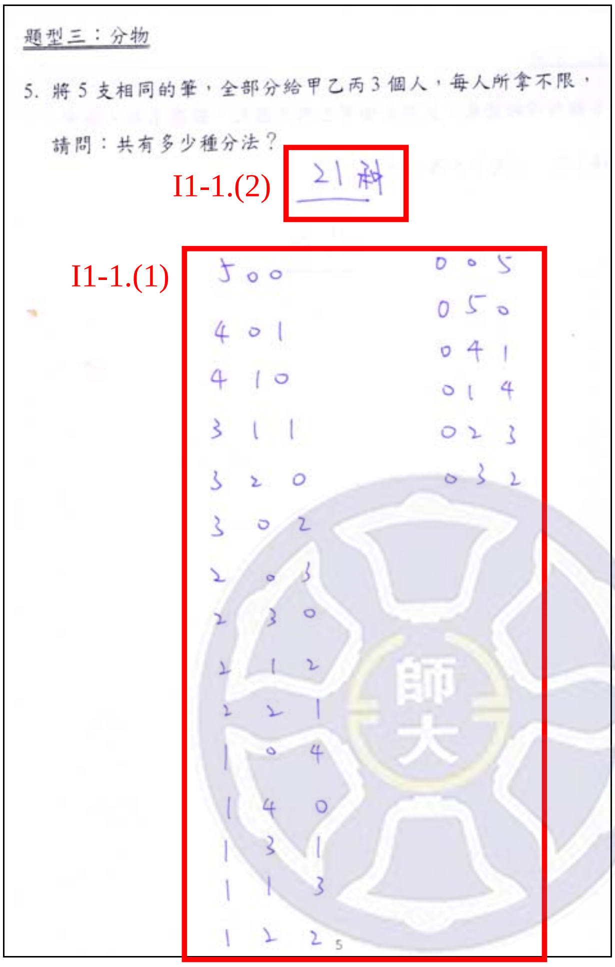
(4) 一一列舉可能的「異同情形」。

(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠依照題目給的條件一一列舉可能的「所有情形」。在列舉或計算的過程中若沒有列舉上的缺失，便能點數得到正確的答案；反之，如果列舉不完全或點數缺漏，便會得到錯誤的答案。參見實例 1、2。

(2) 學生會以一個一個點數的方式，計算他要算的總數，數完之後就會直接寫上結果，不會有四則運算的算式痕跡。通常這個行為會發生在學生列舉可能的「所有情形」之後。參見實例 1、2：

原始題目	題型三：分物 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？	學生代碼	備註
實例 1	題型三：分物 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？ (1). 2 1 I1-1.(1) 1 1 9 3 3 5 5 5 1 I1-1. (2) 3 種.	S_{14}	學生試圖將可能的「所有情形」，一一列舉出來，但因為對題目的理解並不正確，造成列舉不完全，最後點數得到總共 3 種的錯誤答案。

原始題目	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 2		S_{24}	該生將可能的「所有情形」一一列舉出來，過程中沒有列舉上的缺失，最後點數得到總共 21 種的正確答案。 這裡的列舉「所有情形」是指學生會把 500、050、005 都列出來，與列舉「基本情形」有所不同，詳見 I1-1.(3)說明。

(3) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠依照題目給的條件，一一列舉可能的「基本情形」。此處的「基本情形」，指的是學生在列舉的過程中，僅列出「500」這種基本情形，「500」所代表的其實是「500、050、005」這三種狀況，研究者稱「500」為「500、050、005」的「基本情形」，其交換排列數為 3；同理，「410」為「410、401、140、104、041、014」的「基本情形」，其交換排列數為 6。參見實例 3、4：

原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 3	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？ 4 1 0 . 6. 3 2 0 . 6. 2 2 1 . 3. 12 15	S_{25}	學生一一列舉可能的「基本情形」，但該生列舉基本情形不完全(少列舉基本情形 500、311)。

原始題目	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 4	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？ >1 x+y+z=5. 5 0 0 → 3 4 1 0 → 6 3 2 0 → 6 3 1 1 → 3 2 2 1 → 3	S_{13}	學生完整地列舉出可能的「基本情形」，沒有邏輯上的缺失。

(4) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠依照題目給的條件一一討論並列舉可能的「異同情形」。在討論的過程中若沒有列舉或計算上的缺失，便能得到正確的答案。參見實例 5：

原始題目	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 5	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ 3 → 5. 2同一異 → 20. 3異. → $C^5_3=10$. 35.	S_{13}	學生完整地討論並列舉出可能的「異同情形」，沒有邏輯上的缺失。

I1-2. 能夠流暢且不假思索地執行一個適當已記憶的規則

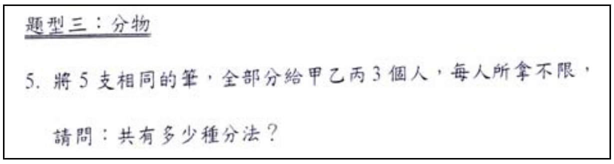
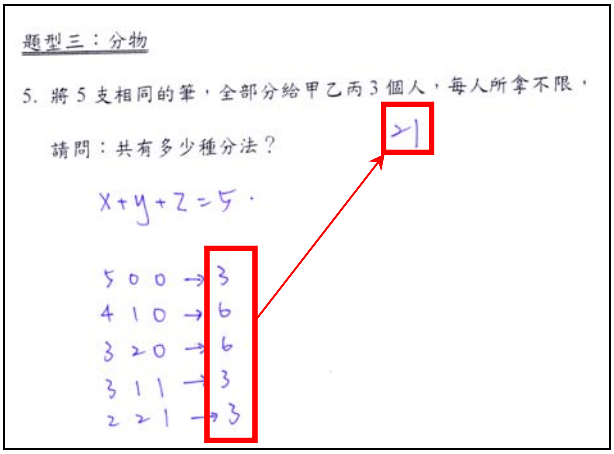
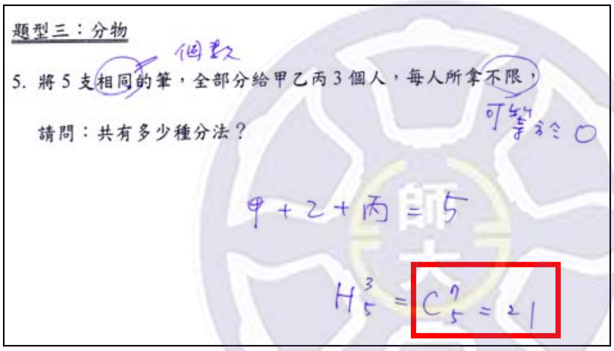
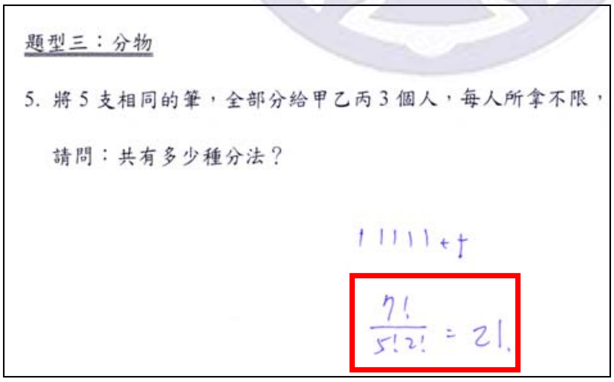
(一) 具體行為：

(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

(2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。

(二) 行為說明：

(1) 學生在求處理重複組合問題的過程中，能夠流暢且不假思索地使用已記憶的規則，計算符號所代表的數字，並寫出正確的答案。這裡的「流暢且不假思索」指的是 Skemp (1987)所說「自動的(automatic)」。「常規計算」包括：a. 加減乘除的四則運算、b. 計算 C_k^n、c. 計算 $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 。參見實例 6~8：

原始題目	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 6	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？ 21 x+y+z=5. 5 0 0 → 3 4 1 0 → 6 3 2 0 → 6 3 1 1 → 3 2 2 1 → 3	S_{13}	a. 加減乘除的四則運算： 學生將排列數加總，得到正確答案 21 種。
實例 7	 題型三：分物 個數 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？ 可等於 0 甲+乙+丙=5 $H^3_5 = C^7_5 = 21$	S_{21}	b. 計算 C^n_k： 學生在寫出符號 C^7_5 之後，沒有透過任何轉換就直接寫出答案 21。
實例 8	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？ 11111++ $\frac{7!}{5!2!} = 21$	S_{14}	c. 計算 $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$： 學生在寫出符號 $\dfrac{7!}{5!2!}$ 之後，沒有透過任何轉換就直接寫出答案 21。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠流暢且不假思索地使用已記憶的規則，轉換排列組合的符號與其相等的計算規則，並且沒有轉換上的失誤。在處理重複組合問題的過程中，可能會遇到的符號轉換規則如表 4-2 列舉。參見實例 9、10：

表 4-2

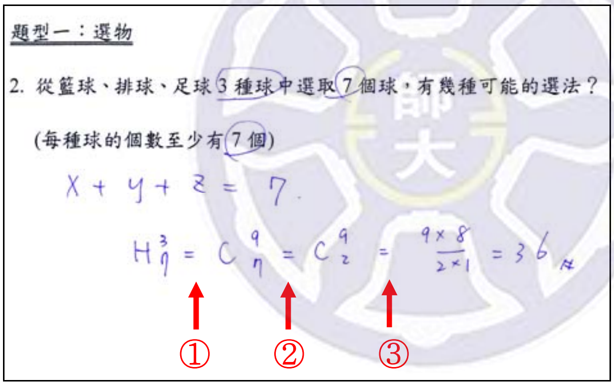
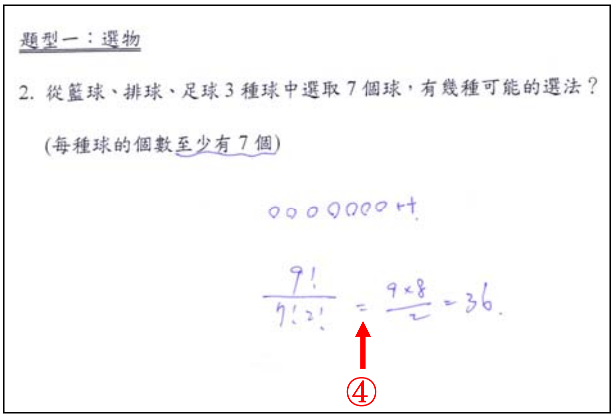
與重複組合相關的符號轉換規則

規則①：$H_k^n = C_k^{n+k-1}$。

規則②：$C_k^n = C_{n-k}^n$。

規則③：$C_k^n = \dfrac{n\times\ldots\times(n-k+1)}{k\times\ldots\times 1}$。

規則④：$\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}{k\times(k-1)\times\ldots\times 1}$。

<table>
<tr><td>原始題目</td><td>題型一：選物
2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？
(每種球的個數至少有 7 個)</td><td>學生
代碼</td><td>備註</td></tr>
<tr><td>實例 9</td><td>
題型一：選物
2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？
(每種球的個數至少有 7 個)
$x+y+z=7.$
$H_7^3 = C_7^9 = C_2^9 = \frac{9\times 8}{2\times 1} = 36$ #
① ② ③</td><td>S_{21}</td><td>學生流暢且不假思索地連續轉換：
規則① $H_7^3 = C_7^9$、
規則② $C_7^9 = C_2^9$、
規則③ $C_2^9 = \dfrac{9\times 8}{2\times 1}$。</td></tr>
<tr><td>實例 10</td><td>
題型一：選物
2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？
(每種球的個數至少有 7 個)
0000000++
$\frac{9!}{7!2!} = \frac{9\times 8}{2} = 36.$
④</td><td>S_{14}</td><td>學生流暢且不假思索地執行轉換：
規則④ $\dfrac{9!}{7!2!} = \dfrac{9\times 8}{2}$</td></tr>
</table>

I1-3. 知道可以使用一個適當已記憶的規則，卻不知道這個規則如何操作

(一) 具體行為：

(1) 以口語說出題目的敘述滿足使用重複組合的符號 H，卻不知道如何操作 H 。

(2) 依題目的條件寫下重複組合的符號 H_k^n ，卻不知道如何操作 H_k^n 。

(二) 行為說明：

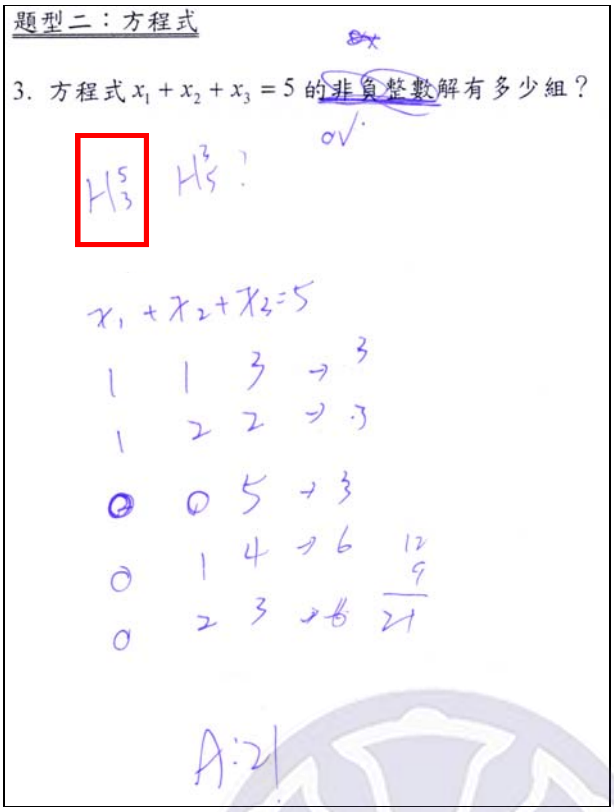
(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠根據題目的敘述，判斷能夠使用符號 H，以口語說出「這就是 H」或「這要用 H」等想法，但是卻無法繼續操作 H 。參見實例 11：

原始題目	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個)	學生代碼	備註
實例 11	S_{12} 第二階段第 2 題講解逐字稿： 就是三個人球加起來等於 7，所以就是【寫黑板：$x_1+x_2+x_3=7$】，可是這要用 H，可是我忘記 H 怎麼算了。 **(取自 S_{12} 030530 第二階段)**	S_{12}	學生在念完題目之後，寫下方程式 $x_1+x_2+x_3=7$，說出「這要用 H」，卻不知道如何操作 H。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，看完題目的敘述後，判斷能夠使用符號 H_k^n ，並寫出有關於 H_k^n 的符號，但是卻沒有辦法繼續操作符號 H_k^n 。參見實例 12：

原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註

實例 12



S_{15} 學生閱讀完題目後，能寫下符號 H^5_3，代表他知道可以用符號 H^n_k，但卻又隨即寫出 H^3_5，然後打了一個問號，顯示出他沒有辦法繼續操作符號 H^n_k，續見 I1-4(1)。

I1-4. 使得已記憶的規則在遭遇不同情境時退化(degenerate)

(一) 具體行為：

(1) 使用符號 H^n_k 時，無法確定 n,k 的擺放位置。

(2) 使用符號 H^n_k 時，n,k 的擺放位置上下顛倒。

(3) 使用規則轉換排列組合符號時產生錯誤。

(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，有使用符號 H^n_k，卻不知道或不確定符號 H^n_k 中 n,k 的擺放位置。在重複組合 H^n_k 的記號中，其符號與概念的聯結分析如下：

a. H 表示重複組合的記號，其中「重複」指的是「可重複」的概念，其中同時包括「可以重複」與「可以不重複」的狀況；「組合」代表著「不計順序，只管個數」的概念。

b. 重複組合的記號 H_k^n 中，n 聯結的概念在選物題型中為「可重複選取的種類」，在分物題型中為「可重複分配的種類」。

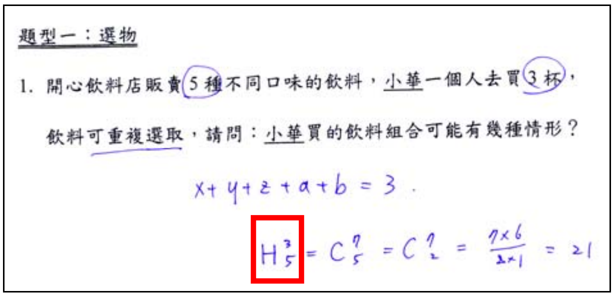
c. 重複組合的記號 H_k^n 中，k 聯結的概念在選物題型中為「要選取物品的個數」，在分物題型中為「待分配物品的個數」。

在重複組合的題目中，「種類」有「可重複選取」或「可重複分配」的特性，使得 n,k (n 代表種類、k 代表個數)沒有必然的大小關係，此與排列符號 P_k^n、組合符號 C_k^n 極為不同。在學生理解 P_k^n 與 C_k^n 的概念中，n,k 恆有 $n \geq k$ 必然的大小關係，但是如果學生只是把 $n \geq k$ 當作規則記憶，而無法對重複組合記號 H_k^n 的符號與概念聯結，容易使得學生已記憶的規則(P_k^n、C_k^n、H_k^n)產生混淆、混用或退化。參見實例 13：

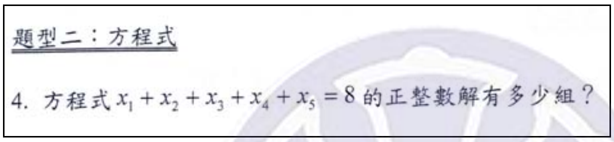
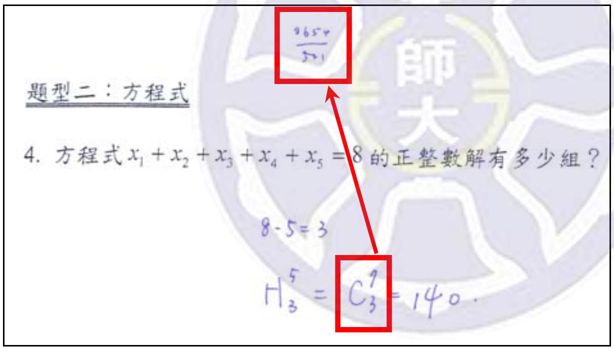
原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 13	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？ $\boxed{H_3^5 \quad H_5^3 \ ?}$	S_{15}	學生知道可以用符號 H_k^n，但是無法確定 H_3^5、H_5^3 之中應該使用哪一個符號處理問題。

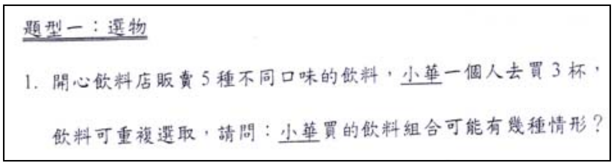
(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠使用符號 H_k^n，但是會將 n,k 的擺放位置上下顛倒，參見實例 14。

原始題目	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註

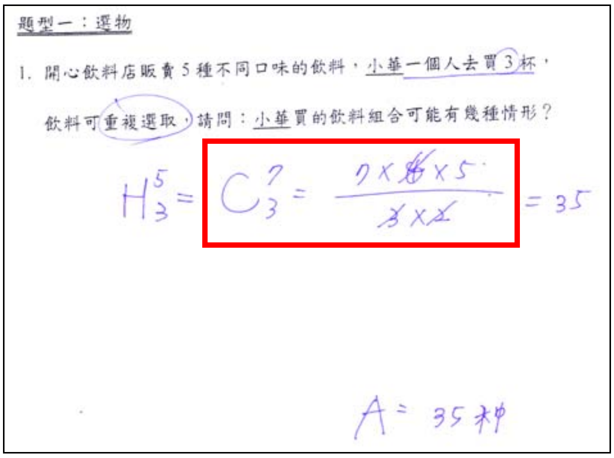
<table>
<tr><td>實例 14</td><td>
題型一：選物
1. 開心飲料店販賣5種不同口味的飲料，小華一個人去買3杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？
$x+y+z+a+b=3$.
$\boxed{H^3_5} = C^7_5 = C^7_2 = \frac{7\times6}{2\times1} = 21$</td><td>$S_{21}$</td><td>學生列出方程式之後，寫出符號 H_5^3，但是該生沒有察覺自己把 3,5 上下寫反，接續寫出錯誤的答案。</td></tr>
</table>

(3) 使用排列組合的符號處理問題時，學生在轉換符號的過程中產生錯誤的轉換結果，參見實例 15~17。

<table>
<tr><td>原始題目</td><td>
題型二：方程式
4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？</td><td>學生代碼</td><td>備註</td></tr>
<tr><td>實例 15</td><td>
$\boxed{\frac{7654}{321}}$
題型二：方程式
4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？
$8-5=3$
$H^5_3 = \boxed{C^7_3} = 140$.</td><td>$S_{23}$</td><td>學生使用規則③轉換符號 $C_3^7 = \dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}$ 進行計算時產生錯誤(多寫了一個 4)，而且無法察覺，接續得到錯誤的答案 140。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>原始題目</td><td>
題型一：選物
1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？</td><td>學生代碼</td><td>備註</td></tr>
</table>

實例 16


題型一：選物

1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？

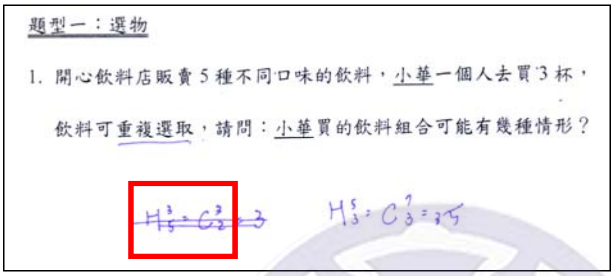
$H^5_3 = \boxed{C^7_3 = \frac{7\times\cancel{6}\times 5}{\cancel{3}\times\cancel{2}}} = 35$

A = 35種

S_{22}　學生使用規則③轉換符號，寫出 $C^7_3 = \dfrac{7\times 4}{}$ 的錯誤轉換。

該生隨後將其修正，續見 I2-1(2)。

實例 17


題型一：選物

1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？

$\boxed{\cancel{H^3_5 = C^3_2}}\cancel{=3}$　$H^5_3 = C^7_3 = 35$

S_{11}　學生使用規則①轉換符號 $H^3_5 = C^3_2$ 進行計算時產生錯誤。

該生隨後將其修正，續見 I2-1(3)。

I1-5. 操作一些沒有聯結到題目概念的符號

(一) 具體行為：

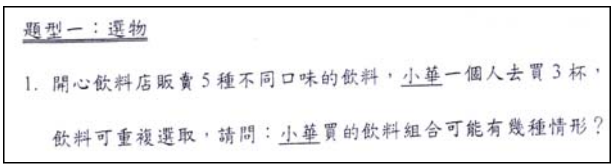
(1) 以「重複排列」的概念操作符號處理重複組合的問題。

(2) 以「組合」的概念操作符號處理重複組合的問題。

(3) 操作「重複組合」的符號，但是無法確實聯結到題目所指的概念。

(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，以「重複排列」的概念操作符號 $\underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{k個n}$ 或 n^k，產生錯誤的答案。參見實例 18、19：

原始題目		學生代碼	備註
	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？		

實例 18	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ $\boxed{5\cdot5\cdot5=125}$	S_{23}	學生看完題目後，使用「重複排列」的概念，寫下 $5\cdot5\cdot5=125$ 的錯誤答案。
實例 19	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ $\boxed{5^3=125.}$	S_{12}	學生看完題目後，使用「重複排列」的概念，寫下 $5^3=125$ 的錯誤答案。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，以「組合」的概念操作符號 C_k^n，產生錯誤的答案。參見實例 20：

原始題目	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 20	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？ $\boxed{C_3^5=10.}$	S_{11}	學生看完題目後，使用「組合」的概念，寫下 $C_3^5=10$ 的錯誤答案。

(3) 學生在處理重複組合問題的過程中，操作重複組合的符號 H_k^n，但是對於 n,k 做了一些數字運算的操作，其操作的內容與題目的概念無法聯結，而產生錯誤的答案。參見實例 21：

原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 21	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？ $\cancel{H^5_{3-1} = H^5_2 = C^5_1 = 5}$ $\boxed{H^5_{3-1}} = H^5_2 = C^6_2 = 15.$	S_{11}	學生看完題目後，使用「H^5_3」的符號，但是卻在 3 的地方減 1，無法與題目敘述「非負整數解」的概念有正確的聯結，因而產生錯誤的答案。

二、類別 R1：關聯式理解搭配直覺式心智活動

表 4-3

Skemp 理解架構類別 R1

理解型式與心智活動 模式產生的交互作用		理解型式 關聯式理解 Relational understanding
心智活動模式	直覺模式	**類別 R1** 在處理問題的過程中，學生 R1-1. 能夠確定對於題目的一些感知 R1-2. 能夠掌握題目的意義、特性或結構 R1-3. 能夠將來自外在環境的訊息，直接同化到一個適當的基模中 R1-4. 輸入訊息後啟動不適當的想法

表 4-3 具體行為、行為說明及其實例如下：

R1-1. 能夠確定對於題目的一些感知

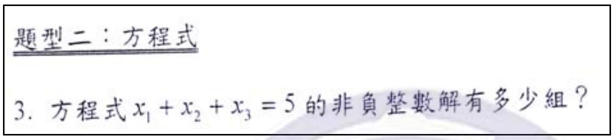
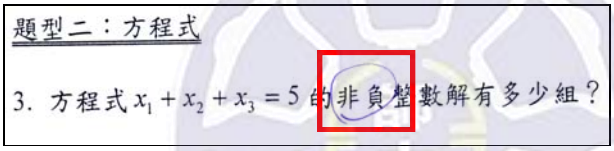
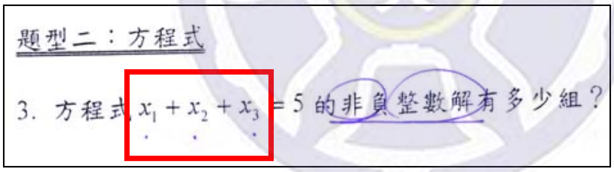
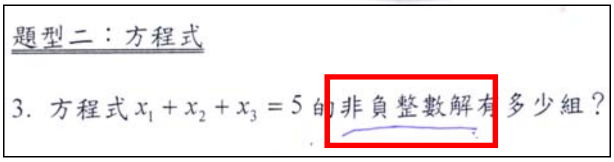
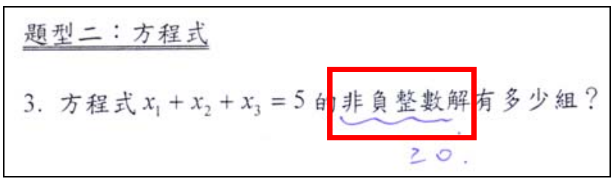
(一) 具體行為：

(1) 以書寫方式標記關鍵條件。

(2) 以口語強調關鍵條件。

(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，會以書寫方式標記他認為題目的關鍵文字或數字，標記關鍵條件的方式有：a. 圈選、b. 打點、c. 畫底線、d. 畫波浪線。參見實例 22~25：

原始題目	 題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 22	 題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	S_{21}	a. 圈選標記關鍵條件。
實例 23	 題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	S_{22}	b. 打點標記關鍵條件。
實例 24	 題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	S_{11}	c. 畫底線標記關鍵條件。
實例 25	 題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？ 20.	S_{14}	d. 畫波浪線標記關鍵條件。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，會以口語方式強調題目的關鍵文字或數字，強調方式有：a.念出關鍵文字或數字、b.加強語氣念出關鍵文字或數字、c.重複念出關鍵文字或數字。這裡的「念」指的是學生有發出聲音的閱讀，而非只有用眼睛「看」的閱讀。參見實例 26、27：

原始題目	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 26	S_{22} 第一階段第 1 題具體行為： 1. 念出關鍵字：5 種。 2. 標記關鍵條件：文字類打圈。 3. 念出關鍵字：可以重複選取。 4. 念出關鍵字：一個人去買 3 杯。 **(取自 S_{22} 030528 第一階段)**	S_{22}	a. 念出關鍵字：學生在閱讀題目時，並非念出全部的題目敘述，而是僅將題目敘述中的關鍵字念出聲音來。

原始題目	題型二：方程式 4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 27	S_{22} 第一階段第 4 題具體行為： 1. 念出整個題目。 2. 加強語氣念出關鍵字：正整數解。 3. 口語推論：那就是用剛剛(第 3 題)的方法，減掉有零的。 4. 拋出問題：有零的這樣好不好減？ 5. 口語推論：好像不太好減，會有很多組。 6. 重複念出關鍵字：正整數解有多少組？ **(取自 S_{22} 030528 第一階段)**	S_{22}	b. 加強語氣：學生在閱讀題目時，會將題目全部念出聲音來，並且會在關鍵字上特別加強語氣念出聲音。 c. 重複念出關鍵字：學生重複念出題目的關鍵字，代表學生重複關注了某一個關鍵條件。

R1-2. 能夠掌握題目的意義、特性或結構

(一) 具體行為：

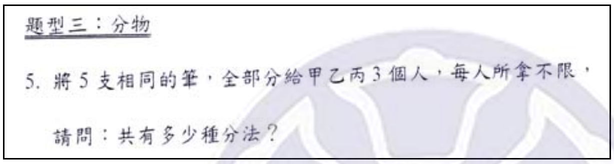
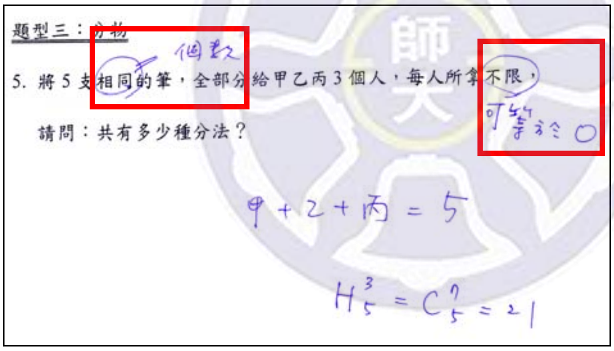
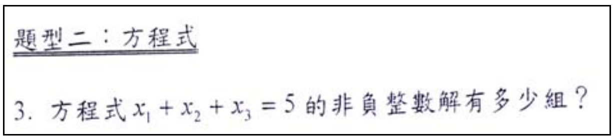
(1) 以數學符號加注或文字加注，寫下題目關鍵字所代表的意義或特性。

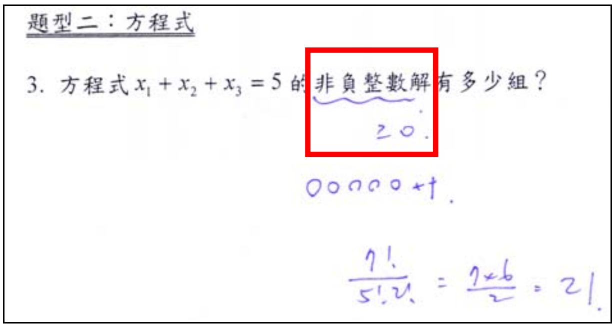
(2) 以口語方式加注，說出題目關鍵字所代表的意義或特性。

(3) 能掌握題目的結構，寫出一個符合題目敘述的方程式。

(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，能掌握題目關鍵字所代表的意義或特性，在題目關鍵條件附近寫下自己所領會的註解。加注的方式有二：a. 文字加注、b. 數學符號加注。參見實例 28、29：

原始題目	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 28	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？ 個數 可等於0 甲+乙+丙=5 $H^3_5 = C^7_5 = 21$	S_{21}	a. 文字加注： 學生能掌握題目中「相同」的特性，在「相同」附近寫下「個數」的文字註解；該生亦掌握了「不限」的特性，在「不限」附近寫下「可等於 0」的文字註解。
原始題目	 題型二：方程式 3. 方程式 $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註

實例 29	 題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？ ≥0. ○○○○○++. $\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\times 6}{2}=21$.	S_{14}	b. 數學符號加注：學生掌握「非負整數解」的意義，在「非負整數解」附近寫下「≥0」的數學符號註解。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，能以口語的方式說出題目中的關鍵文字所代表的意義或特性，把題目的敘述「換句話說」，研究者將學生在處理重複組合問題的過程中所掌握關鍵字的意義或特性，整理如表 4-4。參見實例 30：

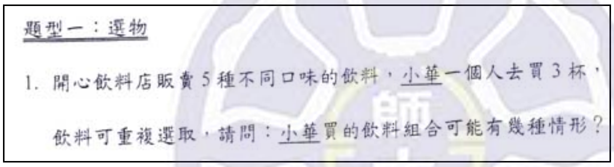
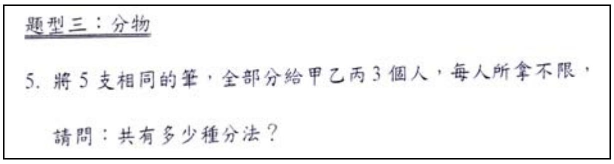
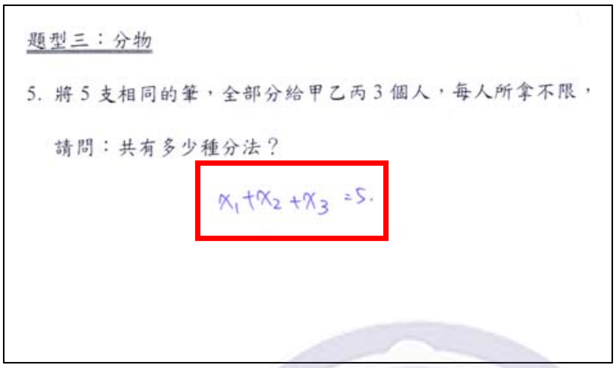
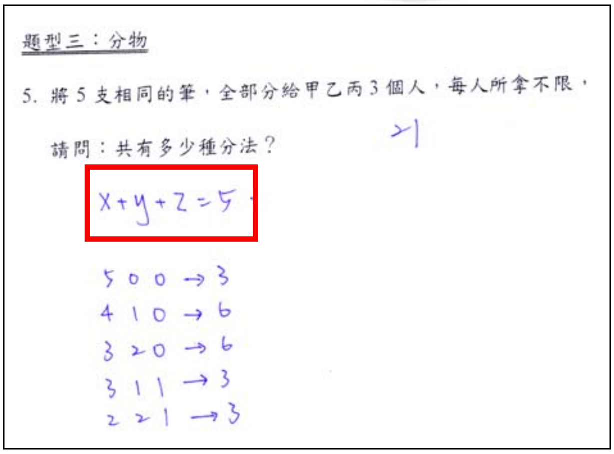
原始題目	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 30	S_{22} 第二階段第 1 題講解逐字稿： 第一個，因為開心飲料店販賣五種不同口味，所以就是它有分五種，然後呢…小華一個人要去買三杯，飲料可重複選取也就是說它沒有任何的限制，沒有任何限制，然後所以我們就可以直接用 *H*… **(取自 S_{22} 030528 第二階段)**	S_{22}	口語加注：學生在講解題目時，能夠掌握題目關鍵條件「可重複選取」的特性，說出其代表著「它沒有任何的限制」的口語註解。

表 4-4

掌握題目關鍵字意義、特性或結構的口語對照表

題號	題目文字敘述	口語對應的意義、特性或結構
1.	可重複選取	(1) 意義：沒有任何限制 (2) 特性：可以有東西是 0 (3) 結構：可以直接用 H
	5 種口味	意義：有 5 種不同的東西可以選
2.	3 種球	意義：有 3 種不同的東西可以選
	每種球至少有 7 個	特性：可以沒有限制地排列、可以沒有限制地選取
3.	方程式	結構：它只是換了一個方式、塞東西不可以塞負的
	x_1、x_2、x_3	意義：有三種不同的地方可以塞東西
	非負整數	(1) 意義：一定要是整數 (2) 特性：只要不是負數就好了、可以等於 0
4.	正整數	(1) 意義：一定至少要大於等於 1 (2) 特性：可以各給他們一個
5.	甲、乙、丙	意義：有三種不同的東西
	相同	特性：就可以不用理它
	分給	結構：塞東西進去
	每人所拿不限	(1) 意義：沒有限制 (2) 特性：可以大於等於 0、可以有人沒有拿到 (3) 結構：可以用 H
6.	每人至少分得一顆	意義：每個人各一顆
7.	都要有雞蛋	意義：都先給你一顆雞蛋
8.	H	(1) 意義：可以重複選取 (2) 特性：有人可以不要拿到

(3) 學生在處理重複組合問題的過程中，能了解題目的整體結構，寫下一個符合題目的方程式。參見實例 31、32：

原始題目	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 31	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？ $\boxed{x_1+x_2+x_3=5.}$	S_{12}	學生能依照題目敘述列出一個方程式 $x_1+x_2+x_3=5$，但接著不會寫。 該生於第三階段表示她知道能用列舉的方式處理，但是覺得太麻煩了，所以就沒有繼續操作。
實例 32	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？ >1 $\boxed{x+y+z=5.}$ 5 0 0 → 3 4 1 0 → 6 3 2 0 → 6 3 1 1 → 3 2 2 1 → 3	S_{13}	學生能依照題目敘述列出方程式 $x+y+z=5$，接續使用「列舉討論的理解基模」，見 R1-3(1)。

R1-3. 能夠將來自外在環境的訊息，直接同化到一個適當的基模中

(一) 具體行為：

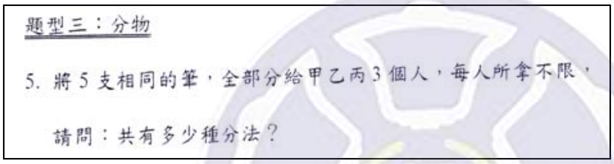
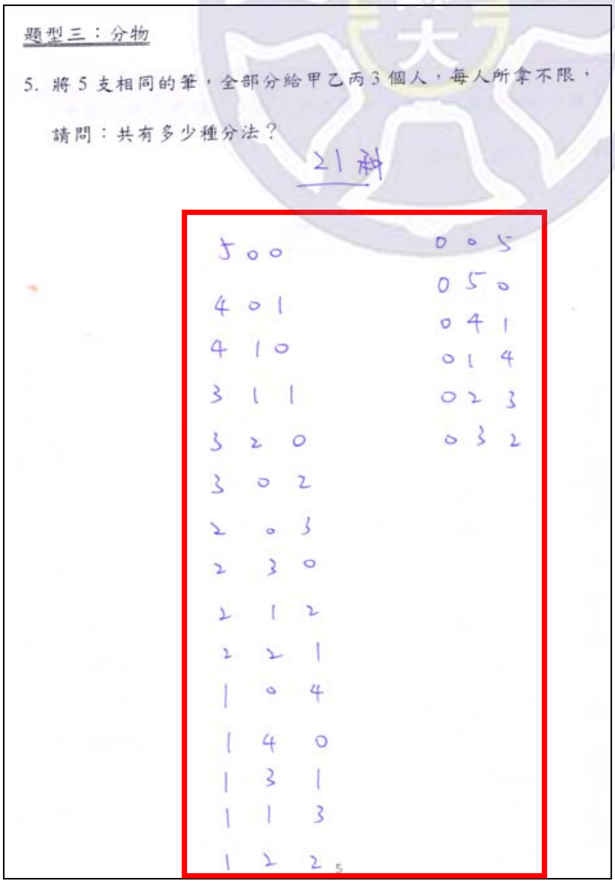
(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。

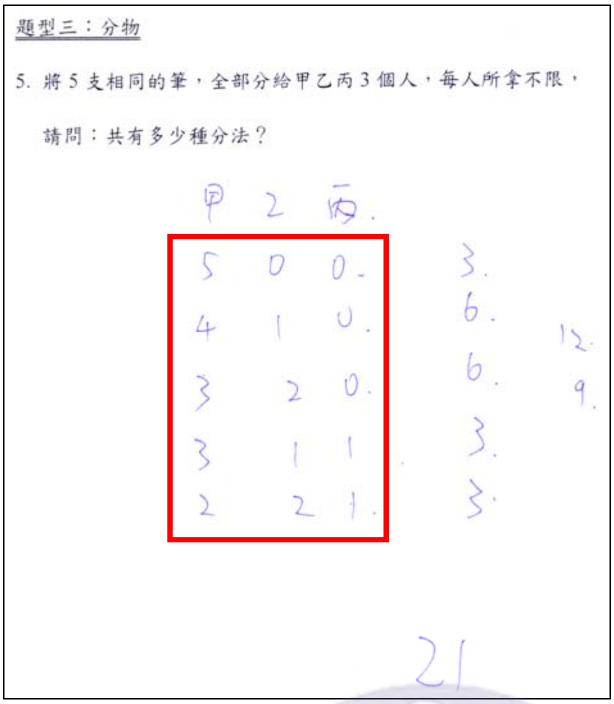
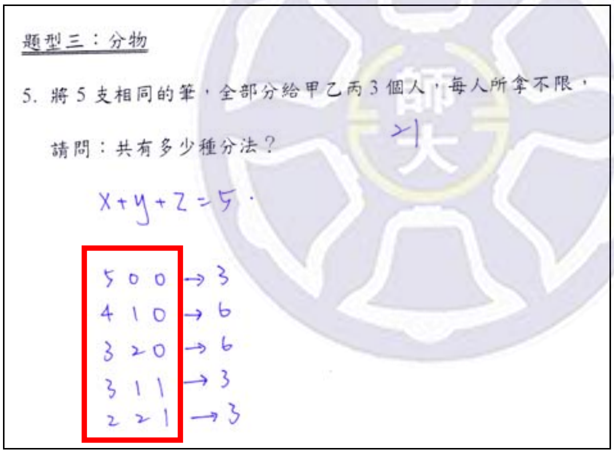
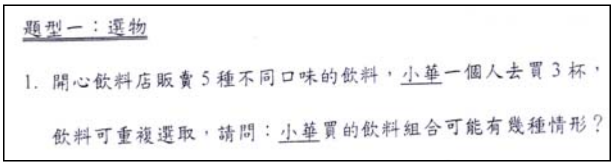
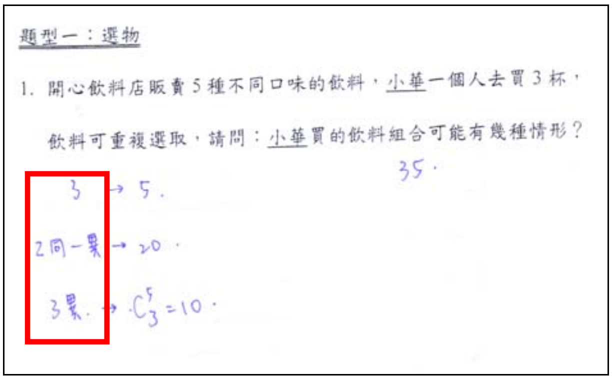
(2) 將題目同化到有相同物的理解基模。

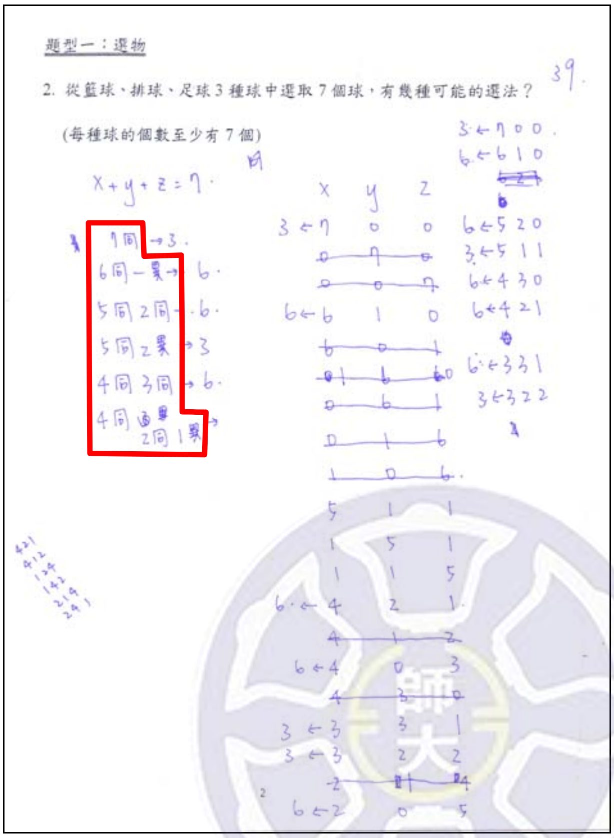
(3) 將題目同化到符號 H_k^n 的理解基模。

(二) 行為說明：

(1) 學生看完題目的敘述之後，將題目同化到「列舉討論的理解基模」而得到答案。「列舉討論的理解基模」有三種：a. 列舉所有情形、b. 列舉基本情形、c. 討論異同情形。參見實例 33~37：

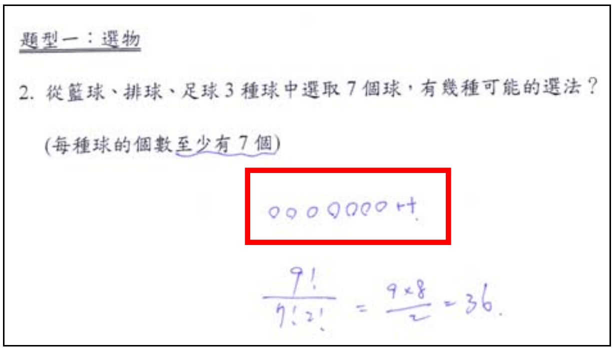
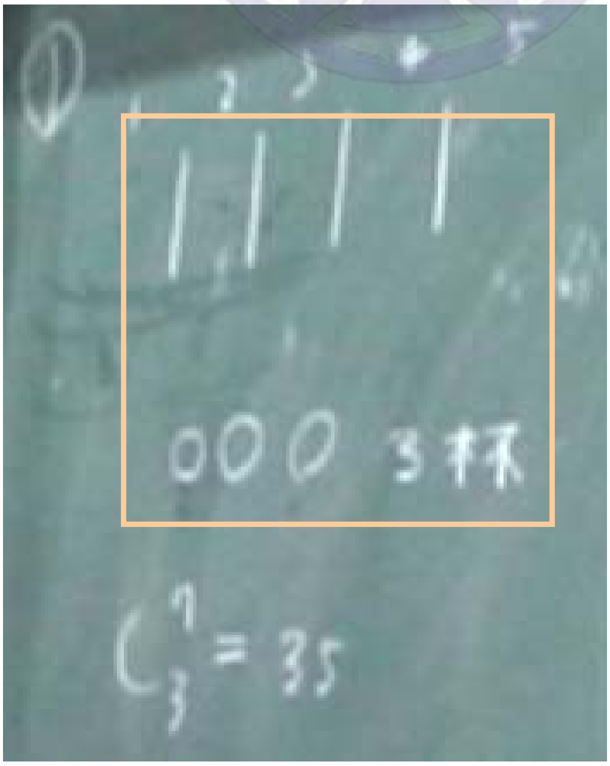
原始題目	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 33	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？ 21種 500 005 401 050 410 041 311 014 320 023 302 032 203 230 212 221 104 140 131 113 122	S_{24}	a. 列舉所有情形：學生在看完題目後，沒有寫出方程式或其他註解，直接將符合題目條件所有的「可能情形」一一列舉後，點數得到正確的答案。

實例 34	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？ 	S_{25}	b. 列舉基本情形： 學生在看完題目後，列舉所有的基本情形，並加總排列數得到正確的答案。 透過第三階段的師生對話得知，該生在寫重複組合題目時，習慣直接以具體分配物品的想法，不喜歡想成方程式。
實例 35	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？ 	S_{13}	b. 列舉基本情形： 學生列出方程式 $x+y+z=5$ 後，將題目同化成列舉基本情形的理解基模。
原始題目	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯， 飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 36	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯， 飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ 	S_{13}	c. 討論異同情形： 學生看完題目後，直接討論 3 杯飲料的口味相同與相異的異同情形。

原始題目	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個)	學生代碼	備註
實例 37		S_{13}	c. 討論異同情形：學生列出方程式 $x+y+z=7$ 後，討論 3 杯飲料的口味相同與相異的異同情形。 當列舉到「4 同 2 同 1 異」的異同情形，由於情況過於複雜，該生無法再繼續討論。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，將題目敘述同化到有相同物直線排列的理解基模，他會畫出兩類相同物，第一類是 k 個○代表「要選取或待分配物品的個數」，第二類是畫出 n-1 個「+或｜代表分隔出 n 個種類」。分析完題目之後，學生選取的工具有兩種：a. 有相同物的直線排列數 $\dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$、b. 組合數 C_k^{n+k-1}。參見實例 38、39：

原始題目	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個)	學生代碼	備註

<table>
<tr><td>實例 38</td><td>
題型一：選物
2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？
(每種球的個數至少有 7 個)
○○○○○○○++
$\frac{9!}{7!2!}=\frac{9\times 8}{2}=36.$</td><td>$S_{14}$</td><td>a. 有相同物的直線排列數 $\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$：
學生讀完題目後，畫出 7 個○代表題目敘述中的「7 個球」，接著畫出 2 個+代表分隔出題目敘述的「3 種球」，再利用有相同物的直線排列數處理。</td></tr>
<tr><td>原始題目</td><td>題型一：選物
1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？</td><td>學生代碼</td><td>備註</td></tr>
<tr><td>實例 39</td><td>
</td><td>S_{22}</td><td>b. 組合數 C_k^{k+n-1}：
學生讀完題目後，畫出 4 個｜代表分隔出題目敘述的「5 種」，畫出 3 個○代表題目敘述中的「3 杯」，接著再利用組合數處理。</td></tr>
</table>

(3) 學生在讀題的過程中，掌握了題目敘述的意義、特性與結構後，將題目敘述同化成能夠使用符號 H_k^n 的理解基模，並利用符號 H_k^n 處理問題。參見實例 40、41：

原始題目	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個)	學生代碼	備註
實例 40	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個) $\boxed{H_7^3} = C_7^9 = 36.$	S_{23}	學生讀題後，將題目同化到直接使用符號 H_k^n 的理解基模。
實例 41	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個) $X + y + z = 7.$ $\boxed{H_7^3} = C_7^9 = C_2^9 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36_{\#}$	S_{21}	學生先列出方程式 $x+y+z=7$，再將題目同化到使用符號 H_k^n 的理解基模之中。

R1-4. 輸入訊息後啟動不適當的想法

(一) 具體行為：

(1) 學生看過重複組合題目後，使用「重複排列」的概念處理問題。

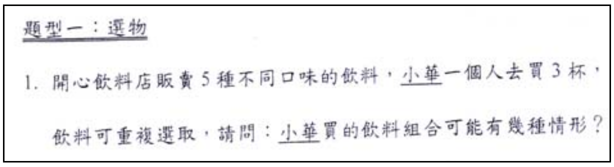
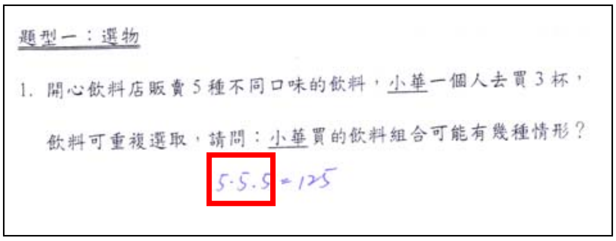
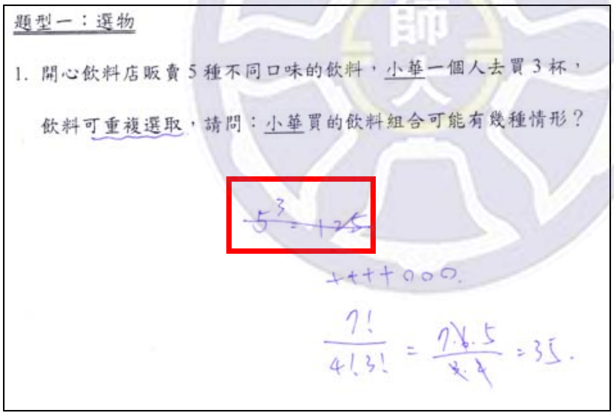
(2) 學生看過重複組合題目後，使用「組合」的概念處理問題。

(3) 學生看過重複組合題目後，使用第一個想法處理問題，若經執行或思考而產生第二個想法，則第一個想法即為學生啟動的不適當想法。

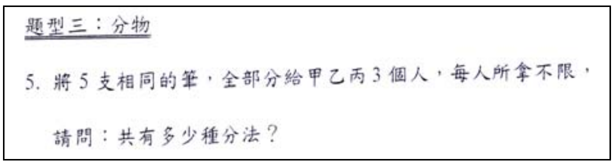
(二) 行為說明：

(1) 學生在看過重複組合的題目後，使用重複排列的概念處理問題，由於其想法無法對應題目所指的概念，即可視為學生在輸入訊息之後，啟

動了不適當的想法，使用錯誤的基模，得到錯誤的答案。參見實例 42、43：

原始題目		學生代碼	備註
原始題目	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 42	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ $\boxed{5\cdot5\cdot5}=125$	S_{23}	學生認為飲料可重複選取，使用「重複排列」的概念處理問題，題目要算的是購買「組合」有幾種，不需要「排列」。
實例 43	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ $\boxed{\cancel{5^3=125}}$ ++++OOO. $\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}=35.$	S_{23}	學生一開始使用重複排列的錯誤想法處理問題，得到錯誤的答案。 該生經過思考後，修正此錯誤的想法，續見 R2-5(1)。

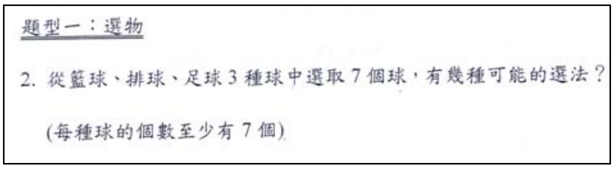
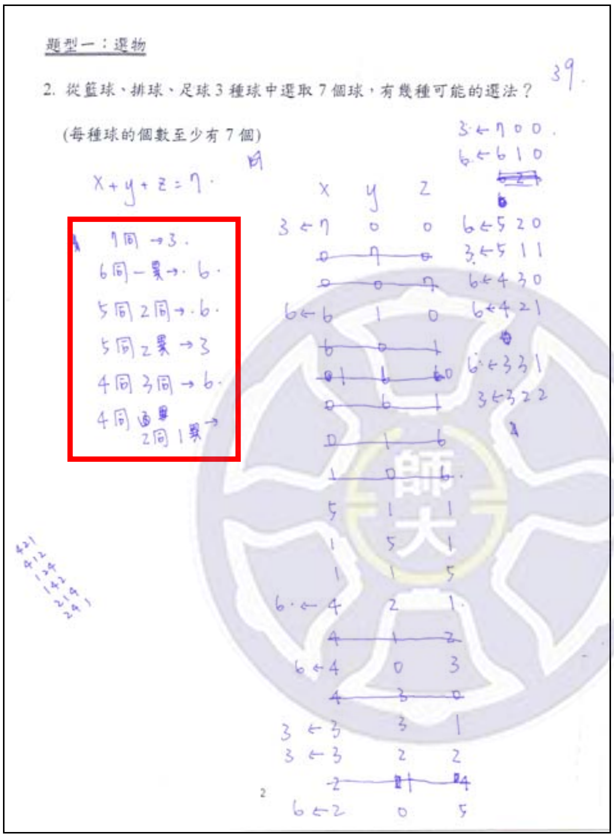
(2) 學生在看過重複組合的題目後，決定使用組合 C_k^n 的概念處理問題，由於其想法無法對應題目所指的概念，即可視為學生在輸入訊息之後，啟動了不適當想法，使用錯誤的基模，得到錯誤的答案。參見實例 44：

原始題目		學生代碼	備註
原始題目	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註

實例 44	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？ $\boxed{C_3^5}$ 10.	S_{11}	學生使用「組合」的概念處理問題，無法對應題目所指的概念，因而得到錯誤的答案。

(3) 學生在看過重複組合題目後，產生了「第一個想法」處理問題，若在執行過程中產生困難，或經過再次思考而改變想法，產生了「第二個想法」，則他原先的「第一個想法」即稱之為由直覺啟動不適當的想法。有別於前兩點的「不適當的想法」是啟動錯誤的基模，這裡的「不適當的想法」是啟動正確可執行的基模，適當與否是由學生的具體行為來決定，若學生沒有改變想法而執行想法，就不是「不適當的想法」；若學生在執行想法前或執行想法後改變了想法，則他一開始的想法即為「不適當的想法」。參見實例 45、46：

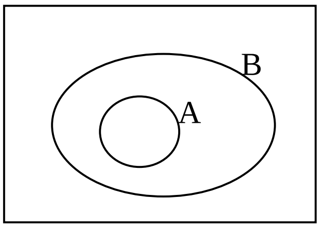
原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 45	S_{22} 第一階段第 3 題具體行為： (1~6 省略) 7. 標記關鍵條件：在「x_1、x_2、x_3」下方打點。 8. $\boxed{\text{啟動想法：先來個土法煉鋼(笑)。}}$ 9. 領會題意：3 個加起來等於 5。 10. 啟動想法：那就是把 5 個塞進 3 個裡面。 11. 寫下符號 H_5^3 。 **(取自 S_{22} 030528 第一階段)**	S_{22}	學生在看到重複組合的題目後，產生第一個想法「土法煉鋼」即為「列舉討論的理解基模」，但經過重新思考，改用「使用符號 H_k^n 的理解基模」。則她第一個想

			法「土法煉鋼」即為「不適當的想法」。
原始題目	 題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個)	學生代碼	備註
實例 46		S_{13}	學生在看完題目之後寫出一個方程式，以這個方程式啟動了「討論異同的理解基模」，在討論異同的過程之中，發現討論的狀況越來越複雜，當討論到「4 同 2 同 1 異」的時候，該生改用數字列舉「所有情形」。則一開始「討論異同」的想法就是「不適當的想法」。

研究者結合了兩個向度「想法的適當性」與「基模的正確性」，分析學生使用的理解基模，如表 4-5。

表 4-5

想法與理解基模的交互作用表

<table>
<tr><td colspan="3">

集合說明
A：Appropriate idea(適切的想法)
B：Bingo schema(正確的基模)</td></tr>
<tr><td>想法與理解基模的交互作用</td><td>正確的理解基模
B</td><td>錯誤的理解基模
~B</td></tr>
<tr><td>適當的想法
A</td><td>學生看過題目後，產生符合題意且適當的想法，並依照這個想法啟動了正確的理解基模，進而求出正確答案。</td><td>ϕ
(適當的想法必然啟動正確的理解基模；錯誤的基模必然由不適當的想法啟動。)</td></tr>
<tr><td>不適當的想法
~A</td><td>學生看過題目後，產生符合題意的想法，並依照這個想法產生正確的理解基模，但是當他察覺到這個想法所執行的理解基模有執行上的困難或無法執行，即使是正確的理解基模，這個想法對該生而言便是不適當的想法。
若學生思考層次僅能停留在 Δ_1，則不會改變想法；若學生思考層次能到達 Δ_2，其後將伴隨著再次分析而改變的想法，啟動另一個正確的理解基模。</td><td>學生看過題目後，產生不符合題意且不適當的想法，並依照這個想法啟動了錯誤的理解基模，進而得到錯誤答案。
學生常因分析不足或判斷錯誤產生不切合題意的想法，若學生思考層次僅能停留在 Δ_1，將執行錯誤的理解基模，因而求出錯誤的答案；若學生思考層次能到達 Δ_2，其後將伴隨著再次分析而修正的想法，啟動正確的理解基模。</td></tr>
</table>

三、類別 L1：邏輯式理解搭配直覺式心智活動

表 4-6

Skemp 理解架構類別 L1

理解型式與心智活動 模式產生的交互作用		理解型式 邏輯式理解 Logical understanding
心智 活動 模式	直覺模式	**<u>類別 L1</u>** 在處理問題的過程中，學生 L1-1. 能夠察覺題目敘述中的怪異處 L1-2. 能夠針對題目的敘述給出一些推論 L1-3. 透過一個例子來說明他的推論

表 4-6 具體行為、行為說明及其實例如下：

L1-1. 能夠察覺題目敘述中的怪異處

(一) 具體行為：

(1) 能夠察覺題目敘述中的特殊條件或限制。

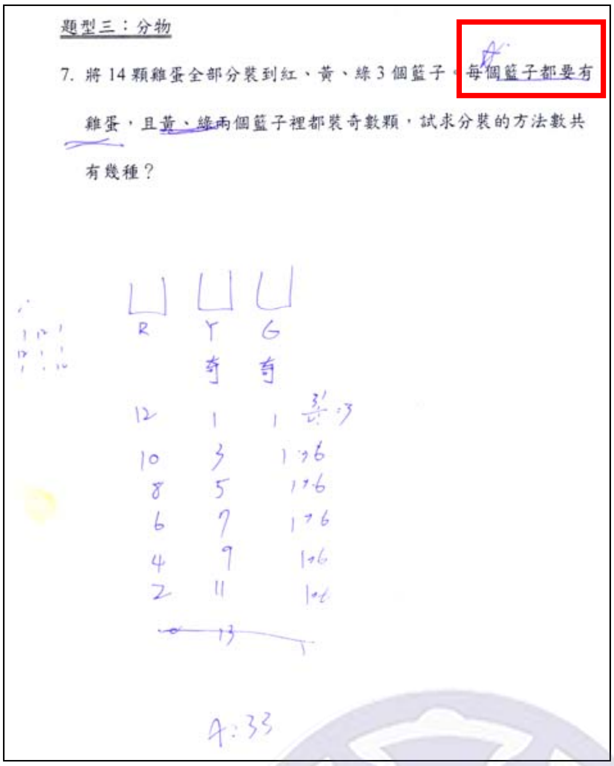
(2) 發出一些聲音顯示他察覺到怪異處。

(3) 針對題目的敘述拋出問題。

(二) 行為說明

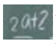
(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠察覺題目敘述中的特殊條件或限制，以書寫的方式標記或以口語的方式說出這些條件。參見實例 47、48：

原始題目	<u>題型三：分物</u> 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？	學生 代碼	備註

實例 47		S_{15}	學生知道這個題目中有一個條件限制是「每個籃子都要有雞蛋」，在看完題目後，以書寫的方式將這個特殊條件打一顆星星作標記。
原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 48	S_{22} 第二階段第 3 題講解逐字稿： 三…方程式…嗯，它只是換了個方式，$x_1+x_2+x_3$ 等於 5 的非負整數解，所以它現在有一個限制是非負整數，但是只要解讀它應該就是還好，反正就是有三種不同的地方，可以塞東西 **(取自 S_{22} 030528 第二階段)**	S_{22}	學生知道這個題目中有一個條件限制是解須為「非負整數」，在看完題目後，以口語的方式說出這個特殊條件。

(2) 學生在講解的過程中，會發出聲音像是「咦？」、「哦？」、「可是…」、「等等…」、「我想想看喔！」、「好奇怪？」、「怎麼講咧？」，表示他察覺到某些怪異處，思考幾秒鐘之後會說出一些推論。參見實例 49：

原始題目	題型三：分物 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？	學生代碼	備註

實例 49	S_{21} 第二階段第 7 題講解逐字稿： …然後之後就是去看 $a\ b\ c$ 的可能性，可是…咦…(停頓 9 秒)喔，然後還有黃綠是奇數顆，那加起來是偶數，那這個 14 是偶數所以紅一定這樣子加起來紅一定也是偶數，所以才設 $2a$，可是咦…(停頓 10 秒)，因為還要扣掉是有一個情況是紅一定也要拿至少拿到兩顆，所以當 a 等於零的時候【寫黑板：】紅至少要等於兩個… **(取自 S_{21} 030528 第二階段)**	S_{21}	學生在講解的過程中，會發出一些聲音像是「可是…」、「咦」等，顯示他在思考自己察覺到奇怪的地方，之後伴隨著她思考後的推論。

(3) 學生在處理重複組合問題的過程中，會對於題目的敘述或是自己處理問題的過程拋出問題，幫助自己弄懂題目的條件或是思考自己的想法。參見實例 50：

原始題目	題型二：方程式 4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 50	S_{22} 第一階段第 4 題具體行為： 1. 念出整個題目。 2. 加強語氣念出關鍵字：正整數解。 3. 啟動想法：那就是用剛剛(第 3 題)的方法，減掉有零的。 4. 拋出問題：有零的這樣好不好減？ 5. 口語推論：好像不太好減，會有很多組。 6. 重複念出關鍵字：正整數解有多少組？ 7. 口語推論：啊！那就先各給他們一個。 8. 點數未知數的個數：1,2,3,4,5。 **(取自 S_{22} 030528 第一階段)**	S_{22}	學生在處理問題的過程中，會自己發問問題，透過這些問題來幫助自己思考題意或確認想法。

L1-2. 能夠針對題目的敘述給出一些推論

(一) 具體行為：

(1) 以口語方式對題目的敘述作出一些推論。

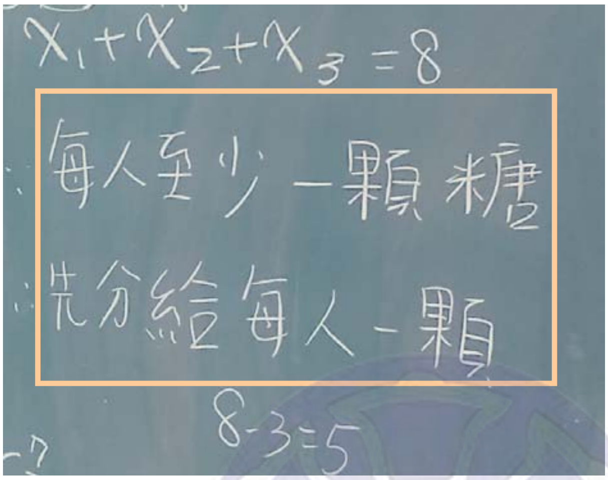
(2) 以書寫方式對題目的敘述作出一些推論。

(二) 行為說明

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠針對題目的敘述或條件，作出「如果…，就…」的推論，或是「因為…，所以…」的推論，並能夠將這些推論說出來。參見實例 51、52：

原始題目	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 51	S_{13} 第二階段第 1 題講解逐字稿： 就如果三杯是同口味的，就可以買 5 種，然後如果是兩個口味是一樣的，然後有一個是不一樣的，就可以買 20 杯，然後如果是三個都不一樣的話，就 5 杯裡面挑出 3 個所以是 10 杯，然後加起來就是 35 杯，嗯 35 種。 **(取自 S_{13}030530 第二階段)**	S_{13}	學生依照題目的條件敘述，考慮如果 3 杯口位都相同，就可以買 5 種，之後解釋也都是依照「如果…，就…」的推論模式討論。
原始題目	題型二：方程式 4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 52	S_{24} 第二階段第 4 題講解逐字稿： 第 4 題，跟上一題一樣啊！只是…(因為)正整數解，所以就先都給它 1，這樣它用 H 下去的時候可能會給它 0，也是沒關係，因為它還是 1，所以 8 先分給 5 個，所以剩 3 個，所以 x_1 加 x_2 加 x_3 加 x_4 加 x_5 等於 3，所以 H5 3 就等於 C 的 7 取 3 等於 35…對啊！ **(取自 S_{24}030528 第二階段)**	S_{24}	學生依照題目的條件敘述，因為題目要求要正整數，所以學生作出口頭推論就先都給它 1。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，能夠針對題目的敘述或條件，寫出「因為…，所以…」的推論。參見實例 53：

原始題目	題型三：分物 6. 將 8 顆相同的糖果，全部分給甲乙丙 3 個人，若要求每人至少分得 1 顆，則有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 53		S_{12}	學生依照題目的條件敘述，得到一些推論。因為題目要求「每人至少一顆糖」，所以學生寫出「先分給每人一顆」的推論，接續寫出 $8-3=5$，但之後她表示不會寫。

L1-3. 透過一個例子來說明他的推論

(一) 具體行為：

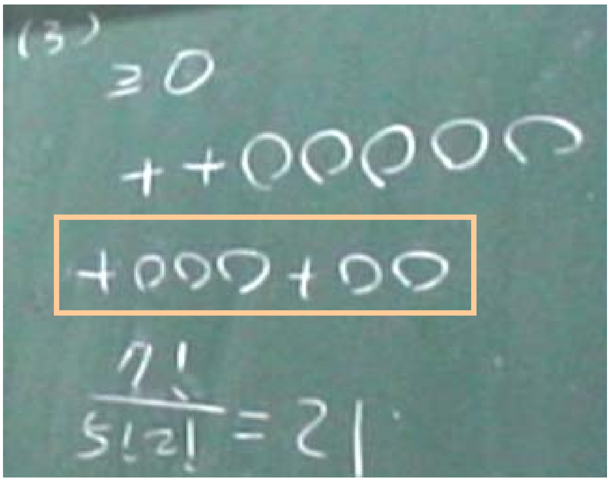
(1) 能夠舉出實際的例子說明他所得到的推論。

(2) 能夠舉出實際的反例說明推論中錯誤的地方。

(二) 行為說明

(1) 學生能夠舉出實際的例子，來說明他對於題目敘述所作的推論。參見實例 54、55：

原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註

實例 54		S_{14}	學生畫出兩個+號以及五個〇之後，再畫了一種情形「+〇〇〇+〇〇」用以說明他所做的推論「一種排法就是一種可能」。
原始題目	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個)	學生代碼	備註
實例 55	S_{21} 第二階段第 2 題講解逐字稿： 然後再來第二題的話是，籃球、排球、足球三種球，一樣也是種類的數量有出來然後選七種，那它說各…每個個數至少有 7 個就是不會有球只能選到 6 顆或 5 顆，所以一樣也是，也是叫出三個未知數… **(取自 S_{21} 030528 第二階段)**	S_{21}	學生舉出實際的例子「不會有球只能選到 6 顆或 5 顆」說明她所推論「至少有 7 個」的意思。

(2) 學生能夠舉出實際的反例，以反例思考與題目的敘述互相矛盾的地方，說明他的推論中哪裡有錯誤。參見實例 56：

原始題目	題型三：分物 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？	學生代碼	備註
實例 56	S_{22} 第一階段第 7 題具體行為： (1~39 省略) 40. 拋出問題：有沒有可能紅色就只有 1 顆？ 41. 在「紅」字底下寫 1。 42. 反例推論：不可能不可能，只有 1 顆的話，就剩 13，奇數加奇數一定是偶數。 **(取自 S_{22} 030528 第一階段)**	S_{22}	學生以反例「紅色籃子如果只有 1 顆」說明，此與題目敘述中黃綠兩籃都裝奇數顆矛盾。

四、類別 I2：工具式理解搭配反思式心智活動

表 4-7

Skemp 理解架構類別 I2

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解型式與心智活動
模式產生的交互作用</td><td>理解型式</td></tr>
<tr><td>工具式理解 Instrumental understanding</td></tr>
<tr><td>心智
活動
模式</td><td>反思模式</td><td><u>類別 I2</u>
在處理問題的過程中，學生
I2-1. 修正他所操作的演算過程
I2-2. 說明他如何操作一個適當已記憶的規則，卻不知道這個規則運作的數學概念</td></tr>
</table>

表 4-7 具體行為、行為說明及其實例如下：

I2-1. 修正他所操作的演算過程

(一) 具體行為：

(1) 能夠修正使用列舉討論理解基模時的不當操作。

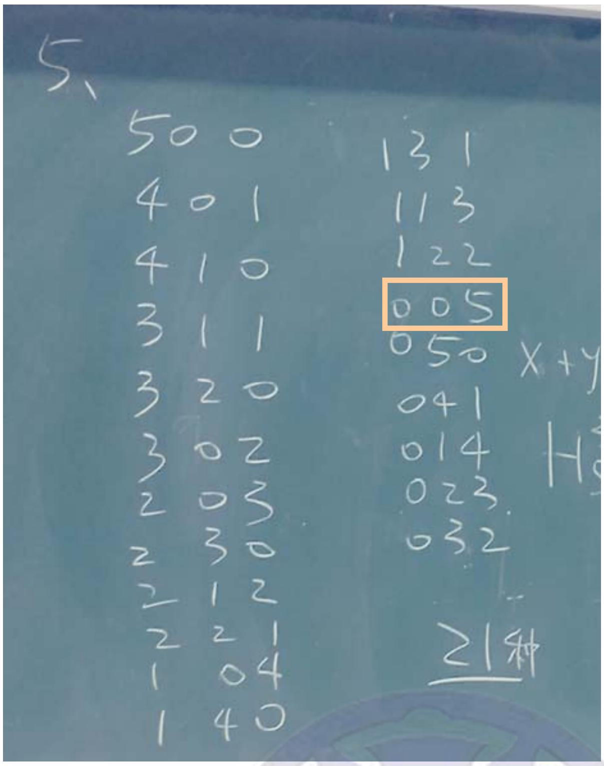
(2) 能夠修正使用符號轉換規則時的不當操作。

(3) 能夠修正使用符號 H_k^n 的不當操作。

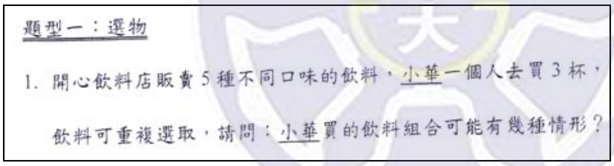
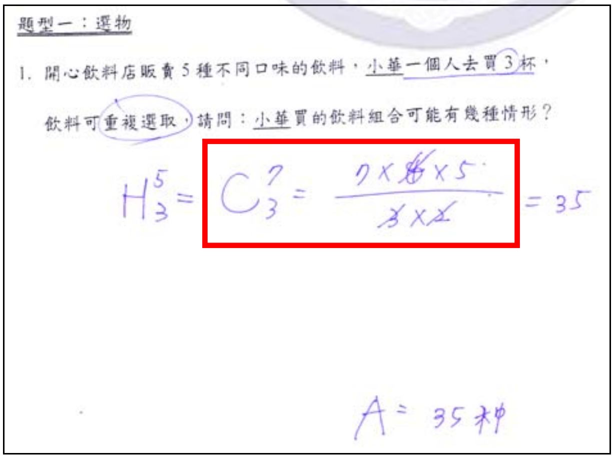
(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「列舉討論的理解基模」，一一列出可能的情形，並能夠在列舉的過程中出現錯誤時，修正他所列舉的操作程序。參見實例 57：

原始題目	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註

實例 57		S_{24}	學生在列舉所有情形的過程中，當列到「１２２」時，接下來列出「０５５」後，發現列錯了，隨即擦掉改成「００５」。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「符號轉換規則」，並能夠在轉換的過程中出現錯誤時，修正她所寫錯的數字。參見實例 58：

原始題目	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 58		S_{22}	學生使用規則③轉換符號，出現 $C_3^7=\frac{7\times4}{}$ 的錯誤轉換，該生隨即發現錯誤，並將 $C_3^7=\frac{7\times4}{}$ 修正為 $C_3^7=\frac{7\times6}{}$，再進行計算 $\frac{7\times6\times5}{3\times2}$ 得到正確答案 35。

(3) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用符號 H_k^n，並能夠修正符號 H_k^n 中 n,k 的擺放位置。參見實例 59：

原始題目	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 59	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ $\cancel{\boxed{H_5^3} = C_2^3 = 3}$ $\rightarrow$ $\boxed{H_3^5} = C_3^7 = 35$	S_{11}	學生一開始使用符號 H_5^3 處理問題，但是後來發現錯誤，該生隨後將其修正為 H_3^5，接續得到正確的答案 35。

I2-2. 說明他如何操作一個適當已記憶的規則，卻不知道這個規則運作的數學概念

(一) 具體行為：

(1) 能夠說出轉換符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的操作規則，但是不能說明第 8 題。

(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「符號 H_k^n 的理解基模」轉換符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 時，能夠以口語的方式說出他如何操作這個轉換的規則，像是「下面一樣…上下相加減 1…」，卻無法解釋符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 轉換的理由為何，也就是不會說明第 8 題。參見實例 60：

原始題目	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 60	師：好，那它變成 $C7$ 取 3 是怎麼來的？ S_{21}：喔，這就是第 8 題我無法解釋的原因了。 師：可是你會算哪！ S_{21}：對啊！ 師：所以你會算的依據是？ S_{21}：會操作。 師：你會操作？你把規則背起來嗎？規則是什麼？ S_{21}：規則喔，上下…下面不動，然後上面就改成上下相加減 1。 **(取自 S_{21} 030528 第三階段)**	S_{21}	由師生的對話可知，該生能夠說出轉換符號 $H_3^5 = C_3^7$ 的操作規則:「下面不動，然後上面改成…上下相加減 1」，但是該生卻無法解釋第 8 題。

五、類別 R2：關聯式理解搭配反思式心智活動

表 4-8

Skemp 理解架構類別 R2

理解型式與心智活動模式產生的交互作用		理解型式 關聯式理解 Relational understanding
心智活動模式	反思模式	**<u>類別 R2</u>** 在處理問題的過程中，學生 R2-1. 能夠推論出特定的列舉程序 R2-2. 能夠推論出特定的符號規則 R2-3. 能夠以關聯式的論點驗證他所應用的規則 R2-4. 能夠結合一些常規而得到答案 R2-5. 能夠修正不適當的想法

表 4-8 具體行為、行為說明及其實例如下：

R2-1. 能夠推論出特定的列舉程序

(一) 具體行為：

(1) 能夠有一定的程序列舉可能的「所有情形」。

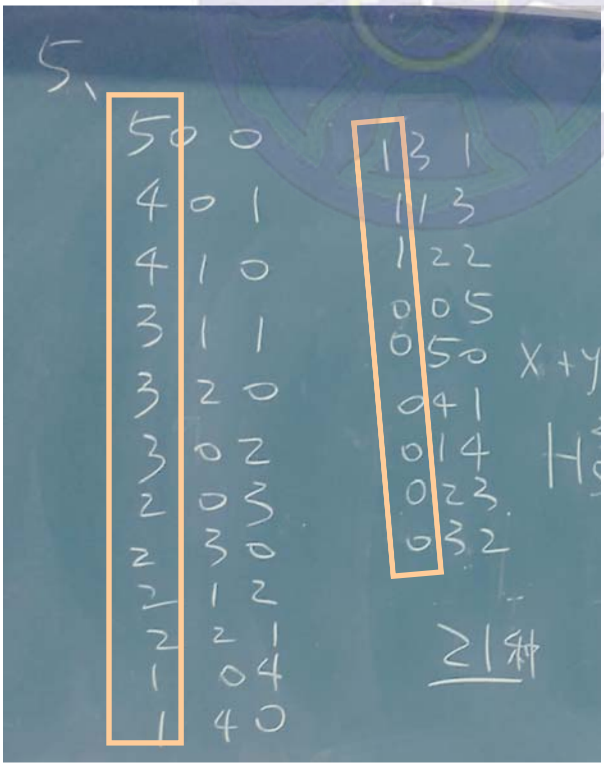
(2) 能夠有一定的程序列舉可能的「基本情形」。

(3) 能夠有一定的程序列舉可能的「異同情形」。

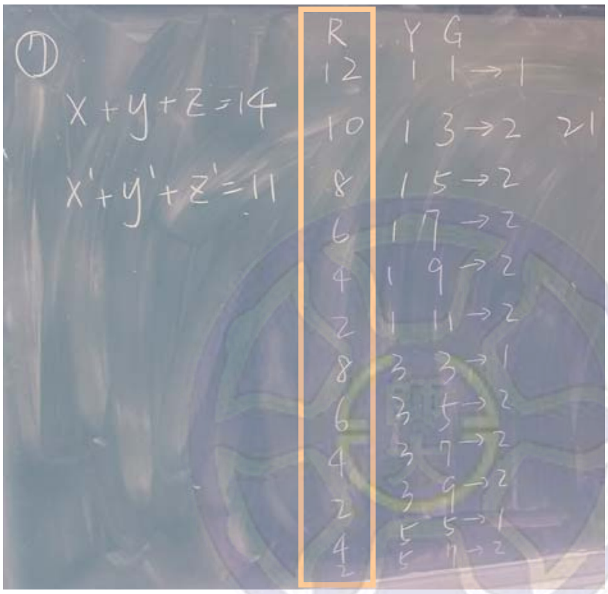
(4) 確認在列舉的過程中「可以列出 0」。

(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「列舉討論的理解基模」，一一列出可能的「所有情形」，並能夠在列舉的過程中，說明他列舉的操作程序。參見實例 61：

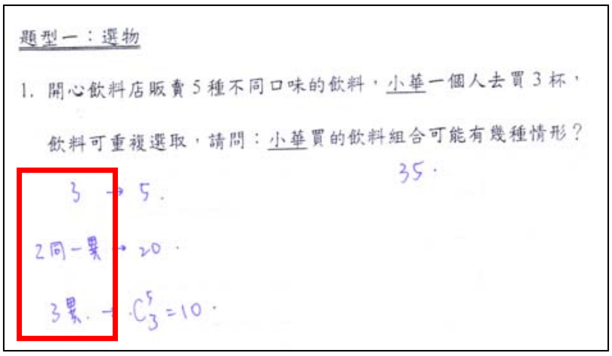
原始題目	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 61		S_{24}	學生在列舉的過程中，說出「我是以最左邊為基準」來說明他進行列舉的操作程序，確定了最左邊的數字後，剩下的中間數字與最右邊的數字再進行列舉與交換排列，列出可能的所有情形。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「列舉討論的理解基模」，一一列出可能的「基本情形」，並能夠在列舉的過程中，說明他列舉的操作程序。參見實例 62：

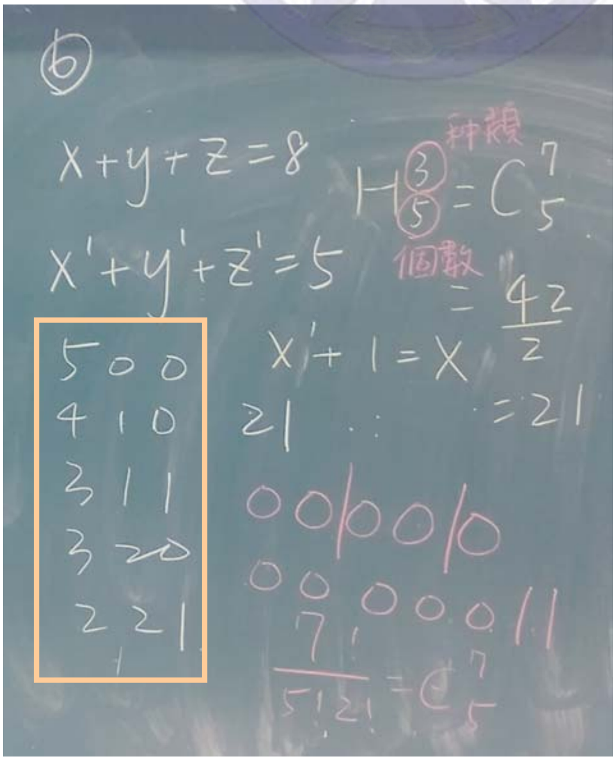
原始題目	題型三：分物 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？	學生代碼	備註
實例 62		S_{13}	學生在列舉的過程中，講出「紅色籃子不要動，只有這兩個是奇數，所以就這兩個一直互換…」來說明她進行列舉的操作程序。

(3) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「列舉討論的理解基模」，一一列出可能的「異同情形」，並能夠在列舉的過程中，說明他列舉的操作程序。參見實例 63：

原始題目	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 63	S_{13} 第二階段第 1 題講解逐字稿： 就如果三種是同口味的，就可以買 5 杯，然①後如果是兩個口味是一樣的，然後有一個是②不一樣的，就可以買 20 杯，然後如果是三③	S_{13}	學生在列舉的過程中，依序講出她所討論的異同情形： ①如果三種是同口

個都不一樣的話，就 5 杯裡面挑出 3 個所以是 10 杯，然後加起來就是 35 杯，嗯 35 種。 **(取自 S_{13}030530 第二階段)**  題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ 	味的… ②如果是兩個口味一樣的，然後有一個是不一樣的… ③如果是三個都不一樣的… 所對應到她的書寫資料分別就是「3、2同一異、3 異」。

(4) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「列舉討論的理解基模」時，以口語的方式去確認該題是否「可以列出 0」，然後再進行列舉。參見實例 64：

原始題目	題型三：分物 6. 將 8 顆相同的糖果，全部分給甲乙丙 3 個人，若要求每人至少分得 1 顆，則有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 64	 	S_{13}	學生在列舉之前，口語上說出「先把每人拿到的一個扣掉，然後之後在排的時候就可以寫 0 了。」可見在該生的列舉基模中，「可以列出 0」是一個重要的關鍵。

R2-2. 能夠推論出特定的符號規則

(一) 具體行為：

(1) 能以實際的數字為例，說明重複組合 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 符號的轉換。

(2) 能以抽象的代數符號，說明重複組合 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 符號的轉換。

(二) 行為說明：

(1) 學生寫到施測題目的第 8 題，會以實際的數字舉例說明其中的數學概念。參見實例 65：

原始題目	8.說明：重複組合 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 符號的轉換，其中的數學概念為何？	學生代碼	備註
實例 65	 S_{24} 第二階段第 8 題講解逐字稿： 重複組合 H 和 C…就是假如今天是…x 加 y 加 z 等於 3，就是有 3 個東西要加起來等於 3，總共就是三個空間有三個東西，兩個隔板，這樣就是 H3 3，就是這邊可能會 0，這邊這樣，然後會等於，總共是其實是這 5…5 個東西去排，所以 5 個東西去排，然後…就是這樣，然後就…一樣還是算的出來。 **(取自 S_{24}030528 第二階段)**	S_{24}	第 8 題為說明題，學生能夠舉出實際的例子來對應題目要說明的概念。該生舉出「3 個東西要加起來等於 3」，說明「三個東西有兩個隔板」，就有五個東西去排列，藉此說明 $H_3^3 = C_3^5$。

(2) 學生寫到施測題目的第 8 題，能夠以抽象的代數符號說明其中的數學概念。參見實例 66：

原始題目	8.說明：重複組合 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 符號的轉換，其中的數學概念為何？	學生代碼	備註
實例 66	8.說明：重複組合 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 符號的轉換，其中的數學概念為何？ n種 k個 ↓ n-1 → 格子. k → 物品 ↓ 排列 C_k^{n-1+k}	S_{22}	學生具有抽象的代數思維，利用題目中的 n 與 k 直接說明第 8 題。詳見附錄

R2-3. 能夠以關聯式的理由確認他所應用的規則

(一) 具體行為：

(1) 使用符號 H_k^n 時，確認題目有「可重複選取」的條件。

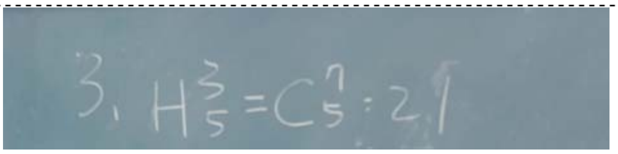
(2) 使用符號 H_k^n 時，確認題目有「非負整數解」的條件。

(二) 行為說明：

(1) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「符號 H_k^n 的理解基模」時，確認該題是否為「可重複選取」，再操作符號 H_k^n 。參見實例 67：

原始題目	題型三：分物 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？	學生代碼	備註
實例 67	S_{22} 第一階段第 7 題具體行為： (1~6 省略) 7. 口語推論：因為可以重複選取，所以就是用 H。 8. 寫下符號：H。 9. 口語推論：然後呢，因為是 5 種，要選 3 杯，所以是 H_3^5 。 **(取自 S_{22} 030528 第一階段)**	S_{22}	學生在使用符號 H_k^n 之前，先確認題目有「可以重複選取」的條件，接著寫下符號 H_3^5 。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，使用「符號 H_k^n 的理解基模」時，確認該題是否為「非負整數解」，再操作符號 H_k^n。參見實例 68：

原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 68	 S_{24} 第二階段第 3 題講解逐字稿 第三題..非負整數解..這我不會講耶，這就 H 啊！因為…怎麼講咧？x 加 1…因為它都不會是負數，所以它可能是 0…到 5，就是 H。所以 x 加 x2 加 x3 等於 5，所以 H3 5，算出來等於 C 的 7 取 5 就等於 35，這樣。 **(取自 S_{24}030528 第二階段)**	S_{24}	學生在使用符號 H_k^n 之前，先確認題目有「非負整數解」的條件，接著寫下符號 H_5^3 處理問題。

R2-4. 能夠結合一些常規而得到答案

(一) 具體行為：

(1) 能夠結合常規，直接寫出「有相同物的直線排列數」。

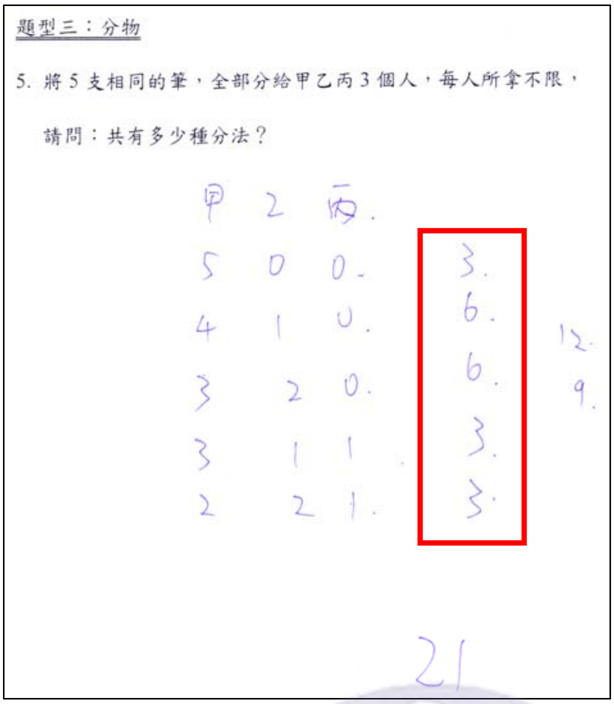
(2) 能夠結合常規，直接寫出「組合數」。

(二) 行為說明：

(1) 學生在列舉的「基本情形」旁邊，會直接寫下「有相同物的直線排列數」的結果，學生將這個結果當作常規，與列舉「基本情形」結合使用。參見實例 69：

原始題目	題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？	學生代碼	備註

實例 69

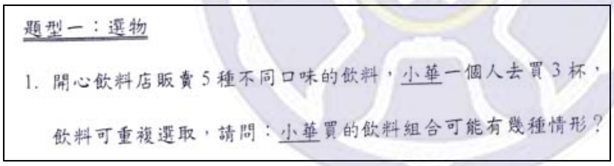

題型三：分物

5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？

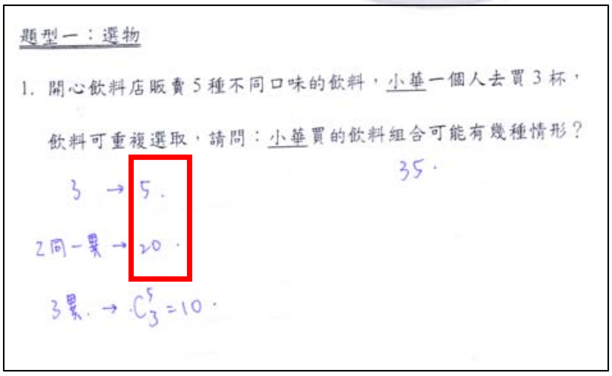
S_{25}

學生在列舉的基本情形旁邊，直接寫下 3 或 6 的記號。該生將基本情形對應的排列數 $\frac{3!}{2!}$ 或 $3!$ 當作常規計算，沒有在處理問題的過程中寫出這些符號，而是直接寫出數字 3 或 6。

(2) 學生在列舉的「異同情形」旁邊，會直接寫下挑選異同的「組合數」結果，學生將這個結果當作常規，與列舉「異同情形」結合使用。參見實例 70：

原始題目	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註

實例 70


題型一：選物

1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？

S_{24}

學生在列舉異同情形旁邊，直接寫下 5 與 20 的記號。該生將異同情形對應的組合數 C^5_1 與 $C^5_1C^4_1$ 當作是常規計算，直接寫出結果與 3 異情形的 C^5_3 有所不同，續見 L2-1(3)。

R2-5. 能夠修正不適當的想法

(一) 具體行為：

(1) 能夠修正錯誤的想法，改用正確的基模。

(2) 能夠調整原先的想法，改用其他正確的基模。

(二) 行為說明：

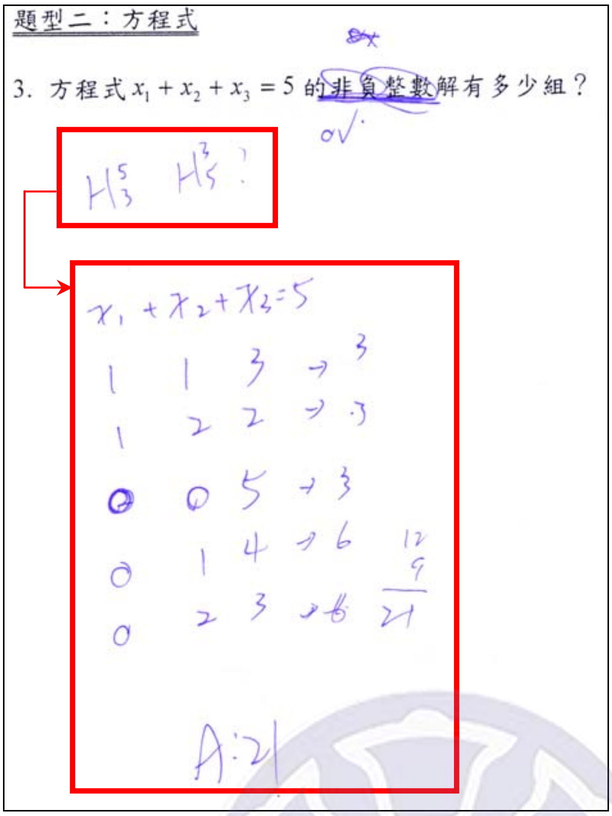
(1) 在看完重複組合題目之後，一開始用錯誤的想法處理問題，後來透過反思，修正原先錯誤的想法，改用正確的基模。參見實例 71：

原始題目	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 71	題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ ~~$5^3=125$~~ ++++000 $\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}=35$	S_{14}	學生一開始使用重複排列的錯誤想法處理問題。後來經過思考修正，使用有相同物作直線排列的理解基模，解出正確的答案。

(2) 學生在處理重複組合問題的過程中，原先有一個想法，但是他不知道如何操作，或者是這個想法會耗時處理問題，經過思考後，學生能夠調整原先的想法，改用另外一個正確的基模處理問題。參見實例 72、73：

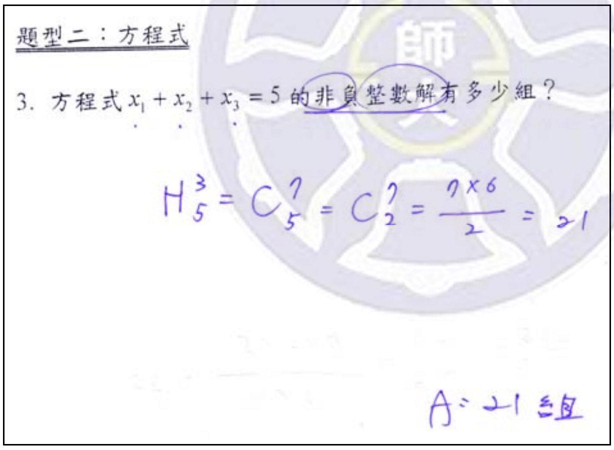
原始題目	題型二：方程式 3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？	學生代碼	備註

實例 72



S_{15} 學生知道可以用符號 H_k^n，但是無法確定 H_3^5、H_5^3 之中該使用哪一個符號，之後重新思考，改用列舉討論的理解基模，寫出正確的答案。

實例 73



S_{22} 第一階段第 3 題具體行為：

(1~6 省略)

7. 標記關鍵條件：在「x_1、x_2、x_3」下方打點。
8. 啟動想法：先來個土法煉鋼(笑)。
9. 重新讀題：3 個加起來等於 5。
10. 啟動想法：那就是把 5 個塞進 3 個裡面。
11. 寫下符號 H_5^3。
12. 確認：對這樣就是「非負」、還要「整數」。

S_{22} 學生一開始讀完題目後，先有「土法煉鋼」的想法，也就是「列舉討論的理解基模」。但是重新讀題經過再次思考，能夠調整她原先的想法，改用「使用符號 H_k^n 的理解基模」，接續寫出正確的答案。

六、類別 L2：邏輯式理解搭配反思式心智活動

表 4-9

Skemp 理解架構類別 L2

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解型式與心智活動
模式產生的交互作用</td><td>理解型式</td></tr>
<tr><td>邏輯式理解 Logical understanding</td></tr>
<tr><td>心智
活動
模式</td><td>反思模式</td><td><u>類別 L2</u>
在處理問題的過程中，學生
L2-1. 能夠聯結具有相應數學概念的符號
L2-2. 以一連串合乎邏輯的嚴格推論，證明或展示對於問題完整的數學論述</td></tr>
</table>

表 4-9 具體行為、行為說明及其實例如下：

L2-1. 能夠聯結具有相應數學概念的符號

(一) 具體行為：

(1) 能夠依照題目的特殊條件，寫出一個新的方程式。

(2) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「有相同物直線排列符號 $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 」。

(3) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「組合符號 C_k^n 」。

(4) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「重複組合符號 H_k^n 」。

(二) 行為說明：

(1) 學生會依照題目的特殊條件，像是「正整數解」、「每人至少分得一顆」等，將原本題目給定的方程式，或是自己寫出來的方程式，轉換成另一個新的方程式。通常在新的方程式之中，未知數的右上角會有一個「’」的記號，與原先的未知數作區隔。參見實例 74、75：

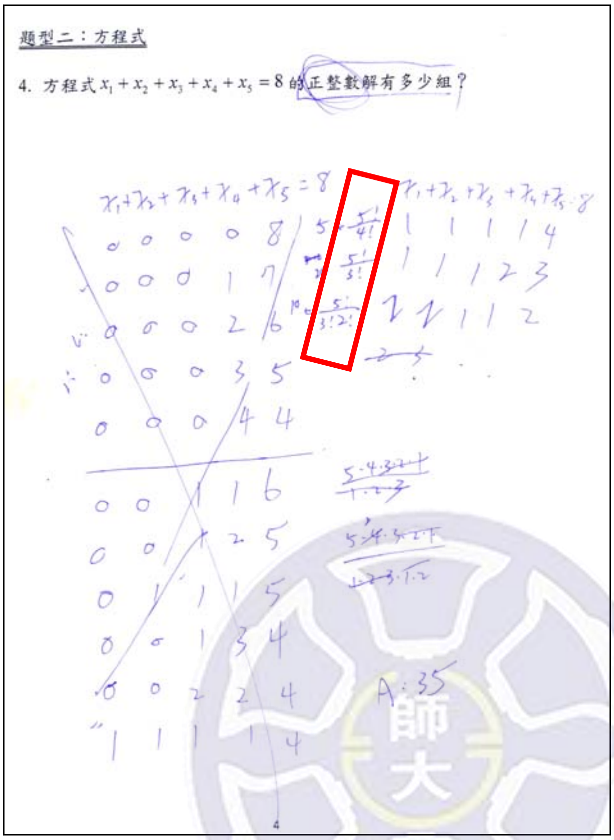
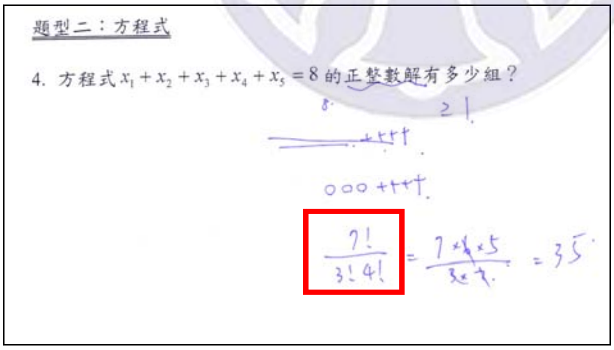
原始題目	題型二：方程式 4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 74	題型二：方程式 4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？ $\boxed{x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'=3.}$　　35 30000 → 5 21000 → $\frac{5!}{3!}=20$ 11100 → $\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}=10.$	S_{13}	題目的條件「正整數解」代表每一個未知數都要至少是 1，學生利用題目給定方程式的未知數，寫出一個新的方程式 $x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'=3$，接續使用列舉討論的理解基模。

原始題目	題型三：分物 6. 將 8 顆相同的糖果，全部分給甲乙丙 3 個人，若要求每人至少分得 1 顆，則有多少種分法？	學生代碼	備註
實例 75	題型三：分物 6. 將 8 顆相同的糖果，全部分給甲乙丙 3 個人，若要求每人至少分得 1 顆，則有多少種分法？ 甲+乙+丙=8 $\boxed{甲'+乙'+丙'=5}$ $H^3_5=C^7_5=21$	S_{21}	該生先寫出一個符合題目的方程式，再依照題目的特殊條件「每人至少分得一顆」，代表每人拿到的數量不能為 0，寫出一個新的方程式 甲'+乙'+丙'＝5，再利用這個新的方程式啟動使用符號 H^n_k 的理解基模。

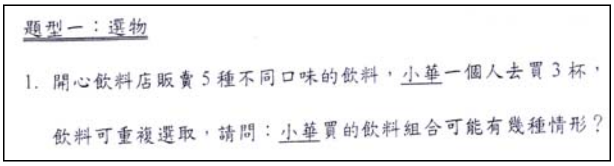
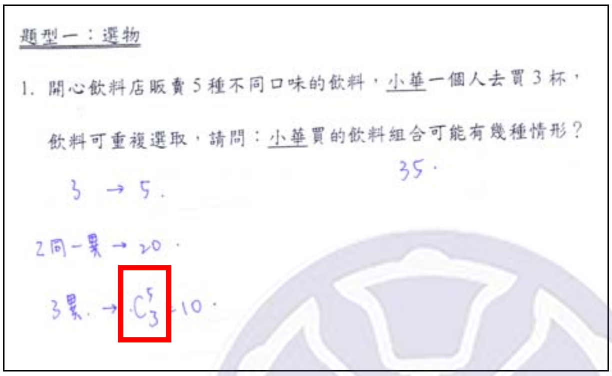
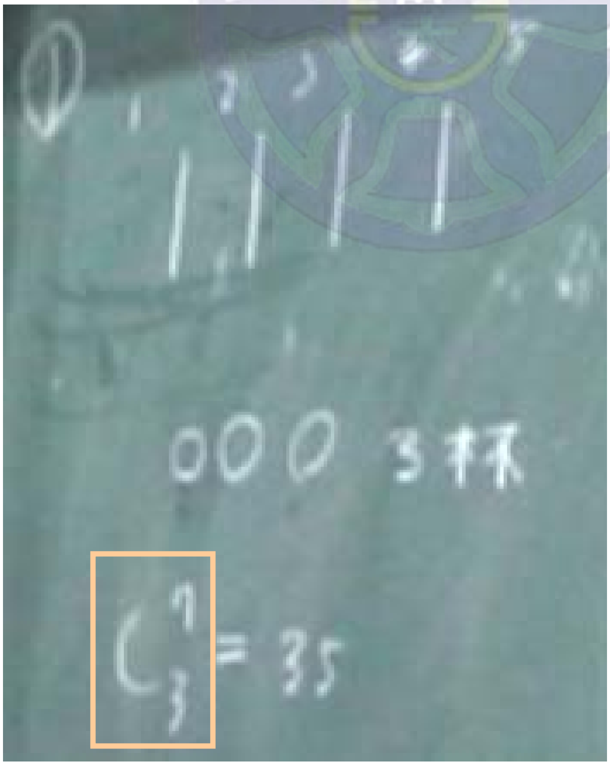
(2) 學生在使用符號 H_k^n 的理解基模時，能正確寫出與題目敘述相對應的符號 H_k^n ，並且沒有邏輯上的疏失。參見實例 76、77：

原始題目	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個)	學生代碼	備註
實例 76	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個) $\boxed{H_7^3}=C_7^9=36.$	S_{23}	學生在看完題目之後，直接使用符號 H_k^n 處理問題，且沒有邏輯上的疏失，寫出正確的答案。
實例 77	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個) $x+y+z=7.$ $\boxed{H_7^3}=C_7^9=C_2^9=\frac{9\times 8}{2\times 1}=36$ #	S_{21}	學生在看完題目之後，先寫出一個符合題目的方程式，接著使用符號 H_k^n 處理問題，且沒有邏輯上的疏失，寫出正確的答案。

(3) 學生在「列舉基本情形加總排列數的理解基模」或「利用有相同物作直線排列的理解基模」時，能正確寫出與題目敘述相對應的「有相同物直線排列符號 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 」，並且沒有邏輯上的疏失。參見實例 78、79：

原始題目	題型二：方程式 4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？	學生代碼	備註
實例 78		S_{15}	學生在看完題目之後，修正第一個想法，使用「列舉基本情形加總排列數的理解基模」，在列出的基本情形左邊，分別寫出排列數的符號 $\frac{5!}{4!}$、$\frac{5!}{3!}$、$\frac{5!}{3!2!}$，並且沒有邏輯上的疏失，寫出正確的答案。
實例 79		S_{14}	學生在看完題目之後，利用有相同物作直線排列的理解基模，畫出 3 個○與 4 個+後，寫出排列數的符號 $\frac{7!}{3!4!}$，並且沒有邏輯上的疏失，寫出正確的答案。

(4) 學生在「列舉異同情形加總組合數的理解基模」或「畫出兩類相同物作組合選取的理解基模」，確實寫出與題目相對應的「組合符號C_k^n」，並且沒有邏輯上的疏失。參見實例 80、81：

原始題目	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼	備註
實例 80	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？ 3 → 5.　35. 2同一異 → 20. 3異. → C_3^5 10.	S_{24}	學生在列舉異同情形的旁邊，寫下與其相對應的組合符號C_3^5，代表她思考的異同情形，結合了組合選取的數學概念。
實例 81	 	S_{22}	學生畫完兩類相同物之後，寫下與其相對應的組合符號C_3^7，以組合選取的方式代表此兩類相同物的直線排列情形。

L2-2. 以一連串合乎邏輯的嚴格推論，展示對於問題完整的數學論述

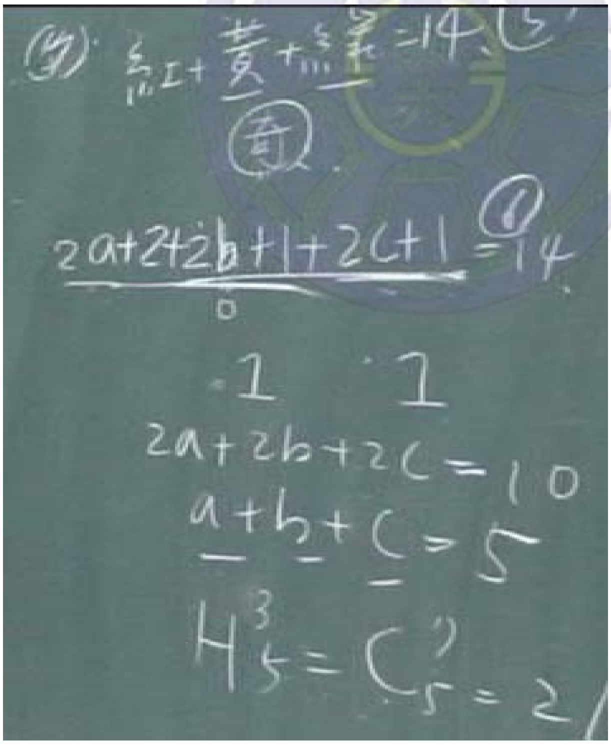
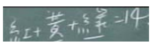
(一) 具體行為：

(1) 能夠以相應的數學概念，完整地說明對於題目的推論過程。

(2) 能夠以相應的數學概念，對於老師提出的問題說出自己的論點。

(二) 行為說明：

(1) 學生在一個完整處理問題的過程中，能夠正確且清楚地說出他做的假設或每一項具體行為所對應的數學概念為何，整體而言講解過程合乎邏輯。參見實例 82：

原始題目	題型三：分物 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子，每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？	學生代碼	備註
實例 82	 S_{21} 第二階段第 7 題講解逐字稿： 再來是第 7 題，ㄜ…第 7 題它是說 14 顆雞蛋要分到紅黃綠三個籃子，每個籃子都要有雞蛋，那都要有就是代表不可以等於零，那基本上我們先假設【寫黑板：】	S_{21}	從學生的講解逐字稿可以看出，學生能夠針對題目的條件限制，進行正確假設。原先該生假設黃綠兩個籃子分裝奇數顆為 $2b-1$ 與 $2c-1$，但經過思考，修改為 $2b+1$ 與 $2c+1$，此與接下來要使用符號 H_k^n 環環相扣。該生也能夠推論出因為黃綠

它的紅黃綠的個數總共要有 14 顆，然後我們，它有限制是黃跟綠【寫黑板：奇】要裝奇數顆，那一開始我們應該要先去滿足限制，那我們知道奇數，奇數的寫法的話應該是…嗯…啊…應該是如果我們假設黃有 b 顆好了，ㄜ…是令黃的變數是 b 那，這樣子的話基本上就是黃的最小的代表，那綠的最小的代表應該是這樣【寫黑板：$2b-1$ $2c-1$】，就是我們當 b 等於 1 的時候，ㄟ不要，加 1 不好意思【寫黑板：$2b+1$ $2c+1$】，那個因為 b 我們如果要用 H 寫的話基本上可以等於 0，那如果是這樣的話，那 b 如果代 0 的話【寫黑板：1 1】，那它基本上黃就是至少有 1 顆，那就是滿足它的限制是奇數顆，然後ㄜ…然後我們設紅的也叫【寫黑板：$2a$】$2a$ 好了，然後這樣總共要有 14 顆【寫黑板：$=14$】，然後之後就是去看 a b c 的可能性，可是…咦…(停頓 9 秒)喔，然後還有黃綠是奇數顆，那加起來是偶數，那這個 14 是偶數所以紅一定這樣子加起來紅一定也是偶數，所以才設 $2a$，可是ㄟ…(停頓 10 秒)，因為還要扣掉是有一個情況是紅一定也要拿至少拿到兩顆，所以當 a 等於 0 的時候【寫黑板：$2a+2$】紅至少要等於兩個，所以這是寫出來的式子【寫黑板：$2a+2+2b+1+2c+1=14$】，那就去看 a b c，因為我們希望 a b c，喔 a b c 的狀況是 a b c 也有可能其中一個等於 0，那這樣的話就是【寫黑板：$2a+2b+2c=10$】$2a$ 加 $2b$ 加 $2c$ 等於這裡移過去、這裡移過去、這裡移過去等於 10，【寫黑板：$a+b+c=5$】a 加 b 加 c 等於 5，然後我們要來探討 a b c 的可能，那 a b c 這裡都可以等於 0，所以一樣可以用 H 解，那就是【寫黑板：$H^3_5=C^7_2$】H 3 5 這樣。

(取自 S_{21} 030528 第二階段)

兩個籃子都裝奇數顆，全部有 14 顆，所以紅色籃子要裝偶數顆，正確假設出紅色籃子有 $2a+2$ 顆。將假設三個籃子所分裝的雞蛋顆數 ，與題目敘述結合，經過化簡之後得到一個方程式 $a+b+c=5$ ，該生並且檢查方程式中未知數的解應為「非負整數解」，之後使用符號 H^n_k 。

該生能夠清楚地論述整個處理問題的完整過程，並且能夠確實執行她的想法，沒有邏輯上的缺失，得到正確的答案。

(2) 學生對於教師提出的問題，可以正確且清楚地表達他的想法，而且說明的過程合乎邏輯。參見實例 83：

原始題目	題型三：分物 7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？	學生代碼	備註
實例 83	S_{22} 第三階段師生對話逐字稿：(3069~3076) 師：所以第 3 題跟第 4 題的差別在…？ S_{22}：3 跟 4…3 跟 4 的差別就在於它的那個限制啊！一個是非負整數解，因為兩個都是要正整…兩個都是要整數解這沒有問題，但是有一個是非負，這個是要非負，非負也就是說你的…你的出來值呢就是…就是你…如果我用球的概念來說的話就是你填在這裡的球，可以大於等於零，也就是說我可以 x_3 是等於 0 的，但是這一個的話它是要正整數解，0 是一個…不是正整數，它是一個…中性數，所以就是…就是…呵呵 師：ㄟ你數學不錯耶！你講的出來 0 是中性數！ S_{22}：哈哈…所以這一個 0 是中性數，它不是正整數！呵呵…所以就是說，這個裡面至少都要塞 1，就是你的數一定都要大於等於 1，不能等於 0。 師：所以你扣 5 的意思是說… S_{22}：都我都先分給他們一個去符合條件。 師：那剩下的 3 個是… S_{22}：剩下的 3 個就是…隨意你分啦！因為我已經符合條件了，那我就等於是…ㄜ我先給它 5 個嘛，那我符合條件我們就把這個 8…把它去忘掉，就是重新假如說它現在沒有東西了，那我現在 3 個要塞進 5 個不同的種類…對。 **(取自 S_{22} 030528 第三階段)**	S_{22}	由師生對話可知，學生針對老師的提問，可以知道學生有非常清楚的邏輯，可以說明她對於題目第3題與第4題的差異，並且能夠明確地區別這些差異，從學生可以自己回答出「0是中性數」這樣的專有名詞，可知她的數學概念相當清楚，而且她思考的邏輯也都非常正確。

第二節　分析重複組合理解基模

根據本章第一節的結果，研究者整理受測學生在處理重複組合問題的過程中，統整並歸納他們產生的具體行為，形成重複組合「適當的(appropriate)」理解基模(可參看 Skemp 理解架構中 R1-3.能夠將來自外在環境的訊息，直接同化到一個適當的基模中)。

本節分為兩個部分：一、統整受測學生處理每一題的行為代碼(師生對談前)，二、歸納並分析重複組合的理解基模。

一、統整受測學生處理每一題的行為代碼(師生對談前)

在師生對談前，每位學生獨立處理問題，研究者整理十位受測學生處理重複組合問題時，所產生的具體行為步驟，將各題的具體行為代碼整理如下表 4-10~表 4-19。

表 4-10

師生對話前 S_{11} 每一題產生的具體行為步驟

S_{11}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 2 題	空白							
第 3 題	I1-5							
第 4 題	空白							
第 5 題	I1-5							
第 6 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 7 題	空白							
第 8 題	空白							

註：該生第 1、6 題使用符號 H_k^n 成功解決問題；第 3 題操作符號 H_k^n ，但是沒有對應到題目的概念；第 5 題使用符號 C_k^n 的概念處理問題；第 2、4、7、8 題空白。

表 4-11

師生對話前 S_{12} 每一題產生的具體行為步驟

S_{12}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	I1-5							
第 2 題	R1-2	I1-3						
第 3 題	I1-3							
第 4 題	R1-2	L1-2	L2-1	I1-3				
第 5 題	R1-2	I1-3						
第 6 題	R1-2	L1-2	L2-1	I1-3				
第 7 題	空白							
第 8 題	空白							

註：該生第 1 題使用重複排列的概念處理問題；第 2~6 題知道要用 H 處理問題，但是她表示忘記了；第 7、8 題空白。

表 4-12

師生對話前 S_{13} 每一題產生的具體行為步驟

S_{13}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-3	I1-1	R2-1	L2-1	R2-4	I1-2		
第 2 題	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2		
第 3 題	R1-2	R2-5	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 4 題	L1-2	L2-1	R1-3	I1-1	R2-1	L2-1	R2-4	I1-2
第 5 題	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2		
第 6 題	R1-2	L1-2	L2-1	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2
第 7 題	R1-2	L2-1	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 8 題	空白							

註：該生第 1~7 題皆以列舉討論的方式成功解決問題；第 8 題空白。

表 4-13

師生對話前 S_{14} 每一題產生的具體行為步驟

S_{14}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 2 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 3 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 4 題	R1-1	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 5 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 6 題	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 7 題	R1-1	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	

(續下頁)

第 8 題	空白							

註：該生第 1~6 題皆畫出兩類相同物的方式成功解決問題；第 7 題以列舉討論的方式成功處理問題；第 8 題空白。

表 4-14

師生對話前 S_{15} 每一題產生的具體行為步驟

S_{15}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	I1-5							
第 2 題	I1-5							
第 3 題	R1-1	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 4 題	R1-1	R1-3	I1-1	R2-1	L2-1	R2-4-	I1-2	
第 5 題	R1-3	I1-1	L2-1	I1-2	I1-2	少列		
第 6 題	R1-1	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 7 題	R1-3	I1-1	L2-1	I1-2	多算			
第 8 題	空白							

註：該生第 1、2 題使用重複排列的概念處理問題；第 3、4、6 題以列舉討論的方式成功解決問題；第 5、7 題列舉討論時有少列及多等計算上的錯誤；第 8 題空白。

表 4-15

師生對話前 S_{21} 每一題產生的具體行為步驟

S_{21}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-4			
第 2 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 3 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 4 題	R1-1	R1-2	L2-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 5 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 6 題	R1-1	R1-2	L2-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 7 題	R1-1	R1-2	L1-2	L2-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2
第 8 題	空白							

註：該生第 1 題在使用符號 H_k^n 時，n 與 k 的位置擺反了；第 2~7 題皆使用符號 H_k^n 成功解決問題；第 8 題空白。

表 4-16

師生對話前 S_{22} 每一題產生的具體行為步驟

S_{22}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-1	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 2 題	R1-1	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		

(續下頁)

第 3 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 4 題	R1-1	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 5 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 6 題	R1-1	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 7 題	R1-1	L1-1	L1-2	L1-3	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2
第 8 題	R1-1	R1-2	L1-2	R1-3	L1-3	L2-1	L2-2	I1-2

註：該生第 1~7 題皆使用符號 H_k^n 成功解決問題；第 8 題能以抽象符號成功說明重複組合的符號轉換。

表 4-17

師生對話前 S_{23} 每一題產生的具體行為步驟

S_{23}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	I1-5							
第 2 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 3 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 4 題	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-4		
第 5 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 6 題	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 7 題	R1-2	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-1	
第 8 題	空白							

註：該生第 1 題使用重複排列的概念處理問題；第 2、3、5、6 題皆使用符號 H_k^n 成功解決問題；第 4 題在轉換符號時出現計算上的錯誤；第 7 題以列舉討論的方式成功解決問題；第 8 題空白。

表 4-18

師生對話前 S_{24} 每一題產生的具體行為步驟

S_{24}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	I1-5							
第 2 題	I1-5							
第 3 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 4 題	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 5 題	R1-3	I1-1	R2-1	I1-1				
第 6 題	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	I1-1			
第 7 題	I1-5							
第 8 題	L1-3	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2		

註：該生第 1、2 題使用重複排列的概念處理問題；第 3、4 題皆使用符號 H_k^n 成功解決問題；第 5、6 題以列舉討論的方式成功解決問題；第 7 題以列舉討論的方式處理問題，但是多算了幾種情形；第 8 題能以具體的例子成功說明重複組合的符號轉換。

表 4-19

師生對話前 S_{25} 每一題產生的具體行為步驟

S_{25}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	I1-5							
第 2 題	I1-5							
第 3 題	R1-3	I1-1	少列					
第 4 題	L1-2	I1-5						
第 5 題	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2			
第 6 題	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2		
第 7 題	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2		
第 8 題	空白							

註：該生第 1、2 題使用重複排列的概念處理問題；第 3 題以列舉討論的方式處理問題，但是少列了幾種情形；第 4 題使用組合的符號處理問題，但是無法確切對應到題目的概念；第 5~7 題皆以列舉討論的方式成功解決問題；第 8 題空白。

二、歸納並分析重複組合的理解基模

研究者觀察表 4-10~表 4-19，將受測學生出現的重複組合理解基模歸納成三種類型，總共五個理解基模，整理出表 4-20，每一個理解基模分別給出學生實例，並分析如下。

表 4-20

重複組合的理解基模

理解基模類型	基模編號及名稱
(一)列舉討論的理解基模	【基模 1】列舉所有情形接著點數總數的理解基模
	【基模 2】列舉基本情形接著加總排列數的理解基模
	【基模 3】討論異同情形接著加總組合數的理解基模
(二)有相同物的理解基模	【基模 4】畫出兩類相同物作直線排列的理解基模
(三)符號 H_k^n 的理解基模	【基模 5】使用符號 H_k^n 的理解基模

(一) 列舉討論的理解基模

1.【基模 1】列舉所有情形接著點數總數的理解基模

表 4-21

列舉所有情形接著點數總數的理解基模具體行為

理解與心智交互作用的具體行為		理解型式		
		工具式理解	關聯式理解	邏輯式理解
心智活動模式	直覺模式	I1-1.(1) 一一列舉可能的「所有情形」。 I1-1.(2) 點數總數得到結果。	R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。	
	反思模式		R2-1.(1) 能夠有一定的程序列舉可能的「所有情形」。	

(1) 表 4-21 中，具體行為出現順序：(參見實例 84)

<u>Step 1.</u> R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。

<u>Step 2.</u> I1-1.(1) 一一列舉可能的「所有情形」。

<u>Step 3.</u> R2-1.(1) 能夠有一定的程序列舉可能的「所有情形」。

<u>Step 4.</u> I1-1.(2) 點數總數得到結果。

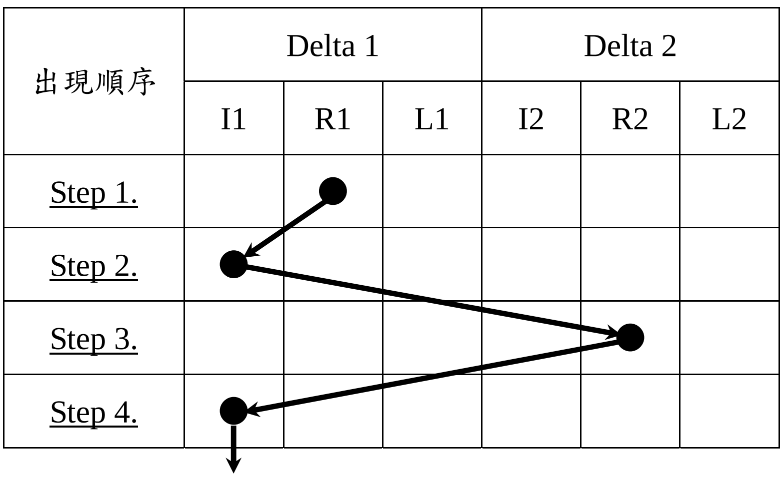


圖 4-1 【基模 1】具體行為出現順序圖

<table>
<tr><td>原始題目</td><td>題型三：分物
5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，
請問：共有多少種分法？</td><td>學生代碼</td></tr>
<tr><td>實例 84</td><td>題型三：分物
5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，
請問：共有多少種分法？
Step 4. 21 種
Step 1.
Step 2.
Step 3.
5 0 0　　0 0 5
0 5 0
4 0 1　　0 4 1
4 1 0　　0 1 4
3 1 1　　0 2 3
3 2 0　　0 3 2
3 0 2
2 0 3
2 3 0
2 1 2
2 2 1
1 0 4
1 4 0
1 3 1
1 1 3
1 2 2</td><td>S_{24}</td></tr>
</table>

(2)【基模 1】分析

a. 基模特性

(a) 優點：記憶負擔最少、當可能的所有情形較少時適用。

(b) 缺點：耗時、當列舉的狀況多時不適用、容易產生邏輯上的缺失(列舉遺漏或重複列舉)、列舉時沒有耐心因而增加焦慮。

b. 基模說明

這種基模列舉了可能的「所有情形」。由於待分配的筆只有 5 枝，當待分配物品的個數較少時，學生直覺地認為將全部列舉出來比較容易。

雖然列舉「所有情形」相較於列舉「基本情形」耗時較多，但從實例 84 可知，學生列舉的程序看來，他能夠依照最左邊數字從 5 開始遞減至 0，有一定程序進行列舉，其實也是非常重要的思維訓練。

2.【基模 2】列舉基本情形接著加總排列數的理解基模

表 4-22

列舉基本情形接著加總排列數的理解基模具體行為

理解與心智交互作用的具體行為		理解型式		
		工具式理解	關聯式理解	邏輯式理解
心智活動模式	直覺模式	I1-1.(3) 一一列舉可能的「基本情形」。 I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。	R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。	
心智活動模式	反思模式		R2-1.(2) 能夠有一定的程序列舉可能的「基本情形」。 R2-4.(1) 能夠結合常規，直接寫出「有相同物的直線排列數」。	L2-1.(2) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「有相同物直線排列符號 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$」。

(1) 表 4-22 中，具體行為出現順序可能有兩款：

a. 第一款(參見實例 85)

Step 1. R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。

Step 2. I1-1.(3) 一一列舉可能的「基本情形」。

Step 3. R2-1.(2) 能夠有一定的程序列舉可能的「基本情形」。

Step 4. R2-4.(1) 能夠結合常規，直接寫出「有相同物的直線排列數」。

Step 5. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

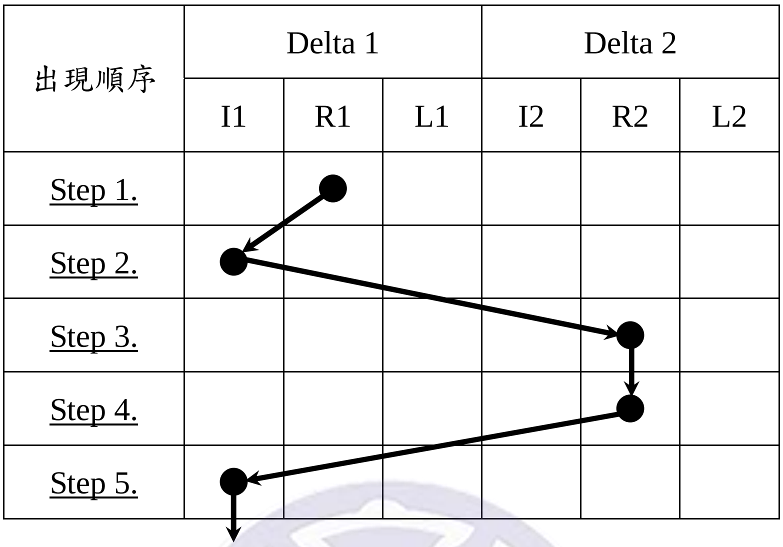
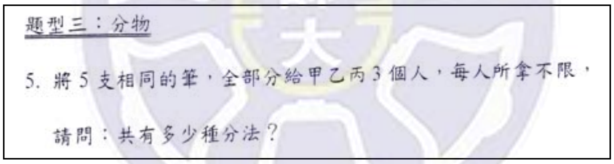


圖 4-2 【基模 2】(第一款)具體行為出現順序圖

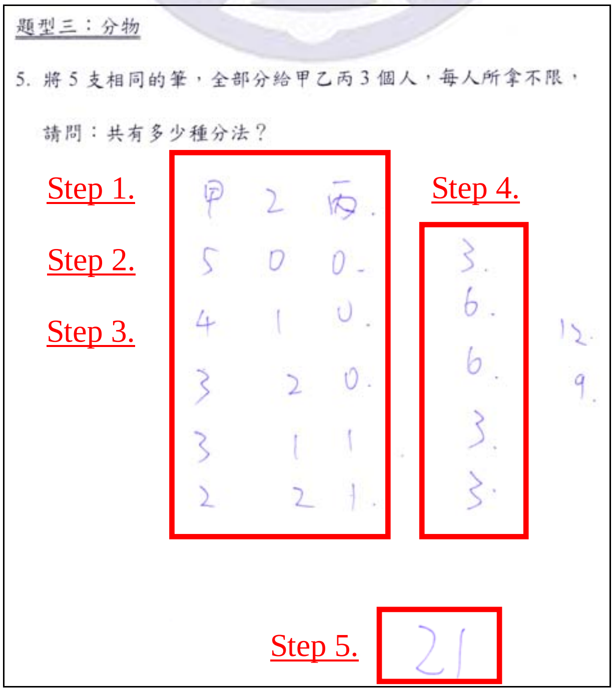
原始題目


題型三：分物

5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？

學生代碼

實例 85



S_{25}

b. 第二款(參見實例 86)

Step 1. R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。

Step 2. I1-1.(3) 一一列舉可能的「基本情形」。

Step 3. R2-1.(2) 能夠有一定的程序列舉可能的「基本情形」。

Step 4. L2-1.(2) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「有相同物直線排列符號 $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$」。

Step 5. R2-4.(1) 能夠結合常規，直接寫出「有相同物的直線排列數」。

Step 6. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

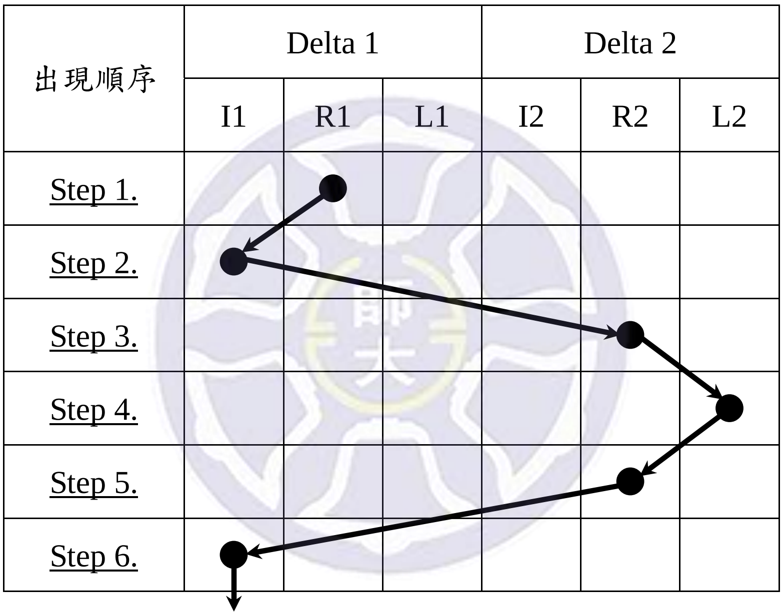
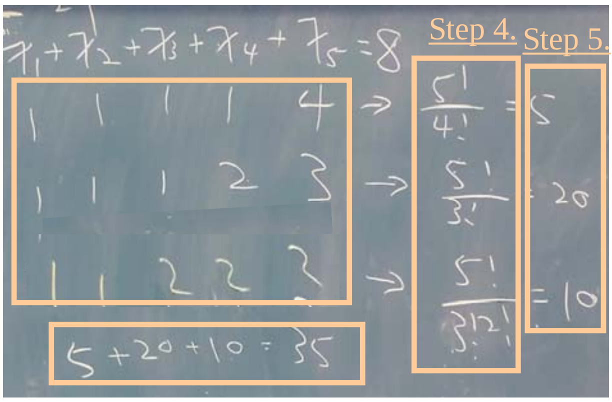


圖 4-3 【基模 2】(第二款)具體行為出現順序圖

原始題目	題型二：方程式 4. 方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的正整數解有多少組？	學生代碼
實例 86 Step 1. Step 2. Step 3. Step 6.		S_{15}

(2)【基模 2】分析

a. 基模特性

(a) 優點：記憶負擔較少、當可能的基本情形較少時適用、有效整合可能的所有情形。

(b) 缺點：當列舉的狀況多時不適用、容易產生邏輯上的缺失(列舉遺漏或重複列舉)、排列數容易寫錯。

b. 基模說明

這種基模列舉了可能的「基本情形」，列舉「基本情形」相較於列舉「所有情形」更節省空間與時間。從實例 85 可看到，學生列舉的基本情形，從 5 開始遞減至 0，有一定程序進行列舉，再分別寫出基本情形「５００」排列數為 3、基本情形「４１０」排列數為 6 等，結合排列數的概念與計數方式，讓列舉的情況更簡潔，最後加總排列數而求出正確答案。

有時候學生會先寫出一個方程式再使用【基模 2】，也就是說學生會在使用【基模 2】之前，會多一個具體行為步驟，即「R1-2.(3) 能掌握題目的結構，寫出一個符合題目敘述的方程式。」再搭配使用【基模 2】，請參看以下步驟所述，並參見實例 87。

Step 1. R1-2.(3) 能掌握題目的結構，寫出一個符合題目敘述的方程式。

Step 2. R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。

Step 3. I1-1.(3) 一一列舉可能的「基本情形」。

Step 4. R2-1.(2) 能夠有一定的程序列舉可能的「基本情形」。

Step 5. R2-4.(1) 能夠結合常規，直接寫出「有相同物的直線排列數」。

Step 6. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

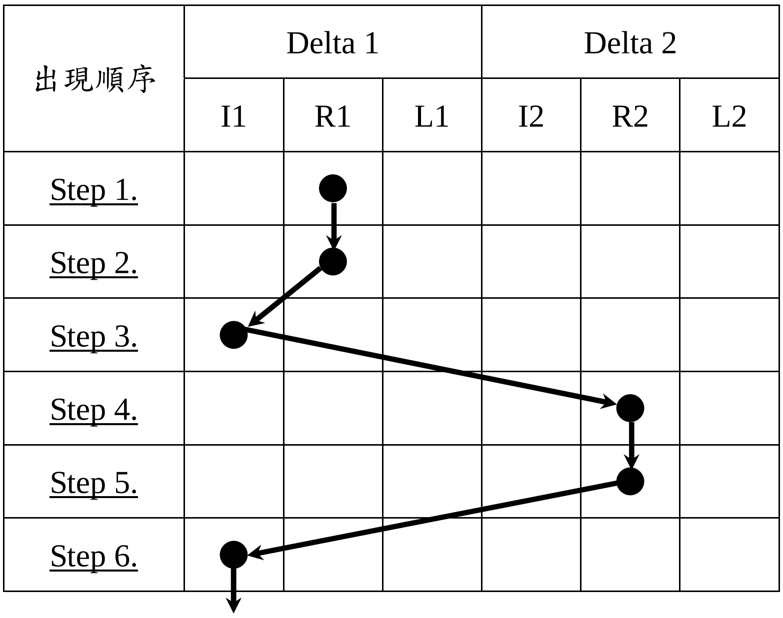
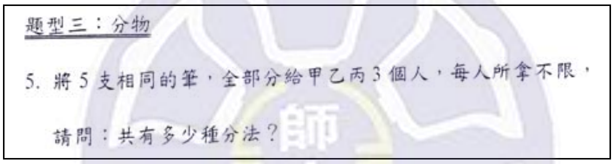
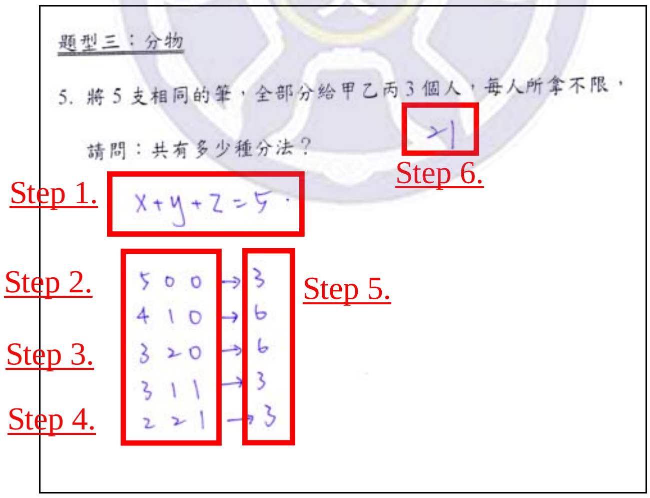


圖 4-4 寫出方程式後使用【基模 2】(第一款)具體行為出現順序圖

原始題目	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？	學生代碼
實例 87	 題型三：分物 5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？ 	S_{13}

列舉基本情形的時候，學生只管選取物品或分配的個數，以「數字」列舉，與討論異同情形所列舉的「幾同幾異」有些差別，續見【基模 3】分析。

3.【基模 3】討論異同情形接著加總組合數的理解基模

表 4-23

討論異同情形接著加總組合數的理解基模具體行為

理解與心智交互作用的具體行為		理解型式		
		工具式理解	關聯式理解	邏輯式理解
心智活動模式	直覺模式	I1-1.(4) 一一列舉可能的「異同情形」。 I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。	R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。	
	反思模式		R2-1.(3) 能夠有一定的程序列舉可能的「異同情形」。 R2-4.(2) 能夠結合常規，直接寫出「組合數」。	L2-1.(3) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「組合符號 C_k^n 」。

(1) 表 4-23 中，具體行為出現順序：(參見實例 88)

Step 1. R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。

Step 2. I1-1.(4) 一一列舉可能的「異同情形」。

Step 3. R2-1.(3) 能夠有一定的程序列舉可能的「異同情形」。

Step 4. R2-4.(2) 能夠結合常規，直接寫出「組合數」。

Step 5. L2-1.(3) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「組合符號

C_k^n 」。

Step 6. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

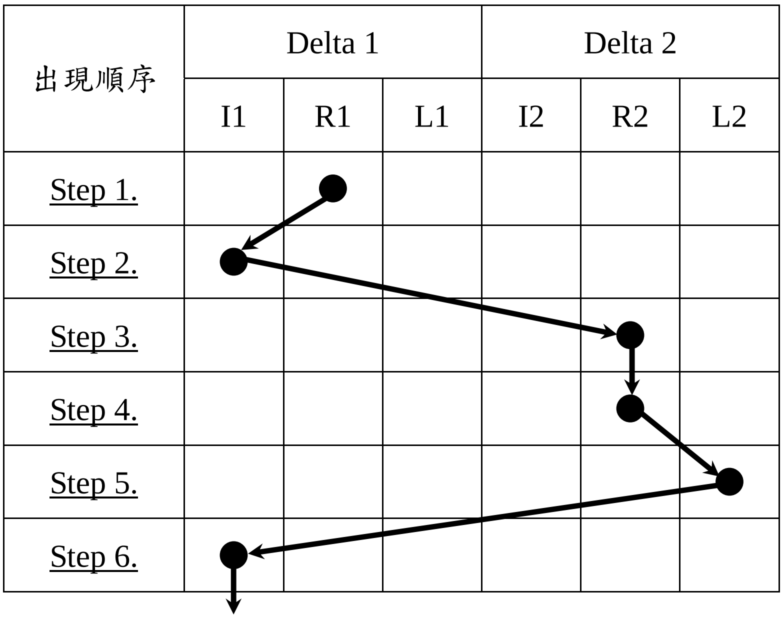
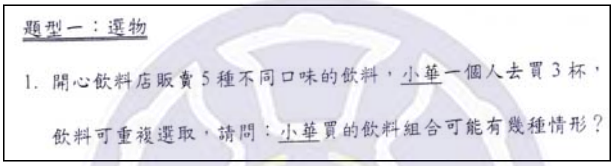
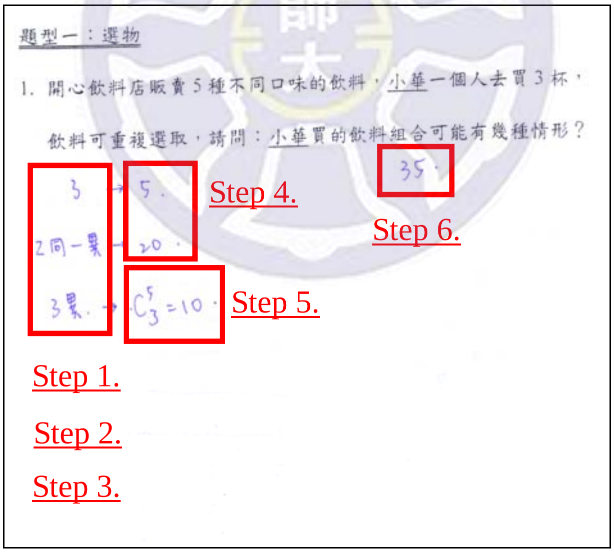


圖 4-5 【基模 3】具體行為出現順序圖

原始題目		學生代碼
實例 88		S_{13}

(2)【基模 3】分析

a. 基模特性

(a) 優點：當異同情形較少時適用、根據題目敘述具體討論異同情形較不抽象。

(b) 缺點：當異同情形複雜時較不適用、組合數容易寫錯(如：從五

個種類的物品挑出 4 個作組合，學生首先考慮討論異同情形的程序為「4 同、3 同 1 異、2 同 2 同、2 同 2 異、4 異」，每一種情形還需要進一步的討論，例如 2 同 2 同的情形是指從兩個種類裡面分別取兩個，由於各類取出的個數相同，組合數應為 C_2^5；2 同 2 異的情形是有一個種類要選兩個為 C_1^5，其餘四個種類要選兩個種類為 C_2^4，組合數應為 $C_1^5C_2^4$)。

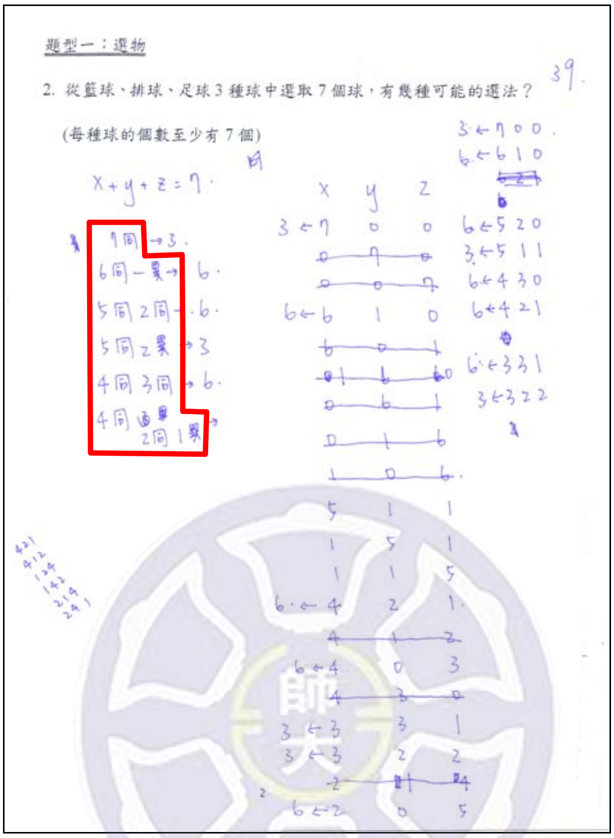
b. 基模說明

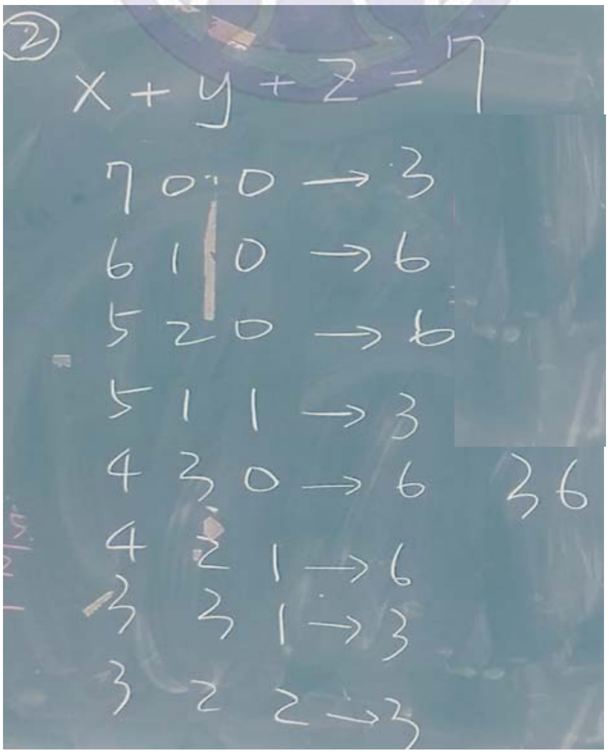
這種基模列舉了可能的「異同情形」。列舉「異同情形」乍看之下很類似於列舉「基本情形」，但還是有些差異。列舉「基本情形」則是抽離具體情境，直接以數字列舉選取物品的個數列舉，可參見實例 85-87；而討論「異同情形」是學生會利用題目的具體情境，對於「種類」相同與相異的個數進行討論，參見實例 88。

從實例 88 中可看出學生討論異同的程序，她先依照種類的「全同」到「全異」的程序討論，再利用組合選取，分別寫出每一種情形的組合數，最後加總組合數而求出正確答案。

討論異同情形會因為選取的物品個數多寡，而決定討論狀況的複雜程度。如果討論的狀況很少時，就比較適合運用此基模，但是如果選取的物品個數較多(如第 2 題)，討論的狀況就會變得較為複雜，學生可能會改用「實際數字」重新列舉，參見實例 89。

在實例 89 中，因為選取物品的個數較多，該生討論到「4 同 2 同 1 異」時產生困擾，轉向列舉方程式的「所有情形」，接續發現有太多的「所有情形」，所以就再把「所有情形」整合成「基本情形」，最後因為基本情形「3 3 1」誤寫為 6 種(應該為 3 種)，而得到錯誤的答案 39。該生在第二階段上台講解時，自己發現這個錯誤，更正得到正確答案 36。

原始題目	題型一：選物 2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？ (每種球的個數至少有 7 個)	學生代碼
實例 89		S_{13}



(二) 有相同物的理解基模

1.【基模 4】畫出兩類相同物作直線排列的理解基模

表 4-24

畫出兩類相同物作直線排列的理解基模具體行為

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解與心智交互作用的具體行為</td><td colspan="3">理解型式</td></tr>
<tr><td>工具式理解</td><td>關聯式理解</td><td>邏輯式理解</td></tr>
<tr><td rowspan="2">心智活動模式</td><td>直覺模式</td><td>I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。
I1-2.(2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。</td><td>R1-3.(2) 將題目同化到有相同物直線排列的理解基模。</td><td></td></tr>
<tr><td>反思模式</td><td></td><td></td><td>L2-1.(2) 能正確寫出與所使用的基模相對應的「有相同物直線排列符號 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 」。
L2-1.(3) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「組合符號 C_k^n 」。</td></tr>
</table>

(1) 表 4-24 中，具體行為出現順序可能有兩款：

a. 第一款(參見實例 90)

<u>Step 1.</u> R1-3.(2) 將題目同化到有相同物直線排列的理解基模。

<u>Step 2.</u> L2-1.(2) 能正確寫出與所使用的基模相對應的「有相同物直線排列符號 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 」。

Step 3. I1-2.(2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。

Step 4. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

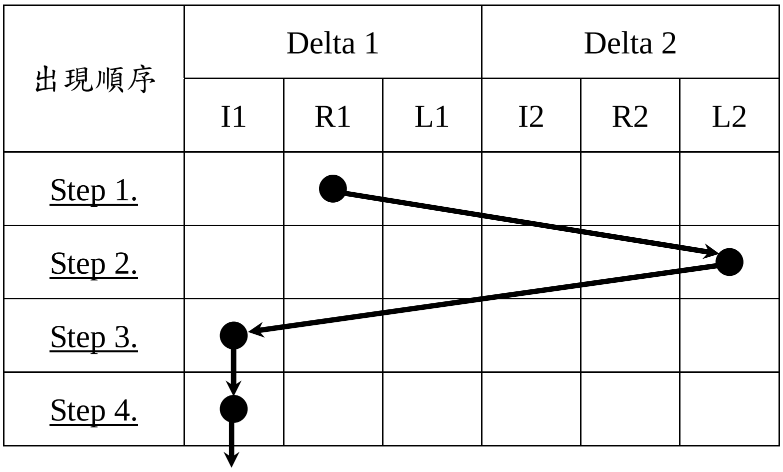
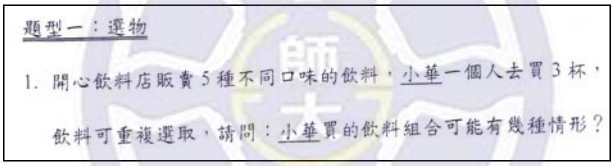


圖 4-6 【基模 4】(第一款)具體行為出現順序圖

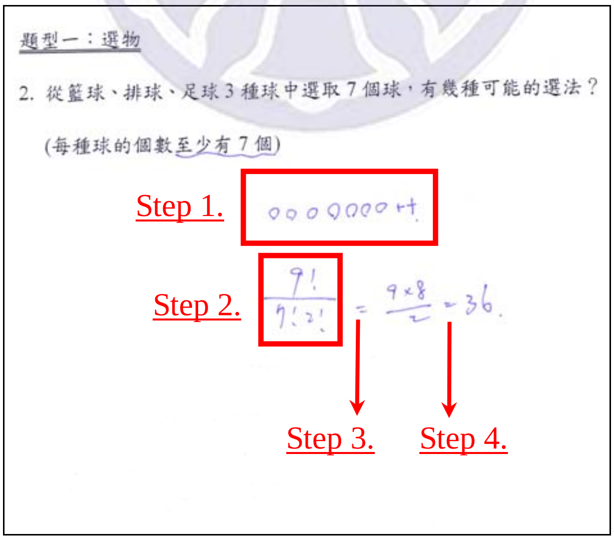
原始題目


題型一：選物

1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？

學生代碼

實例 89



S_{14}

b. 第二款(參見實例 91)

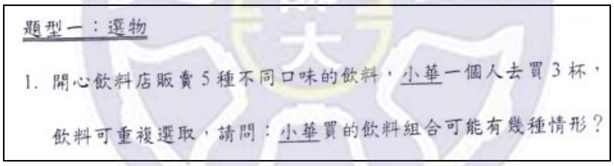
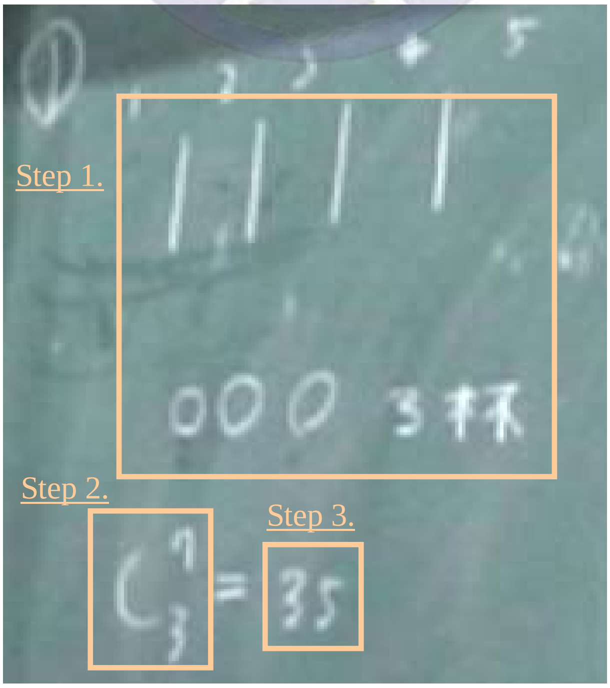
Step 1. R1-3.(2) 將題目同化到有相同物直線排列的理解基模。

Step 2. L2-1.(3) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「組合符號 C_k^n 」。

Step 3. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

出現順序	Delta 1			Delta 2		
	I1	R1	L1	I2	R2	L2
Step 1.		●				
Step 2.						●
Step 3.	●					

圖 4-7 【基模 4】(第二款)具體行為出現順序圖

原始題目	 題型一：選物 1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？	學生代碼
實例 90		S_{22}

(2)【基模 4】分析

a. 基模特性

(a) 優點：跳過代數符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換過程、應用一一對應原理(一種排法就是一種選法或分法)、聯結「兩種物品的直線排列數」與「組合數」概念。

(b) 缺點：隔板(n-1)與種類(n)的概念容易混淆、學生較難運用於處理特殊限制(如施測試題第 7 題)、聯結的概念較多學生不易記得。

b. 基模說明

這種基模使用了「有相同物作直線排列」處理問題。學生在看完題目之後，會畫出「k 個○」代表要選取或待分配的物品「k 個」，以及「n-1 個｜或 ＋ 」可分隔出 n 個不同的「種類」，接著利用「兩種物品的有相同物作直線排列」，寫出 k+n-1 個物品的直線排列方法數 $\dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ (第一款)，或是寫出組合符號 C_k^{k+n-1} 代表「○與｜」的直線排列數(第二款)，再進行計算。

第一款與第二款不同的是選用的計算工具。學生畫出「k 個○」與「n-1 個｜」這兩類相同物後，第一款直接選用有相同物的直線排列數，並進行計算，無須與組合符號連結；而第二款則將「兩類相同物的直線排列數」與「組合數」的概念作聯結，也就是說學生的思考是從 k+n-1 個格子中挑選 k 格放物品，以組合挑選的方式同樣可以達到直線排列的效果。

若要教重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換，第二款中「兩類有相同物的直線排列數」與「組合數」的連結就相當重要。

(三) 符號 H_k^n 的理解基模

1.【基模 5】使用符號 H_k^n 的理解基模

表 4-25

使用符號 H_k^n 的理解基模具體行為

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解與心智交互作用的具體行為</td><td colspan="3">理解型式</td></tr>
<tr><td>工具式理解</td><td>關聯式理解</td><td>邏輯式理解</td></tr>
<tr><td rowspan="2">心智活動模式</td><td>直覺模式</td><td>I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。
I1-2.(2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。</td><td>R1-3.(2) 將題目同化到使用符號 H_k^n 的理解基模。</td><td></td></tr>
<tr><td>反思模式</td><td></td><td></td><td>L2-1.(4) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「重複組合符號 H_k^n 」。</td></tr>
</table>

1. 表 4-25 中，具體行為出現順序：(參見實例 91、92)

<u>Step 1.</u> R1-3.(2) 將題目同化到使用符號 H_k^n 的理解基模。

<u>Step 2.</u> L2-1.(4) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「重複組合符號 H_k^n 」。

<u>Step 3.</u> I1-2.(2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。

<u>Step 4.</u> I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

*補充說明：

在上述第 3 步驟「轉換排列組合符號」時，學生會視情況使用轉換

規則，可能只要透過一次轉換就可進行計算(如實例 91)，也可能會一直轉換，直到他可以進行常規計算為止(如實例 92)。

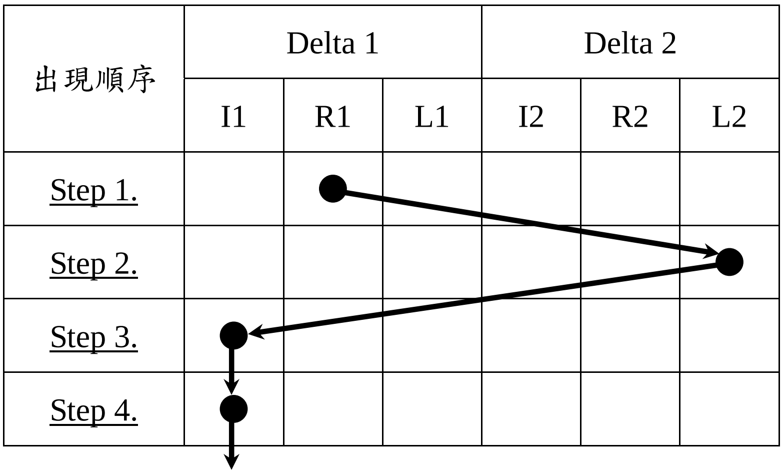
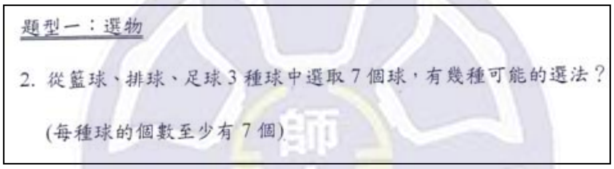
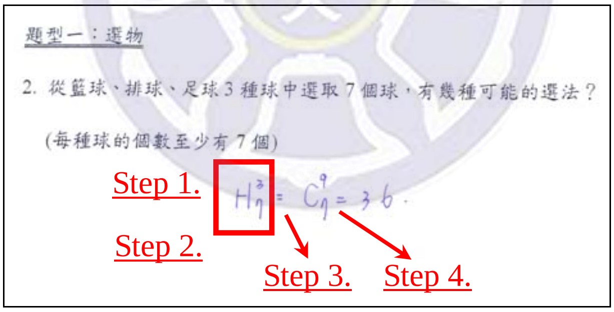
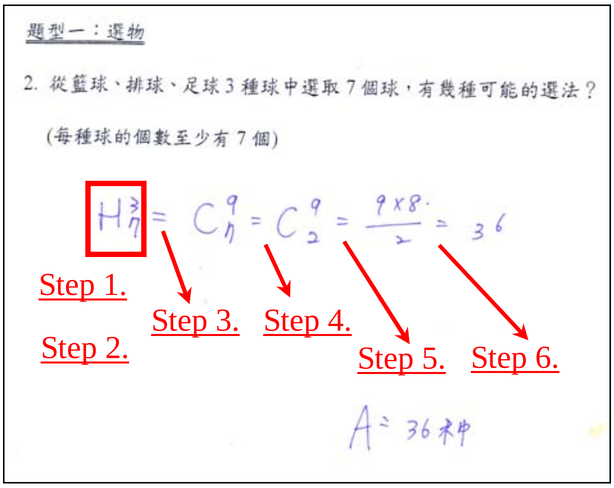


圖 4-8 【基模 5】具體行為出現順序圖

原始題目		學生代碼
實例 91		S_{23}
實例 92		S_{22}

有時候學生會先寫出一個方程式再使用【基模 5】，也就是說學生會在使用【基模 5】之前，會多一個具體行為步驟，即「R1-2.(3) 能掌握題目的結構，寫出一個符合題目敘述的方程式。」再搭配使用【基模 5】，請參看以下步驟所述，並參見實例 93、94。

<u>Step 1.</u> R1-2.(3) 能掌握題目的結構，寫出一個符合題目敘述的方程式。

<u>Step 2.</u> R1-3.(3) 將題目同化到使用符號 H_k^n 的理解基模。

<u>Step 3.</u> L2-1.(4) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「重複組合符號 H_k^n 」。

<u>Step 4.</u> I1-2(2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。

<u>Step 5.</u> I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。

*補充說明：

在上述第 4 步驟「轉換排列組合符號」時，學生會視情況使用轉換規則，可能只要透過一次轉換就可進行計算(如實例 93)，也可能會一直轉換，直到他可以進行常規計算為止(如實例 94)。

出現順序	Delta 1			Delta 2		
	I1	R1	L1	I2	R2	L2
<u>Step 1.</u>		●				
<u>Step 2.</u>		●				
<u>Step 3.</u>						●
<u>Step 4.</u>	●					
<u>Step 5.</u>	●					

圖 4-9 寫出方程式後使用【基模 5】具體行為出現順序圖

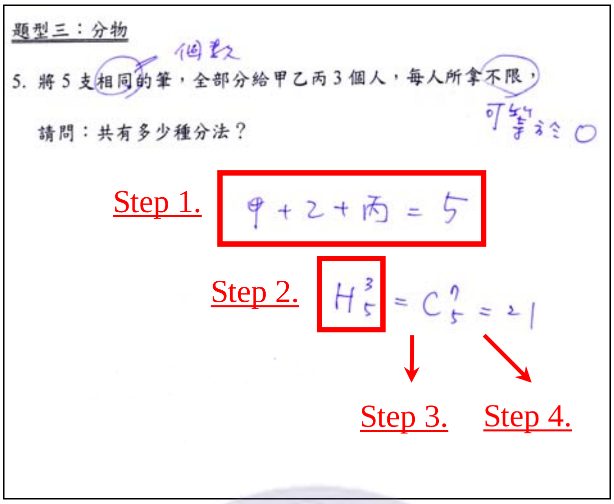
原始題目

題型三：分物

5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，請問：共有多少種分法？

學生代碼

實例 93


題型三：分物

個數

5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限，

可等於 0

請問：共有多少種分法？

Step 1. $\boxed{甲+乙+丙=5}$

Step 2. $\boxed{H^3_5} = C^7_5 = 21$

Step 3. Step 4.

S_{21}

原始題目

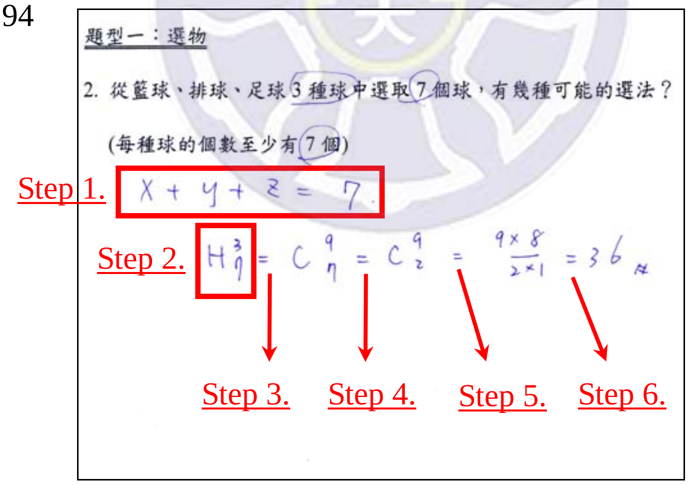
題型一：選物

2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？

(每種球的個數至少有 7 個)

學生代碼

實例 94


題型一：選物

2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？

(每種球的個數至少有 7 個)

Step 1. $\boxed{x+y+z=7}$

Step 2. $\boxed{H^3_7} = C^9_7 = C^9_2 = \frac{9\times 8}{2\times 1} = 36$ #

Step 3. Step 4. Step 5. Step 6.

S_{21}

(2)【基模 5】分析

a. 基模特性

(a) 優點：快速得到答案、展現數學符號的優勢。

(b) 缺點：重複組合符號 H_k^n 抽象學生不容易連結、重複組合符號 H_k^n 中 n,k 的概念容易與 C_k^n 混淆、記憶多重規則容易退化。

b. 基模說明

這種基模使用了重複組合符號 H_k^n 處理問題。在使用符號 H_k^n 之前，學生會先把題目同化成可以使用符號 H_k^n 的基模，然後他需要判斷在題目敘述中，哪個數字代表「n」，哪個數字代表「k」，再代入重複組合符號 H_k^n 之中。研究者整理對於符號 H_k^n 中「n」與「k」的概念解讀，見表 4-26。

表 4-26

對於符號 H_k^n 中「n」與「k」的概念解讀

題目類型	編號	n 的概念解讀	k 的概念解讀
選物	(1)	可重複選取的種類	無次序性要選擇的物品個數
	(2)	未必要選到的種類	全部要選完的物品個數
	(3)	不同的選擇	要選取的個數
方程式	(4)	非負整數解的未知數個數	常數項的數字
分物	(5)	可重複分配的種類	無次序性要分配的物品個數
	(6)	未必要分到的種類	全部要分完的物品個數
	(7)	不同的東西	相同的東西

使用符號H_k^n處理問題，一定會需要利用轉換規則$H_k^n = C_k^{n+k-1}$進行計算。在本研究中，有使用或知道可以使用符號H_k^n的學生(S_{11}、S_{12}、S_{15}、S_{21}、S_{22}、S_{23}、S_{24})，只要他能正確寫出符合題目條件的符號H_k^n，都能夠利用規則$H_k^n = C_k^{n+k-1}$轉換符號；然而在他們之中，只有S_{22}與S_{24}這兩位學生可以運用【基模 4】說明施測題目的第 8 題，顯見在施測學生之中，大部分的學生把轉換符號$H_k^n = C_k^{n+k-1}$當作是「工具式」的操作規則。

「方程式」是重複組合特有的題型，而數學符號的簡潔，讓許多學生「只能遠觀」，難以親近。在高中數學課程中，依照研究者的教學經驗，學生容易產生放棄的單元，往往伴隨著對學生來說是難以理解的抽象代數符號，例如「指對數的 log」、「級數的Σ」、「三角函數 sin,cos,tan,…」，以及「重複組合H_k^n」等。

在受測學生當中，每位學生都表示聽過或知道重複組合H_k^n這個記號，但是能夠成功使用符號H_k^n處理重複組合的問題，有五位學生，其中有一位是文組的學生(S_{11})，而S_{11}在第三階段表示，利用符號H_k^n寫對的第 1、6 題，其實是她憑印象亂猜猜對的，而另外四位都是理組的學生(S_{21}、S_{22}、S_{23}、S_{24})，他們對於符號H_k^n都有「種類」與「個數」的正確概念。

「一元 n 次方程式的非負整數解」是重複組合常見的題目敘述，其中「非負整數」是個必須要花時間向學生釐清的概念。就英文來說，可以知道「nonnegative integer」意思指的是「非負的整數」，而「整數」又可分為「正整數」、「0」、「負整數」三個部分，因此，「非負的整數」是在這個數是「整數」的前提下，扣除

「負的整數」這個可能，剩下來就是「正的整數」或「0」，而學生常常會有「非黑即白」的想法：「不是負的，那就是正的囉！」這是學生在重複組合這個單元容易產生許多困難的原因之一。

再者，組合符號 C_k^n 與重複組合符號 H_k^n 有著截然不同的概念。學生學習 C_k^n 不太會混淆是因為他們大多都能接受「從 n 個不同的東西挑出 k 個」的概念，也知道此時 $n \geq k$ 自然成立。然而符號 H_k^n 的概念是「從 n 種不同的東西(可重複)挑出 k 個」，此時 $n \geq k$ 就不一定成立，對於符號與概念的連結往往是學生的學習盲點。

基本上由施測學生產生的五個基模，大多也就是老師教學的產物。每個理解基模都有它切入的角度，每位學生能夠接受的難度也各有不同，研究者教學時會講解各種解法給學生，鼓勵學生學好自己聽得懂的那種解法，正如「青菜羅蔔各有所好」的道理。

第三節 分析學生理解情形

本節分為兩個部分：一、統整學生最終的行為代碼(師生對談後)，二、分析學生使用的理解基模。

一、統整學生最終的行為代碼(師生對談後)

Skemp (1987)提到：「第二系統(Delta 2)的功能是「優化(optimise)」第一系統(Delta 1)的功能」。本研究發現，由學生的具體行為所歸納的五個理解基模，都有出現屬於第二系統的具體行為，而出現在第二系統的具體行為，也都是作用在第一系統之上，幫助第一系統產生最佳的工具操作與概念聯結。

經過師生對談後，研究者協助學生對於自己處理問題的過程，進行修正或說明，並重新整理每位學生處理重複組合的八道問題，所產生的具體行為步驟，將各題的具體行為代碼整理如下表 4-27~表 4-36。本節分析學生的理解情形，依照學生最後處理問題的具體行為進行報導。

表 4-27

師生對話後 S_{11} 每一題產生的具體行為步驟

S_{11}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 2 題	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 3 題	L1-1	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 4 題	L1-1	R2-5	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 5 題	L1-1	R2-5	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 6 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 7 題	R1-2	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 8 題	可依教師引導說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1~6 題皆使用【基模 5】；第 7 題使用【基模 2】。

表 4-28

師生對話後 S_{12} 每一題產生的具體行為步驟

S_{12}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	L1-1	R2-5	R1-3	I1-1	R2-1	L2-1	R2-4	I1-2
第 2 題	R1-2	R2-5	R1-3	I1-1	R2-1	L2-1	R2-4	I1-2
第 3 題	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 4 題	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 5 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 6 題	R1-2	L1-2	L2-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 7 題	R1-2	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	I1-1		
第 8 題	可依教師引導說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1~2 題皆使用【基模 2】；第 3~6 題皆使用【基模 5】；第 7 題使用【基模 1】。

表 4-29

師生對話後 S_{13} 每一題產生的具體行為步驟

S_{13}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-3	I1-1	R2-1	L2-1	R2-4	I1-2		
第 2 題	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2		
第 3 題	R1-2	R2-5	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 4 題	L1-2	L2-1	R1-3	I1-1	R2-1	L2-1	R2-4	I1-2
第 5 題	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2		
第 6 題	R1-2	L1-2	L2-1	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2
第 7 題	R1-2	L2-1	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 8 題	可依教師引導說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1 題使用【基模 3】；第 2~7 題皆使用【基模 2】。

表 4-30

師生對話後 S_{14} 每一題產生的具體行為步驟

S_{14}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 2 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 3 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 4 題	R1-1	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 5 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			

(續下頁)

第 6 題	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 7 題	R1-1	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 8 題	可依教師引導說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1~6 題皆使用【基模 4】；第 7 題使用【基模 2】。

表 4-31

師生對話後 S_{15} 每一題產生的具體行為步驟

S_{15}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	L1-1	I2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 2 題	L1-1	I2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 3 題	R1-1	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 4 題	R1-1	R1-3	I1-1	R2-1	L2-1	R2-4-	I1-2	
第 5 題	L1-1	I2-1	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4-	I1-2	
第 6 題	R1-1	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 7 題	L1-1	I2-1	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 8 題	可以操作符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$，但是無法依教師引導理解符號轉換的數學概念。							

註：該生第 1~2 題皆使用【基模 5】；第 3~7 題使用【基模 2】。

表 4-32

師生對話後 S_{21} 每一題產生的具體行為步驟

S_{21}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	L1-1	I2-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 2 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 3 題	R1-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 4 題	R1-1	R1-2	L2-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 5 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 6 題	R1-1	R1-2	L2-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 7 題	R1-1	R1-2	L1-2	L2-1	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2
第 8 題	可依教師引導說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1~7 題皆使用【基模 5】。

表 4-33

師生對話後 S_{22} 每一題產生的具體行為步驟

S_{22}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R1-1	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 2 題	R1-1	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 3 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 4 題	R1-1	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 5 題	R1-1	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 6 題	R1-1	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2	
第 7 題	R1-1	L1-1	L1-2	L1-3	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2
第 8 題	師生對談前就可自行說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1~7 題皆使用【基模 5】。

表 4-34

師生對話後 S_{23} 每一題產生的具體行為步驟

S_{23}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 2 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 3 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 4 題	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 5 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 6 題	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 7 題	R1-2	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-1	
第 8 題	可依教師引導說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1~6 題皆使用【基模 5】；第 7 題使用【基模 2】。

表 4-35

師生對話後 S_{24} 每一題產生的具體行為步驟

S_{24}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	L1-1	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 2 題	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 3 題	R1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2			
第 4 題	R1-2	L1-2	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 5 題	R1-3	I1-1	R2-1	I1-1				
第 6 題	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	I1-1			

(續下頁)

第 7 題	L1-1	I2-1	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 8 題	師生對談前就可自行說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1~4 題皆使用【基模 5】；第 5、6 題使用【基模 1】；第 7 題使用【基模 2】。

表 4-36

師生對話後 S_{25} 每一題產生的具體行為步驟

S_{25}	Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6	Step7	Step8
第 1 題	L1-1	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 2 題	L1-1	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 3 題	L1-1	I2-1	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2	
第 4 題	L1-1	R2-5	R1-3	L2-1	I1-2	I1-2		
第 5 題	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2			
第 6 題	L1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2		
第 7 題	R1-2	R1-3	I1-1	R2-1	R2-4	I1-2		
第 8 題	可依教師引導說明重複組合符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換。							

註：該生第 1、2、4 題皆使用【基模 4】；第 3、5~7 題皆使用【基模 2】。

從表 4-27~表 4-36 中，統計學生使用理解基模的次數，整理出表 4-37。十位學生每位統計 7 題，共 70 題，第 8 題為說明題，故不列入統計。

表 4-37

學生使用五個理解基模的次數統計表

基模 / 次數 / 學生	(一)			(二)	(三)
	【基模 1】	【基模 2】	【基模 3】	【基模 4】	【基模 5】
S_{11}(女/低)		1			6
S_{12}(女/低)	1	2			4
S_{13}(女/低)		6	1		
S_{14}(男/高)		1		6	
S_{15}(男/低)		5			2
S_{21}(女/高)					7
S_{22}(女/高)					7
S_{23}(女/高)		1			6
S_{24}(男/中)	2	1			4
S_{25}(男/高)		4		3	

二、分析學生使用的理解基模

研究者依照五個向度分析學生使用理解基模的情形，分別是：1. 分析個別學生，2. 分析不同類組，3. 分析不同性別，4. 分析不同程度，5. 分析不同題型。

1. 分析個別學生

將表 4-37 轉換成相對次數統計表，得到表 4-38。

表 4-38

學生使用五個理解基模的相對次數統計表

基模／題數／學生	(一)				(二)	(三)
	【基模 1】	【基模 2】	【基模 3】	小計	【基模 4】	【基模 5】
S_{11}(女/低)		14%		14%		86%
S_{12}(女/低)	14%	29%		43%		57%
S_{13}(女/低)		86%	14%	100%		
S_{14}(男/高)		14%		14%	86%	
S_{15}(男/低)		71%		71%		29%
S_{21}(女/高)						100%
S_{22}(女/高)						100%
S_{23}(女/高)		14%		14%		86%
S_{24}(男/中)	29%	14%		43%		57%
S_{25}(男/高)		57%		57%	43%	

註：【基模 1】+【基模 2】+【基模 3】=小計，為「(一)列舉討論的理解基模」的累積相對次數統計量。空白表格代表 0%。

觀察表 4-38，從學生使用理解基模的比例，可將學生分成兩大類型：

(1) 單一型使用理解基模

a. 單一型使用列舉討論的理解基模—S_{13}。

b. 單一型使用符號 H_k^n 的理解基模—S_{21} 、S_{22}。

(2) 綜合型使用理解基模

a. 綜合型使用列舉討論&有相同物的理解基模—S_{14} 、S_{25}。

b. 綜合型使用列舉討論&符號 H_k^n 的理解基模—S_{11}、S_{12}、S_{15}、S_{23}、S_{24}。

2. 分析不同類組

將表 4-38 的統計數據依照「類組」重新整理得到表 4-39。

表 4-39

學生使用三種理解基模的相對次數統計表(依不同類組)

一類學生 \ 基模類型	(一)	(二)	(三)	二類學生 \ 基模類型	(一)	(二)	(三)
S_{11}(女/低)	14%		86%	S_{21}(女/高)			100%
S_{12}(女/低)	43%		57%	S_{22}(女/高)			100%
S_{13}(女/低)	100%			S_{23}(女/高)	14%		86%
S_{14}(男/高)	14%	86%		S_{24}(男/中)	43%		57%
S_{15}(男/低)	71%		29%	S_{25}(男/高)	57%	43%	
平均比例	48.4%	17.2%	34.4%	平均比例	22.8%	8.6%	68.6%

註：三種理解基模類型分別為(一)列舉討論的理解基模；(二)有相同物的理解基模；(三)符號 H_k^n 的理解基模。詳見本論文第肆章第二節。

觀察表 4-39，不管是第一類組(文組)的學生，還是第二類組(理組)的學生，在處理重複組合問題的過程中，各別都有使用這三種理解基模的情形，而這三種理解基模使用的平均比例略有不同：

(1) 第一類組(文組)學生平均使用理解基模比例由高到低為「列舉討論的理解基模—符號 H_k^n 的理解基模—有相同物的理解基模」。

(2) 第二類組(理組)學生平均使用理解基模比例由高到低為「符號 H_k^n 的理解基模—列舉討論的理解基模—有相同物的理解基模」。

3. 分析不同性別

將表 4-38 的統計數據依照「性別」重新整理得到表 4-40。

表 4-40

學生使用三種理解基模的相對次數統計表(依學生性別)

基模類型 / 女學生	(一)	(二)	(三)	基模類型 / 男學生	(一)	(二)	(三)
S_{11}(女/低)	14%		86%	S_{14}(男/高)	14%	86%	
S_{12}(女/低)	43%		57%	S_{15}(男/低)	71%		29%
S_{13}(女/低)	100%			S_{24}(男/中)	43%		57%
S_{21}(女/高)			100%	S_{25}(男/高)	57%	43%	
S_{22}(女/高)			100%				
S_{23}(女/高)	14%		86%				
平均比例	28.5%	0%	71.5%	平均比例	46.25%	32.25%	21.5%

觀察表 4-40，可以發現女生在處理重複組合問題時，沒有使用有相同物的理解基模，而男生有使用三種理解基模，使用平均比例敘述如下：

(1) 女學生平均使用理解基模比例由高到低為「符號 H_k^n 的理解基模—列舉討論的理解基模」，沒有出現「有相同物的理解基模」。

(2) 男學生平均使用理解基模比例由高到低為「列舉討論的理解基模—有相同物的理解基模—符號 H_k^n 的理解基模」。

4. 分析不同程度

將表 4-38 的統計數據依照「程度」的屬性重新整理得到表 4-41。

表 4-41

學生使用三種理解基模的相對次數統計表(依學生程度)

中低程度學生 \ 基模類型	(一)	(二)	(三)	高程度學生 \ 基模類型	(一)	(二)	(三)
S_{11}(女/低)	14%		86%	S_{14}(男/高)	14%	86%	
S_{12}(女/低)	43%		57%	S_{21}(女/高)			100%
S_{13}(女/低)	100%			S_{22}(女/高)			100%
S_{15}(男/低)	71%		29%	S_{23}(女/高)	14%		86%
S_{24}(男/中)	43%		57%	S_{25}(男/高)	57%	43%	
平均比例	54.2%	0%	45.8%	平均比例	17%	25.8%	57.2%

觀察表 4-41，可以發現中低程度學生在處理重複組合問題時，沒有使用有相同物的理解基模，而高程度學生有使用三種理解基模，使用的平均比例敘述如下：

(1) 中低程度學生平均使用理解基模比例由高到低為「列舉討論的理解基模—符號 H_k^n 的理解基模」，沒有出現「有相同物的理解基模」。

(2) 高程度學生平均使用理解基模比例由高到低為「符號 H_k^n 的理解基模—有相同物的理解基模—列舉討論的理解基模」。

5. 分析不同題型

(1) 個別學生

將表 4-27~表 4-36 中，學生於第 1 題到第 7 題所使用的理解基模類型，依照「題型」的屬性，整理出表 4-42。

表 4-42

學生使用三種理解基模表(依不同題型)

題目 \ 基模 \ 學生		S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{21}	S_{22}	S_{23}	S_{24}	S_{25}
選物	1.	(三)	(一)	(一)	(二)	(三)	(三)	(三)	(三)	(三)	(二)
	2.	(三)	(一)	(一)	(二)	(三)	(三)	(三)	(三)	(三)	(二)
方程式	3.	(三)	(三)	(一)	(二)	(一)	(三)	(三)	(三)	(三)	(二)
	4.	(三)	(三)	(一)	(二)	(一)	(三)	(三)	(三)	(三)	(二)
分物	5.	(三)	(三)	(一)	(二)	(一)	(三)	(三)	(三)	(一)	(一)
	6.	(三)	(三)	(一)	(二)	(一)	(三)	(三)	(三)	(一)	(一)
	7.	(一)	(一)	(一)	(一)	(一)	(三)	(三)	(一)	(一)	(一)

觀察表 4-42 可以發現，在處理不同類型的題目過程中：

a. 選物題型—每位學生均使用相同的理解基模，處理第 1、2 題。

b. 方程式題型—每位學生均使用相同的理解基模，處理第 3、4 題。

c. 分物題型—每位學生均使用相同的理解基模，處理第 5、6 題。但是分物題型的第 7 題是比較困難的題目，有八位學生使用「列舉討論的理解基模」處理問題，有兩位學生使用「符號 H_k^n 的理解基模」處理問題。在處理分物題型的三題之中，學生使用的理解基模可分成四種狀況：

(a) 三題均使用列舉討論的理解基模有四人—S_{13}、S_{15}、S_{24}、S_{25}。

(b) 三題均使用符號 H_k^n 的理解基模有兩人—S_{21}、S_{22}。

(c) 從使用符號 H_k^n 變成使用列舉討論的理解基模有三人—S_{11}、S_{12}、S_{23}。

(d) 從使用有相同物變成使用列舉討論的理解基模有一人—S_{14}。

(2) 學生整體

研究者統計表 4-42 中，學生整體使用理解基模的次數，並計算其相對次數百分比，整理出表 4-43。

表 4-43

學生使用三種理解基模的相對次數統計表(依不同題型)

題目類型 \ 基模		(一)	(二)	(三)
選物	1.	20%	20%	60%
	2.	20%	20%	60%
選物類型平均		20%	20%	60%
方程式	3.	20%	20%	60%
	4.	20%	20%	60%
方程式類型平均		20%	20%	60%
分物	5.	40%	10%	50%
	6.	40%	10%	50%
	7.	80%	0%	20%
分物類型平均		53%	7%	40%
全部平均		34.3%	14.3%	51.4%

觀察表 4-43，在處理不同類型的題目時，十位學生平均使用的理解基模：

a. 選物題型—比例最高為「符號 H_k^n 的理解基模」，而「列舉討論的理解基模」與「有相同物的理解基模」平均使用比例相同。

b. 方程式題型—比例與「選物類型」的狀況相同。

c. 分物題型—比例最高為「列舉討論的理解基模」，其次為「符號 H_k^n 的理解基模」，最低為「有相同物的理解基模」。

d. 全部題型—比例最高為「符號 H_k^n 的理解基模」，其次為「列舉討論的理解基模」，最低為「有相同物的理解基模」。

第伍章 結論與建議

本章根據研究問題與研究結果提出整合性的結論，以及研究者在研究過程中的反思與建議。本章共有兩節：第一節結論，第二節反思與建議。

第一節 結論

本節整合研究結果與分析，整理本研究的結論。本節共有三個部分：一、整合 Skemp 理解架構中的具體行為，二、整合重複組合理解基模，三、統整受測學生對於重複組合的理解情形。

一、整合 Skemp 理解架構中的具體行為

根據研究的結果與分析，研究者將 Skemp 理解架構與學生的具體行為統整在一起，得到表 5-1~表 5-6。

表 5-1

Skemp 理解架構類別 I1 具體行為細項

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解型式與心智活動模式產生的交互作用</td><td>理解型式</td></tr>
<tr><td>工具式理解 Instrumental understanding</td></tr>
<tr><td>心智活動模式</td><td>直覺模式</td><td><u>類別 I1</u>
在處理問題的過程中，學生
I1-1. 能以機械式演算的方式給出答案
(1) 一一列舉可能的「所有情形」。
(2) 點數總數得到結果。
(3) 一一列舉可能的「基本情形」。
(4) 一一列舉可能的「異同情形」。
I1-2. 能夠流暢且不假思索地執行一個適當已記憶的規則
（續下頁）</td></tr>
</table>

		(1) 執行常規計算流暢且不假思索。 (2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。 I1-3.知道可以使用一個適當已記憶的規則，卻不知道這個規則如何操作 (1) 以口語說出題目的敘述滿足使用重複組合的符號 H，卻不知道如何操作 H。 (2) 依題目的條件寫下重複組合的符號 H_k^n，卻不知道如何操作 H_k^n。 I1-4.使得已記憶的規則在遭遇不同情境時退化 (1) 使用符號 H_k^n 時，無法確定 n,k 的擺放位置。 (2) 使用符號 H_k^n 時，n,k 的擺放位置上下顛倒。 (3) 使用規則轉換排列組合符號時產生錯誤。 I1-5.操作一些沒有聯結到題目概念的符號 (1) 以「重複排列」的概念操作符號處理重複組合的問題。 (2) 以「組合」的概念操作符號處理重複組合的問題。 (3) 操作「重複組合」的符號，但是無法確實聯結到題目所指的概念。

詳見本論文第肆章第一節(pp. 65-78)。

表 5-2

Skemp 理解架構類別 R1 具體行為細項

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解型式與心智活動
模式產生的交互作用</td><td>理解型式</td></tr>
<tr><td>關聯式理解 Relational understanding</td></tr>
<tr><td>心智
活動
模式</td><td>直覺模式</td><td><u>類別 R1</u>
在處理問題的過程中，學生
R1-1. 能夠確定對於題目的一些感知
(1) 以書寫方式標記關鍵條件。
(2) 以口語強調關鍵條件。
R1-2. 能夠掌握題目的意義、特性或結構
(1) 以數學符號加注或文字加注，寫下題目關鍵字所代表的意義或特性。
(2) 以口語方式加注，說出題目關鍵字所代表的意義或特性。
(3) 能掌握題目的結構，寫出一個符合題目敘述的方程式。
R1-3. 能夠將來自外在環境的訊息，直接同化到一個適當的基模中
(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。
(2) 將題目同化到有相同物直線排列的理解基模。
(3) 將題目同化到使用符號 H_k^n 的理解基模。
R1-4. 輸入訊息後啟動不適當的想法
(1) 學生看過重複組合題目後，使用「重複排列」的概念處理問題。

(續下頁)</td></tr>
</table>

		(2) 學生看過重複組合題目後，使用「組合」的概念處理問題。 (3) 學生看過重複組合題目後，使用第一個想法處理問題，若經執行或思考而產生第二個想法，則第一個想法即為學生啟動的不適當想法。

詳見本論文第肆章第一節(pp. 78-93)。

表 5-3

Skemp 理解架構類別 L1 具體行為細項

理解型式與心智活動模式產生的交互作用		理解型式
		邏輯式理解 Logical understanding
心智活動模式	直覺模式	**<u>類別 L1</u>** 在處理問題的過程中，學生 L1-1. 能夠察覺題目敘述中的怪異處 (1) 能夠察覺題目敘述中的特殊條件或限制。 (2) 發出一些聲音顯示他察覺到怪異處。 (3) 針對題目的敘述拋出問題。 L1-2. 能夠針對題目的敘述給出一些推論 (1) 以口語方式對題目的敘述作出一些推論。 (2) 以書寫方式對題目的敘述作出一些推論。 L1-3. 透過一個例子來說明他的推論 (1) 能夠舉出實際的例子說明他所得到的推論。 (2) 能夠舉出實際的反例說明推論中錯誤的地方。

詳見本論文第肆章第一節(pp. 94-99)。

表 5-4

Skemp 理解架構類別 I2 具體行為細項

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解型式與心智活動模式產生的交互作用</td><td>理解型式</td></tr>
<tr><td>工具式理解 Instrumental understanding</td></tr>
<tr><td>心智活動模式</td><td>反思模式</td><td><u>類別 I2</u>
在處理問題的過程中，學生
I2-1. 修正他所操作的演算過程
(1) 能夠修正使用列舉討論理解基模時的不當操作。
(2) 能夠修正使用符號轉換規則時的不當操作。
(3) 能夠修正使用符號 H_k^n 的不當操作。
I2-2. 說明他如何操作一個適當已記憶的規則，卻不知道這個規則運作的數學概念
(1) 能夠說出轉換符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的操作規則，但是不能說明第 8 題。</td></tr>
</table>

詳見本論文第肆章第一節(pp. 100-103)。

表 5-5

Skemp 理解架構類別 R2 具體行為細項

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解型式與心智活動模式產生的交互作用</td><td>理解型式</td></tr>
<tr><td>關聯式理解 Relational understanding</td></tr>
<tr><td>心智活動模式</td><td>反思模式</td><td><u>類別 R2</u>
在處理問題的過程中，學生
R2-1. 能夠推論出特定的列舉程序
(1) 能夠有一定的程序列舉可能的「所有情形」。
(續下頁)</td></tr>
</table>

		(2) 能夠有一定的程序列舉可能的「基本情形」。 (3) 能夠有一定的程序列舉可能的「異同情形」。 (4) 確認在列舉的過程中「可以列出 0」。 R2-2. 能夠推論出特定的符號規則 (1) 能以實際的數字為例，說明重複組合 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 符號的轉換。 (2) 能以抽象的代數符號，說明重複組合 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 符號的轉換。 R2-3. 能夠以關聯式的論點驗證他所應用的規則 (1) 使用符號 H_k^n 時，確認題目有「可重複選取」的條件。 (2) 使用符號 H_k^n 時，確認題目有「非負整數解」的條件。 R2-4. 能夠結合一些常規而得到答案 (1) 能夠結合常規，直接寫出「有相同物的直線排列數」。 (2) 能夠結合常規，直接寫出「組合數」。 R2-5. 能夠修正不適當的想法 (1) 能夠修正錯誤的想法，改用正確的基模。 (2) 能夠調整原先的想法，改用其他正確的基模。

詳見本論文第肆章第一節(pp. 103-112)。

表 5-6

Skemp 理解架構類別 L2 具體行為細項

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">理解型式與心智活動
模式產生的交互作用</td><td>理解型式</td></tr>
<tr><td>邏輯式理解 Logical understanding</td></tr>
<tr><td>心智
活動
模式</td><td>反思模式</td><td><u>類別 L2</u>
在處理問題的過程中，學生
L2-1. 能夠聯結具有相應數學概念的符號
(1) 能夠依照題目的特殊條件，寫出一個新的方程式。
(2) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「有相同物直線排列符號 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 」。
(3) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「組合符號 C_k^n 」。
(4) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「重複組合符號 H_k^n 」。
L2-2. 以一連串合乎邏輯的嚴格推論，證明或展示對於問題完整的數學論述
(1) 能夠以相應的數學概念，完整地說明對於題目的推論過程。
(2) 能夠以相應的數學概念，對於老師提出的問題說出自己的論點。</td></tr>
</table>

詳見本論文第肆章第一節(pp. 113-120)。

二、整合重複組合理解基模

本研究依照受測學生具體行為，將重複組合理解基模歸納成三種類型，共有五個基模，分別整合敘述下：

(一) 三種類型

1. 列舉討論的理解基模。(包含【基模 1】、【基模 2】、【基模 3】)

2. 有相同物的理解基模。(包含【基模 4】)

3. 符號 H_k^n 的理解基模。(包含【基模 5】)

(二) 五個基模

1.【基模 1】列舉所有情形接著點數總數的理解基模

2.【基模 2】列舉基本情形接著加總排列數的理解基模

3.【基模 3】討論異同情形接著加總組合數的理解基模

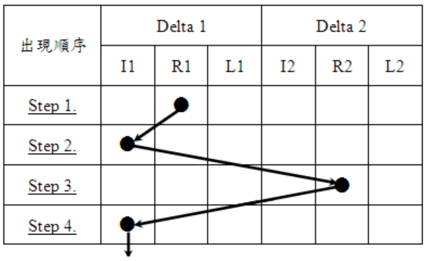
4.【基模 4】畫出兩類相同物作直線排列的理解基模

5.【基模 5】使用符號 H_k^n 的理解基模

根據研究的結果與分析，研究者將五個理解基模各別整合，得到表 5-7~表 5-11。

表 5-7
【基模 1】整合分析

基模名稱	【基模 1】列舉所有情形接著點數總數的理解基模
具體行為出現順序	Step 1. R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。 Step 2. I1-1.(1) 一一列舉可能的「所有情形」。 Step 3. R2-1.(1) 能夠有一定的程序列舉可能的「所有情形」。 Step 4. I1-1.(2) 點數總數得到結果。 (續下頁)

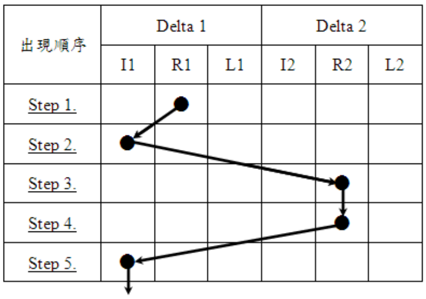
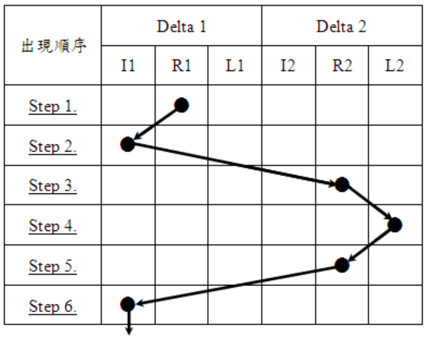
具體行為 出現順序 圖	
基模特性	(a) 優點：記憶負擔最少、當可能的所有情形較少時適用。 (b) 缺點：耗時、當列舉的狀況多時不適用、容易產生邏輯上的缺失(列舉遺漏或重複列舉)、列舉時沒有耐心因而增加焦慮。

詳見本論文第肆章第二節(pp. 126-128)。

表 5-8

【基模 2】整合分析

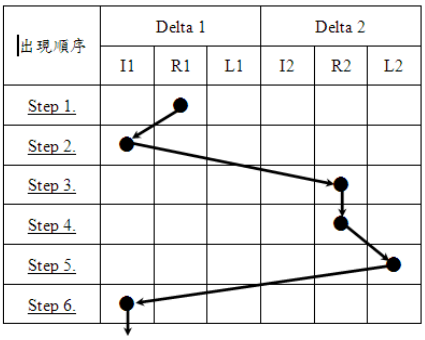
基模名稱	【基模 2】列舉基本情形接著加總排列數的理解基模
具體行為 出現順序	a. 第一款 Step 1. R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。 Step 2. I1-1.(3) 一一列舉可能的「基本情形」。 Step 3. R2-1.(2) 能夠有一定的程序列舉可能的「基本情形」。 Step 4. R2-4.(1) 能夠結合常規，直接寫出「有相同物的直線排列數」。 Step 5. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。 b. 第二款 Step 1. R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。 Step 2. I1-1.(3) 一一列舉可能的「基本情形」。 Step 3. R2-1.(2) 能夠有一定的程序列舉可能的「基本情形」。 Step 4. L2-1.(2) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「有相同物直 排列符號 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$」。 Step 5. R2-4.(1) 能夠結合常規，直接寫出「有相同物的直線排列數」。 Step 6. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。 (續下頁)

<table>
<tr><td>具體行為出現順序圖</td><td>a. 第一款
</td><td>b. 第二款
</td></tr>
<tr><td>基模特性</td><td colspan="2">(a) 優點：記憶負擔較少、當可能的基本情形較少時適用、有效整合可能的所有情形。
(b) 缺點：當列舉的狀況多時不適用、容易產生邏輯上的缺失(列舉遺漏或重複列舉)、排列數容易寫錯。</td></tr>
</table>

詳見本論文第肆章第二節(pp. 128-132)。

表 5-9

【基模 3】整合分析

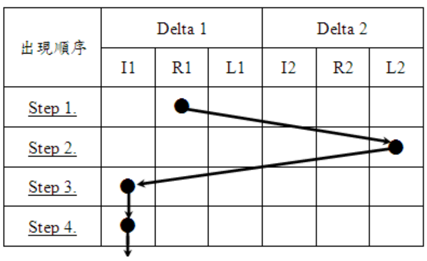
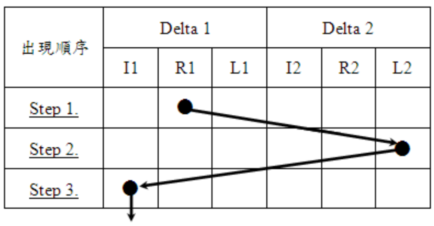
<table>
<tr><td>基模名稱</td><td>【基模 3】討論異同情形接著加總組合數的理解基模</td></tr>
<tr><td>具體行為出現順序</td><td><u>Step 1.</u> R1-3.(1) 將題目同化到列舉討論的理解基模。
<u>Step 2.</u> I1-1.(4) 一一列舉可能的「異同情形」。
<u>Step 3.</u> R2-1.(3) 能夠有一定的程序列舉可能的「異同情形」。
<u>Step 4.</u> R2-4.(2) 能夠結合常規，直接寫出「組合數」。
<u>Step 5.</u> L2-1.(3) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「組合符 C_k^n 」。
<u>Step 6.</u> I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。</td></tr>
<tr><td>具體行為出現順序圖</td><td>
(續下頁)</td></tr>
</table>

基模特性	(a) 優點：當異同情形較少時適用、根據題目敘述具體討論異同情形較不抽象。 (b) 缺點：當異同情形複雜時較不適用、組合數容易寫錯。

詳見本論文第肆章第二節(pp. 133-136)。

表 5-10

【基模 4】整合分析

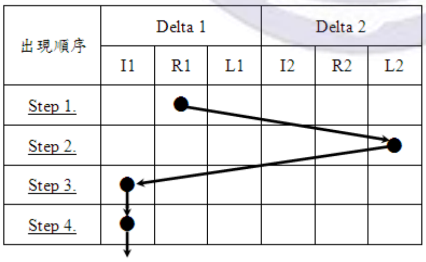
基模名稱	【基模 4】畫出兩類相同物作直線排列的理解基模
具體行為出現順序	a. 第一款 Step 1. R1-3.(2) 將題目同化到有相同物直線排列的理解基模。 Step 2. L2-1.(2) 能正確寫出與所使用的基模相對應的「有相同物直線排列符號 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 」。 Step 3. I1-2.(2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。 Step 4. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。 b. 第二款 Step 1. R1-3.(2) 將題目同化到有相同物直線排列的理解基模。 Step 2. L2-1.(3) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「組合符號 C_k^n 」。 Step 3. I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。
具體行為出現順序圖	a. 第一款  b. 第二款 

(續下頁)

基模特性	(a) 優點：跳過代數符號 $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 的轉換過程、應用一一對應原理(一種排法就是一種選法或分法)、聯結「兩種物品的直線排列數」與「組合數」概念。 (b) 缺點：隔板(n-1)與種類(n)的概念容易混淆、學生較難運用於處理特殊限制(如施測試題第 7 題)、聯結的概念較多學生不易記得。

詳見本論文第肆章第二節(pp. 137-140)。

表 5-11
【基模 5】整合分析

基模名稱	【基模 5】使用符號 H_k^n 的理解基模
具體行為出現順序	<u>Step 1.</u> R1-3.(2) 將題目同化到使用符號 H_k^n 的理解基模。 <u>Step 2.</u> L2-1.(4) 能夠正確寫出與所使用的基模相對應的「重複組合符號 H_k^n 」。 <u>Step 3.</u> I1-2.(2) 轉換排列組合符號流暢且不假思索。 <u>Step 4.</u> I1-2.(1) 執行常規計算流暢且不假思索。
具體行為出現順序圖	
基模特性	(a) 優點：快速得到答案、展現數學符號的優勢。 (b) 缺點：重複組合符號 H_k^n 抽象學生不容易連結、重複組合符號 H_k^n 中 n,k 的概念容易與 C_k^n 混淆、記憶多重規則容易退化。

詳見本論文第肆章第二節(pp. 141-147)。

三、統整受測學生對於重複組合的理解情形

研究者根據前兩個部分的整理與分析，統整受測學生在重複組合單元的理解情形，總共有五個項目，條列如下。

(一) 分析個別學生

1. 單一型使用理解基模

(1) 單一型使用列舉討論的理解基模—S_{13}。

(2) 單一型使用符號H_k^n的理解基模—S_{21}、S_{22}。

2. 綜合型使用理解基模

(1) 綜合型使用列舉討論&有相同物的理解基模—S_{14}、S_{25}。

(2) 綜合型使用列舉討論&符號H_k^n的理解基模—S_{11}、S_{12}、S_{15}、S_{23}、S_{24}。

(二) 分析不同類組

1. 第一類組(文組)學生使用理解基模平均比例由高到低為「列舉討論的理解基模—符號H_k^n的理解基模—有相同物的理解基模」。

2. 第二類組(理組)學生使用理解基模平均比例由高到低為「符號H_k^n的理解基模—列舉討論的理解基模—有相同物的理解基模」。

(三) 分析不同性別

1. 女學生使用理解基模平均比例由高到低為「符號H_k^n的理解基模—列舉討論的理解基模」，沒有出現「有相同物的理解基模」。

2. 男學生使用理解基模平均比例由高到低為「列舉討論的理解基模—有相同物的理解基模—符號H_k^n的理解基模」。

(四) 分析不同程度

1. 中低程度學生使用理解基模平均比例由高到低為「列舉討論的理解基模

—符號 H_k^n 的理解基模」，沒有出現「有相同物的理解基模」。

2. 高程度學生使用理解基模平均比例由高到低為「符號 H_k^n 的理解基模—有相同物的理解基模—列舉討論的理解基模」。

(五) 分析不同題型

1. 個別學生

(1) 選物題型—每位學生均使用相同的理解基模，處理第 1、2 題。

(2) 方程式題型—每位學生均使用相同的理解基模，處理第 3、4 題。

(3) 分物題型—每位學生均使用相同的理解基模，處理第 5、6 題。第 7 題較為困難，在處理分物題型的三題之中，學生使用的理解基模可分成四種狀況：

a. 三題均使用列舉討論的理解基模有四人—S_{13}、S_{15}、S_{24}、S_{25}。

b. 三題均使用符號 H_k^n 的理解基模有兩人—S_{21}、S_{22}。

c. 從使用符號 H_k^n 變成使用列舉討論的理解基模有三人—S_{11}、S_{12}、S_{23}。

d. 從使用有相同物變成使用列舉討論的理解基模有一人—S_{14}。

2. 學生整體

(1) 選物題型—平均比例最高為「符號 H_k^n 的理解基模」，而「列舉討論的理解基模」與「有相同物的理解基模」使用平均比例相同。

(2) 方程式題型—平均比例與「選物類型」的狀況相同。

(3) 分物題型—平均比例最高為「列舉討論的理解基模」，其次為「符號 H_k^n 的理解基模」，最低為「有相同物的理解基模」。

(4) 全部題型—平均比例最高為「符號 H_k^n 的理解基模」，其次為「列舉討論的理解基模」，最低為「有相同物的理解基模」。

第二節 反思與建議

本節為研究者依照四個方向進行本研究的反思與建議：一、關於研究方法，二、關於數學教學，三、關於未來研究，四、個人省思結語。

一、關於研究方法

(一) 研究對象的選擇

本研究的研究對象選定為高三學生，文理組參半。因為他們都已是透過多元入學管道，提前進入大學的學生，所以在施測活動以前大約有兩個月的時間，沒有很認真在唸書，突然要他們寫數學題目難免有些生疏。

因此研究者建議，重複組合單元是在高一下學期的課程，研究對象可以設定為高一學生，在學完重複組合這個單元的概念後，不要隔太久就進行施測活動，這樣蒐集到的資料透過本研究的分析結果，對學生的學習可以有立即性的回饋。

(二) 蒐集資料的方法

本研究規劃三個階段的施測活動，蒐集學生處理問題的具體行為，由於沒有事先訓練學生上台講解，研究者也以有限的教學經驗，於施測活動的第三階段提出問題，事後研究者看影音檔案，覺得研究者的提問仍有些不足。

因此研究者建議，如果能在施測活動以前先做前導研究，預先模擬學生會出現的問題，並且提前訓練學生的口語表達能力，相信更能改善蒐集資料的流暢度，讓研究者的提問更到位，也能夠收集到學生更完整的口語表達或板書資料。

(三) 施測試題的設計

請先看施測題目的第 5 題題目敘述，如圖 5-1：

題型三：分物
5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，每人所拿不限， 請問：共有多少種分法？

圖 5-1 重複組合施測題目第 5 題

以分物問題來說，我們(讀題者)要將東西分給甲乙丙 3 個人，所以在感受上，我們(讀題者)是「主詞」，甲乙丙 3 個人是「受詞」，題目敘述中「所拿不限」就會變成甲乙丙 3 個人去拿筆，而不是我們(讀題者)分筆給甲乙丙 3 個人。

研究者事後反省，應將題目的「所拿不限」修改成「任意分」，如下方題目敘述，這樣整題的主詞、受詞就不會混淆了。這是研究者一開始在設計題目時，沒有想到的缺失，透過這篇論文，研究者也獲得自我改進與提升。

題型三：分物
5. 將 5 支相同的筆，全部分給甲乙丙 3 個人，任意分， 請問：共有多少種分法？

圖 5-2 重複組合第 5 題建議版

二、關於數學教學

(一) 理解為何重要

研究者省思三個問題：第一，如何測出學生的「理解」？第二，測出的「理解」又該如何分類？第三，爲什麼要知道學生的「理解」？依研究者的淺見，第一個問題可以透過仔細觀察學生處理問題的過程，了解他如何運思；第二個問題就看讀者怎麼運用適當的理解理論，進行適當的分類。

第三個問題研究者認為非常重要。如果我們(數學教師)知道學生如何理解，或是理解到哪個層次，便能夠更精細地幫助學生，強化他有缺陷的理解，補足他缺少的理解，以及提升他理解的層次。

(二) 讀題很重要

有關注棒球運動的人就會常常聽到「投手要負責整場比賽勝負的七成」這樣的話，因為每一顆球都跟投手有關！幸且不論是七成還是八成，這樣的言論想要表達的就是—「投手很重要」。

在處理數學問題的過程中，研究者認為「讀題」跟「投手」一樣重要！我常跟學生認真地開玩笑說：「考一百分很簡單，看懂題目、知道怎麼做、算出正確的答案，記得寫名字再交卷...就可以考一百分啦！」我想表達的也就是—「讀題很重要」。

身為數學老師，課本上的例題都是我們熟到不能再熟的題目，但是對學生而言，這些新的概念都是他們第一次學，題目大部分也都是他們第一次看到，對於題目的敘述都還不甚了解的情況，如何求解？在寫這篇論文時，我觀察到屬於比較成功處理問題的學生(如 S_{14} 、S_{22})，他們都有良好的「讀題習慣」，譬如說他們在讀題時，會把關鍵字念出來，或是圈起來，並在旁邊寫下註解，而另一方面，將題目的敘述換句話說，換句話理解，也可以幫助他們掌握題目的特性、意義與結構。只要學生能夠正確的解讀題目，就能找到適合處理問題的工具，求出正確的答案便是自然的事情。

因此研究者建議，在處理排列組合單元的問題時，老師要確實做好教學生讀題的工作，可以參考本研究的表 4-17，帶著他們正確解讀題意，處理問題前應該要先確認學生讀懂了問題沒有，而不是一股腦兒地讓學生操作公式。

(三) 重複組合與非負整數解

重複組合這個單元的教學與學習困難,除了是它包含比較綜合的概念,也包括題目的用字淺詞,將會大大影響學生理解題意。

在分析資料的過程中,我發現有些學生(如 S_{12} 、S_{24})一看到方程式的「非負整數解」馬上就聯想到可以用 H 來處理問題。「非負整數解」對學生而言像是一個數學的「專有名詞」,在排列組合這個單元看到「非負整數解」這幾個字,就很直覺地被聯結到「重複組合」的理解基模之中,然而學生對「整數」往往只有正負之分,沒有想到還有個 0 在正負之間當「電燈泡」。

因此研究者建議,在教重複組合方程式類型的題目之前,要先好好處理學生對於「非負整數解」的理解,「非負的整數、不是負的整數、包含 0 與正整數…」這些字面上很相像的字眼,學生很容易混淆,如果可以提前處理學生的盲點,相信有好的開始,成功也就不遠了。

(四) 是不是一定要教「H」?

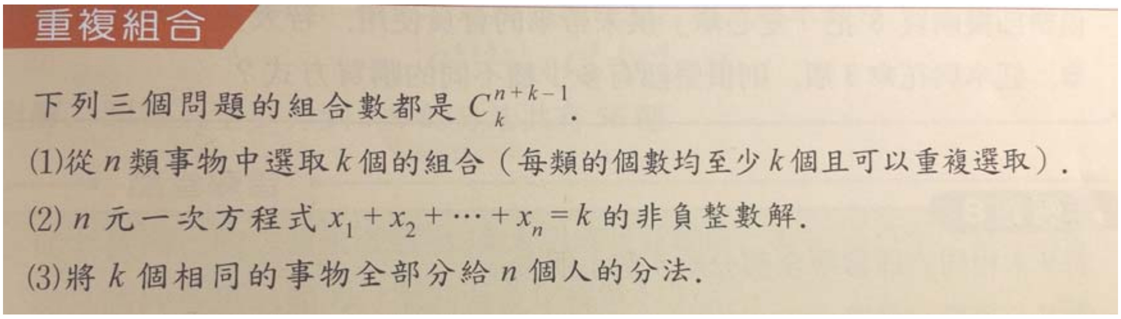
這個問題在數學老師之間的討論是相當頻繁的,當然一定有正反兩方的意見。國立編譯館於民國 84 年出版的第四冊高中數學課本,課本中對重複組合的敘述如圖 5-3。二十年後的課本,對重複組合的敘述已經沒有 H 這個記號,取而代之的是記號 C,如圖 5-4。

乙、重複組合

從 n 種不同的物件中,每次取 m 個爲一組,若各組中,每種物件可以重複選取 2 次, 3 次, …, 或 m 次,則此種組合,稱爲 n 中取 m 的重複組合。在重複組合中,每種物件可重複取用,故 m 之數值可大於 n(m, n 爲自然數)。n 中取 m 的重複組合總數,常以 H^n_m 表示。

圖 5-3 重複組合的敘述(1)

資料來源:取自民國 84 年高中數學課本第四冊(p. 21),國立編譯館。



重複組合

下列三個問題的組合數都是 C_k^{n+k-1}.

(1)從 n 類事物中選取 k 個的組合（每類的個數均至少 k 個且可以重複選取）.

(2) n 元一次方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解.

(3)將 k 個相同的事物全部分給 n 個人的分法.

圖 5-4 重複組合的敘述(2)

資料來源：取自民國 103 年高中數學課本第二冊(p. 95)，龍騰文化事業股份有限公司。

比較這兩個對於重複組合的敘述，研究者有一個比較中性的結論：H 可以教，也可以不教。在研究學生處理重複組合問題的具體行為，我發現受測的十位學生高一時都學過或聽過 H，但能成功保留 H 的概念到高三畢業的人佔少數，更何況學生心理可能想著以後(出社會)也用不到 H，學生即便學過 H，自然也就毫無保留了。

不教 H 還是有很多方法可以學好重複組合，教了 H 學生可以更迅速確實解決同類型的題目，教與不教好像就在老師的一念之間，但是學生學得來還是學不來，老師不教又怎麼能知道呢？研究者認為這需要進一步地研究。

三、關於未來研究

(一) 理解與解題

想要知道學生是否理解某個概念，其中一個方法就是看學生處理問題。曾經有個學生這麼跟我說：「數學老師的手都是『神之手』，常常在黑板上寫一堆(鬼)神才看得懂的符號！」解題似乎是數學老師無可避免的教學活動，而學生也要經常面對解題這件事，不管是要透過解題獲得考試成績，還是透過解題活動獲得理解。

說到解題，許多人對 Polya (1957)出版的「How to Solve It」應該不陌生。Polya 將解題分成四個歷程(蔡坤憲，2008)：了解問題、擬定計畫、執行計畫、驗算與回顧。而本研究以 Skemp 的理解理論為基礎，探討學生在重複組合的理解狀況，沒有把解題的歷程考慮進去。

因此研究者建議，可以考慮把 Skemp 的「Director System」與 Polya 的「How to Solve It」整合起來進行研究(如圖 5-5)，可以研究學生透過各種理解型式，與解題歷程的搭配，或許可以擦出不一樣的火花。

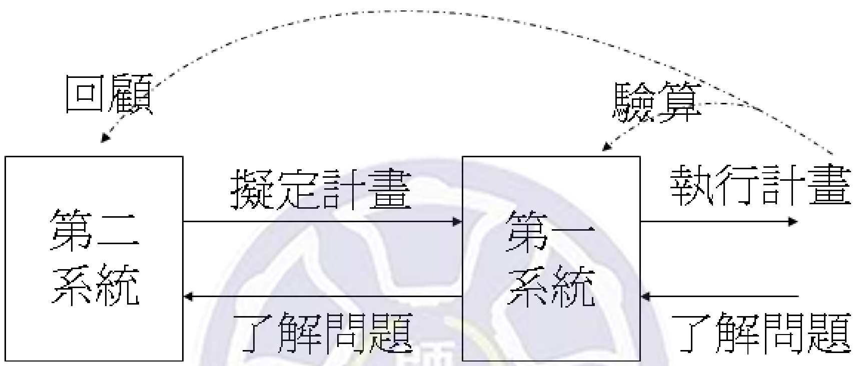


圖 5-5 Skemp 指導系統與 Polya 怎樣解題的整合系統

(二) 理解與遞迴

Pirie & Kieren 數學理解成長的動態可折回理論，說明了學生的理解過程有「動態、非線性、遞迴」的特性，研究者在教學現場經常感受到，學生在學習新概念時真的會出現這些現象。本篇論文在分析學生產生的理解基模時，發現七個基模的具體行為出現順序，都有從第一系統到第二系統，再折回到第一系統的現象，這與洋蔥理論的遞迴現象似乎有著微妙的相似之處。

因此研究者建議，或許我們也可以考慮把「洋蔥」放進 Skemp 的指導系統之中(如圖 5-6)，知道學生是用什麼型式的理解以後，可以進一步分析學生理解成長的現象。

這些想法都還要等待有興趣的研究者更進一步去研究。

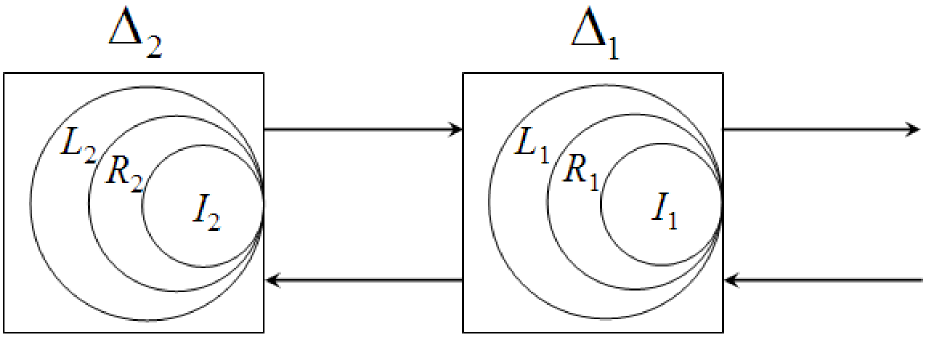


圖 5-6 Skemp 指導系統與 P&K 洋蔥理論的整合系統

四、個人省思結語

理解是可以透過教學傳遞給學生的正向能量！在學習之中，有時候錯比對還要來的珍貴，「知道自己錯了」是一回事，「理解自己錯在哪」是另外一回事，而更重要的是，學生要知道自己做了什麼而造成什麼錯誤，透過第二系統反思與修正，才能從錯誤中成長。

數學教師便是幫助學生產生理解與修正理解的推手。有人說：「沒有理論的實務是盲的，沒有實務的理論是空的。」在數學教育的殿堂裡，必須要經過實務的研究才能夠發展理論，而理論也需要藉由實務來驗證與應用，因此研究者認為，理論與實務應當有著互補與共容的特性。

透過這篇論文的研究歷程，研究者以一個高中教師的身分，從實務面的角度切入理論，探討了 Skemp 與其他學者有關於理解的理論，再從理論中整合出能夠應用於教學實務上的分析工具，從而回答了有關於教學實務面的研究問題，提供未來在數學教學上可以實質運用的技能。

在理論與實務間來回穿梭，研究者也從中獲得理解與成長的喜悅。

參考文獻

一、英文部份

Dubinsky (1992). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Glaser, R. (1962). Psychology and instructional technology. In R. Glaser (Ed.), *Training research and education*. Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh Press.

Olive, J., & Steffe, L. P. (2002). Schemes, schemas and director systems (an integration of Piagetian scheme theory with Skemp's model of intelligent learning). In D. Tall & M. Thomas (Eds.), *Intelligence, learning and understanding in mathematics: A tribute to Robert Skemp* (pp. 97-129). Flaxton, Qld.: Post Pressed.

Pirie, S. (1988). Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalized ...? How can we know? *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 2-6.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics, 9*(3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994*a*). Beyond metaphor: Formalising in mathematical understanding within constructivist environments. *For the learning of Mathematics, 14*(1), 1-56.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994*b*). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational studies in Mathematics, 26*(2-3), 165-190.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Skemp, R. R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding*. Mathematics teaching, 77, 20-26.

Skemp, R. R. (1987). *Psychology of Learning Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D., & Thomas, M. (Eds.)(2002). *Intelligence, learning and understanding in mathematics: A tribute to Robert Skemp.* Flaxton, Qld.: Post Pressed.

二、中文部分

王幸鵑(民 102)。**高一學生的對數概念發展層次之研究**(未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，台北市。

石厚高(1997)。參加數學會議的一點感想。**數學傳播 21 卷 3 期**，pp. 84-87。

李牧桓(民 98)。**以布魯姆修訂版分析芬蘭、台灣一年級數學教科書**(未出版之碩士論文)。國立屏東教育大學，屏東市。

李俊緯(民 104)。**高雄市高一學生學習排列組合單元錯誤類型分析之研究**(未出版之碩士論文)。國立高雄師範大學，高雄市。

李源順(2004)。數學專家教師的專業發展可複製性分析。**科學教育研究與發展季刊，2004 專刊**，95-118。

余民寧(1997)。**有意義的學習—概念構圖之研究**。台北市：商鼎文化出版社。

余民寧(2012)。教育測驗與評量：成就測驗與教學評量(第三版)。台北市：心理出版社。

林天祐(2010)。**APA 格式第六版**。台北市立教育大學。

林世偉(2012)。**高一高二學生之排列組合相關數學能力與成就探討**(未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，台北市。

林思華(整理)(民 97)。有朋自遠方來—專訪項武義教授。**數學傳播 32 卷 4 期**，pp. 3-15。

吳淑琳(2000)。**國中生線型函數概念發展之個案研究**(未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，台北市。

郭生玉(2010)。**教育測驗與評量**。台北市：精華書局。

郭生玉(2012)。**心理與教育研究法**。台北市：精華書局。

陳正明(2002)。**透過 Excel 輔助進行線型函數補救教學之研究：以一個國二學生為例**(未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，台北市。

陳澤民(譯)(1995)。**數學學習心理學**。(原作者：Richard R. Skemp)。台北市：九章出版社。(原著出版年：1987)

教育部(民 97)。**普通高級中學必修科目數學課程綱要**。台北。教育部。取自 http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/MCenter/Center/CourseOutline.aspx

教育部(民 97)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北。教育部。取自 http://teach.eje.edu.tw/9CC2/9cc_97.php

喻平(民 91)。論數學解題教學的現代理論基礎。**數學傳播，26 卷 4 期**。

許淑珠(民 94)。**國小二年級學生數學溝通能力之行動研究**(未出版之碩士論文)。國立中山大學，高雄市。

張春興(2004)。**教育心理學**。臺北市：東華書局。

游經祥(2003)。專書評論【**數學學習心理學**，Richard R. Skemp 著，陳澤民譯】。取自 http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol6no10d.doc

葉連祺、林淑萍(民 94)。布魯姆認知領域教育部標分類修訂版之探討。**教育研究月刊，第 105 期**。

楊中宜(民 96)。**國中生進入代數領域理解符號意義對解題影響之探討—以台北縣 A 國中為例**(未出版之碩士論文)。銘傳大學，台北市。

楊宜蓁(民 98)。**高中生重複組合學習歷程中之數學思維研究**(未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，台北市。

楊嘉勝(民 100)。**大一學生微積分學習策略與微積分學習成效之研究**(未出版之碩士論文)。國立交通大學，新竹市。

蔡坤憲(譯)(2006)。**怎樣解題**。(原作者：G. Polya)。台北市：天下遠見。(原著出版年：1957)

劉康君(2012)。**排列組合可以在高一學習嗎？**(未出版之碩士論文)。中原大學，中壢市。

鄭蕙如、林世華(2004)。Bloom 認知領域教育目標分類修訂版理論與實務之探討—以九年一貫課程數學領域分段能力指標為例。**台東大學教育學報**，15 卷 2 期。

謝佩真(2003)。**高二學生排列組合擬題活動對解題表現影響之研究**(未出版之碩士論文)。國立高雄師範大學，高雄市。

鐘翠芬(98)。**人權教育能力指標解析與教學轉化**。第 8047 期人權教育國教輔導團輔導員初階研習。桃園縣。

附錄

附錄一

復旦大學的學生回答有關她們的數學學習逐字稿

(一) 廈門姑娘：「我們一週是上六天的課，每一天呢數學老師都會留一張完整的數學卷子給你作為今天的作業，然後你回去花兩個小時把它做完，第二天老師不看，他過來講評這張卷子，好，我們的數學我覺得應該大多數都是用這種『題海戰術』的這種方法(旁邊的東北姑娘點頭表示贊同)，可是當然覺得很苦，但是我現身說法這個有用，真的有用(旁邊的東北姑娘點頭表示贊同)！多年以後你會覺得當年的苦是值得的，這個苦付出了會有回報。」

(二) 四川姑娘：「到最後你看到一張卷子，呿！這個小 case，早就做過了好多遍了，拿著筆不用打草稿直接算，『熟能生巧』怪不得中國有這傳統。」

附錄二

研究者給高中學生的數學學習省思

《 數學學習 》

2012.3.6 撰文：翁玉華

一、熟背公式後，將公式內化成工具

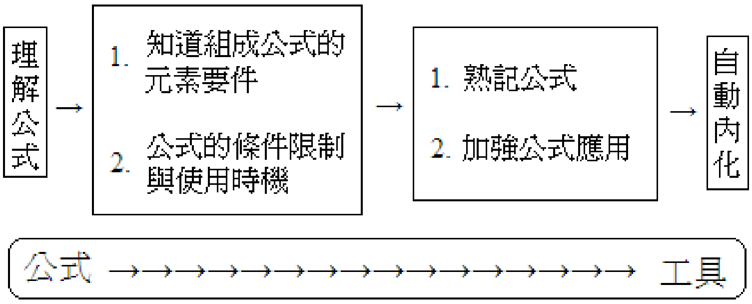
(1)背錯公式不如不背，浪費時間。

(2)背公式不會用那也不要背，同樣浪費時間。

(3)知道背公式是為了幫助複雜計算，如果代公式一直算錯那乾脆不要背，不如一個一個慢慢算還比較實在。

(4)內化過程：(公式階段)理解公式→知道組成公式的元素要件、公式的條件限制與使用時機→熟記公式、加強公式應用→自動內化(工具階段)。

(續下頁)



二、計算能力

(1)基本的四則運算及根式化簡理當自我要求，降低失誤才能提高分數。

(2)新單元基本的相關運算，要先清楚知道基本的定義，並與舊概念(已知概念)比較異同。

(3)勤練基本運算，慣者為師。

(4)新單元比較複雜的運算及技巧，應在熟知上述(2)(3)點之後進行學習與強化。

三、理組數學 v.s 文組數學

(1)學測都考一樣，指考才有分成數甲、數乙。

(2)學測範圍 B1~B4 共四冊。

(3)如果學測都考一樣，就沒有社會組跟自然組的差別。

(4)數學是理科，就該用理科的方式學習，理科的方式即是「理解、思考、邏輯、因果」等，死記是沒有用的。

(5)不管是文組還是理組，想學好數學不外乎勤練題目，請注意，前提是你要將概念理解，再去練大量的題目才有用。

(6)不要盲目∪大量瞎寫路邊教室的題目，學測的趨勢已經越來越回歸課本的基本概念。

(7)「統合、整理、比較異同」的能力，在學完一個新單元後非常重要。

四、心態建立

(1)不管是數學還是哪科，學習總要有耐性、坐得住、肯下苦功、願意學習。

(2)每個人對學習的接受度不同，理解力也不同，所以進步要跟自己比較。

(3)最起碼的自我要求一定要有，只有自己要求自己，進步才會真實。

(4)自信是用在你傾注真心而努力地學習之上。

(5)保持謙虛、保持上進、保持熱情。

附錄三

受測學生(S_{22} 030528)三個階段施測活動的完整逐字稿

測驗說明

0001　師：等一下呢，我們就是有三個階段，第一個階段呢，就是你先進行自己解題，然後解完這八個題目之後呢，然後我會請你上台講解給我們聽，給我聽啦這樣子。

0002　S_{22}：嗯…嗯

0003　師：然後講完這兩個階段呢，都是你自己獨立完成的這樣子齁。

0004　S_{22}：嗯。

0005　師：然後第三個階段就是我會針對你上台講解，跟你剛剛寫的那個過程，然後問你問題，然後你再回答這樣子，OK 嗎？

0006　S_{22}：嗯…好。

0007　師：那就開始…先寫姓名。

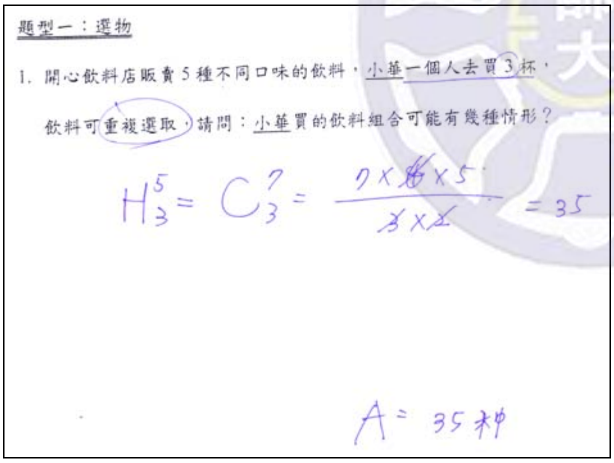
0008　S_{22}：好的。現在就已經開始了喔？

0009　師：嘿。

0010　S_{22}：好的。

第一階段

書寫資料掃描檔/按照出現順序的具體行為


題型一：選物

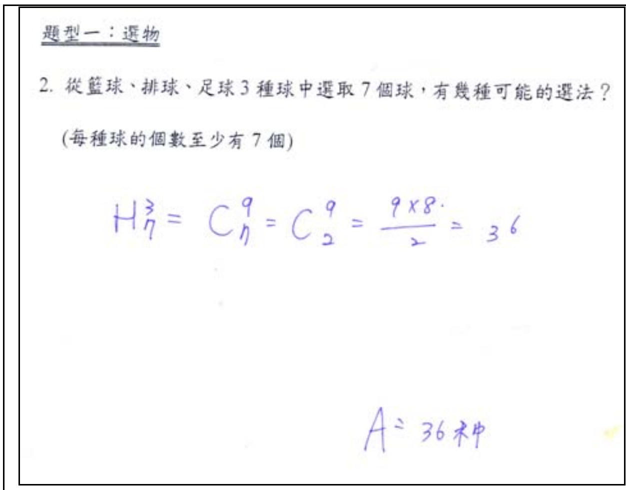
1. 開心飲料店販賣 5 種不同口味的飲料，小華一個人去買 3 杯，飲料可重複選取，請問：小華買的飲料組合可能有幾種情形？

$H^5_3 = C^7_3 = \frac{7\times\cancel{6}\times5}{\cancel{3}\times\cancel{2}} = 35$

A = 35 种

S_{22} 第一階段第 1 題具體行為：

1. 念出關鍵字：5 種。
2. 標記關鍵條件：將「重複選取」打圈。
3. 念出關鍵字：可以重複選取。
4. 標記關鍵條件：將「一個人去買 3 杯」畫底線。
5. 念出關鍵字：一個人去買 3 杯。
6. 標記關鍵條件：將「3 杯」打圈。
7. 口語推論：因為可以重複選取，所以就是用 H。
8. 寫下符號：H。
9. 口語推論：然後呢，因為是 5 種，要選 3 杯，所以是 H_3^5。
10. 寫下符號 H_3^5。
11. 轉換符號 $H_3^5 = C_3^7$
12. 轉換符號 $C_3^7 = \frac{7\times4}{}$ 時，出現錯誤。
13. 修正符號為 $C_3^7 = \frac{7\times6\times5}{3\times2}$。
14. 計算 $\frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$。
15. 寫出答案「A：35 種」。



題型一：選物

2. 從籃球、排球、足球 3 種球中選取 7 個球，有幾種可能的選法？

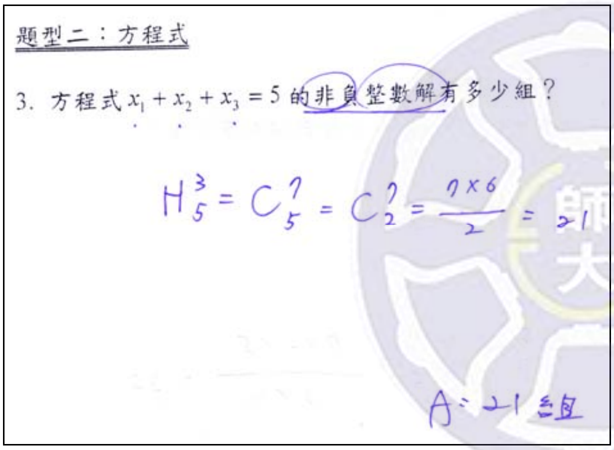
(每種球的個數至少有 7 個)

$H^3_7 = C^9_7 = C^9_2 = \frac{9\times 8}{2} = 36$

A：36種

S_{22} 第一階段第 2 題具體行為：

1. 念完整個題目。
2. 口語推論：那就是把 7 個裡面塞進 3 個選項。
3. 讀出括號中的條件：每種球的個數至少有 7 個。
4. 口語推論：那就是 H_7^3。
5. 寫下符號 H_7^3。
6. 轉換符號 $H_7^3 = C_7^9$。
7. 轉換符號 $C_7^9 = C_2^9$。
8. 計算 $\dfrac{9\times 8}{2} = 36$。
9. 寫出答案「A：36 種」。



題型二：方程式

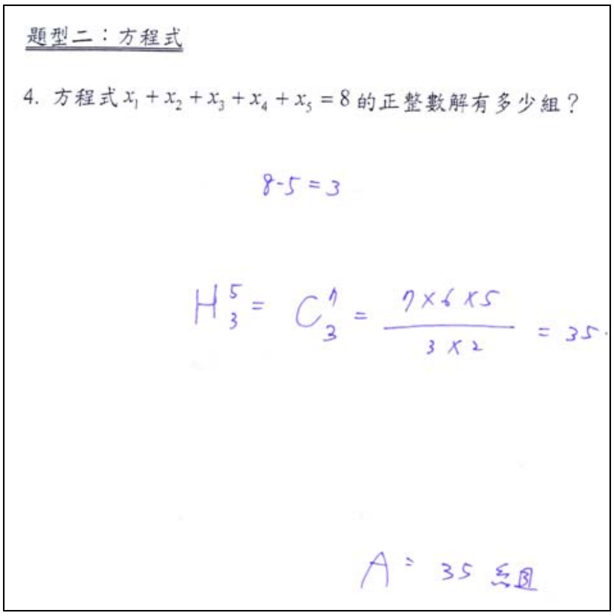
3. 方程式 $x_1+x_2+x_3=5$ 的非負整數解有多少組？

$H^3_5 = C^7_5 = C^7_2 = \frac{7\times 6}{2} = 21$

A：21組

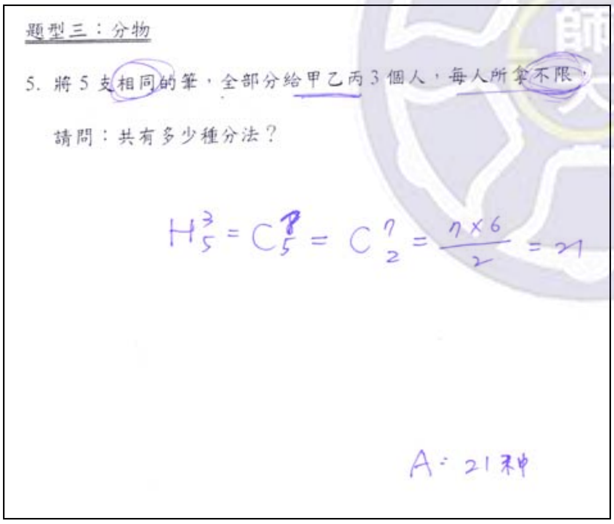
S_{22} 第一階段第 3 題具體行為：

1. 念出題目類型：方程式喔。
2. 念出關鍵字：非負整數解有多少組。
3. 標記關鍵條件：將「非負整數解」畫底線。
4. 重複念出關鍵字：非負整數解。
5. 口語推論：要非負，還要整數。
6. 重複標記畫底線的關鍵條件：將「非負」打圈、將「整數」打圈。
7. 標記關鍵條件：在「x_1、x_2、x_3」下方打點。
8. 啟動想法：先來個土法煉鋼(笑)。
9. 重新讀題：3 個加起來等於 5。
10. 啟動想法：那就是把 5 個塞進 3 個裡面。
11. 寫下符號 H_5^3。
12. 確認：對這樣就是「非負」、還要「整數」。
13. 轉換符號 $H_5^3 = C_5^7$。
14. 轉換符號 $C_5^7 = C_2^7$。
15. 計算 $\dfrac{7\times 6}{2} = 21$。
16. 寫出答案「A：21 組」。



S_{22} 第一階段第 4 題具體行為：

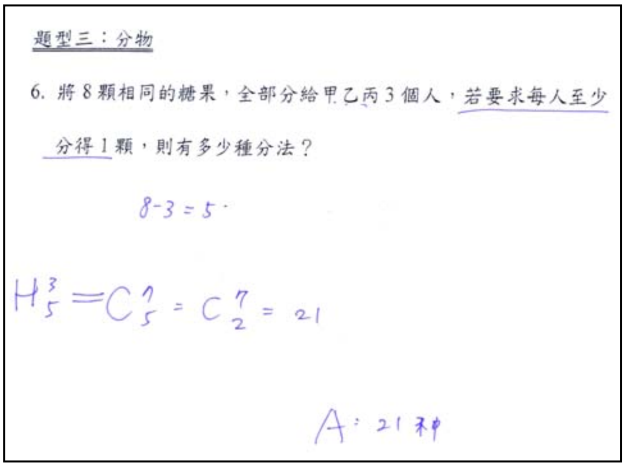
1. 念出整個題目。
2. 加強語氣念出關鍵字：正整數解。
3. 啟動想法：那就是用剛剛(第 3 題)的方法，減掉有零的。
4. 拋出問題：有零的這樣好不好減？
5. 口語推論：好像不太好減，會有很多組。
6. 重複念出關鍵字：正整數解有多少組？
7. 口語推論：啊！那就先各給他們一個。
8. 點數未知數的個數：1,2,3,4,5。
9. 寫下符號：$8-5=3$。
10. 寫下符號 H^5_3。
11. 轉換符號 $H^5_3 = C^7_3$。
12. 轉換符號 $C^7_3 = \dfrac{7\times6\times5}{3\times2}$。
13. 計算 $\dfrac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$。
14. 寫出答案「A：35 組」。



S_{22} 第一階段第 5 題具體行為：

1. 念出題目類型：分物品。
2. 念出整個題目。
3. 標記關鍵條件：將「相同」打圈。
4. 口語推論：因為是相同，所以就不用理他了。
5. 標記關鍵條件：將「甲乙丙」畫底線。
6. 標記關鍵條件：將「所拿不限」畫底線。
7. 重複標記畫底線的關鍵字：將「不限」打圈。
8. 重複念出關鍵字：不限。
9. 寫下符號 H^3_5。
10. 轉換符號 $H^3_5 = C^8$ 時，出現錯誤。
11. 修正轉換符號 $H^3_5 = C^7_5$。

17. 轉換符號 $C^7_5 = C^7_2$。
18. 計算 $\dfrac{7\times6}{2} = 21$。
19. 寫出答案「A：21 種」。



題型三：分物

6. 將 8 顆相同的糖果，全部分給甲乙丙 3 個人，若要求每人至少分得 1 顆，則有多少種分法？

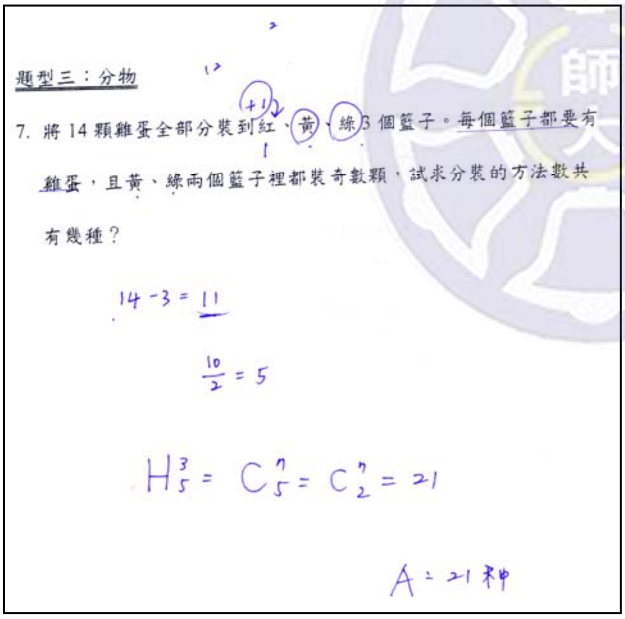
8-3=5

$H_5^3 = C_5^7 = C_2^7 = 21$

A：21 種

S_{22} 第一階段第 6 題具體行為：

1. 念完整個題目。
2. 強調關鍵條件：又是「相同」。
3. 標記關鍵條件：將「若要求每人至少分得一顆」畫底線。
4. 口語推論：每次要這個的話就先把它減掉就好啦！
5. 拋出問題：剛剛是兩個人還是三個人？
6. 翻回前一頁確認。
7. 寫下 $8-3=5$。
8. 寫下符號 C。
9. 發現要先寫 H，在符號 C 之前寫下符號 H_5^3。
10. 轉換符號 $H_5^3 = C_5^7$。
11. 轉換符號 $C_5^7 = C_2^7$。
12. 計算 $\dfrac{7\times 6}{2} = 21$。
13. 寫出答案「A：21 種」。



題型三：分物

7. 將 14 顆雞蛋全部分裝到紅、黃、綠 3 個籃子，每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，試求分裝的方法數共有幾種？

+1

14-3=11

$\frac{10}{2}=5$

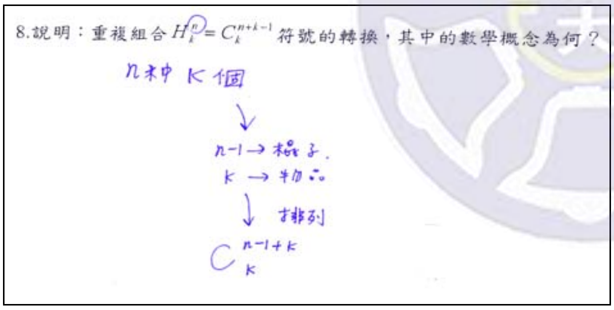
$H_5^3 = C_5^7 = C_2^7 = 21$

A：21 種

S_{22} 第一階段第 7 題具體行為：

1. 念出整個題目。
2. 標記關鍵條件：在「紅、黃、綠」下打點。
3. 重複念出關鍵條件：都要有雞蛋。
4. 口語推論：那就 14 先減 3。
5. 寫下 $14-3=11$。
6. 標記關鍵條件：在「黃、綠」底下打點。
7. 重複念出關鍵字：奇數顆。
8. 拋出問題：奇數加奇數會是？
9. 重複念出關鍵字：都裝奇數顆。
10. 標記關鍵條件：將「黃」、「綠」打圈。
11. 口語推論：因為他說要裝奇數顆，奇數加奇數一定是偶數，所以我應該要先把這 1 顆雞蛋，先給紅色的。
12. 寫下 10。
13. 重複念出題目：試求分裝的方法共有幾種？
14. 口語推論：因為要裝奇數顆，所以接下來我要給他們偶數個。
15. 拋出問題：偶數個？我想想看喔…
16. 口語推論：對了，我接下來只能給他們偶數個。
17. 標記關鍵條件：在「11」下畫底線。
18. 拋出問題：所以我有 11 個，那我現在要 11…除幾啊？
19. 口語推論：對，我應該要再給紅色一顆。
20. 寫下「+1」給紅色籃子。(接下頁)

21. 寫下 $\frac{10}{2}=5$ 。
22. 口語推論：我還有 5 組，再去塞。
23. 寫下符號 H 。
24. 拋出問題：怎麼塞啊？我想想看…
25. 口語推論：對，H 3 塞 5。
26. 寫下符號 H_5^3 。
27. 轉換符號 $C_5^7=C_2^7$ 。
28. 轉換符號 $C_5^7=C_2^7$ 。
29. 直接寫出 $C_2^7=21$ 。
30. 寫出答案「A：21 種」。
31. 回頭檢查全部處理問題的過程。
32. 重複念出關鍵字：每個籃子都要有雞蛋。
33. 標記關鍵條件：將「每個籃子都要有雞蛋」畫底線。
34. 口語推論：14 減 3 等於 11 顆，然後一定要有一顆再給紅色的，對啊，這樣紅色一定會至少有 2 顆，剩下 12 顆。
35. 寫下 2、12。
36. 拋出問題：咦，12？
37. 口語推論：14、12，這樣塞，黃、綠再各給 1 顆，剩下 10 顆。
38. 拋出問題：10？
39. 口語推論：對，然後我又把它們除以 2。我把它們除以 2 有 5 組，所以我分給他們一定是偶數，再加上裡面那 1 顆一定會變奇數，對。
40. 拋出問題：有沒有可能紅色就只有 1 顆？
41. 在「紅」字底下寫 1。
42. 反例推論：不可能不可能，只有 1 顆的話，就剩 13，奇數加奇數一定是偶數。

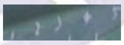
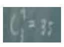


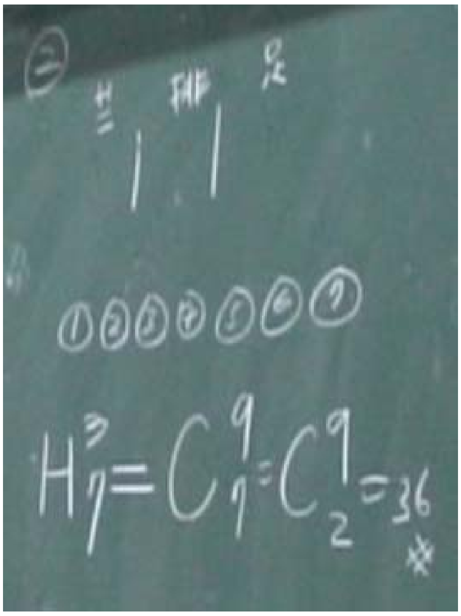
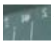
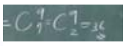
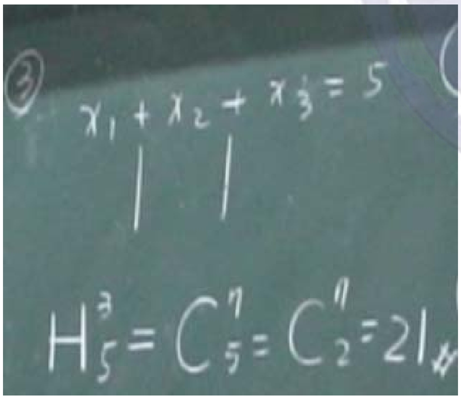
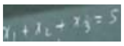
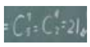
S_{22} 第一階段第 8 題具體行為：
1. 念出整個題目。
2. 口語推論：這個我最會了。
3. 口語說明：假如說是有 n 個…
4. 標記關鍵條件：將「n」打圈。
5. 口語修正：n 種。
6. 寫下符號：n 種。
7. 口語說明：要塞 k…要選 k 個。
8. 寫下符號：k 個。
9. 拋出問題：那就是代表說，我們可以用幾根棍子，分出 n 種？
10. 口語推論：就是說，我們可以用 $n-1$ 根棍子，分出 n 個空格。
11. 寫下符號：$n-1$→棍子。
12. 口語推論：然後我們有 k 個，然後呢，所以就跟 k 一起去排，就是棍子跟 k 個物品。
13. 寫下符號：k →物品。
14. 口語推論：一起去排列，所以就是 C 的 $n-1$ 個棍子再加上 k。
15. 拋出問題：然後呢？我要排什麼？
16. 口語推論：喔對，然後選 k 個，對，有這麼多，對有這麼多的那個格子，然後我要選 k 個出來放物品。
17. 寫下符號：C_k^{n-1+k} 。
18. 寫下符號：畫兩個「↓」。
19. 口語推論：先這樣化，再這樣化，然後用排列的。
20. 在↓旁寫下文字：排列。

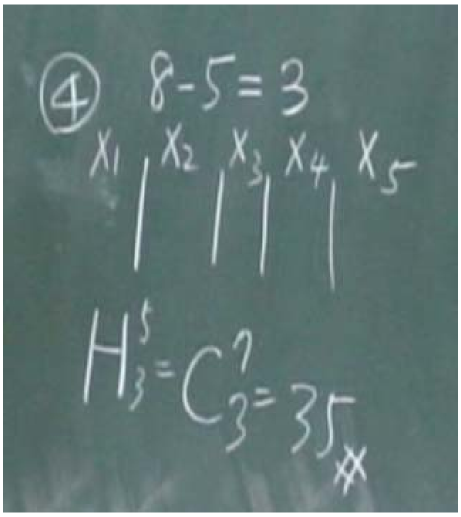
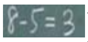
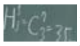
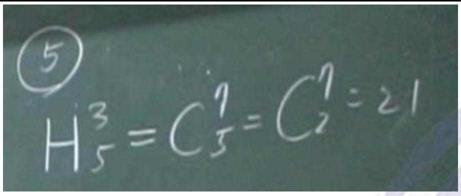
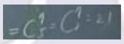
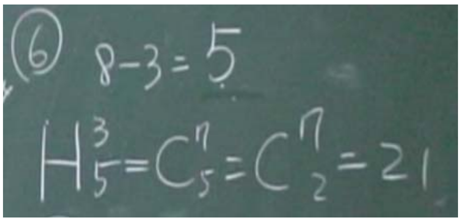
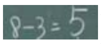
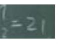
第一階段結束的師生對話

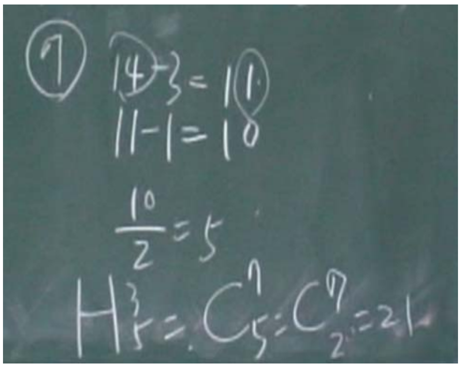
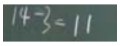
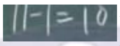
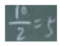
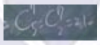
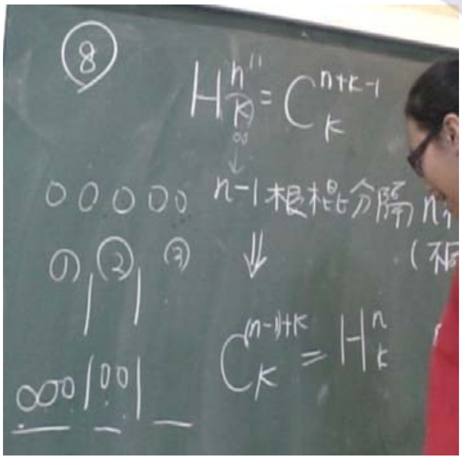
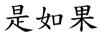
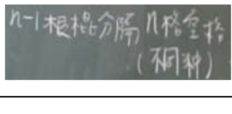
1001 S_{22}： 沒了。
1002 師： 沒了，完成了，好，那你就上台講，講解。等等喔！等等喔！
1003 S_{22}： 喔好。從第一題開始講喔？
1004 師： 等一下...等一下喔，對，從第一題，但是我要先擺好。
1005 S_{22}： 好的。
1006 師： 那你就從那邊開始吧！
1007 S_{22}： 從這邊開始，從這邊開始寫嗎？
1008 師： 這個...這一個就好了。
1009 S_{22}： 這一個？
1010 師： 嗯好。
1011 S_{22}： 寫下來啊等一下不用擦掉喔？
1012 師： 要那樣寫過來。
1013 S_{22}： 喔好的。

第二階段
板書資料/上台講解逐字稿

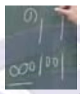
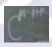
S_{22} 第二階段第 1 題講解逐字稿：
第一個，因為開心飲料店販賣五種不同口味，所以就是它有分五種，然後呢...小華一個人要去買三杯，飲料可重複選取也就是說它沒有任何的限制，沒有任何限制，然後所以我們就可以直接用 H，然後照我剛剛的棍子理論就是...我們可以用四根棍子【寫黑板：】，隔出 1,2,3,4,5...【寫黑板：】五種不同的飲料就是這樣代替，然後呢小華因為她買三杯，我們用圓圓的代替【寫黑板：】，她要買三杯，但是呢...因為它沒有限制，而且飲料可以重複選取，所以就是說她要把這三個填到跟這...這四個棍子作排列，然後它排列的可...它排列出來的那個數量就是它可能買的組合的數量，所以呢...你要直接用 C 也可以啦，但是因為我都畫出來了，就直接用 C 吧！1234567，所以就是【寫黑板：】C7 取 3，然後算一算就會等於 35，好下一題。

	S_{22} 第二階段第 2 題講解逐字稿：然後呢，第二題是…從籃球、排球、足球三種球選取七個球，有幾種可能的選法？然後呢，這樣的話又是跟剛剛一樣，又有不同的東西可以選，不同的東西可以選，然後呢…每一種球的個數至少有七個，也就是說它暗示你說…你還是可以沒有限制的排列，沒有限制的選取，所以呢，還是用兩根棍子【寫黑板：】分出了籃球、排球，還有足球，然後呢我要選取七…七個【寫黑板：】1234567…然後呢，有七個球，我把它跟這個排列，然後呢，它隔出來的那個…就是它的排列情況，就是可以表示說它籃球選幾顆、排球選幾顆、足球選幾顆，然後呢它也沒有限制說，每一個至少都要選到，所以呢還是就直接用吧…用…那好吧！【寫黑板：】H…3 個…3 個空格…3 個選項，塞 7 個東西，沒有限制的，也可以重複選取，也可以有東西是 0，然後呢，這樣就變成【寫黑板：】C9 取 7、C9 取 2…偷偷看一下答案，等於 36，算出來了，好的下一題。
	S_{22} 第二階段第 3 題講解逐字稿：三…方程式…嗯，它只是換了個方式，$x_1+x_2+x_3$ 等於 5 的非負整數解，所以它現在有一個限制是非負整數，但是只要解讀它應該就是還好，反正就是有三種不同的地方，可以塞東西，用兩根棍子分出【寫黑板：】x_1、x_2 跟 x_3，然後又有五個…它非負，非負就是只要不…不要是負數就好了，所以就是說代表一定都要是整數，這樣又…就是又符合塞東西的，因為塞東西是不可能塞負的，然後呢所以也就是代表說它可以等於零，可以等於零我們就直接用 H，而且它要整數，這樣用 H 就可以直接解了，所以【寫黑板：】H 123…又有三個，然後呢這加起來要等於 5…【寫黑板：】然後呢，這樣代表有 5 個要塞進 3 個裡面，對，然後呢這樣又等於【寫黑板：】7…C7 取 5、C7 取 2，等於 21，這樣子，然後呢，好下一題。

	S_{22} 第二階段第 4 題講解逐字稿： 下一題跟上一題，不一樣的是它現在要正整數解，要正整數解就是代表說，它每一個裡面，一定都要至少大於等於 1，所以呢我們要…先各給他 1 個，有 8 個嘛！然後有 x_1 到 x_5 ，所以我們先各給他們都一個，然後我們現在剩 3【寫黑板：】，所以呢，我要用四根棍子，分出了 x_1 到 x_5 【寫黑板：】…然後把剩下這 3 個都丟進去，這樣我們就符合它的…條件要正整數，對，每一個數都有了，對，然後再去任意排，對，就是這樣子，所以是【寫黑板：】H5 個，塞 3 個進去，等於 C3 加 1234…7 3 等於 35，OK，下一題。
	S_{22} 第二階段第 5 題講解逐字稿： 第五題，將五支相同的筆，分給甲乙丙三個人，所以現在是，有甲乙丙…三種不同的東西，然後有五支相同的東西要分給他們，就是好像塞進去，然後每人所拿不限，也就是說可以大於等於 0，對，沒有限制，那就是要用 H，然後也沒不用先分給他們了因為所拿不限，也沒有說他一定要拿到，所以是 H3 塞 5【寫黑板：】。可是這樣就跟第三題一樣了，H3 塞 5 等於【寫黑板：】C7 取 5，等於 C7 取 2，等於 21，接下來背面。
	S_{22} 第二階段第 6 題講解逐字稿： 第六題，然後第六題就跟剛剛的第四題一樣，因為要求每個人至少要分得一顆，所以呢…因為有三個人有 8 顆糖果，我們先給一個...【寫黑板：】每個人各一顆減掉 3，所以還剩 5 顆，但是我們已經符合了條件，每一個人至少要分得一顆，再把最後這 5 顆分給他們，有 3 個人塞 5 個【寫黑板：】…ㄟ剛剛那個有兩個人還三個人？對，它好像三個人，對，H3 塞 5，就等於【寫黑板： 】C7 取 5，等於 C7 取 2，等於 21，好ㄊ…好恐怖喔答案一樣！喔對啦，因為它剛剛是 5 支相同的筆，我減掉 3，對，我這要分 5 顆，嗯對，好，因為數量的關係，好，下一題。

	S_{22} 第二階段第 7 題講解逐字稿： 將 14 顆全部分裝到紅、黃、綠三個籃子，每個籃子都要有雞蛋，都要有雞蛋那我都先給你各一顆雞蛋【寫黑板：】，先符合你的條件，11…剩下 11，然後呢，現在又有一個條件是黃、綠兩個籃子都要裝奇數顆，然後因為…奇數加奇數一定會等於偶數，所以呢…可是它這邊現在是奇數，所以我現在這一顆【寫黑板：】…我就把它先分給了…分給了誰啊我看看…對對對對對…因為總共是有 14 顆，總共是有 14 顆是一個偶數【寫黑板：】，那如果黃、綠都要是奇數顆的話，代表是奇數加奇數等於偶數嘛！那偶數一定加一個偶數才會是偶數，所以代表說紅色一定是偶數，所以我們這一個就先再給紅色，【寫黑板：】10，這樣，對，然後呢，這樣的話呢，我們再把【寫黑板：】10 除上 2 就等於 5，也就是說我們把 10 個雞蛋，兩個兩個兩個分，變成偶數，再分給紅…黃、綠兩個籃子，這樣黃跟綠都會是奇數顆，然後紅色一定會是…偶數顆，然後這樣加起來符合 14，然後也符合黃、綠都是裝奇數顆，好了，【寫黑板：】H3 塞 5，等於【寫黑板：】*C*7 取 5，等於 C7 取 2，等於 21，好了，下一題。
	S_{22} 第二階段第 8 題講解逐字稿： 八…喔，說明重複組合…就是剛剛在做的那個全部的為什麼用 *H*，就是數學概念就是…重複組合第一個是…它到底可不可以…就是它可以跟 C 不一樣是…嗯…跟 *C* 不一樣在哪裡啊？它主要是用在可以重複選取，而且沒有限制選取的…就是沒有限制說每一個人是不是都要拿到，有可能有人可以不要拿到，所以就是可以用重複選取，如果是用圖形來放…來講的話就是有…【寫黑板：】*H n k* 等於 *C* 的 *n* 加 *k* 減 1 分之 *k*，然後就是代表就是有 *n* 種不同的東西，要選 k 個，但是如果要好理解的話，就是想說要塞 *k* 個進去，就是用排列的方法去想，就是【寫黑板：】用 *n* 減 1 根棍子， (續下頁)

分出了…分隔出 n 格空格，這就是代表不同的種類，括弧…不同的種類…不同種呵呵…

這樣，然後呢，我們要把【寫黑板：】k 個東西塞進去這個東西，也就是說跟它一起做排列，然後呢…如果像是以圈圈代表 k，以棍子代表…棍子哈哈…就是就是…所以假如說，假如說現在有 3，我們就是用 2【寫黑板：】格出三個，然後呢…假如說要塞 5 進去【寫黑板：】，4…5…所以我們就是把…5 圈圈跟 2 根棍子作排列，然後排列的情況就是代表說它的…分配的情況，假如說它是這樣【寫黑板：】，對，假如說它是這樣的話，就代表…第一種…【寫黑板：】第一個種類它取了 3 顆，【寫黑板：】第 2 個種類它取了 2 顆，【寫黑板：】第 3 個種類它沒有取，對，就是這樣子，然後呢所以呢，它是跟 k…k 代表它跟物品去做排列，所以呢我們是把…這個換成 C，換成排列的概念，所以就是變成【寫黑板：】…C 的 n 加 1 棍喔 n 減 1 根棍子【寫黑板：】，再加上物品【寫黑板：】，然後呢…選取 k 個位子，因為它現在排出來總共有 1234567，總共有 7 個位子，我們要選出 k 個位子來放…物品【寫黑板：】，然後就是代表它的…選取概念，所以呢就這樣，【寫黑板：】就等於 Hn 取 k，OK，好了。

第三階段 師生對話逐字稿

3001	師：	好，你好優秀唷！真不愧是我們…高材生呵呵呵…
3002	S_{22}：	呵呵呵…
3003	師：	好，那我針對你的問題，來進行喔，我們從第一題開始。
3004	S_{22}：	好的。
3005	師：	好，去第一題那裡。嗯…我不太知道你…「塞」的意思是什麼意思？
3006	S_{22}：	塞的意思就是說我把它這個東西塞進去啊，就是等於是…如果是從這邊出發的話就是變成是說，就是我要選東西，但是如果是…我按照…因為我是覺得就是用排列的方法會比較好去想啦，所以我就是說就是塞進去，就是排列的概念，把它重新排列，那它的那個數學概念就是排列出

		來的那個樣子，就是可能你塞的情況，就是代表你選取的情況，就是把這個東西塞進去，這是一種排列的…形容詞啦！呵呵呵…
3007	師：	所以你在寫重複組合的題目，你會去…本來這個題目是「選」嘛！
3008	S_{22}：	對…
3009	師：	對不對…
3010	S_{22}：	對…
3011	師：	但是你會把它想說是塞…塞東西是「分」物品給它嗎的那個概念？
3012	S_{22}：	對，因為原本是從這邊說我選物品，就是說我這個要拿幾個、這個要拿幾個、這個要拿幾個，那因為它現在題目都已經跟我講說它要拿幾個，所以我就是從這邊出發說想說把它塞回去，用排列的…對…
3013	師：	的方式這樣子…
3014	S_{22}：	對…
3015	師：	所以選物品跟塞物品是…？
3016	S_{22}：	是一樣的，只是兩邊不同概念，從這邊來是說，喔我一號拿幾個、三號拿幾個，只是如果以這樣想過來的話，數學算…就是比較…對排列的概念比較不會那麼強烈，就常常會說…ㄜ…我到底要哪一個？呵呵…對…呵呵呵…
3017	師：	呵呵...好，這樣子，那…這個，可是一開始你在寫的時候，你沒有寫隔板的這個問題…
3018	S_{22}：	對…因為直接就是…在我腦子裡。
3019	師：	在...在你腦子裡其實是有隔板嗎？
3020	S_{22}：	因為我從一開始學那個…重複選取的時候，我就是…就是一直用就是棍子，啊對啊我記得老師(研究者)是用那個啊…棍子的那個方法隔出來，所以我就是覺得這個…這是…這很有趣啊！就是…因為人家都是說重複選取很難，然後說是用什麼…因為好像是就是…因為他們就是感覺好像是從這邊出發說ㄟ我一要取三個，ㄟ那我這樣是不是什麼 3 乘 2 乘幾這樣，對然後就辦法選到…想到排列，但是我覺得就是…就是用棍子，用圖形的記法真的還…還蠻好記的，對。
3021	師：	可是你在上面，你並沒有畫圖形啊？
3022	S_{22}：	因為太麻煩了，哈哈！
3023	師：	啊哈哈…
3024	S_{22}：	對…一堆棍子，對，就是直接想到啊說喔，這就是棍子的…棍子跟圈圈的概念。
3025	師：	所以你這個的想法是我…一年級教你的時候，你就記到現在了嗎？
3026	S_{22}：	對啊！
3027	師：	這中間都沒有忘記？
3028	S_{22}：	沒有啊！
3029	師：	喔…

3030 S_{22}： 就是有些東西就是…啪！一瞬間打進去就是不會忘記了，對。

3031 師： 就是這個，所以你每一個解題，都很有一致性…

3032 S_{22}： 對啊，我都是用這個方法啊。

3033 師： 你把棍子跟球…

3034 S_{22}： 對…

3035 師： 然後還有 H 這個符號已經…mix 在一起了…

3036 S_{22}： 對，就是抓住了啊！對啊…所以我是覺得重複選取就是都不難啊！只是就是因為它條件都一直都一樣啊，就是可能說ㄜ…你有…有的人就是一定都是要選，不能為 0，那我就是先符合它的條件，對，但是最後都是用 H 的方法去算啊，我覺得很快，對。

3037 師： 好，那再來，第二個問題…你的那個 1234567 是什麼意思？

3038 S_{22}： 1234567 喔，是那個啊…因為他要選…7 顆球，我們現在要七顆，只是我現在把它編號啦呵呵…因為數字有點多，先算…寫下來才知道我真的有寫七顆，呵呵…

3039 師： 所以那個編號是沒有意義的嗎？還是有？

3040 S_{22}： 沒有意義，因為它是…它這個七顆球就是…因為我把它寫出來只是說它是一個物品，我還沒把它定義說，他到底是籃球、排球、足球，而是我要把它排進去之後，我才能說ㄟ它是排球、足球還是那個，現在它只是一個編號，就是排進去…確定我有畫七個呵呵…

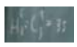
3041 師： 喔，只是確定你畫 7 個的那個 7 這樣子…

3042 S_{22}： 對，但是它只是一個球…就是球…一個物品，然後我是要把它拿來做排列的，對。

3043 師： 是一樣的球嗎？

3044 S_{22}： 喔，還沒定義啊，只是一個物品代替的，然後它排進去之後，你才能知道它ㄟ…我到底在這個狀況下它是排球、它是籃球、它是足球這樣，對。

3045 師： 喔，好，那第一小題的那個…H…7 取 3…ㄟ不對…是什麼？

3046 S_{22}： H3 取 7 然後換成…ㄟ…我是不是寫錯了？對呵呵…ㄟ不對呀這是第二題啊我沒有寫錯啊，第一題是【寫黑板：】H…H 幾啊？H5…5 個…5 種東西取 3 個…耶對了。

3047 師： 所以啊，第一小題是 H5 取 3，第二小題是 H3 取 7，請問一下為什麼…H 上面的那個，有可能比下面大或小？

3048 S_{22}： 喔，你是說那個數字嘛！

3049 師： 因為像如果 C 的話…

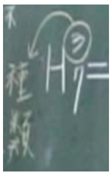
3050 S_{22}： 喔，C 的話…因為 C 它是…C 假如說是 C…C 如果是 C5 取 3 好了【寫黑板：】，因為它這個是已經固定好了，它已經幫你固定好位子，就是有 5 個空格，我要選 3 個空格出來塞東西，所以你選出來的空格，絕對不可能比你已經固定的空格還要再多了，但是這一個的話，這一個是指種類，但是這一個是指…就是…個數，所以是不一樣的東西，當然也有可能數

字會超過它或比它小，可是這一個是…這兩個都是指空格，所以你選取的空格當然不能比你原有的空格就還要再更多，對，但是你種類可能…我有 3 種但是我要選 5 個，當然是有可能的啊，就是對…

3051　師：所以你理解的那個 3 是種類的意思？

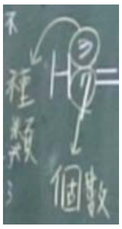
3052　S_{22}：對…

3053　師：啊你可以把它寫起來，用黃筆寫起來…

3054　S_{22}：好的…【寫黑板：

】差點寫錯字…

3055　師：那 7 呢？

3056　S_{22}：7 是個數，就是你要選取的個數…【寫黑板：

】好了。

3057　師：喔，那你選擇用 H 這個符號，是因為題目的哪一個敘述，讓你決定用 H 這個符號？

3058　S_{22}：因為它…它除了就是…因為它這個就是說嗯…就是…它一開始就是沒有講到排列嘛，然後而且它說從 3 種，3 種，它就有提到種類，而且是說 3 種選 7 個，也就是說它有強…它有提到種類也有提到個數，所以就是直接很直覺地用 H，對。

3059　師：那最後的那個括號，每一種球的個數至少有七個，它想要說什麼？

3060　S_{22}：每一種球的個數至少有七個，也就是代表說你可以…無限選取，你可以沒有那個就是…因為假如說…因為它就是想說就是…7 個都塞在這，也就是說它沒有限制啊你怎麼排，它就是給了你一個條件跟你講說，因為…因為如果可能題目說ㄟ…籃球只有 3 個，那它可能就會…你如果用 H 的話就會影響到你的排列，因為你有可能都把 7 個都排在這，但是你超出籃球原有的個數，它就提出這個條件為了要讓你符合 H 的…那個條件。

3061　師：所以…如果那個至少有 7 個的 7 改成 8…

3062　S_{22}：還是沒差。

3063　師：那改成 6…

3064　S_{22}：就有…就…就會有問題了。

3065　師：就會有問題了…

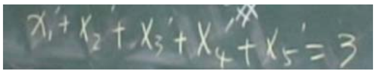
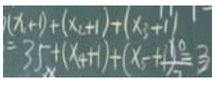
3066　S_{22}：對…

3067　師：好，那下一個。

3068　S_{22}：下一個。

3069　師：所以第三題跟第四題的差別在…？

3070	S_{22}：	三跟四…三跟四的差別就在於它的那個限制啊！一個是非負整數解，因為兩個都是要正整…兩個都是要整數解這沒有問題，但是有一個是非負，這個是要非負，非負也就是說你的…你的出來值呢就是…就是你…如果我用球的概念來說的話就是你填在這裡的球，可以大於等於零，也就是說我可以 x_3 是等於 0 的，但是這一個的話它是要正整數解，0 是一個…不是正整數，它是一個…中性數，所以就是…就是…呵呵
3071	師：	ㄟ你數學不錯耶！你講的出來 0 是中性數！
3072	S_{22}：	哈哈…所以這一個 0 是中性數，它不是正整數！ 呵呵…所以就是說，這個裡面至少都要塞 1，就是你的數一定都要大於等於 1，不能等於 0。
3073	師：	所以你扣 5 的意思是說…
3074	S_{22}：	都我都先分給他們一個去符合條件。
3075	師：	那剩下的 3 個是…
3076	S_{22}：	剩下的3個就是…隨意你分啦！因為我已經符合條件了，那我就等於是…ㄜ我先給它 5 個嘛，那我符合條件我們就把這個 8…把它去忘掉，就是重新假如說它現在沒有東西了，那我現在 3 個要塞進 5 個不同的種類…對。
3077	師：	那我想請問一下你可以…寫出完整的…解題…過程嗎？
3078	S_{22}：	完整的解題過程？
3079	師：	因為這些都是你的想法，我的意思是說…你可以用… x_1 、 x_2 、 x_3 這個…
3080	S_{22}：	嗯…
3081	師：	用寫…方程式的表示法…
3082	S_{22}：	什麼意思？
3083	師：	就是…第三題
3084	S_{22}：	嗯。
3085	師：	因為它是非負整數解，所以你直接就是 H3 取 5 對不對…
3086	S_{22}：	嗯。
3087	師：	但是呢，第四題為什麼不能寫 H5 取 8？
3088	S_{22}：	H5 取 8？喔…
3089	師：	那是因為…
3090	S_{22}：	因為那個…
3091	師：	它要正整數嘛！
3092	S_{22}：	對，那…
3093	師：	所以我的意思是說…那你個那個 5，是原本的 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 嗎？
3094	S_{22}：	這個 5 嗎？喔對啊…是有…
3095	師：	沒有，H5 取 3 的 5…對對對這個 5…
3096	S_{22}：	【寫黑板：】喔這個 5 是有…還是種類啊！
3097	師：	還是種類…
3098	S_{22}：	對啊，這個 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 …5 個 x 的哈哈…對。

3099	師：	5 個 x…5 個種類…
3100	S_{22}：	對。
3101	師：	嗯…我的意思是說，你有沒有學那個方程式的轉換，如果你有把它…辦法把它轉換成一個新的方程式…
3102	S_{22}：	把它轉換成新的一個方程式？
3103	師：	就是原本是題目的這個… x_1 到 x_5 加起來等於 8 嘛！
3104	S_{22}：	嗯…
3105	師：	的正整數解…
3106	S_{22}：	嗯…
3107	師：	可是這樣子的解沒有辦法用 H，你要轉換才可以有辦法作 H…
3108	S_{22}：	喔…是要這樣嗎？【寫黑板：】x_1' 加 x_2' 加 x_3' 加 x_4' 加 x_5' 等於 3。
3109	師：	對…啊好，那這個 x_1 跟 x_1' 是什麼關係？
3110	S_{22}：	是…就是… x_1 就是這樣…【寫黑板：】x_1' 等於 x_1 加 1。
3111	師：	好對…
3112	S_{22}：	對…
3113	師：	就是這個，你…你…你可以理解有這個東西嘛對不對？
3114	S_{22}：	可以啊可以啊…
3115	師：	好那你說明一下…原本的題目跟轉換的這個題目…
3116	S_{22}：	你說這個嗎？
3117	師：	嘿。
3118	S_{22}：	跟這個？
3119	師：	嗯。
3120	S_{22}：	喔，就是呢…就是像是我的那個啊…就是因為它是說要正整數解，正整數解也就是說每一個東西…每一個 x 至少要分到 1，數字 1，所以我就把它分給它嘛，也就是說我把它改寫成這樣…就是原本是…寫在這喔…這好…【寫黑板：】原本是 x_1 加上 x_2 加上 x_3 加上 x_4 加上 x_5 要等於 8，那我把它改寫成這樣，因為他是要正整數解…【寫黑板：】所我們 x_1 加 1 括弧，加上括弧 x_2 加 1，加上括弧 x_3 加 1，呵呵…寫到這吼…括弧 x_4 加上 1，括弧 x_5 加上 1 括弧…等於 3，對，所以我就先是給它…每一個人都一個，然後就是再變成這一個，重新換一個符號，然後變成一個好像是新的種類…新的方式…
3131	師：	嗯…這個…
3132	S_{22}：	嗯，只是因為這個就像是…就變成這樣啊…【寫黑板：】就重新改掉，是一個題…新的題目了，因為我一定要符合…符合它的條件

啊…

3133　師：　嗯…

3134　S_{22}：　對，然後就是等於是…變換成新的這個…然後呢，3 個，5 個種類塞 3 個…數字進去，但是我在前面…已經先符合了它的條件了，那我符合條件之後，我們就重新來過啊，對…因為好像又一個新的題目了…就是回到最原始的那個沒有限制的題目…

3135　師：　好，好…那下一個…第五個跟第六個，就是你都是用塞的方式去想這個問題嗎？

3136　S_{22}：　對…我從頭到尾都是用塞的方式呵呵…

3137　師：　你不管是選…取物還是分物都是在想塞是不是？

3138　S_{22}：　對，因為其實我沒有分類啊，我看到題目就是…呵呵塞吧！對…

3139　師：　可是方程式你也會用塞的？

3140　S_{22}：　對啊，就是它也用塞的啊，因為就是看過去就是…不同的東西，不同的種類…

3141　師：　嗯，不同的種類…

3142　S_{22}：　不同的，對。

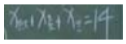
3143　師：　那…有困難的就是第七題嘛！第七題比較複雜…

3144　S_{22}：　嗯嗯…嗯嗯…

3145　師：　對…你在想…想解題的過程，你有辦法寫清楚像第…第四題那樣子的轉換式子嗎？

3146　S_{22}：　轉換式子？

3147　師：　就是譬如說…紅的有 x 顆…

3148　S_{22}：　紅的有 x 顆…然後黃的有…喔，所以如果要…所以應該是一開始…【寫黑板：】來個人性化的解釋…【寫黑板：】x 紅…再加上 x 黃…再加上 x 藍…等於 14 顆，嗯嗯，對，然後呢，我呢…現在先…因為它現在有兩個限制啊，所以呢我先把它換，它現在是每個籃子都要有雞蛋，也就是說不能…不能是…就是它…它要的解不是非負整數解，而是正整數解，所以用剛剛那個方法，把它轉換…【寫黑板：】x 紅'…再加上 x 黃'…再加上 x 藍'…等於 11，對，然後呢，我現在…再繼續如果是要寫方程式的話…因為它這兩個是要奇數嘛！所以呢…(停頓 12 秒) 不知道ㄟ…我都不會把它改寫成這樣，如果是…如果是把它變成…

3149　師：　所以你這個動作是…每個人都先塞給它 1 是不是？

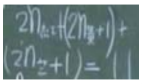
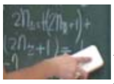
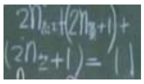
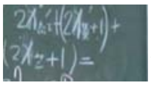
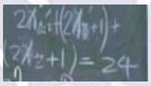
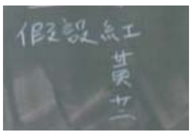
3150　S_{22}：　對對，就跟剛剛一樣，只是因為我現在想說，因為如果是要奇數的話，我就是直覺會想到 $2n$ 加 1【寫黑板：】這個東西…對對…

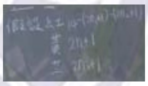
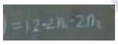
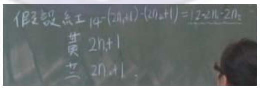
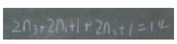
3151　師：　喔對啊對啊對啊，所以…黃…黃色應該要是 $2n$ 加 1 嘛！

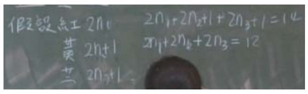
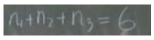
3152　S_{22}：　藍色也是，對。

3153　師：　喔，藍色也是，所以，那兩個 n 是一樣的嗎？

3154　S_{22}：　那兩個 n 是一樣的嗎？不是不是。

3155	師：	不是，所以那你就用…不同的代號啊，譬如說黃色是…
3156	S_{22}：	…(默默寫黑板)【寫黑板：】
3157	師：	等於 11 嗎？
3158	S_{22}：	【擦黑板：】對啊等於 11 啊…【寫黑板：】等於我把這個換掉【寫黑板：】…只是我現在想 n 紅到底是什麼意思？我想想看喔…這個小 n…(沉默了 17 秒)…這個小 n 就是指它那個啦，就是它把它變成那個…就是…就是應該就是說它的數，乘以兩倍，就是…就是這個…這個就是那個呵呵…這要怎麼說啊？不然你可以把它…
3159	師：	好好好，你…你…
3160	S_{22}：	喔，那我們就把它都先乘以兩倍啊！那就是直接用 x' 去弄的話…先都把它弄成兩倍，喔，這樣就可以算了啊！對，我們先把它乘以兩倍【寫黑板：】，直接這樣啊…對，就直接乘 2 嘛，反正這樣也是會保證它的數啊，這樣，這樣，喔，喔，天哪！呵呵…乘 2…這邊是 22，22 加 2…24…【寫黑板：】ㄟ這樣回去會一樣啊…呵呵…這…這是…我想想看喔…
3161	師：	好好好…老師來引導你一下，讓老師引導一下…
3162	S_{22}：	好。
3163	師：	你在旁邊有空白地方，有點擠…
3164	S_{22}：	嗯嗯…
3165	師：	你現在寫清楚就是…假設，把假設寫清楚…假設…紅籃子…紅嘛紅…
3166	S_{22}：	【寫黑板：】
3167	師：	然後下面黃…下面黃…
3168	S_{22}：	【寫黑板：】
3169	師：	然後下面籃，這樣子，好。
3170	S_{22}：	【寫黑板：】
3171	師：	你要怎麼假設你每一個籃子的…情形？你看題目再看一次。
3172	S_{22}：	嗯嗯…
3173	師：	它就是…條件是什麼？
3174	S_{22}：	條件是…每個籃子都要有雞蛋…
3175	師：	都要有雞蛋，然後呢？
3176	S_{22}：	對…而且黃、綠兩個籃子都裝奇數顆…

3177	師：	所以你要從誰開始假設？
3178	S_{22}：	從誰開始假設？從這個！從這兩個好了…這兩個限制比較多ㄟ…
3179	師：	好，這兩個限制，所以你應該怎麼寫…黃色裡面有幾個？
3180	S_{22}：	蛤？
3181	師：	黃色裡面應該要假設幾個？
3182	S_{22}：	黃色裡面應該要...喝~ (倒吸一口氣) 【寫黑板：】2n 加 1 啊…
3183	師：	啊對…2n 加 1，然後藍色裡面…
3184	S_{22}：	也是 2n 加 1…【寫黑板：】【寫黑板：】
3185	師：	為什麼你不寫 2n 減 1？
3186	S_{22}：	哪一個？
3187	師：	2n 減 1 可以嗎？
3188	S_{22}：	2n 減 1…可以啊！
3189	師：	也可以 2n 減 1？
3190	S_{22}：	啊不行，因為如果這個等於 0…對，對，它們要符合第一個限制，如果你先設的話…
3191	師：	嗯，所以要寫 2n 加 1…
3192	S_{22}：	嗯。
3193	師：	對，那這樣子的結果，紅色會有什麼…紅色要怎麼寫？
3194	S_{22}：	紅色？那就寫 14 減掉…【寫黑板：】這樣，整理一下…【寫黑板：】
3195	師：	這樣，然後，然後呢？
3196	S_{22}：	然後…這個【寫黑板：】…然後…我現在要把它幹嘛？
3197	師：	三個相加等於 14 啊？
3198	S_{22}：	對啊！
3199	師：	所以 14 等於 14？
3200	S_{22}：	哈哈…不是這樣子，呵呵…我剛剛在想說那個...太腦了，我剛剛這個就是用 14 去減的啊！所以不可能再加起來了，再加起來就是…
3201	師：	所以你紅色不應該用 14 去減啊，你應該是…怎麼樣？再設另外一個…
3202	S_{22}：	再設一個 2n【寫黑板：】來個 $2n_3$ 好了…
3203	師：	好，這樣。
3204	S_{22}：	嗯，ㄟ對吼，這樣塞進去情況就符合了，管它…
3205	師：	這樣就符合了嗎？
3206	S_{22}：	沒有沒有再塞再塞…ㄜ就這樣說【寫黑板：】$2n_3$ 加上 $2n_1$ 加

1 加上 $2n_2$ 加 1 等於 14，鼻子好癢，然後呢 $2n_3$ 加上…整理一下…我可以改個符號嗎？【寫黑板：】哈哈…有點沒順序…這邊等於 12，然後呢所以現在是【寫黑板：】n_1 加上 n_2 加上 n_3 等於 6，對，這樣就是一個新的題目了…種類、個數，就可以塞，而且它…喔鼻子好癢…不對，n_1 不能等於 0，但是這個可以等於 0，嗯，然後嗯我想想看喔…結果應該是要 n_1 不能等於 0，但是就是塞…排容？排掉比較快，對啊排掉 n_1 等於 0 的應該比較快，排掉 n_1 等於 0 的就是把 6 塞進這兩個啊，就沒差，來我來減減看，來，身體力行，想想看喔，先是【寫黑板：】H3 塞 6 減掉【寫黑板：】H2 塞 6，等於【寫黑板：】C67899886 減掉 C67886787 這樣子…88787 除 2…7428…28 減掉 767【寫黑板：】等於…啊！答案對了耶！呵呵…

3207 師： 很莫名嗎？為什麼很莫名，這本來就是對的啊…

3208 S_{22}： 對啊對啊…

3209 師： 那就是說吼，你的那個 n_1 要至少怎樣？

3210 S_{22}： n_1…至少要大於等於 1 啊…

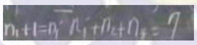
3211 師： 那 n_2 呢？

3212 S_{22}： 非負整數解，大於等於 0(指 n_2)，大於等於 0(指 n_3)。

3213 師： 所以你就可以算一個 n_1' 啊…

3214 S_{22}： 呵呵…再加一個 n_1'…

3215 師： 懂我意思嗎？

3216 S_{22}： 懂…【寫黑板：】再來個排容…

3217 師： ㄟ？

3218 S_{22}： ㄟ不是排容呵呵…【寫黑板：】C3 塞 7 等於…

3219 師： C 還是 H？

3220 S_{22}： 喔 H…H…

3221 師： 可是…嗯…

3222 S_{22}： ㄟ？

3223 師： 哪裡有問題？

3224 S_{22}： 我加 1 這個…啊！可惡，是我弄錯了…我弄錯了…就是…對 n_1…【寫黑板：】

3225 師： 嗯，這樣子代表 n_1 至少是 1 嘛！

3226 S_{22}： 對…

3227 師： 這樣子。

3228 S_{22}： 對…【寫黑板：】等於 5，好了，這樣就對了。

3229 師： 對，所以就跟你一開始寫的…你有看到你一開始寫的這個嗎…H3 取 5…

3230 S_{22}： 對…

3231 師： 對不對，就是一樣的。好，謝謝你。