國立臺灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文

指導教授：左 台 益 博 士

動態連結多重表徵視窗環境下
複數乘法學習之研究

研 究 生：許 技 江

中 華 民 國 九 十 九 年 八 月

國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文通過簽名表

系所別： 數學系（研究所）

姓名： 許 技 江　　　　　學號： 595401111

博(碩)士論文題目：動態連結多重表徵視窗環境下複數乘法學習之研究

經審查合格，特予證明

論文口試委員

李源順　李源順博士
臺北市立教育大學

陳明璋　陳明璋博士
國立交通大學

左台益　左台益博士
國立臺灣師範大學
論文指導教授

系主任（所長）簽章： 洪有情

中 華 民 國 九 十 九 年 八 月 廿六 日

國 立 臺 灣 師 範 大 學 學 位 論 文 授 權 書

本授權書所授權之論文為授權人在國立臺灣師範大學數學
研究所九十九學年度暑期取得碩士學位之論文。

論文題目：動態連結多重表徵視窗環境下複數乘法學習之研究

指導教授：左台益

授權事項：

一、 授權人 ☑同意 □不同意 非專屬**無償授權本校及國家圖書館**將上列論文資料以微縮、數位化或其他方式進行重製，並可上載網路收錄於本校博碩士論文系統、國家圖書館全國博碩士論文資訊網及臺灣師範校院聯合博碩士論文系統，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、瀏覽、下載、傳輸、列印或複印等利用。

二、 論文全文電子檔上載網路公開時間：【第一項勾選同意者，以下須擇一勾選】

☑ 即時公開

□ 自＿＿＿＿年＿＿＿＿月＿＿＿＿日始公開。

授權人姓名：許技江 （請親筆正楷簽名）

學　　號：595401111

註：1. 本授權書須列印並簽署兩份，一份裝訂於紙本論文書名頁，一份繳至圖書館辦理離校手續。

2. 授權事項未勾選者，分別視同「同意」與「即時公開」。

中　華　民　國 九 十 九 年 八 月 廿六 日

國 立 臺 灣 師 範 大 學

博碩士論文電子檔案上網授權書

（請繳交至本校圖書館辦理離校手續）

本授權書所授權之論文為授權人在國立臺灣師範大學數學系所
教學碩士班九十九學年度暑期取得碩士學位之論文。

論文題目：動態連結多重表徵視窗環境下複數乘法學習之研究

指導教授：左台益

茲同意將授權人擁有著作權之上列論文全文（含摘要），授權本校圖書館，以電子檔上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

☑即時公開

☐上列論文請延後自____年____月____日公開。

授 權 人
姓　　名：許技江（請親筆正楷簽名）

學　　號：595401111

身分證字號：L120311559

連絡電話：0916797510

E-MAIL：reheartttw@yahoo.com.tw

中　華　民　國　九十九　年　八　月　廿六　日

感　謝　詞

首先我要感謝三位口試委員李源順教授、陳明璋教授及左台益教授，在百忙之中抽空來給予指導，並提供相當豐富的專業建議，讓我的研究論文能做得更好。

其中非常感謝我的指導教授左台益老師。左老師犧牲相當多個人時間來帶領團隊，並且以專家的標準來引導我們讀文章、做研究、分析資料，讓我在研究數學教育的這個領域裡學到很多，並且以審慎的態度來檢視自己，提升教學品質與教學成效。左老師也給我相當多的機會創作與發表，讓我在教育的工作之外，也找到在自己興趣上的成就感，在完成論文之後仍能繼續作研究。

感謝左老師的研究團隊成員，總是在我茫然無措時給予適時協助，以及各種面向的建議，並且互相分享研究成果與生活點滴，讓我在研究這條路上不會孤單乏味。

最後感謝我的家人及服務的學校，給我相當多的個人時間來進行研究工作。尤其是我的妻子總是默默付出，但也適時給我建議，讓我這一路走來順利。

還有感謝各位讀者！您能夠閱讀我的文章是我莫大的榮幸，也許您能給我不一樣的想法，讓研究的領域更多采多姿！

摘　要

本研究在探討高中生關於複數乘法的概念結構與處理複數乘法問題的解題策略，並依據此結果來設計動態連結多重表徵之視窗學習環境，且探討在此環境下學生之學習成效。

整個研究分為兩部分。第一部分的研究以七十七名高二學生為樣本，進行診斷性問卷測驗，並抽樣進行診斷性訪談。研究結果發現：高中生對於複數乘法的概念結構可區分為表徵整合型、表徵轉移型與單一表徵型三種類型；高中生面對複數問題的解題策略也可分為靈活豐富型策略、情境型策略、機械型策略與受限型策略。

第二部分的研究以一班高中二年級學生為實驗組樣本、一班高中三年級學生為對照組一之樣本、一班高中二年級學生為對照組二之樣本，來進行動態連結多重表徵視窗學習環境之教學實驗。研究結果顯示，在前測時三組之表現相近，而在後測時實驗組有 68%的樣本之概念結構提升為表徵整合型，對照組分別有 57%、50%的樣本之概念結構提升為表徵整合型，顯示動態連結多重表徵視窗環境有助於學生整合各種表徵，並能應用於解題策略上。

本研究所得到之複數乘法概念結構與解題策略等等結論，可作為高中教學成效之評量與教學設計之參考。本研究設計複數乘法之動態幾何視窗學習環境，可以提供中學實務教學使用。

目　　次

附表目次

附圖目次

附錄目次

第壹章　緒論

第一節　研究背景與研究動機

數學抽象概念通常需藉助外在的表徵作爲個體內在建構與外部溝通的仲介。在數學的發展過程中，人們不僅深入發展數學的知識，同時也建構出各種表徵形式以溝通及存取抽象數學思維。例如，複數可以一般式 $a+b\,i$ 或極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的代數表徵形式表示，也可以複數平面上的圖形表徵方式呈現。學習者要瞭解、學習與應用數學，不僅要思考數學的本質意義，且能充分掌握其各種表徵以及表徵之間的轉換與轉移(Lesh, 1987; Kaput, 1987, 1989, 2008)，透過外在表徵的理解與操作來建構此概念的內在表徵(Goldin, 2000)。然而傳統的學習環境所能提供的表徵呈現方式有限，教學者可應用現代科技工具，提供多重表徵環境以協助學習者學習數學知識。因此，本研究從表徵的面向來分析與瞭解學生學習複數乘法的概念結構，並以科技工具設計複數乘法的多重表徵學習環境，以提供學習者使用。

數學公式中最美的等式：$e^{i\pi}+1=0$，連結數學中最重要的五個常數：0、1、π、i、e，及最基本的三個運算：加法、乘法、次方（Maor，1994/鄭惟厚譯，2000）。這個等式顯示出表徵與運算在數學界扮演的重要角色，也隱含著複數極式的指數型態。而複數的各種表徵是經過漫長的歲月及很多數學家的努力與辯證才一一現世。早期卡丹諾(Cardano, 1501~1576)、笛卡爾(G. Descartes, 1596-1650)與牛頓(I. Newton, 1643-1727)等人並不認爲虛數有什麼特別意義，直到邦貝利(Bombelli, 1526~1572)、歐拉(L. Euler, 1707-1783)、高斯(F. Gauss, 1777-1855)相繼提倡以符號 i 來代表虛數單位，建立複數 $a+b\,i$ 的概念，並發展其運算法則，卡丹諾的三次方程式公式才得到合理而完整的解釋，能夠做爲解決問題與溝通的工具，並流傳教授。歐拉提出著名的歐拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，開啓複數的極式與指數表徵領域。高斯提出複數平面，賦予複數解析幾何的表徵與意義。柯西(A. Cauchy,1789-1857)和漢彌頓(W. Hamilton, 1805-1865)對複數做嚴密的代數定義，複數才完全被數學家所接納（William P. Berlinghoff，Fernando Q. Gouvêa，2004）。複數的地位，經過兩、三個世紀多位數學家的努力，終於在數學王國之中取得正統。複數的產生及應用是數學思維發展的重大成果，除了闡示複數系統本質結構的複雜度，另一方面也展現出複數爲數學社群所接受之困難。自十六世紀開始發展複數概念，到十九世紀複數才完全被數學家所接受，這是經過相當長時間的發展。數學家花了幾世紀才解決的問題，高中生要用多少時間來融會貫通呢？是否如同當年的數學家不易接受複數的概念呢？

現今的高中數學課程安排（九五暫行綱要），複數概念包含代數與幾何兩種表徵，複數代數表徵有一般式 $a+b\,i$ 與極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 兩種，對應於複數幾何表徵的複數平面（直角坐標系）與極坐標系。極式概念之引進目的是爲了

處理複數乘法時，相較於一般式乘法使用分配律計算，採用極式乘法更爲精緻與便利，同時極式與複數平面的連結關係提供極式乘法在複數平面上旋轉、伸縮的幾何意義。由於複數乘法的代數表徵包含了一般式乘法及極式乘法，幾何表徵包含了旋轉與伸縮等變換，同時又蘊含了極式乘法與幾何變換兩種表徵之間的對應連結關係，可見整個複數乘法概念的複雜程度，也可以瞭解表徵是複數乘法概念的關鍵元素。而高中生可以利用複數乘法的概念來處理多項方程式解根、解複數的 n 次方根、多項式分解等等問題，也可以利用極式乘法對應的幾何變換來處理坐標平面上點旋轉的問題，可知複數乘法的概念對高中生處理多項式與方程式等代數問題與幾何變換問題而言相當重要。

一些研究指出，多重表徵可以提供學習者反思行動，不僅可以豐富原有的概念性表徵，亦可重新組織認知結構，並建設新表徵(Lesh, 1987; Goldin, 2000)。由於複數乘法包含一般式乘法、極式乘法與幾何變換三種概念，爲了讓學習者學習複數乘法時能掌握各種表徵而且豐富其概念，而不是因爲多重表徵增加學習者的困難度，教學者應利用能夠呈現多重表徵的工具來輔助複數乘法的教學，以彌補傳統教學環境不足之處。自從電腦 Windows 系統的誕生與普及後，電腦環境已進入圖型視覺化與直覺性操控的時代，對於使用者的動作會進行立即性的回應，不再是早期的輸入指令與延後執行才會得到結果的環境。近幾年有相當多的動態幾何軟體（Dynamic Geometric Software。以下簡稱 DGS）問世，讓使用者可以很輕易地在電腦上繪出數學的幾何圖形，而且在拉動部分元件時能維持數學的性質。例如免費的 GeoGebra 軟體，使用者可以使用作圖工具繪圖，也可以利用方程式繪圖，更可以利用複數平面上的點所代表的複數來進行乘法後，直接繪在同一複數平面上（意即直接使用幾何圖形進行乘法，不需藉助代數計算），僅需使用 $c = a \cdot b$ 類型的指令即可達成。這在數學教育上提供了相當好的功能來設計輔助教學環境，尤其是此環境能夠同時呈現多重表徵，並且在代數表徵與幾何表徵同時變動時呈現動態的連結，讓學習者可藉由操作與觀察學習其中的數學知識。

使用科技並不一定會對教學或學習有助益。電腦環境愈複雜、功能愈強大，可能對初學者產生過多的訊息來源，其陌生的操作介面也可能對數學概念不完備的人產生更多的認知上的負擔。爲了要達到教學效果，教學者利用科技工具設計教學環境，應將教學內容以及教學流程妥善地安排在教學環境中呈現，讓使用者能學習到預先設計的數學知識。Dubinsky(1991)對於設計教學課程以建構數學概念思維，提出在設計教學之後，必須回顧與反思，檢討並修正教學設計。所以如何妥善利用現有的環境與資源，依據數學知識與學生的概念結構，審慎地設計出適合教學與學習的環境，是值得研究與探討的。對於設計完成的學習環境，還需評鑑其功效與學生學習效果，進行修正改進，在其後使用此環境時能達到更好的教學效果。

國內有關高中生複數單元的研究文獻，大多是研究「錯誤類型」（陳美卿，民 91；陳佳吟，民 94；黃見益，民 94；林佳蓁，民 95；吳銘川，民 97）。他們提出高中生對複數概念的共通的錯誤類型，主要是「複數概念意義不清楚」、「無

法將複數與複數平面連結」、「計算錯誤」等等。另外也有文獻指出「複數根的極式表徵」及「複數平面表徵」在高中生的概念心像中較為薄弱（李昭慧，民 92）。這些結論顯示出高中生進行複數表徵的轉換（例如代數計算）與轉移（例如代數與幾何之連結）均存在著困難，但是國內並未有從代數與幾何這兩種表徵轉變的角度來分析學生的概念結構之研究，也較少提及多重表徵環境對學生建構複數乘法概念的影響。由於複數具有代數與幾何等多重表徵，而複數進行乘法時在代數與幾何兩種表徵之間存在的乘法動作之連結，基於從表徵的角度來進行研究以及利用科技來設計多重表徵的學習環境之動機，本研究將以複數乘法為單元素材，探索學生之概念結構與設計動態連結多重表徵之學習環境，並協助學生學習複數乘法之概念。

第二節　研究目的與研究議題

本研究之目的，在瞭解學生學習複數乘法情形，以及利用 DGS 的功能設計動態幾何學習環境，幫助學生在此環境中，有效地學習複數乘法。

依據研究目的，擬定出兩個研究議題：

一、瞭解分析高中生複數乘法概念的概念結構與處理複數乘法問題的解題策略。

複數乘法概念的發展，從本體論來看是複雜的，從認識論來看亦存在困難度。本研究在探索高中生學習複數乘法的情形，而表徵是複數乘法概念的關鍵元素，故本研究從複數乘法的數學本質與表徵的面向，來探討高中生關於複數乘法的概念結構與解題策略。研究者將此研究議題分成兩個子問題：

（一）高中生的複數乘法概念的概念結構為何？

（二）高中生處理複數乘法問題的解題策略為何？

二、應用電腦動態幾何軟體，設計複數乘法的學習環境，並探討教學成效。

這裡亦將此議題分成兩個子問題：

（一）如何設計動態連結多重表徵的複數乘法視窗學習環境？

（二）進行電腦動態學習環境之教學成效為何？

第貳章　理論基礎與文獻探討

本研究之研究議題為：

一、瞭解分析高中生複數乘法概念的概念結構與處理複數乘法問題的解題策略。

二、應用電腦動態幾何軟體，設計複數乘法的學習環境，並探討教學成效。

首先對複數乘法的數學結構作分析，以此作為分析高中生概念結構與解題策略的基準。分析數學結構可從三部分來進行：（一）複數乘法的歷史發展與高中課程安排。（二）複數乘法的表徵形式、表徵之轉換轉移，及表徵的統整應用。（三）複數乘法概念的學習與發展過程。在複數乘法的歷史發展與高中課程安排中，可以發現複數乘法具有多個數學結構層次，以及多重表徵性質。另一個面向，由表徵理論來探討複數乘法的表徵特性與表徵之轉換轉移，以及學生在學習時，所需使用的表徵性質、轉變和統整。接著探討複數乘法概念包含了程序性知識與概念性知識，以乘法符號為樞紐，交互融合成過程概念（procept）。

其次，相較於傳統教學環境，分析使用電腦軟體來設計動態連結多重表徵的複數乘法學習環境具有何種優勢，以及此種學習環境如何傳遞數學知識。並且分析在學習理論上，動態連結多重表徵的學習環境除了提供外部表徵之外，也在學習者的處理訊息過程、學習新的數學知識時，加強反思行動，以增進學習的成效。

第一節　複數乘法的歷史發展與中等課程結構

數學知識的本質結構均源自於數學發展歷史。歷史上所誕生的數學元件，往往成為課程所需要介紹給學生的數學知識。每一個數學元件在歷史上的發展，都是從簡單的概念，朝向複雜的結構來進行。由數學史發展的先後順序，可以看出各種數學概念簡單或複雜的部分。因此，研究數學的發展史可作為分析數學概念的依據。

每一種數字系統的發明，不僅要定義出其元素的意義和符號而已；從代數學的角度來看，還必須定義其元素之間的運算，此運算建立了元素之間的關係。以複數乘法為例，處理 $z_1 \cdot z_2 = z_3$ 之中乘「・」這個記號，是在建立 z_1、z_2 與 z_3 的關係。然而同樣是使用乘的符號，卻因複數的結構不同，而有不同的運算方式。這點可以從複數的歷史發展中看出。複數的誕生與發展過程可參考表 1 複數發展編年史。

表 1 複數發展編年史

西元年代	複數的發展
1545	卡丹諾首先使用$\sqrt{-15}$等表示虛數。
1572	邦貝利訂出$\sqrt{-1}$的四則運算。
1693	沃利斯提出複數可視爲正數與負數的比例中項。
1722	棣美弗提出定理$(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^n=\cos nx+\sqrt{-1}\sin nx$。
1748	歐拉提出公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$。
1797	威塞爾、阿爾龔提出複數平面概念。
1831	高斯使用數對（a，b）對應他所命名的複數 $a+bi$，賦予在複數平面上的完整幾何概念。

在現今的數學世界裡，提到「複數」就會想到$a+bi$的形式，包含實部及虛部，這是經過數學家多年的努力，所淬鍊出的精華，設計出讓學習者容易建構的概念。但是在四百多年前，複數的概念剛開始萌芽的時期，數學家卻不是如此想。十六世紀之前，數學家面對解一個負數的平方根時，如同現今國內國民中學的數學課程一樣，將之視爲不存在，而不是實數。然而十六世紀卡丹諾等人在處理三次方程式的公式解，卻時常需要面對這種負數的平方根。卡丹諾在解$x^3=15x+4$時，使用公式得到一解$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$，似乎不是一個實根，但是他發現此根應該是實數 4。這造成卡丹諾的困惑，尤其是在當時對複數一無所知的時代，他並不知道應該如何妥善去處理這個式子，能夠把兩個不是實數的式子合併成爲一個實數。

這也可能是現今學生最初面臨複數的一種困惑。「我們都不知道這個數字是什麼，要如何去化簡它，要如何去將它進行運算呢？」最早脫離這個窘境的是邦貝利。他利用實數算則與代數式的模式，建立$\sqrt{-1}$的四則運算，但是他並未真正把$\sqrt{-1}$視爲一個數，其目的是藉由這些運算找到應該是實數的根。這似乎是很多學生在面臨新概念時，常常使用的手法。「我不知道它是什麼，但是我會拿它來作運算。」邦貝利的工作爲後來的數學家提供方向，不僅使實數系很自然地擴大到複數系，而且爲建立複數的計算規則帶來便利。由於處理方程式的根，常會產生實數部分與非實數部分，所以數學家必須將此二部分分開處理，演變成複數的實部與虛部。在進行兩個 $a+b\sqrt{-1}$形式的式子的乘法時，沿用代數的分配律來處理，並利用$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$計算結果。然而當時（十六至十七世紀）大部

分的數學家連複數的存在都無法接受，主要原因是一般數學家認爲數應該有某種實在性，而無法以實體來表現負數的平方根。（袁小明，2003）

十八世紀時，萊布尼茲等人不顧忌當時複數的未明確性，進行複係數分式的積分，引導出當代數學家關於複數的對數性質的廣泛研究（袁小明）。棣美弗等人從對數的微積分找出複數的極式表示式 $\cos x+\sqrt{-1}\sin x$ ，並提出棣美弗定理 $(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^n=\cos nx+\sqrt{-1}\sin nx$ 。接著歐拉提出公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ ，並且得到相當有名的 $e^{i\pi}+1=0$ 等式。其發明連結了複數、指數與三角函數，爲人類瞭解複數的意義提供了新的依據(Maor)。到了這個時期，可分別使用三角函數與指對數性質來呈現極式乘法的運算規則：

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)$$ ，

或是 $e^{ix}\cdot e^{iy}=e^{i(x+y)}$ ，並且說明了此種形式的複數乘法，較前期使用分配律計算兩個 $a+b\sqrt{-1}$ 形式的乘法更有便利性與豐富性。

到了十九世紀，有數學家開始思考，一般以實數與數線上的點作對應，那麼複數兼具實部及虛部的話，是否有合適的對應方式呢？此時威塞爾(Wessel)、阿爾龔(Argand)皆提出複數平面概念，而由高斯接續建構完整的複數平面幾何性質，同時檢驗複數的代數結構在複數平面上仍舊成立(Maor)。他也使用數對 (a , b) 對應他所命名的複數 $a+b\,i$，終於使得複數能夠爲數學家廣爲接受。後來數學家從複數平面上找出兩複數的乘法是進行旋轉與伸縮的動作，並發現相似形的性質。（袁小明）

從複數的歷史發展中，可以發現複數的表徵形式有三種，在此複數表徵的架構下，複數所進行的乘法形式也有三種：

一、複數的一般形式 $a+b\,i$（後面簡稱爲一般式）。這是最早提出的複數表徵方式。進行兩個一般式的乘法運算時，沿用實數的分配律，可知

$$(a+bi)(c+d\,i)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$ 。

此種複數乘法方式在本研究中，統一稱爲「一般式運算程序」。

二、複數的極式（或指數式） $re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 。這是從複數與對數的微積分推演而來，蘊含較多的數學概念。在進行兩個極式的乘法時，可將分配律與三角函數，經由前述一般式的運算程序，統整到極式運算的規則裡：

$$r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta+i\sin\beta)=r_1r_2\left[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\right]$$ 。

此種複數極式的乘法方式在本研究中，統一稱爲「極式乘法法則」。（也可使用指數律來說明此運算，但此部分超出高中課程範圍）

三、複數平面。其賦予複數幾何意義。我們可以從高斯所提出的複數平面，來找出複數 $a+b\,i$ 與極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的幾何意義與對應關係。其中複數的極式表示式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ，r 表示 z 的絕對值，即爲複數平面上 z 點與原

點 O 的距離。 θ 表示複數 z 的輻角。考慮複數平面上兩個複數點的乘積，與此兩點對應之極式進行乘法動作，兩極式的乘積中，輻角為兩極式的輻角和，在複數平面上可視為旋轉的動作，即將其一複數點對原點旋轉另一複數點的輻角；極式的乘積中絕對值為兩極式的絕對值乘積，在複數平面上可視為將一複數點伸縮另一複數點的絕對值倍數。故可以把複數平面上兩個複數點的乘積，以幾何動作「旋轉」及「伸縮」來表示（如圖 1），如此賦予極式乘法法則的幾何意義。此種複數平面的乘法方式，在本研究中統一稱為「幾何變換」。由於此種幾何變換，需要整合極式乘法法則與代數幾何之間的表徵轉移，故其概念層次較單純代數表徵的極式乘法法則為高。

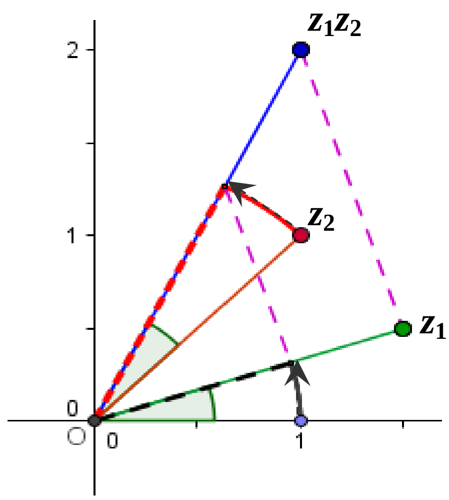


圖 1 複數平面上兩複數乘法的旋轉與伸縮

由上述的分析，以及考慮數學發展史上的先後順序，本研究提出複數乘法的數學結構可分為三個層次：

（一）一般式運算程序。

（二）極式乘法法則。

（三）幾何變換。

由於後者均建立在前者的概念之上，前者認知概念未建構完備時無法直接建構後者的概念。故後者的層級較前者為高。「一般式運算程序」與「極式乘法法則」著重於代數結構的處理方式，「幾何變換」則包含幾何結構的動作，及整合代數表徵與幾何表徵連結的過程。而極式乘法法則與幾何變換兩者概念的區分方式，不論是代數表徵或是幾何表徵，如果進行乘法時，是使用圖形的旋轉與伸縮概念，即可歸屬於幾何變換；但如果進行乘法時只是著重於輻角相加、絕對值相乘來找到代數結果，而並未從旋轉伸縮的角度來考量的話，則僅歸屬於極式乘法法則。

複數的歷史發展，經過三百年左右才完全為數學家所接受。同樣的，在目前的高中課程中（九五暫行綱要），高一學生在一開始面對複數這個概念時，是否

也會產生與卡丹諾相同的困擾呢？當學生建構了複數乘法的「一般式運算程序」的概念時，需要建構「極式乘法法則」與「幾何變換」等較高層次的複數乘法概念時，會產生哪些問題？我們就複數乘法的數學結構之三個層次來看目前高中的教材編排，如表 2。

表 2 複數乘法在高中課程中的安排

數學結構	高中課程編排	教授時間
一般式運算程序	第一冊第一章	高一上學期（約九月~十月）
極式乘法法則	第二冊第三章	高一下學期（約六月）
幾何變換	課程中並未強調	課程中並未強調

複數乘法的一般式運算程序部分，在高中課程是在第一冊第一章中介紹複數一般式，定義四則運算時教授。此部分亦採用分配律來說明複數一般式乘法的運算模式，與歷史發展相符。極式乘法法則是在第二冊第三章，介紹完三角函數概念時教授。由於要避免牽涉複雜的微積分學（ $e^{ix}\cdot e^{iy}=e^{i(x+y)}$ 並非高中課程範圍），故需要使用一般式的運算程序之分配律，及三角函數公式來證明極式乘法法則，此與歷史發展稍有不同。一般式運算程序與極式乘法法則兩部分教授時間相距約八個月，高一學生是否能夠建立完備的知識連結，是否因為時間相距久遠而影響新概念的建構，相當值得我們研究。

另外，高中課程中並未強調複數乘法在複數平面上的幾何變換。複數平面的介紹，安排在第一冊第一章介紹 $a+b\,i$ 的對應點，以及第二冊第三章介紹極式的絕對值與輻角的幾何意義，與極式乘法的代數表徵運算規則，均未牽涉到乘法的幾何變換。然而在大學入學測驗中，曾經出現需要使用幾何變換概念的題目。學生是否能在學習極式時，自行建構代數與幾何表徵之間的關係；教師要如何使用其他輔具，來協助學生建構幾何變換的概念，進而統整各種表徵並解決問題，也相當值得研究。

第二節　數學概念的多重表徵

Lesh(1987)提出表徵為溝通的媒介，數學表徵的五個型態為「實物情境」、「書寫符號」、「口說語言」、「圖像模型」、「教具模型」。Lesh 並強調表徵之間的關係，包含轉換及轉移。在複數的世界裡，我們使用「i」這個符號，來表示 $\sqrt{-1}$ 這個數學概念。這個 i 就是一種代數表徵，而且為所有數學社群所接受、所公認的表徵形式。我們要學習複數的概念，跟別人溝通 $\sqrt{-1}$ 這個數學概念，就必須用到 i 這個表徵方式。同樣地，我們要進行乘法的運算，要表示「乘」的這個動作，就需要用到「×」或「・」這個符號，這也是表徵的形式。當然我們會發現，「i」

與「・」(或「×」) 是不同類型的表徵形式。「i」是一種代數表徵，象徵的是一個「數」；而「・」是一種運算的表徵，象徵的是一個「運算」、「動作」或「轉換」。

而這些表徵的符號，其代表的可能是實體的物件，也可能代表的是非實體的數學概念。Palmer(1977)提出外部表徵由五個部分所組成：(1)被表徵世界、(2)表徵的世界、(3)被表徵世界裡被表徵的觀點、(4)表徵的世界裡進行表徵模式的觀點、(5)被表徵觀點與表徵觀點的相互關係（參考圖 2）。我們要看表徵的結構與功能，不僅是從表徵本身（來自表徵的世界）來看，還要看被表徵的物件（來自被表徵的世界），以及其表徵所串連兩個世界的方式。

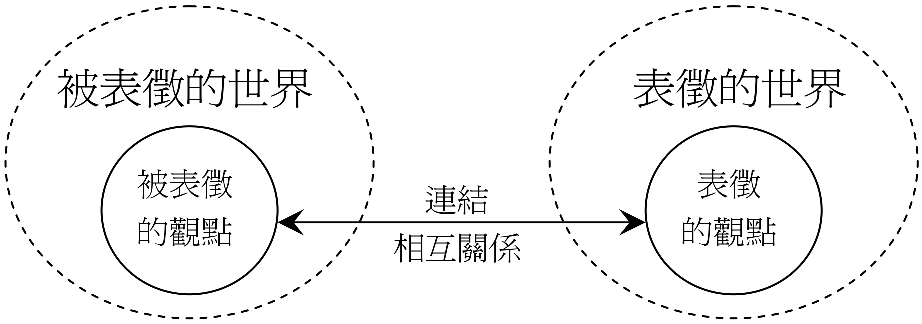


圖 2　Palmer 提出外部表徵的五個部分

以複數為例，所有複數本身是被表徵的世界。而表徵的形式有相當多種，形成了表徵的世界。我們以 $a + b\,i$ 及 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 或複數平面上的點來表徵其中的幾個複數，如此即建立了兩個世界之間表徵的相互關係。複數乘法的數學結構可分為三個層次：（一）一般式運算程序；（二）極式乘法法則；（三）幾何變換。此三層次的數學形式可以使用代數和幾何兩種表徵來呈現。然而複數乘法這個概念本身是抽象的，必須透過符號（即表徵）來呈現各種數學知識。學生學習複數乘法，也需要透過表徵形式來建構各種數學概念。要檢驗學生的複數乘法三個層次的建構情形，可以從他對此三個層次的表徵使用情形來分析。Kaput(1989) 提出合適的教學應藉由使用表徵形式及結構來建立與表達數學意義。數學意義的建立，主要有兩大部分：

一、不同表徵之間的轉移（translation）：包含兩種不同的數學表徵系統之間的轉移，及數學表徵系統與非數學表徵系統之間的轉移。

二、表徵之內的轉換（transformation）：（一）藉由圖案與語法（程序性）結構的學習，透過特定表徵內部記號的轉移及操作。（二）藉由心智元件的建立，透過對於操作、程序和概念的反思，以提供在更高的層次時成為新的操作、程序和概念的基礎。

Goldin(1987)也提出個體藉由表徵將外在抽象型態進行內在建構，即為內化成內在表徵。數學的知識本身是抽象的，而我們使用代數符號來表徵實體的物件。當我們熟悉代數符號的運算時，就不需要實體物件的對應。如此將實體的物

件，抽象化到心中認知的概念，進而形成個體的「基模」(Skema)。個體不斷地接觸新事物，使用舊基模統整新知識，發展不同的表徵形式進行抽象化及內化，進而學習到龐大而複雜的數學知識。

由 Lesh、Kaput 與 Goldin 等人的表徵理論來分析複數乘法知識，可知其具有代數表徵形式及幾何表徵形式等多重表徵。學生學習複數乘法時，需透過表徵（而且是多個表徵）來建構心中複數乘法的概念。而進行複數乘法時，不僅僅只能使用代數表徵之內的轉換，或幾何圖形表徵之內的轉換，還有代數與幾何表徵之間的轉移。例如進行兩個複數的乘法時，在複數平面上是將一個複數點作旋轉與伸縮的動作，對應到代數的極式乘積就是輻角相加、絕對值相乘。複數乘法不僅具有多重表徵的外在形式，而且在代數表徵與幾何表徵對應時，可以產生兩種表徵乘法動作之間的對應連結，以及代數表徵與幾何表徵的轉移。例如進行極式乘法$r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta + i\sin\beta) = r_1 r_2\left[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right]$時，輻角相加對應到幾何變換的旋轉、絕對值相成對應到幾何變換的伸縮，故極式乘法的動作與幾何變換動作有連結關係的存在，我們可以視需要將極式乘法動作轉移爲幾何變換動作，或反之。請參考圖 3。

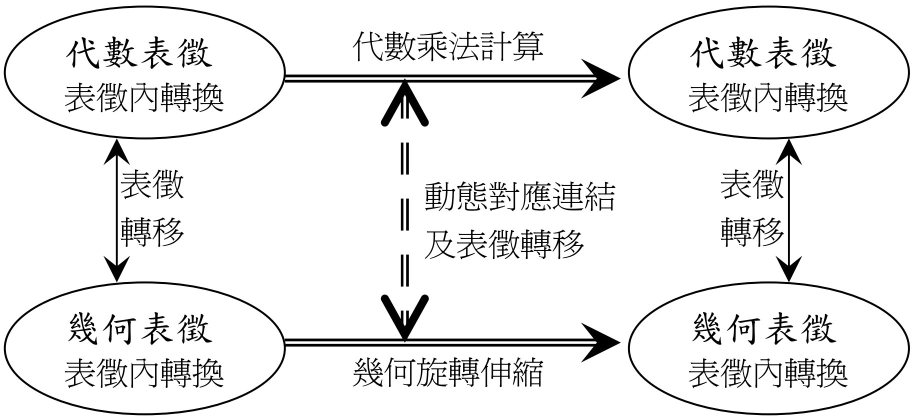


圖 3 複數乘法的表徵轉換轉移及乘法動作的對應連結

Janvier(1987a, 1987b)提出的冰山理論：一個具有多重表徵的數學概念就如同一座冰山，每個冰山的一個角就是一種表徵形式。學生學習複數乘法，必須在心中建構表徵結構的冰山，使得冰山的每個角都很完整。而教學的目標是在複數乘法的概念上運用各種表徵，使學生能掌握複數乘法的多重表徵。在解決複數乘法相關問題時，題目呈現的表徵形式就像冰山浮出水面的一個角，學生要能妥善地轉動他心中建構的整座冰山，讓需要的角浮出來，亦即必須能夠掌握各個角的表徵形式，尋找數個合適的解題方式。轉動各個角，象徵著轉換及轉移。

所以學生要建構與發展完整的複數乘法概念結構，需要透過表徵之內的轉換，及表徵之間的轉移，以整合各種表徵。要瞭解學生是否建構與掌握複數乘法概念，可從檢驗學生對不同表徵的瞭解，及表徵的轉換轉移及統合情形來著手。

複數乘法可分爲代數表徵（以下代號爲 A）與幾何表徵（以下代號爲 G）兩大類。而代數表徵包含了一般式乘法（ $(a+bi)(c+di)$ 、代號 Ag）及極式乘法（ $r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ 、代號 Ai），幾何表徵則爲圖形上的旋轉與伸縮。以下研究將表徵的轉換轉移分爲四大類：代數轉爲代數（A→A）、代數轉爲幾何（A→G）、幾何轉爲代數（G→A）、幾何轉爲幾何（G→G）。

由冰山理論來看，學生處理複數乘法問題時，問題的本質可能只是呈現一角，但學生是否能妥善整合各種表徵，選擇合適的表徵形式來處理問題？在傳統教室中，教師講解複數乘法概念時，可能受限於學習環境與工具，不易呈現幾何表徵的旋轉與伸縮，更不易呈現代數表徵與幾何表徵之間的連結。學生要建構好完整的冰山概念，勢必要使用合適理想的工具，讓多重表徵能容易呈現，並能有動態連結的效果。

第三節　程序性知識、概念性知識與過程概念

一般數學知識可大致分爲程序性知識與概念性知識。進行乘法的運算時，多數都是使用程序性知識來進行。然而複數乘法的領域裡，是否有概念性知識呢？學生所應該建構的複數乘法之概念結構爲何？本節從過程概念(precept)的觀點來分析。

Hiebert(1986)提出程序性知識(procedural knowledge)有兩個面向：（一）它是由數學的形式語言，或符號表徵系統所組成，其教學成效之考察，則在要求學習者在一個可接受的「形式」中，對於文字符號及其文法規約操作是否熟練與覺察。（二）它包含了完成數學作業所使用的算則或法則，也就是說，程序性知識是依據一種執行步驟的指示之組合，教導吾人作業如何完成。其特徵是一種預先學定的線性序列之操作。（洪萬生，民 94）

Hiebert 也提到概念性知識(conceptual knowledge)可以清楚地刻畫成富有關係（式）的知識。這些關係（式）散佈在個別的事實與命題之中，以致於他們都關連成爲一個網絡。事實上，概念知識的一個單位，絕不可能是孤立的資訊片段；按定義，一個資訊片段只有在它的擁有者認識到它與其他片段的關係時，才可能是概念知識的一部份。（洪萬生，民 94）

David Tall、Eddie Gray…(1994, 2001)等人亦提出 Process-Concept-Procept 過程概念理論。在符號數學的領域中（包含算術、代數、…），對符號靈活的使用，可當成過程作運算(processes to do)，抑或概念來思考(concepts to think)。好比擁有轉軸一樣，可以在過程與概念中做切換（秦爾聰，1993）。例如「 $(1+4i)(\cos 60°+i\sin 60°)$ 」可視爲乘法運算（計算其結果），或是積的概念（瞭解爲兩複數乘積，並非進行計算）。

一個新的數學符號，對初學者來說是陌生而複雜的表徵。典型傳統的符號數學概念的發展，是由程序步驟(Procedure)進展到過程(Process)，進而發展出過程概念(Procept)（如圖 4）。學習者反覆練習一個步驟（例如極式乘法法則），可以

幫助其正確地處理一些典型的問題。熟練了一個或多個相關步驟（進入過程 Process 階段），學習者可以更靈活並有效率地解題。當學生對數學符號發展出過程概念(Procept)時，表示該初學者能掌握此一數學符號背後所隱含的運算過程（熟練計算），而且能瞭解其數學意涵與概念，並能視情況需求而在程序與概念之間作切換。然而初學者的符號數學概念發展並非是單純線性成長關係（procedual→conceptual→proceptual），而是在過程與概念之間來來回回地修正，最後才形成穩定的過程概念。

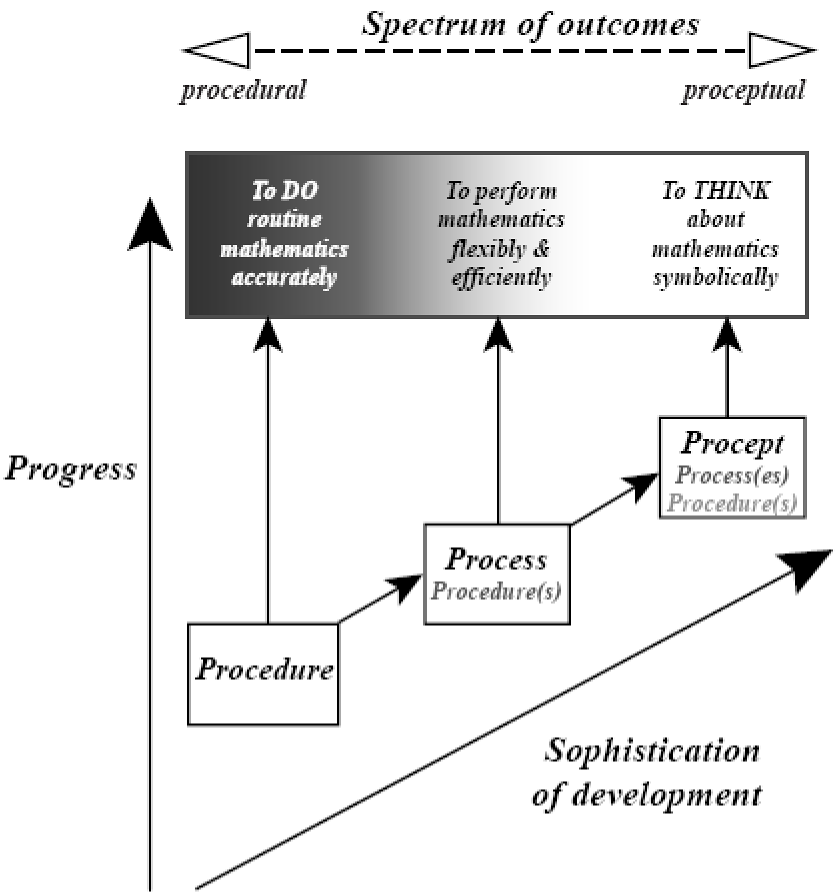


圖 4 數學的程序展現各種層次表現(摘自 Tall, 2001)

由 Hiebert 與 Tall、Gray 等人的理論來分析複數乘法的知識，發現當我們進行一般式或極式的乘法「運算」時，均由代數表徵經過運算成爲代數表徵，此部分可屬於程序性知識。然而當我們意識到兩個複數的乘積爲一個複數時，瞭解產生的複數與前二複數的關係，並且對此運算已經熟練，可能不需要實際進行運算，即可瞭解算式之意義，此時已經建立了代數的「複數乘法概念」，爲概念性知識。例如可以利用「極式乘法法則」計算相關問題時，即已建構該程序性知識；瞭解兩極式相乘時，是絕對值相乘、輻角相加的意義（而不是死背公式，不先想到計算的動作），即已建立其概念性知識。若能夠掌握兩者，視需要決定何時需計算結果，何時需思考概念，即建構了過程概念。

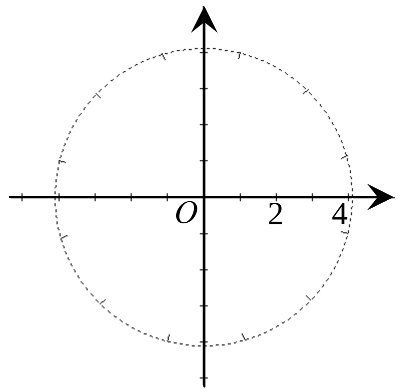
以目前高級中學的課程綱要安排，學生需學習並熟練一般式的運算程序，並利用此程序來證明極式的運算規則。亦即學生必須先建構了一般式運算程序的過程概念，能夠從極式與一般式兩者不同表徵中看出其共同點，利用一般式運算程序的概念(concept)，進而進行一般式運算程序的運算(process)，而得到極式乘法法則的結果。所以極式乘法法則的概念，必須建構在一般式運算程序的過程概念之基礎上。如果一般式運算程序的過程概念並未建構完善，則其極式乘法法則之概念亦無法建立。

同樣地，當學生已經具備極式乘法法則的過程概念時，能夠瞭解到輻角相加在複數平面上是旋轉的動作、絕對值相乘是伸縮的動作，從極式乘法法則的過程概念而「推動」幾何變換的程序(process)，此時幾何變換的動作能以極式乘法法則的概念來解釋。所以複數平面幾何變換的過程概念之建立，是基於極式乘法法則的過程概念之基礎上。如果極式運算的過程概念並未建構完善，則其複數幾何變換之概念亦無法建立。當然，此處所謂的幾何變換，是強調進行複數乘法的運算。非關複數乘法的幾何性質仍能以其他幾何概念來建立。

而在複數平面的幾何變換上，其並非符號的數學，是否仍能符合 Tall 等人提出的過程概念理論呢？由於幾何變換是由極式乘法法則之概念而建構，我們以表徵的角度來看，幾何變換與極式乘法兩者個別在進行運算時，均有合適的對應關係。故在極式上的「程序」（絕對值相乘、輻角相加），對應到複數平面上也是「程序」（伸縮、旋轉）。當學習者熟悉幾何變換之程序之後，能夠思考並瞭解變換的意涵，並能視情況選擇運用概念或進行變換動作，故亦能建構幾何變換的過程概念。

以下舉一個題目作爲例子：

請在右圖的複數平面上，標示出 $(1+4i)(\cos 60° + i\sin 60°)$ 的位置。



此題的解法有很多面向。如果我們並未建構極式乘法法則的過程概念，就可能採取全部都轉爲一般式，進行一般式運算程序的作法（在已建構一般式運算程序的概念的情況下）。如果已建構極式乘法法則的過程概念，可以瞭解到$1+4i$如果轉換爲極式，可以進行極式的乘法。雖然$1+4i$轉換爲極式有程序上的困難，但可以從概念上著手，找出輻角與絕對值兩個角色，再進行極式的運算程序。如果已建構幾何變換的過程概念，可以瞭解一個複數乘上$(\cos 60° + i\sin 60°)$，是在複數平面上將此複數旋轉 60 度的動作，這是概念性知識的想法（乘法爲樞紐將過程概念切換到概念性知識並使用）；接著將$1+4i$的點旋轉 60 度即爲所求，此處動用了程序性知識。

依據 Tall 等人提出的各層次數學程序(Procedure-Process-Procept)的理論來看，若將整個複數乘法的全體視為一個完整的數學概念，則兩個複數一般式乘法的運算過程，使用基本的乘法分配律與加法規則，經由反覆的計算演練即可學習，屬於複數乘法概念的 Procedure 層級；而極式乘法法則的出發點同為一般式運算程序，利用三角函數性質得到精緻化、更有效率的極式乘法公式，此屬於複數乘法概念的 Process 層級；幾何變換則需擷取極式的幾何性質，並藉由極式的程序性演算來建構出幾何變換部分的乘法概念。幾何變換已是複數乘法的概念，若需進行運算亦可轉移為極式來進行，故幾何變換屬於複數乘法的 Procept 過程概念層級。

不論是哪一層級的複數乘法，其概念的建構均是從基本複數元素出發。複數元素包含複數的表徵方式，代數表徵有一般式與極式兩類，對應於幾何表徵有複數平面直角坐標系 (a,b) 與極坐標系 $[r,\theta]$，其間存在著同表徵的轉換與不同表徵的轉移。藉由一般式乘法、極式乘法或幾何變換等運算規則，建構出複數乘法的一般式運算程序、極式乘法法則與幾何變換等概念。此三者之間亦存在著表徵的轉換轉移，如圖 5。本研究以此圖形為基礎，來分析高中生對於複數乘法的各數學結構的建立情形，以及表徵的使用情形，來形成高中生的概念結構與解題策略之圖形。

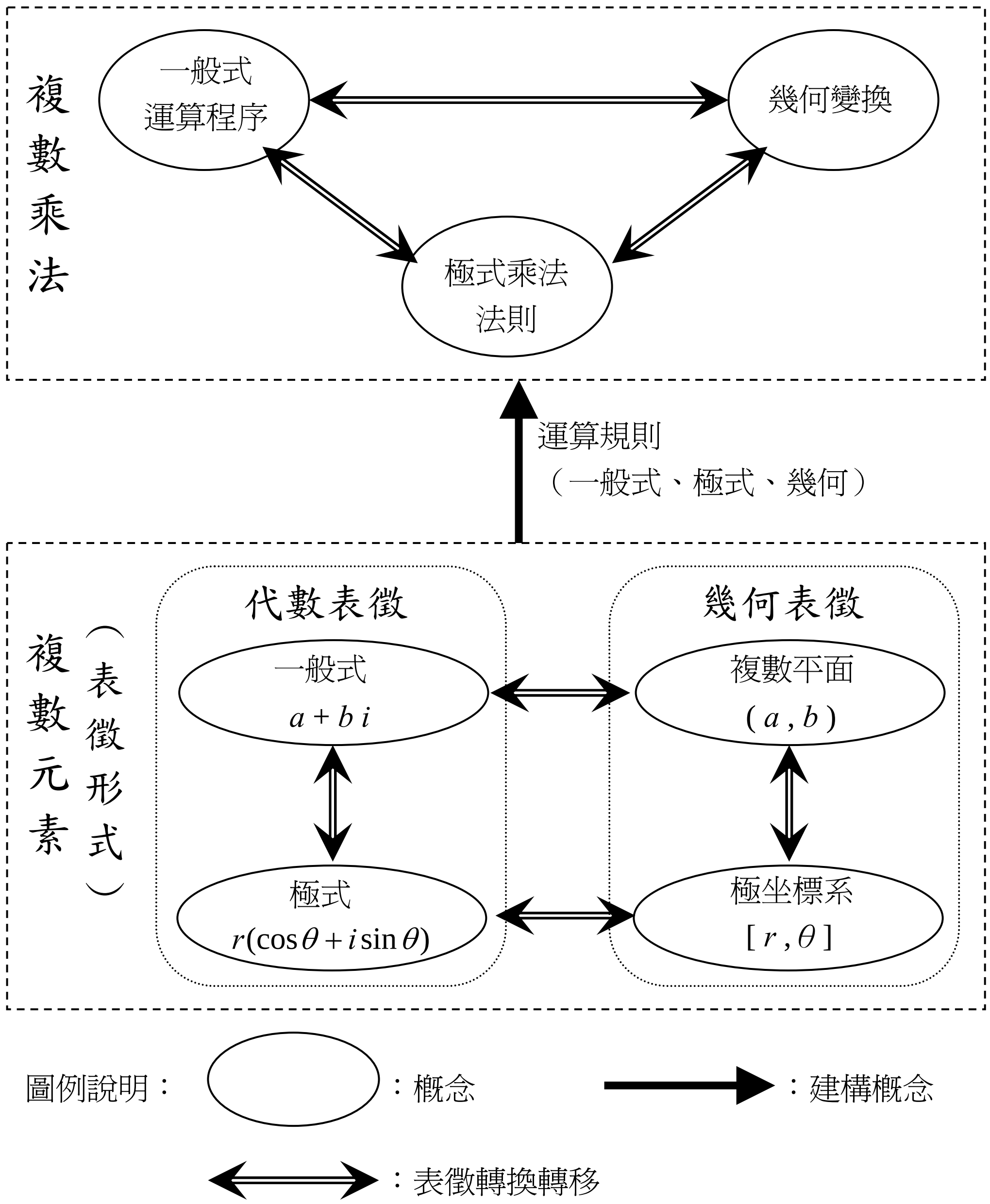


圖 5 複數乘法概念結構的分析圖形

第四節　動態連結多重表徵學習環境

國內關於動態連結多重表徵學習環境之研究為數不少，大多發現經由此學習環境教學之學生，其學習成效較傳統教學環境之學生為佳（蔡志仁，民 89；陳天宏，民 92；張美珠，民 92；余酈惠，民 92；張敬楷，民 95）。其中蔡志仁指出，動態連結多重表徵視窗環境的實驗組學生會在解題時，使用圖形表徵作為主要的表徵，其他訊息均會納入此表徵中，在表徵轉換間有一個依據。顯示以動態連結多重表徵的教學環境，能夠協助學生學習並使用圖形表徵。本研究與蔡志仁之研究方式相近，但與國內關於動態連結多重表徵學習環境之研究不同處在於：

國內研究之教學內容，大多選擇已具有幾何結構之數學單元；本研究以代數表徵及幾何表徵兼具的複數乘法單元爲教學內容，必須設計出高中課程未強調的幾何變換部分，並且利用代數表徵與幾何表徵建立三種數學結構之間的連結。

前面數節已說明複數乘法具有多重表徵的性質，其概念是複雜的，兼具程序性知識與概念性知識。教學者會利用豐富的知識來補充此概念的各種表徵，但是學習者卻可能得到不完整、不正確、非主軸方向的資訊，將影響學習者對複數乘法概念嚴謹的定義與符號表徵的認知。我們必須瞭解學生對數學學習的訊息處理方式，並且知悉動態連結多重表徵在此訊息處理模式中可以提供之功能與助力，以作爲設計學習環境的準則。

當學習者透過數學抽象結構外在表徵的反思抽象，以發展與應用內在表徵時，學習者開始進行數學學習。根據訊息處理理論，學習者的學習過程如圖 6。

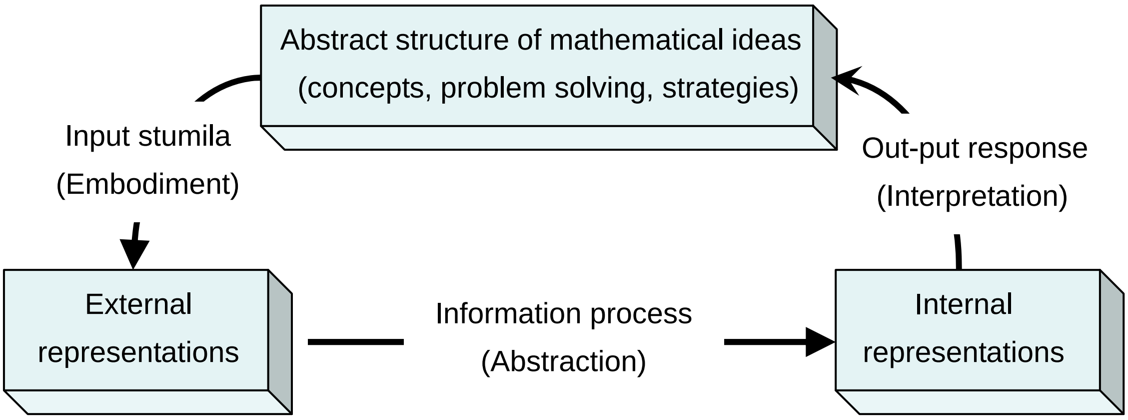


圖 6 學習過程(摘自 Tso, 2001)

數學概念的抽象結構以外部表徵具體化呈現，經由學習者將接收到外部表徵的訊息過程抽象化，形成學習者的內在表徵；並由學習者對該數學概念作解釋型的回應，完成此數學概念的學習。

現今因科技進步，學習過程因使用工具的介入，能夠在關鍵的部分增強效果，增加學習成效。Tso(2001)提到在學習環境中，學習者透過反思行動以形成抽象概念。而連結多重表徵系統的電腦學習環境不僅可以豐富概念性的表徵，也可以重新組織認知結構，並產生新的表徵。學習系統的設計，必須找到已知表徵與新增表徵之間共同的概念，也應鼓勵反思，鼓勵對已知概念提出質疑，及鼓勵產生新的表徵。故我們設計動態連結多重表徵的學習系統，應利用此系統增強外在表徵，提供訊息與操作以進行反思行動，其建構之內在表徵能在反思行動中重新提供訊息與認知操作。Tso 所提出的動態連結多重表徵之學習環境設計關係圖如圖 7。

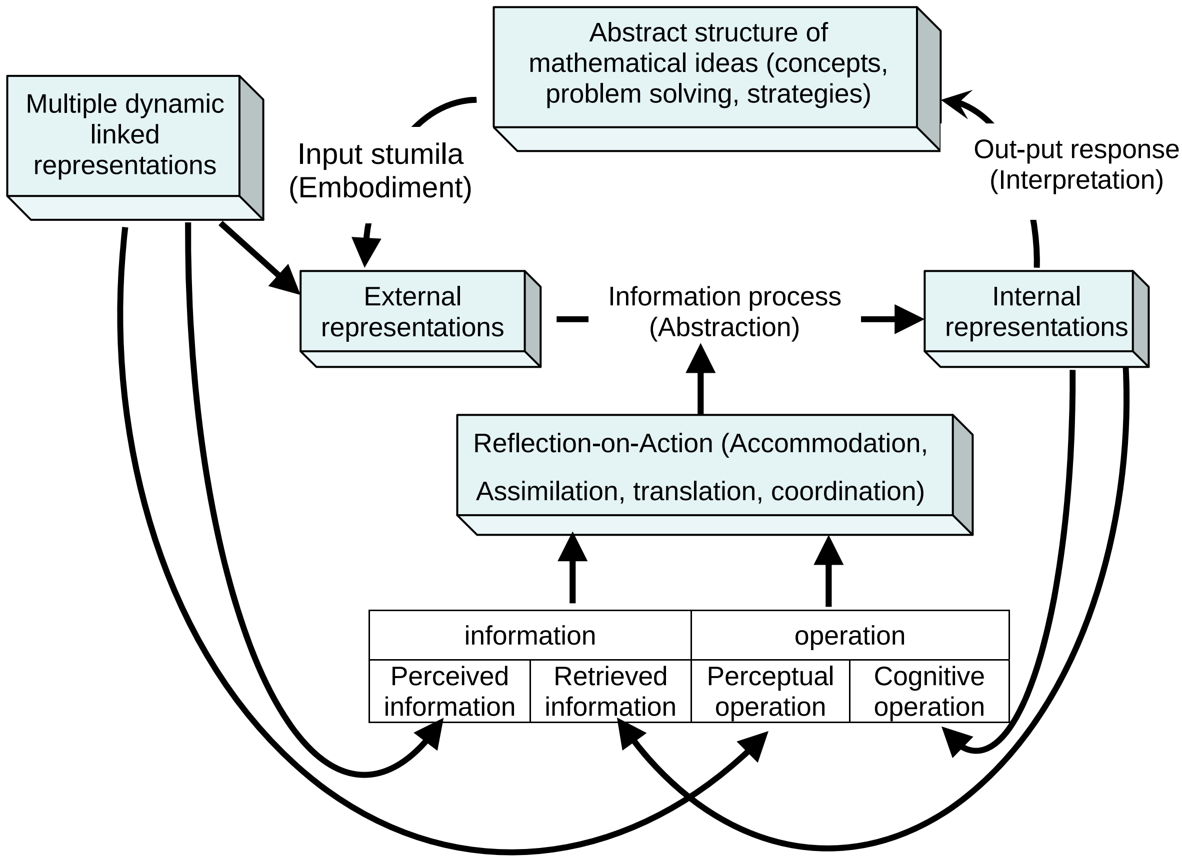


圖 7 動態連結多重表徵之學習環境設計關係圖

我們應在教學過程中，將教學工具融入教學策略中，以確實地實現有效的教學。若只使用電腦設備及軟體，而教學者未能設計合適的教學流程，是無法提升學習者的學習成效。故要設計複數乘法的動態連結多重表徵之學習環境，應注意下列幾點：

一、應提供數種不同的外在表徵，以提供學習者多種訊息來源。此環境應能同時呈現複數乘法的代數表徵與幾何表徵，學習者能比對此兩種表徵之間的關係與差異。

二、提供學習者能夠接收的訊息，以及概念性的操作法則。例如在複數平面上呈現一個複數點，應該能夠同時顯示該點的複數一般式或是極式（極坐標）。學習者能夠瞭解拖曳該複數點，則代表之複數同時改變，進一步瞭解藉由拖曳達到變更複數的操作方式。

三、藉由操作比對舊有的概念，經過矛盾、修正與強化進行訊息處理，以建構內在表徵。所以設計有效率的複數乘法學習環境，不僅是由教學者展示給學習者觀看而已，還需要讓學習者以比對舊有概念的意識下自行操作，才能修正舊有概念，進而建構新的概念。

四、重新獲得來自建構的內在表徵之訊息，有意義地操作動態連結多重表徵學習環境，不斷地反思行動，建構穩固的內在表徵概念。我們在設計學習環境時，同時設計搭配之輔助教材（例如學習單），引導學生從尋找解決輔助教材上

問題之方法過程中，操作學習環境以達到建構概念與反思的目的。如無學習單之輔助，學生可能流於模仿或無意識地嘗試而缺乏學習效果。

合適的動態連結多重表徵學習環境，有助於學習者透過反思行動以學習新概念。而我們應採用何種環境，具備動態連結多重表徵的功能，可以設計出合適的學習環境呢？在認知發展上，Vygotsky 提出記號(sign)與工具(tool)兩個關鍵角色。在心理學活動上記號的作用就像心理學活動的儀器(instrument)，而工具的角色就像勞動(labour)。內在化的過程並非轉移外部活動至已事先存在內部「知覺的平面(plane of consciousness)」，而是在內在化的過程中這平面才形成。這內在化過程需透過符號的過程(semiotic process)。Mariotti(2007)等人亦提到，Vygotsky 的觀點可以解釋工具的功能是在仲介(mediate)概念形成的動作：記號生成與工具的使用有關，透過複雜的內化過程可以形成新的意義。由此觀點可知，特定工具可以如符號仲介者(semiotic mediator)發揮功能，或者說是符號仲介的儀器(instrument of semiotic mediation)。Mariotti 進一步提出，動態幾何(dynamic geometry)環境包含了工具與記號，提供包含時間與空間的環境；拖曳工具(Dragging tool)就像函數之自變數與應變數間互變關係的「記號」，軌跡工具(Trace tool)也可想成參照軌跡的數學概念的「記號」，就像可能的符號仲介工具。從 Vygotsky 與 Mariotti 等人的觀點與理論，可以瞭解個體在建構概念與內化時，需要記號與工具的仲介物。

而 Mariotti 等人研究 Cabri 的動態幾何環境，提到 DGE（Dynamic Geometric Environment，動態幾何環境）中物件經由使用者使用拖曳工具後產生的移動，有直接動作與間接動作兩種：

一、直接動作：元素直接變動，可能是一點在一區域或直線上移動、一圓在移動等等。在一般動態幾何環境中，這些元素在親子關係中是屬於「親」類，即爲其他元素的決定因素。

二、間接動作：當某些元素已經形成一個結構，如果拉動其中某些元素，則部分其他元素會依據此結構而產生動作，以維持原數學結構性質。在一般動態幾何環境中，這些被拉動元素在親子關係中是屬於「子」類，即被其他元素所決定。

此二動作即爲設計動態幾何環境的原理。我們利用 DGE 來設計數學的教學與學習環境時，需要考量環境中哪些元素需具備要教學的數學關係，學生如何透過操作，來觀察並學習到該數學關係。Mariotti 等人也提到動態幾何環境中工具的使用有一個很重要的因素：「時間」。當我們在拖曳物件，或是由軌跡的生成來觀察時，時間的因素可以讓使用者感受到「改變」。這就是動態幾何環境與一般繪圖軟體的差異。一般繪圖軟體可以呈現一張靜態的圖，圖中的某些元素可以呈現數學性質，不同之處在於動態幾何環境可以經由拖曳部分元素，使某些數學性質維持，某些數學性質改變。這是一般繪圖軟體不具備的功能。

選擇使用電腦環境，甚至是動態幾何環境，來作爲數學知識的教學或輔助教

學的環境，比起傳統的教學與學習環境有幾點優勢：

一、目前國內高中學生已學習過電腦環境的操作與觀察輸出結果，而且目前環境已經進入視窗介面、物件介面與人性化介面，未來還有觸控點選操作的環境即將普及。比起其他傳統教學的環境與其他教具，有更大的發展空間，與更彈性的使用方式。而且幾乎每位學生的家裡都有電腦；目前新課程標準（九九課綱）中，各校應建構數學教學的電腦教室；如此使用電腦學習環境可以連貫，不致於離開傳統的教室後就無法教學或學習。

二、電腦視窗環境(Windows)比起傳統環境，在呈現多重表徵的方式上較爲便利。尤其視窗意味著可以同時開啓不同的工作環境，可以一個視窗呈現代數表徵，另一個視窗呈現幾何表徵，甚至於在同一視窗中同時呈現不同的表徵。

三、動態幾何環境更在使用上提供了動態的效果，還有動態的連結。當我們改變（拖曳）DGE 中某個元素的位置時，可以同時改變其代數表徵性質（例如方程式），或其表列表徵（例如坐標）。這是傳統環境中不容易做到的。其次，動態拖曳時，部分元素會維持某些數學性質不變，某些數學性質會改變。不變的數學性質可提供使用者經由操作與觀察來發覺與學習。在傳統的學習環境教學者僅能透過描繪、口述與文字來呈現，學習者要觀察與想像教學者所要傳達的數學知識，相形之下較爲困難。

Mariotti 等人是利用 Cabri 的軟體來進行研究。而目前有相當多的動態幾何軟體問世，各有其特性與優勢。以 GeoGebra 爲例，除了在幾何環境中使用者可以使用傳統的尺規作圖、利用關鍵點來繪製正多邊形或圓錐曲線之外，此環境亦賦予每個繪出元件代數性質（點坐標、線方程式），使用者也可以在代數輸入區輸入方程式來繪圖、輸入代數名稱進行運算（例如 a 與 b 均代表向量，則執行 $a+b$ 可呈現兩向量之和），更可以將坐標或方程式直接在物件上呈現，在物件移動時坐標或方程式可隨之移動，此屬於基本動態連結代數表徵與幾何表徵性質。最重要的，是 GeoGebra 提供複數 $a+bi$ 與極坐標 (r,θ) 環境，可以呈現複數一般式與極式（以極坐標表示），這對於本研究設計複數乘法的多重表徵學習環境來說是相當有利地。

在前面提到在認知發展上有記號與工具兩個關鍵角色。我們所設計的動態幾何環境就相當於「工具」，而教師與學生透過此工具，呈現在螢幕上的幾何表徵與代數表徵，就像是「記號」。透過記號，教師可傳達數學知識給予學生；設計好的學習環境也可以傳達數學知識給予使用者，而不一定需要教學者的示範操作。DGE 不僅僅是動態幾何環境，而且是動態數學環境 Dynamic Mathematics Environment，甚至是動態數學系統(Dynamic Mathematics System)。以 GeoGebra 爲例，它可以結合 JavaScript 語法整合至網頁中，使用者可以透過上網的方式，完整地使用設計好的 GeoGebra 網頁，只要支援 Java 環境，並不需要再安裝 GeoGebra 主程式。如此可設計成爲網頁型態之教學與學習系統，不再是單機操作的程式而已。

第參章　高中生複數乘法概念結構與解題策略

本研究之目的，在瞭解學生學習複數乘法情形，以及利用 DGS 的功能設計動態幾何學習環境，幫助學生在此環境中，有效地學習複數乘法。整體研究架構如圖 8。

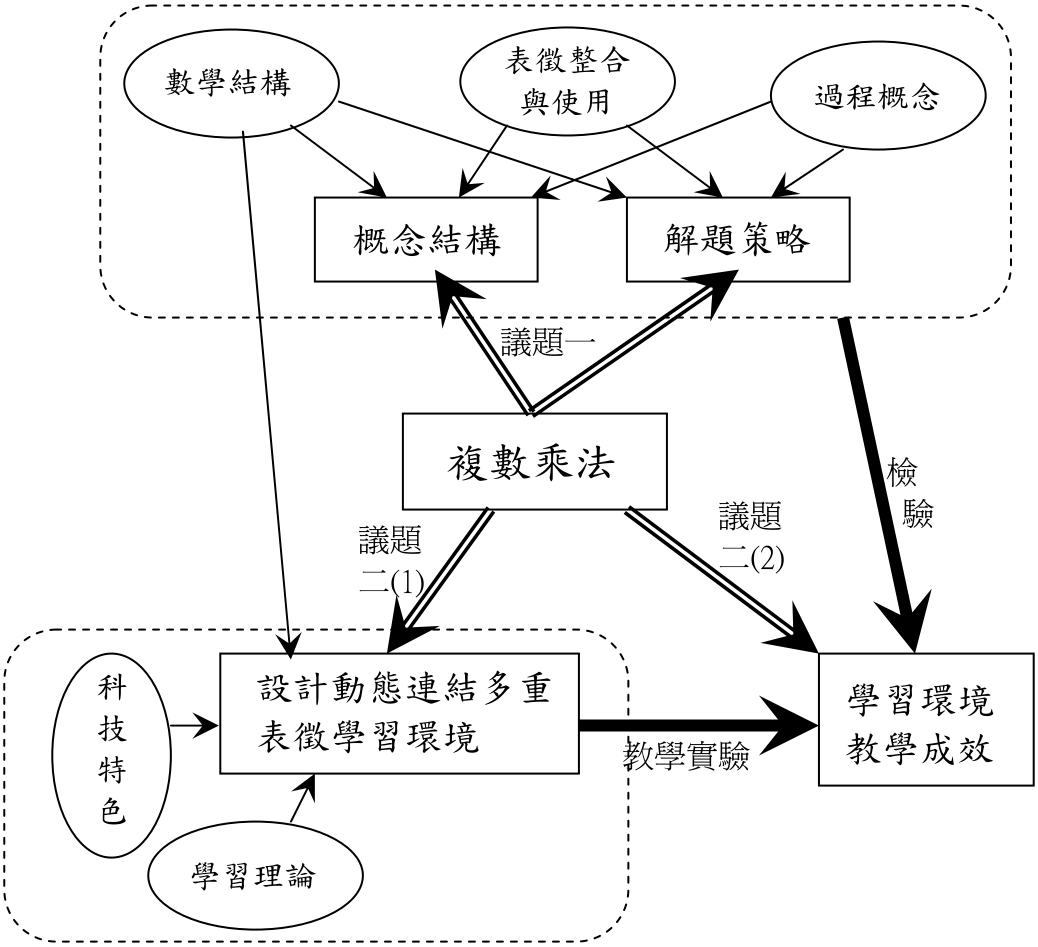


圖 8 研究架構

本章就高中生關於複數乘法之概念結構與面對複數乘法問題之解題策略來說明研究方法、研究發現與討論。第肆章則說明設計複數乘法之動態連結多重表徵之學習環境。第伍章說明此學習環境教學成效之研究方法、研究發現與討論。

第一節　研究方法

一、研究設計

本研究之第一個研究議題在瞭解高中生對複數乘法的概念結構，故研究的樣

本應選取已經學習過複數乘法相關知識的學生，探討其概念建構情形。爲了使結果有代表性，樣本數量應該有一定數量，故不採用個案研究；同時考量研究進行之便利性，故挑選數個普通班級（未經能力篩選）的全班學生進行研究。

由第貳章文獻探討之表徵理論得知，爲了瞭解高中生對複數乘法的各部分概念是否建構完成，可以從他對相關概念的表徵之理解與操弄、轉換與轉移來進行分析；並且要瞭解高中生對複數乘法問題的解題策略，所以本階段採用質性的研究方法。因研究樣本總數可能達到數十人，故研究工具以進行診斷性測驗爲主，訪談樣本爲輔。測驗問卷可以有效率地得到整體性的訊息，訪談樣本可以釐清細節。

然而現階段並沒有現成、合適的診斷性題目，可以同時測驗一般式運算程序、極式乘法法則與幾何變換三種複數乘法概念，尤其幾何變換並未列入高中課程，可能不易尋找相關測驗題目。而傳統的測驗題目多數著重於代數計算，所需進行的程序常相當繁複，故診斷性問卷題目必須依照本研究之目的重新設計，並需要檢驗其信度與效度。

當測驗問卷資料蒐集完成後，對所有樣本資料編碼，尋找樣本間的相似性與差異性。比對複數乘法概念結構的分析圖形（如第貳章圖 5），將所有樣本依照相似性與差異性分爲數種類型。其次，在各類型中依立意取樣，選取一至二人進行診斷性訪談，其用意在於「三角校正」：一爲確認診斷性問卷的結論之正確性，另一爲釐清測驗問卷中無法提供的線索。將此兩部分資訊結合，嘗試歸納出樣本的概念結構與解題策略，以及面對複數乘法題目時可能發生困難的部分及原因，作爲本研究的研究成果並作成建議。

第一階段關於概念結構與解題策略研究流程如圖 9。以下各節就本研究之研究樣本、研究工具、研究過程、蒐集資料與處理及研究限制詳細說明。

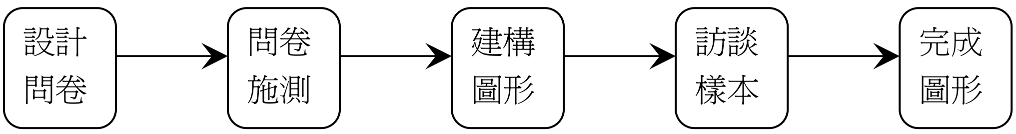


圖 9 概念結構與解題策略研究流程

二、研究樣本

由於本階段研究旨在探討高中學生對複數乘法的概念概念及解題策略，並考量學習後時間過久可能會影響概念之完整性，故研究樣本選取已經學過複數乘法單元的高二學生。同時期盼研究樣本在不同的程度均有代表性，而且在進行測驗及訪談時，能夠適切並忠實地回答問題，此研究樣本必須不能經過程度篩選的分班，故此階段採立意取樣，選取北部某公立高中內兩班高二自然組學生作爲研究樣本。此兩班各有 41 人，總共 82 人，並未經過程度篩選（該年級並無資優班設立）。在其高一入學之基本能力測驗，PR 值範圍爲 67~79，在全國考生中約屬於

中等成績。高一的數學平均成績上，低分至高分各程度均有，分佈平均。樣本選取自然組學生，而非社會組學生，其原因是考量自然組學生在書寫其數學之思考與計算歷程時，較一般社會組學生有條理而且完整。在後續進行訪談時，考量自然組學生回應數學問題的情形比社會組學生豐富，較能忠實描述其想法，故樣本選取自然組學生，以有效獲取資料。

診斷性訪談樣本之選取方式，是依據診斷性問卷大略分類結果，期望在各類型中均有訪談樣本，在各類型中以電腦隨機抽取一至二人，樣本背景如表 3。

表 3 診斷性訪談樣本之背景

代號	性別	高一數學程度（區分上中下）	樣本對自己高一數學的感覺描述
S1	男	中	剛進高中時，覺得數學的難度跟國中差很多，感到很不適應，後來慢慢地覺得比較輕鬆。
S2	男	下	普普通通，沒有特別感覺，部分簡單，部分難。
S3	男	上	喜歡算數學，但是太難的會問老師。偶爾會想挑戰難題。
S4	女	上	又愛又恨，喜歡算對題目時的感覺。可是當別人會的題目我不會時，會難過。
S5	女	下	高中數學跟國中數學差很多，不僅要記很多公式，還要靈活運用。
S6	女	中	沒有特別的感覺，僅按部就班地去學習上課的課程。
S7	男	上	沒感覺，只不過是學到更多的公式、更多算法而已。
S8	女	中	使用觀察法，不太需要記公式即能解題。
S9	女	下	覺得有點困難，即使會了基本觀念和公式，也不能一一解決所有的題目。

三、研究工具

此階段研究工具之設計目的，在於瞭解高中生處理複數乘法問題的解題策

略，並提供高中生的複數乘法概念的概念結構之資料來源。研究工具以進行診斷性測驗爲主，訪談樣本爲輔。研究者設計屬於研究範疇內之相關的題目形成診斷性問卷，請研究樣本對此問卷來進行解題。其次對診斷性訪談的樣本進行訪談，以發掘該樣本在問卷上作答情形的原因，以及找出未能在問卷上呈現之關鍵因素。所有樣本的作答狀況以及受訪樣本的回答資訊，均可作爲分析結果的資料來源。

設計問卷時，先分析複數乘法知識的數學結構，以及表徵的使用情形。依據第貳章所論述的表徵理論，分析複數乘法的表徵形式可分爲代數和幾何兩大類，代數的表徵形式又包含了代數一般式 $a+b\,i$ 與極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 兩類，幾何表徵包含了複數平面上的複數點及絕對值、輻角等相關元素。在本研究中以代號 Ag 表示代數一般式 $a+b\,i$、Ai 表示極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$、代號 G 表示幾何表徵。本研究要分析學生的概念結構，所以要瞭解其表徵的運用情形，故將重點放在表徵之內的轉換，和表徵之間的轉移。從表徵面向來分析區分爲四種類型：

(1)代數表徵轉換爲代數表徵（Ag→Ag、Ag→Ai、Ai→Ag、Ai→Ai）。

(2)代數表徵轉移爲幾何表徵（Ag→G、Ai→G）。

(3)幾何表徵轉移爲代數表徵（G→Ag、G→Ai）。

(4)幾何表徵轉換爲幾何表徵（G→G）。

分析複數乘法的數學結構，區分爲複數基本性質、一般式運算程序、極式乘法法則、幾何變換四個部分。此四個部分作爲雙向細目表的縱軸項目。其中複數基本性質爲學習複數乘法時的先備知識，此部分的作答情況可以作爲我們分析樣本之先備知識部分與複數乘法三個層次概念之相關情形的資訊來源。例如某樣本的診斷性問卷作答情形呈現該樣本處理圖形的旋轉與伸縮有困難，我們可分析是否與該樣本處理極式與極坐標平面的轉移有關。

以表徵分析的四種類型作爲橫軸項目，以複數乘法數學結構的四個部分作爲縱軸項目，可以得到複數乘法的數學結構與表徵轉換轉移的雙向細目表（如表4）。本研究所有的測驗設計與教學設計均以此雙向細目表爲基礎。

表 4 雙向細目表

表徵轉換轉移 / 數學結構	代數轉代數	代數轉幾何	幾何轉代數	幾何轉幾何
複數基本性質				
一般式運算程序				
極式乘法法則				
幾何變換				

（一）診斷性測驗

診斷性測驗的題目之設計，是研究者參考各版本的課本例題、歷屆大學學科能力測驗與指定科目考試等入學測驗，並依據雙向細目表中縱軸數學結構部分，與橫軸表徵的轉換轉移類型，設計適合於該欄的的測驗題型。期盼在雙向細目表中每一欄都有代表性題目，以檢驗樣本在各數學結構層級與表徵轉換轉移之概念是否完備。

就表徵的角度來看，由於此部分研究在於探討高中生對複數乘法概念的解題策略，而非測驗學生的數學能力，故所選擇或設計的測驗題目，爲使用單純的同一表徵內的轉換形式，或單純的兩不同表徵之間的轉移形式即可進行解題，不應使用多層次的表徵轉換與轉移，或複雜的表徵應用才可解題。就數學結構方面，除了測驗學生是否能掌握複數乘法各層級的概念，另外需要瞭解學生面對不同複數乘法的問題時，所使用的解題方式之數學結構層級，是達到一般式運算程序、極式乘法法則、幾何變換之何種層級，故在安排測驗題目時，除了考慮使用單一層級解題方式之外（例如該題目只使用極式乘法規則來解題），還需要考慮可以選擇不同層級解題方式的題目（例如該題目可使用一般式一般式運算程序，也可以使用極式乘法法則來解題）。從這部分的測驗結果資料可以看出，樣本在面對此類問題時，是否會依據題目的性質與已知條件，來調整其解題方式，或是僅採用其熟悉的解題方式，而不會嘗試提升解題層級。雖然在現行高中數學課程標準與各版本的教科書在編排上，並未強調有關複數乘法的幾何變換（旋轉、伸縮），但是樣本是否能夠自行建構幾何變換的數學概念及解題方式，亦可從此部分測驗結果的資料得知。

如此整理並設計出十四題屬於雙向細目表各層級的題目（參考附錄一），並分析各題在雙向細目表中的屬性位置。在此雙向細目表中，依照屬性的不同，有一些格子內是沒有代表性題目的。例如一般式乘一般式，是純粹在代數上運算，所以雙向細目表中，「一般式運算程序」對應「幾何轉幾何」就沒有合適的題目。爲求測驗題目的效度，研究者邀請國立台灣師範大學數學教育研究所五位研究生（一位博士生、四位碩士生），及北部不同學校之七位資深高中數學教師，進行

此測驗題目的雙向細目表之歸屬分類之檢定。依據研究者與專家的共同意見，得出診斷性測驗的題目之雙向細目表，如表 5。

表 5 診斷性測驗之雙向細目表

表徵轉換 數學 轉移 結構	代數轉代數	代數轉幾何	幾何轉代數	幾何轉幾何
複數基本性質	1(1)(2)Ag→Ag 1(4)Ag→Ai	1(4)Ag→G 2(1)Ag→G 2(2)Ai→G 2(3)Ag→G	4(1)G→Ag 4(2)G→Ai	
一般式 運算程序	1(3)Ag→Ag 1(5)Ai→Ag 5Ag→Ai	3Ag→G 6(1)Ai→Ag→G 6(2)Ai→Ag→G 6(3)Ai→Ag→G	8(2)G→Ag 14G→Ag	
極式乘法法則	1(5)Ai→Ai 5Ag→Ai	3Ai→G 6(1)Ag→Ai→G 6(2)Ai→G 6(3)Ag→Ai→G 13 Ai→G	7G→Ag 8(2)G→Ag 14G→Ag	9G→G 12G→G
幾何變換		6(3)Ag→Ai→G 11Ai→G	7G→Ag 10(2)G→Ai 14G→Ag	8(1)G→G 9G→G 10(1)(2)G→G 11G→G

依此診斷性測驗之設計，比對第貳章圖 5 之複數乘法概念結構的分析圖形，將各題所要測驗之概念與解題方向建構於概念結構分析圖形之上，可以得到如圖 10 之測驗分析圖，作爲分析資料時建立樣本概念結構、解題策略與兩者相互關係之圖形的範本。

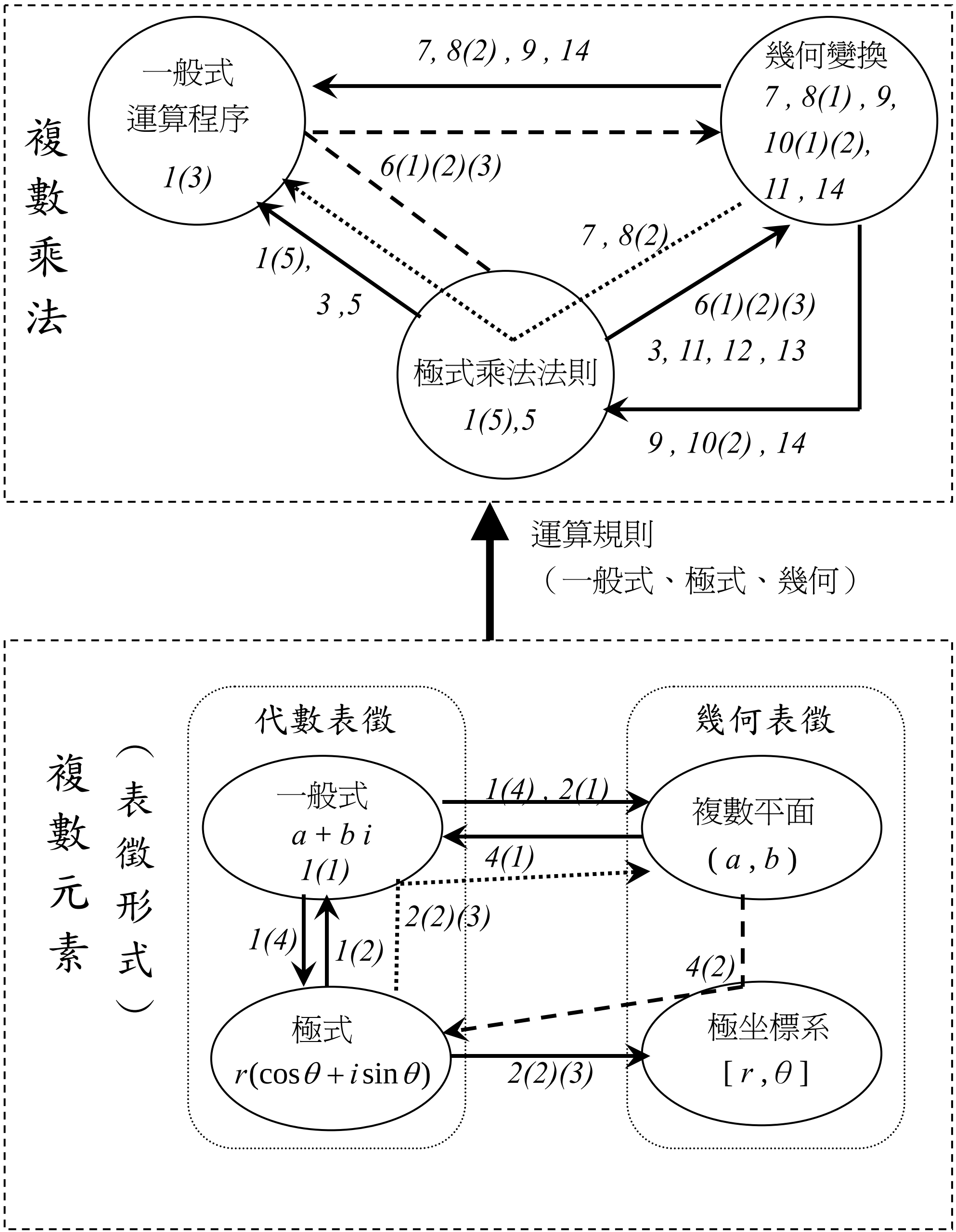


圖 10 診斷性測驗分析圖

在效度方面，研究者設計診斷性問卷時，是根據雙向細目表之兩個維度（分析複數乘法的數學結構層級與概念使用之表徵轉換轉移）來設定測驗題目，故本測驗具有內容關連效度。設計問卷後經過五位數學教育研究人員及七位資深高中數學教師進行鑑定與建議調整，故具有專家評定效度。

在信度方面，診斷性問卷設計完成後，研究者在任教的高中裡，從高三自然組三個班中隨機挑選共 25 位學生進行測驗。根據其作答資料進行編碼，並利用 SPSS（13 版）執行內部一致性信度分析，得到 Cronbach’s Alpha 值均在 0.84 以上（參考附錄二），顯示診斷性測驗這項工具具有中等以上的信度。（郭生玉，2004，教育測驗與評量）

（二）診斷性訪談

由於診斷性測驗結果提供受測樣本處理複數乘法問題的解題策略資料，並提供樣本對於複數乘法概念的概念結構之資料來源，而此診斷性測驗是全部樣本對問卷問題的一般性作答，故需依照診斷性測驗結果，挑選數名隨機樣本進行診斷性訪談。其目的在深入探討學生對複數乘法概念的建構與使用情形，並發覺其與解題策略的相關性；其次利用三角校正法，一為測驗結果分析找到證據，二以實際訪談資料修正分析方向，三則找尋測驗結果無法提供的資料訊息。

診斷性訪談是以複數的基本性質（先備知識）相關問題作為開始，並根據診斷性測驗的題型及結果，及複數乘法的數學結構層級（一般式運算程序、極式乘法法則、幾何變換）與表徵使用情形來設計問題。為避免作過度引導式提問，需要在進行訪談之前擬定提問問題，並採取半結構式訪談，根據受訪者的回答內容，再進一步深入提問，不得預設答案或採誘導式提問。訪談開始問題請參考附錄三。

四、研究過程、資料蒐集與處理

在診斷性測驗的研究工具準備完成後，於進行測驗的前一週告知受測樣本進行方式與內容範圍。並與此兩個班受測樣本之導師與任課數學教師協商，安排連續兩節課共一百分鐘的時間，同時間進行診斷性測驗。測驗完成後，對選取樣本進行診斷性訪談。研究流程如表 6。

表 6 研究流程時間表

時間	對象	進行項目
97/12/31	82 位受測學生	診斷性測驗
98/ 1/12	S1、S2	診斷性訪談
98/ 1/14	S3	診斷性訪談
98/ 1/15	S4、S5	診斷性訪談
98/ 3/ 5	S6、S7	診斷性訪談
98/ 3/ 6	S8、S9	診斷性訪談

診斷性測驗完成後，將每份問卷每一題的結果進行編碼。編碼方式為：分析每一份問卷，在各題中樣本所採用的解題方式，比對表 5 診斷性測驗之雙向細目表，該樣本使用「複數基本性質」方式作答則編碼為 1（若題目在此級有兩種層次作答方式則為 1 或 2，2 表示較高層次。例如測驗題目 2(2)）；使用「一般式運算程序」方式作答則編碼為 3；使用「極式乘法法則」方式作答則編碼為 5；使用「幾何變換」方式作答則編碼為 7（若題目在此級有兩種層次作答方式則為 7 或 8，8 表示較高層次。例如測驗題目 10(2)）。若僅有答案，或是作法不明，無

法判定屬於「複數基本性質」、「極式乘法法則」、「幾何變換」任何一種，則編碼爲 9。未作答則編碼爲 0。

整理並統計所有樣本作答資料，發現有 5 位學生在一般式運算程序、極式乘法法則與幾何變換等類型問題均未作答、僅回答部分的複數基本性質題目，則無法從該樣本作答資料中獲得有關於複數乘法概念之資訊，故將此 5 個樣本視爲無效樣本，不列入複數乘法概念結構之分析資料來源。有效樣本總計爲 77 人。

診斷性問卷之設計源於雙向細目表的兩個維度：數學結構與表徵轉換轉移，故樣本對不同題目之作答情形，可提供此二維度之分析資訊。將診斷性問卷題目與表 5 之雙向細目表，及圖 10 診斷性測驗分析圖形同時作比對，以問卷第 6(3)、7、8(1)(2)、9、10(1)(2)、11、14 題之樣本作答使用概念層級，作爲使用幾何變換概念、極式乘法法則概念或一般式運算程序概念之依據；同時以第 1(5)、3、5、6(1)(2)、12、13 題之樣本作答使用概念層級，作爲使用極式乘法法則概念或一般式運算程序概念之依據；並以第 1(3)題之作答情形作爲使用一般式運算程序概念之依據。另外第 1(1)(2)(4)、2(1)(2)(3)、4(1)(2)題題目屬於雙向細目表中「複數基本性質」部分，在分析圖形中屬於「複數元素（表徵形式）」之類型，主要作爲比對樣本使用各層級之複數乘法概念與否，與先備知識是否建構之關連性。

根據上述各題作答編碼資料，比對分析圖形，將樣本進行分類。分類方式爲考量複數乘法數學結構層級，找出一類均有使用一般式運算程序、極式乘法法則、幾何變換之樣本；其次是有使用一般式運算程序、極式乘法法則，但未使用幾何變換之樣本；另外是有使用一般式運算程序，但未使用極式乘法法則與幾何變換之樣本。將以上各類樣本之複數基本性質部分作答情形，找出複數乘法與複數元素（表徵形式）已建構部分與未建構部分的關連性。由各類樣本資料的共同性來建立各類的概念結構。

其次，分析各樣本針對複數乘法各層次題目的解題方式，以及表徵的使用情形，嘗試歸納出數種類型的解題策略。雖然樣本可使用的表徵形式與解題方式與該樣本已經建構的概念有關，但是可能有其他的因素影響該樣本在實際解題時選擇的解題策略。例如某學生會使用一般式運算程序與極式乘法法則，但是實際解題時卻常將極式轉換爲一般式來進行乘法，有可能是因爲樣本個人喜好，或是樣本的極式概念並未建構穩固，或是其他的因素。故解題策略的分類結果可能與概念結構的分類情形有所差異，本研究進一步分析概念結構分類與解題策略分類之間的關係。

當概念結構圖形與解題策略圖形已建構後，針對需要確認資料原因的部分，以及資料模糊不清部分建立起始問題，對受訪樣本進行診斷性訪談。從預設的問題開始，比對圖形的資料、樣本的回答問卷，及訪談對象的回答，找出需要進一步釐清事實的關鍵處，立即擬定新的相關問題，進一步對受訪樣本提問，直到細節清晰爲止。訪談的過程均有錄音，並將之轉換爲錄音逐字稿，以作爲支持、修正樣本概念結構與解題策略的依據。

五、研究限制

一、本研究之設計與標準實驗法存在不同之處。由於本研究採用質性研究法，而實驗對象為北部某公立高中之高二兩班自然組學生，在地域、學生背景、就讀類組上有其特殊性，並不能完全代表全國高中生的母群體。因此需要推論到其他地區學校、其他年級或其他類組之樣本時，應注意本研究樣本之性質。此部分有待後續的相關研究。

二、本研究所蒐集的原始資料，經過研究者依循相關理論進行處理，所獲得的結果會受到研究者個人的研究方向、詮釋角度與個人觀點所影響。雖然研究工具曾邀集專業研究人員與資深教師進行鑑定與提出建議，但不能認定不同的研究者進行相同的研究過程會得到相同的研究結果。

三、本研究是針對高中「複數乘法」的數學知識（一般式運算程序、極式乘法法則、幾何變換）及表徵使用情形來進行研究。故如果進行以下方面的研究，使用工具可能需要調整或重新設計，結論也可能不同：

（一）單獨分析一般式運算程序、極式乘法法則或幾何變換其中一部份的複數乘法知識。

（二）研究除了代數、幾何之外的其他表徵形式。

（三）研究「複數乘法」以外的數學知識。

（四）研究對象為大學生或研究所學生。

第二節　研究發現與討論

本節為回應本研究第一個研究議題，從診斷性問卷的測驗結果，比對抽樣樣本的訪談資料，整理分析出高二學生關於複數乘法的概念結構，以及面對複數乘法問題時的解題策略，並進一步分析其可能的成因，及概念結構與解題策略之間的相互關係。

從表徵理論的觀點來看，學生是否已建構一個數學概念，可以從他對此數學概念的表徵使用情形，以及此概念之各種表徵整合情形可以看出。例如學生可以使用幾何變換與極式運算規則來處理複數乘法問題，也可以在幾何變換與極式乘法法則之間互相轉移，則該學生已經建構了幾何變換概念，也同時建構了極式乘法法則概念。

另外學生所能選擇的解題方式，受限於他已經建構的複數乘法概念。若樣本之某部分概念未建立，則解題時無法使用該部分概念。然而各樣本可能已經建構部分相同的複數乘法概念，但是解同樣題目時卻不一定使用相同的解題方式，這就牽涉到該樣本的解題策略。除了從該樣本使用的數學結構與表徵使用情形來觀察，同時也從樣本選擇的解題方式來分析。

一、高二學生關於複數乘法的概念結構

將接受診斷性問卷測驗之樣本的作答資料，依據表 5 之雙向細目表、各題所採用之數學結構與表徵轉換轉移來進行分析整理，發現所有有效樣本 77 人中，在複數乘法數學結構之使用情形，主要可以分爲三大類。

（一）能使用一般式運算程序、極式乘法法則與幾何變換解題，約佔 5%。

（二）能使用一般式運算程序與極式乘法法則解題，未使用幾何變換解題，約佔 27%。

（三）能使用一般式運算程序解題，未使用幾何變換與極式乘法法則解題，約佔 68%。

在所有樣本的作答情形中，並未發現有樣本可以使用幾何變換解題，但不使用極式乘法法則解其他題目者；也未發現有樣本可以使用幾何變換解題，但不使用一般式運算程序解其他題目者；亦未發現有樣本可以使用極式乘法法則解題，但不使用一般式運算程序解其他題目者。這如同在第貳章提到複數乘法結構中，一般式運算程序、極式乘法法則與幾何變換是有層次的關係，未建構前者較低層次的概念時，則無法建構後者較高層次的概念。

由此三類樣本比對可以處理的表徵的轉換轉移類型（代數轉代數、代數轉幾何、幾何轉代數、幾何轉幾何），統計如表 7：

表 7 診斷性問卷樣本能使用複數乘法數學結構與表徵轉換轉移之分佈表

	代數轉代數	代數轉幾何	幾何轉代數	幾何轉幾何	整體人數
1.能使用一般式運算程序解題 2.能使用極式乘法法則解題 3.能使用幾何變換解題	4 人	4 人	4 人	4 人	4 人 （5 %）
1.能使用一般式運算程序解題 2.能使用極式乘法法則解題 3.未使用幾何變換解題	21 人	21 人	20 人	16 人	21 人 （27 %）
1.能使用一般式運算程序解題 2.未使用極式乘法法則解題 3.未使用幾何變換解題	52 人	32 人	20 人	11 人	52 人 （68 %）
可以處理該類表徵轉換轉移之合計人數	77 人 (100%)	57 人 (74%)	44 人 (57%)	30 人 (39%)	77 人

註：有效樣本 77 人。縱軸三類爲互斥的分割類型，橫軸四類爲非互斥的類型。

所有有效樣本均可使用一般式運算程序來處理代數轉代數的題型，但是並非所有有效樣本均可使用極式乘法法則來處理代數轉代數之題型。整體來看，樣本可以處理代數轉代數題型之人數，多於可以處理代數轉幾何、幾何轉代數與幾何

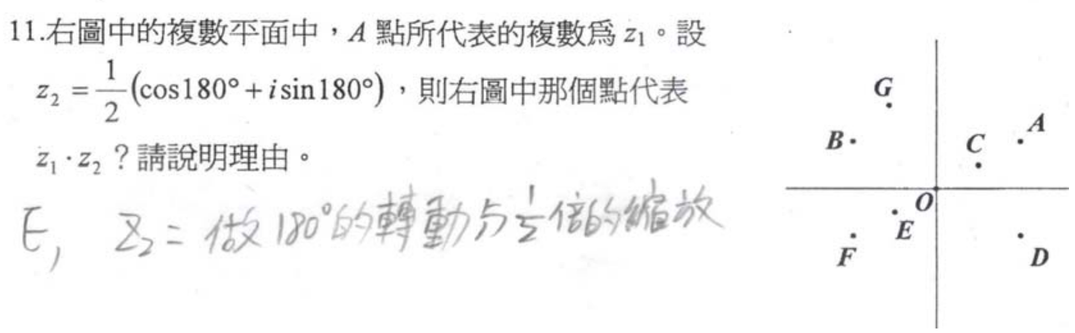
轉幾何題型的人數。只要有關幾何表徵的轉換或轉移之題型，可以處裡的樣本人數都比可以處理代數表徵之內的轉換的樣本人數少。顯示高中生在複數乘法方面，可以掌握代數表徵的人數多於掌握幾何表徵的人數。

另外，受訪談樣本的回應亦提供分析結果之證據，以及修正的方向。透過對問卷結果與訪談資料之質性分析，可將受測樣本之概念結構分成三種類型：（一）表徵整合型。（二）表徵轉移型。（三）單一表徵型。以下就各種類型進行分析與討論。

（一）表徵整合型

表徵整合型的學生，能夠整合各種表徵，並掌握各種概念。此類型的樣本，面對複數乘法問題，可以使用幾何變換解題，也可以使用極式乘法法則解題，亦可以使用一般式運算程序來解題。同時可以掌握表徵之內的轉換與表徵之間的轉移，也可以整合不同的表徵形式，同時來處理問題。

此類型學生能從極式的表徵中，瞭解進行複數乘法時，輻角的角色是在進行旋轉的動作，絕對值的角色是在進行伸縮的動作，如圖 11。從表徵的面向來看，顯示此類學生，可以從極式的代數表徵，藉由幾何變換，轉移爲複數平面上的幾何表徵，已經整合代數表徵與幾何表徵，同時也整合了極式乘法法則與幾何變換兩種乘法動作之對應。


11.右圖中的複數平面中，A 點所代表的複數爲 z_1。設 $z_2=\frac{1}{2}(\cos180°+i\sin180°)$，則右圖中那個點代表 $z_1\cdot z_2$？請說明理由。

E, z_2= 做180°的轉動及$\frac{1}{2}$倍的縮放

圖 11 表徵整合型學生使用幾何變換概念之作答情形之一

此類型學生可以從圖形中擷取絕對值與輻角的關鍵元素，形成極式表徵並進行極式乘法法則運算（如圖 12）。故表徵整合型學生可以從幾何表徵轉移爲代數表徵，進行極式乘法法則所得之極式，亦能轉移爲幾何表徵而繪於複數平面上。這也顯示此類型學生在複數基本性質之先備知識方面，可以運用複數之代數表徵與幾何表徵之間的轉移。表徵整合型學生也能使用一般式運算程序來處理問題，如圖 13。

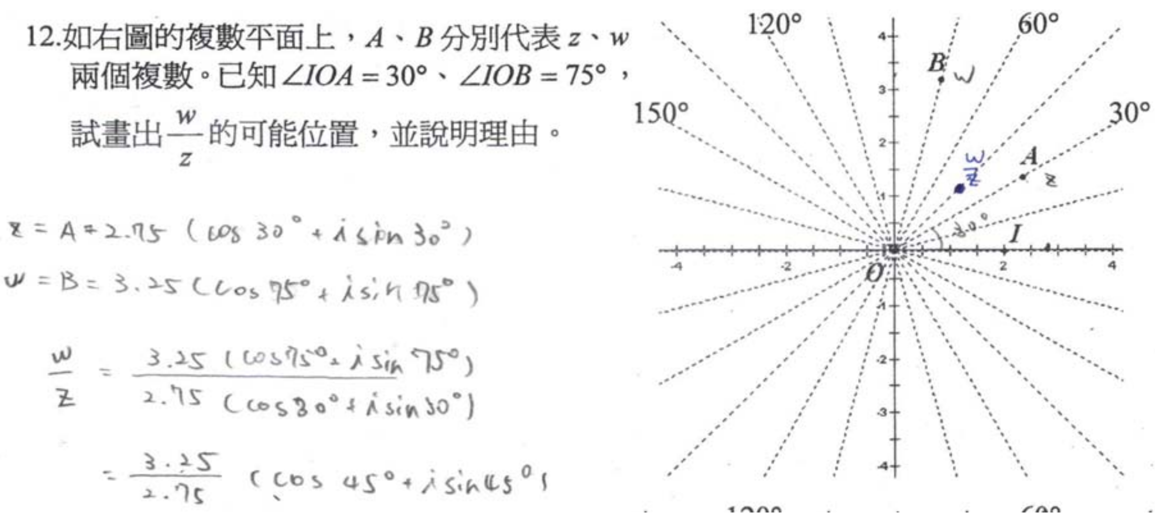


圖 12 表徵整合型學生使用極式乘法法則概念之作答情形之一

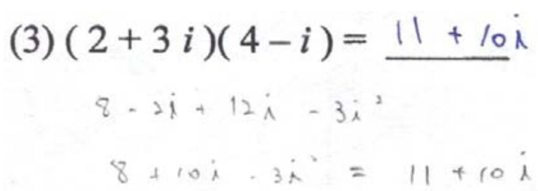


圖 13 表徵整合型學生使用一般式運算程序概念之作答情形之一

此類型學生面對複數乘法問題時，有時候並不只採用一種表徵，或一種數學概念來處理；他可以整合三種複數乘法概念，並整合代數與幾何兩種表徵，進行乘法動作時各取合適的部分，進行整合型運算，如圖 14 的作答情形。

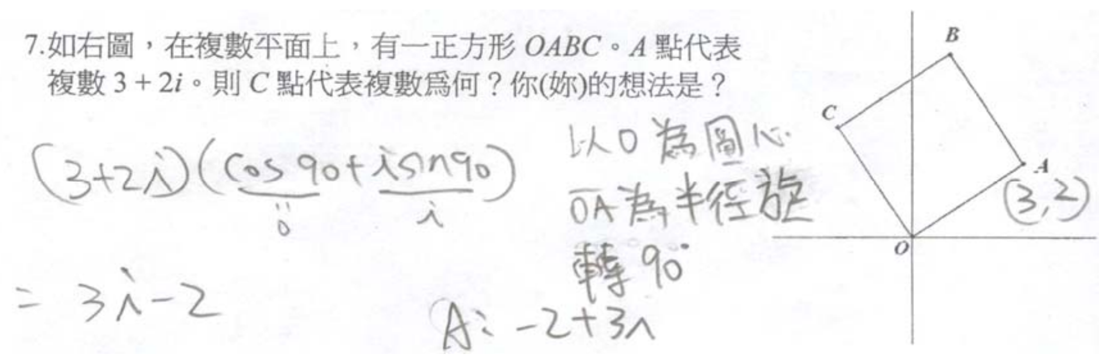


圖 14 表徵整合型學生整合三種複數乘法概念、兩種表徵之作答情形之一

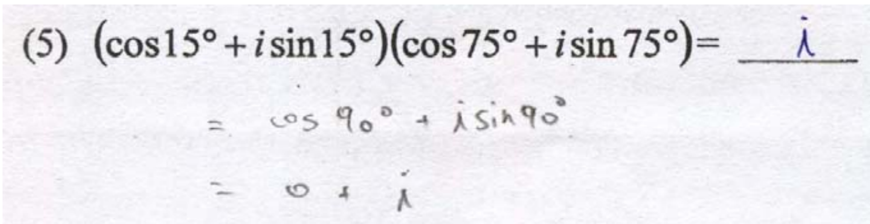
表徵整合型學生之特質爲：使用過程概念來處理問題，而非程序性計算；能

夠整合數種表徵（代數、幾何），並非每一題都使用幾何變換來處理，而是針對不同類型的題目，轉換或轉移為合適的表徵，選擇解題方式，並操弄表徵來處理問題。此類型學生已具備完整的複數乘法先備知識，並完整建構一般式運算程序概念、極式乘法法則概念及幾何變換概念。

在所有接受診斷性問卷測驗的有效樣本 77 人中，屬於表徵整合型的學生僅有 4 人（約占 5%）。從高中課程安排來分析，由於高中教材中有編排一般式乘法與極式乘法之內容，並未編排複數乘法的旋轉與伸縮課程，亦未強調。表徵整合型的學生能夠從極式乘法的概念自行發展建構出幾何變換概念，故在全體樣本中並不是多數。教學者要如何協助學生建構幾何變換概念，為複數乘法課程教學之一個重要議題。

（二）表徵轉移型

表徵轉移型學生面對問題時，會選擇在代數表徵與幾何表徵之間轉移。在本研究中，因幾何變換之概念較複數一般式乘法與極式乘法概念複雜，故此類型學生在面對複數乘法的問題時，會將幾何類型的題目，轉移為他所熟悉的代數表徵來處理，並不一定使用合適的表徵。此類型之樣本，可以使用極式乘法法則來解題（如圖 15），也可以使用一般式運算程序解題，但並未使用幾何變換作法。遇到幾何概念的題目時，會轉移為極式乘法法則（如圖 16）或一般式運算規則等代數方式來處理。

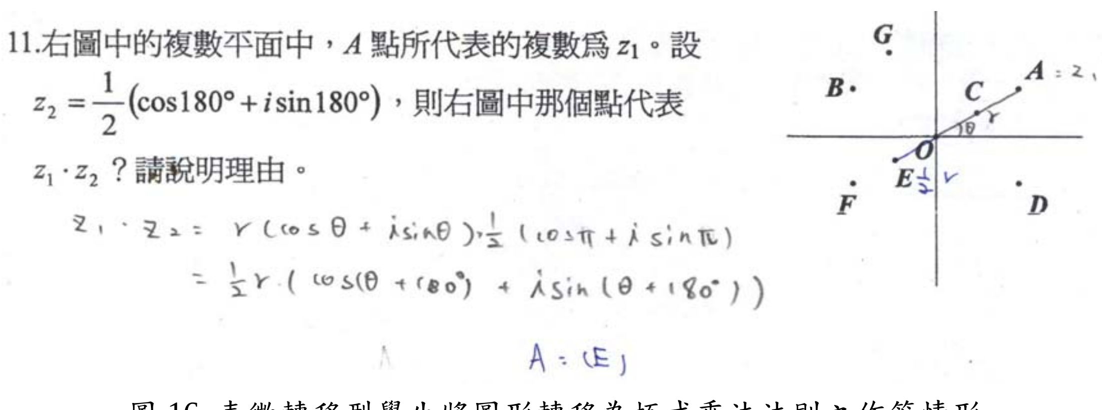


(5) $(\cos 15° + i\sin 15°)(\cos 75° + i\sin 75°) =$ i

$= \cos 90° + i\sin 90°$

$= 0 + i$

圖 15 表徵轉移型學生使用極式乘法法則概念之作答情形



11.右圖中的複數平面中，A 點所代表的複數為 z_1。設 $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 180° + i\sin 180°)$，則右圖中那個點代表 $z_1 \cdot z_2$？請說明理由。

$z_1 \cdot z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

$= \frac{1}{2}r \cdot (\cos(\theta + 180°) + i\sin(\theta + 180°))$

A : (E)

圖 16 表徵轉移型學生將圖形轉移為極式乘法法則之作答情形

表徵轉移型學生會採用極式乘法法則或一般式運算規則來處理問題，但觀察樣本作答情形，其使用極式乘法法則的時機，又可區分爲強極式概念與弱極式概念兩類。

強極式概念的學生，面對適合使用極式乘法來處理的題目，與適合使用幾何變換來處理的題目，均採取極式乘法法則來進行。而弱極式概念的學生，會將適合極式乘法的題目，轉換爲一般式運算規則來處理；但是在面對部分圖形題目時，又偶爾使用極式乘法法則來處理。

以下爲表徵轉移型學生中，強極式概念學生（訪談樣本 S1）之作答情形（圖 17 與圖 18）與部分訪談內容：

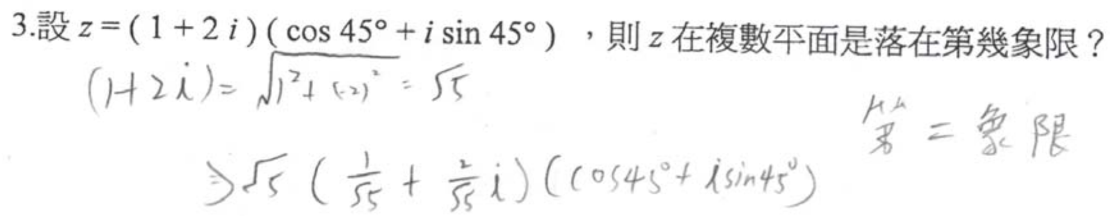


圖 17 表徵轉移型強極式概念學生 S1 使用極式作答情形之一

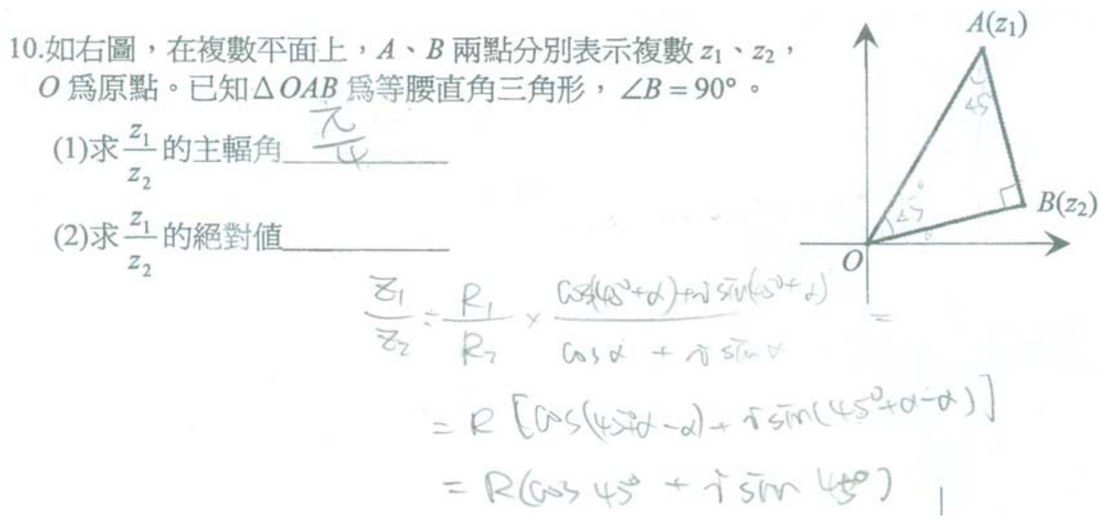


圖 18 表徵轉移型強極式概念學生 S1 使用極式作答情形之二

T：第 3 題，你嘗試去把前面 $\sqrt{5}$ 提出來，得到第二象限。你的想法是怎樣？

S1：…角度要相加。

T：…前面看得出來角度嗎？（指 $1+2i$ 部分）

S1：這個超過 45 度。要化成極式。

T：你的意思是要化成極式，那你是用什麼方法化？好像也不是特殊角對不對？

S1：畫複數平面，標點標上去，角度加 45 度。

…

T：像你第 10 題，你找主輻角時，你是用極式的方法作對不對？

S1：嗯！

T：絕對值相除、輻角相減。像這題目你是從極式的角度去想對不對？

S1：對！

T：那你還有別的想法嗎？除了極式以外，還有別的想法嗎？

S1：…畫圖…忘記了。

表徵轉移型學生雖然未使用幾何變換來處理問題，但事實上此類學生是否已建構了幾何變換的概念，只是未使用呢？由圖 18、圖 19 與上面訪談資料來看，抽樣訪談對象 S1 學生似乎會嘗試以圖形來處理問題，但實際上並未繪圖。而在訪談中是以「角度加、減」來敘述，而非使用「旋轉」等詞語。表示其思考的模式，是依循極式乘法法則的「輻角相加」的概念。在訪談中研究者詢問其除了極式之外的想法，該樣本回答曾觸及畫圖，但又無法合適敘述。以表徵的角度來分析，此類型學生的幾何變換概念相當模糊（也可能未建立），極式乘法概念強烈，故會將幾何圖形問題轉移為極式乘法法則來處理。若能以合適的方式引導其建立幾何變換概念，則此類樣本可以提升為表徵整合型學生。

而弱極式概念學生（訪談樣本 S7）之作答情形（圖 19 與圖 20）與部分訪談內容如下：

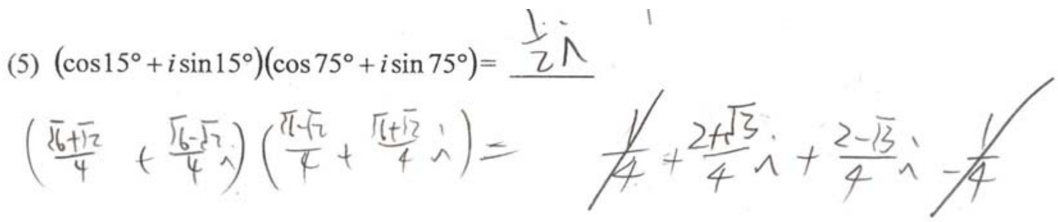


圖 19 表徵轉移型弱極式概念學生 S7 以一般式運算程序處理極式乘法問題

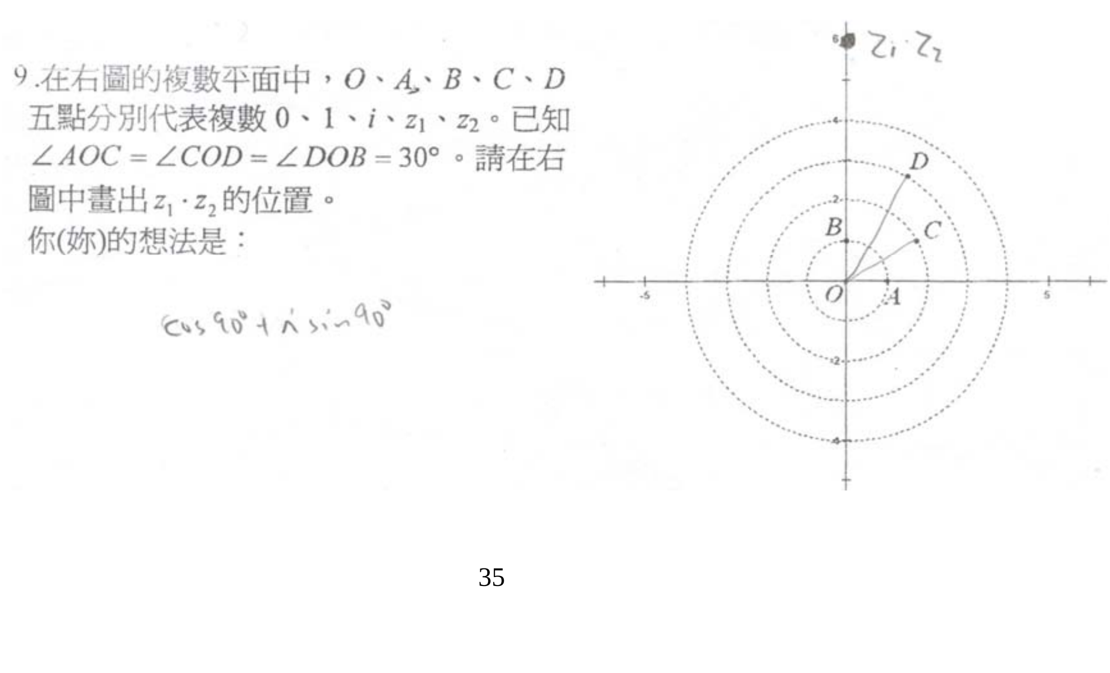


圖 20 表徵轉移型弱極式概念學生 S7 以極式乘法法則作答情形

T：像你這題（1(5)）是兩個極式的乘法…

S7：把它寫出來，再相乘就好（表示極式乘法轉一般式運算）。

T：不過你做的時候，並沒有用極式的公式…

S7：我覺得這樣比較快。

T：這樣比較快？這麼多根號…你覺得…

S7：OK 啊！

T：你會用兩極式的乘法公式，只是覺得 $a+bi$ 比較快。

S7：這樣比較快。

T：所以你把極式變成一般式 $a+bi$ 是沒問題的。像這 2(2)題，你會把這個（極式）變成 $a+bi$，再畫到複數平面上。你有去抓這裡面（極式）的角度和絕對值去畫嗎？

S7：沒有…（不瞭解的樣子）

…

T：第 9 題，你也是有把圖畫出來，這 90 度是？

S7：兩個角度加起來。

T：是輻角相加？那怎麼會到這麼遠的地方？

S7：相加吧！長度相加。

T：像這個絕對值是 2 嘛！這是 3 嘛！

S7：喔！相乘，絕對值相乘，角度相加。

T：你這個想法，是從極式的想法來的嗎？

S7：對！

從與 S7 之訪談中，可發現其對極式乘法的敘述並不很完整，也無法從極式表徵中擷取絕對值與輻角這兩個重要的角色。但其在面對問題時，有時仍可運用極式概念。從過程概念理論來分析，顯見其有建立極式乘法法則概念，但並不穩固。處理問題時常常會轉換爲較爲穩固的一般式運算程序概念來處理。

在所有接受診斷性問卷測驗的有效樣本 77 人中，屬於表徵轉移型的學生有 21 人（約占 27%）。綜合來看表徵轉移型的學生，已建構一般式運算程序概念與極式乘法法則概念，但未完整建構幾何變換概念，故會將圖形題目或適合使用幾何變換作法之題目，轉移爲極式乘法或一般式乘法。從過程概念理論與複數乘法數學結構來分析，表徵轉移型的學生尚未建構複數乘法的過程概念（幾何變換），而停留在程序步驟(Procedure)及過程(Process)階段。而強極式概念學生運用極式無礙；弱極式概念學生能使用極式，但常常無法在合適的時機使用。以表徵的面向與過程概念的角度來看，在教學上若可以藉由極式乘法法則之演練強化其概念，另一方面輔以圖形呈現極式的元素（絕對值、輻角）與極式乘法法則的幾何性質，則有助於表徵轉移型的學生學習並提升爲表徵整合型學生。

（三）單一表徵型

單一表徵型的學生，只能處理單一表徵，即只能使用一般式運算程序來處理複數乘法問題，並沒有使用極式乘法法則解題，也沒有使用幾何變換作法。部分學生會將極式轉換爲一般式來進行乘法，處理複數平面題目亦嘗試擷取其實部與虛部來轉移爲一般式（如圖 21）。此類型學生不瞭解極式表徵的意義，甚至不瞭解複數之絕對值與輻角的角色。

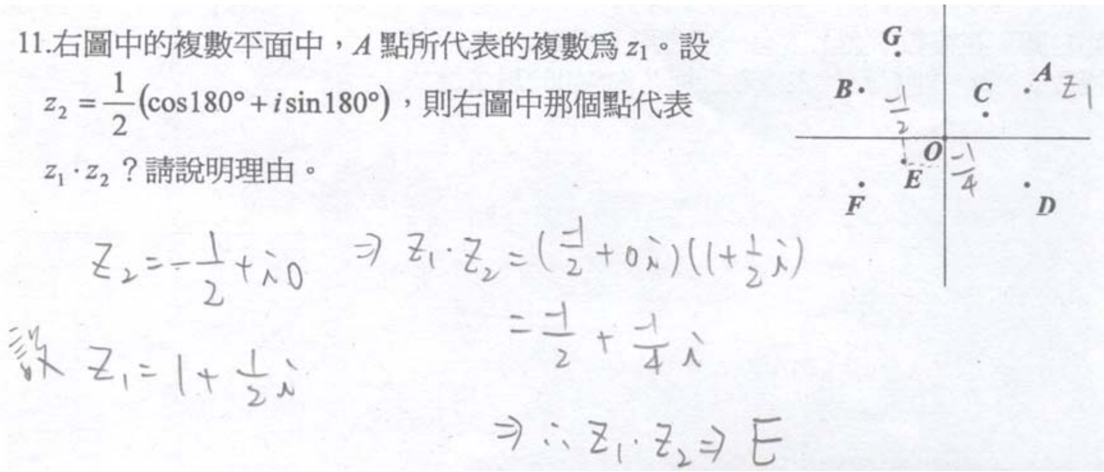


圖 21 單一表徵型使用一般式運算來處理圖形與極式題目之作答情形

從此類型學生在診斷性問卷中的作答情形，可以分爲強表徵轉換類與弱表徵轉換類。強表徵轉換類學生可以利用三角函數求值的概念，將極式表徵的題型，轉換爲一般式來進行乘法運算；也可將適用幾何變換題型轉移爲一般式乘法來處理。弱表徵轉換類學生則無法處理三角函數，也無法處理幾何的乘法動作，故面對極式乘法與幾何變換的題型時，則留空白，僅能計算出一般式運算程序之題型。

以下爲單一表徵型學生（訪談樣本 S8 與 S9）的部分訪談內容：

T：你知道什麼叫做極式嗎？
S8：不是很清楚⋯
T：你會不會做極式的乘法？像這兩個極式相乘時，你會不會用什麼公式？
S8：⋯不記得，很少用⋯
T：你覺得沒有用的問題是什麼？是極式的乘法⋯
S8：想的時候不好想，很難想出來。一下想不出來。
T：你會把 $\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ$ 變成 $a + bi$ 這樣的數字？
S8：對呀！這我知道。⋯

T：像你這個就直接把極式變成 $a+bi$ 來乘是沒有問題的。

S8：對呀！

T：…舉個例子，像這個寫法 $2(\cos 30° + i\sin 30°)$，絕對值是多少？

S8：嗯….

T：那輻角呢？

S8：輻角一直都不太清楚…

T：像 $-1+i$ 的絕對值呢？

S8：根號，-1 平方加上 i…這樣寫不行啊！…。

T：你對絕對值和輻角一直不是很清楚。

S8：對啊！

T：像這一題（題 4(2)），請寫出 A 代表的極式，你寫的是 $2+2i$，這不是極式。你不是很瞭解極式這件事情。

S8：嗯！

T：但是你變三角函數大部分都不會有困難吧？像極式變成 $a+bi$ 沒有問題，要把 $a+bi$ 變成極式有困難。

S8：嗯！

T：你知道什麼叫做極式嗎？

S9：就是 sin 啊！cos 啊！然後 i…

T：會不會做兩個極式的乘法？像你這題沒有寫。

S9：那時候沒有想到。

T：像這種會嗎？（一般式乘法）

S9：會，乘開…

T：（指著受訪者的測驗卷）分配律…。那你會把極式變成這樣子 $a+bi$ 嗎？

S9：嗯！不會…

T：你覺得把極式變成這樣子幾加幾 i 的困難在哪裡？是因為…

S9：三角函數。

T：你那時候學三角函數，沒有很瞭解算法。

S9：對！因為這是什麼…（指 sin15°），這個要乘開很麻煩。

T：所以像這種，你大概就…

S9：不太會，比較深奧。

T：像你對…兩個極式相乘有什麼特別公式，並沒有學好。

S9：對！

T：那像這題（6(1)(2)(3)），這題你也是看到這個，就…

S9：就不會三角函數的關係。

T：三角函數是一個困擾。

S9：嗯！

訪談樣本 S8 無法使用極式乘法法則，但會利用三角函數，將極式表徵轉換爲一般式乘法。在其複數乘法的概念上，僅有一般式運算程序概念，但由於先備知識中有建立三角函數的概念與計算能力，故能利用一般式運算程序來處理極式乘法法則類型與幾何變換類型等問題中，可以轉換轉移爲一般式之代數表徵的題目；但並不代表其建構了極式乘法法則與幾何變換等概念，該樣本只是運用表徵之轉換轉移，利用熟悉易掌握的表徵形式來處理。換言之是進行程序性計算，而非概念性解題。

訪談樣本 S9 無法使用極式乘法法則。三角函數概念是此類型學生的困擾，影響其極式概念的建構。此類學生無法利用三角函數來轉換極式成爲一般式，故其複數乘法概念與處理方式僅限於一般式運算程序，面對極式表徵的複數乘法問題則無法處理。

在所有接受診斷性問卷測驗的有效樣本 77 人中，屬於單一表徵型的學生有 52 人（約占 68%），佔了相當大的比例。極式的表徵在此類型學生的心中，只是三角函數的表示式，而無複數的極式意義。要提升單一表徵型學生的概念層次，以過程概念理論來分析，首先必須強化學生三角函數的概念與計算能力。其次從表徵的角度來分析，要建構學生極式的概念，必須從極式的兩個重要的元素—絕對值與輻角來著手。此二元素在第一方面可形成極式的代數表徵，第二方面成爲複數乘法法則之運作角色，第三方面提供極式在複數平面或極坐標平面的幾何意義，第四方面成爲極式的代數表徵與幾何表徵的連結橋樑。

二、高二學生關於複數乘法問題的解題策略

探討高中生關於複數乘法的概念結構，是從靜態的角度來分析學生已經建構了哪些概念，尚未建構哪些概念。而從動態的角度來分析學生的解題策略，意即要瞭解學生是如何選擇方法來處理複數乘法的問題。當然解題策略受限於學生已經建構的概念，例如某學生僅有一般式運算規則概念與極式乘法法則概念，但未建構幾何變換概念，則他的解題策略僅有一般式運算規則與極式乘法法則可選擇，但是該學生可能都只用一般式運算規則來處理問題。這表示解題策略尙有選擇的「意向」，是什麼因素影響學生決定他的解題方式，不見得一定都採用學生所瞭解的最高層級概念來處理問題。

本研究從診斷性問卷的題目中，比對雙向細目表，選擇該題目的作答方式可能爲兩種以上層級者爲分析重點。例如診斷性問卷 5、6(3)、9、10(1)(2)、11、14 等等題目，可能會有二至三種不同數學概念的解法。從樣本已經建構了哪些複數乘法的概念爲基礎，進而探討採用解題策略的原因。並從訪談樣本中獲取資料及加以驗證。

以質性方式來將資料分類及分析，樣本對複數乘法的解題策略可分爲四種類型：一、靈活豐富型策略。二、情境型策略。三、機械型策略。四、受限型策略。

下面依據資料來說明並分析。

（一）靈活豐富型策略

此類型學生除了會使用一般式運算規則、極式乘法法則與幾何變換來處理問題之外，在面對複數乘法的問題時，會依據題意找出合適的線索與表徵，利用表徵的轉換或轉移，轉變為合適的解題方法，以獲得最終的答案。其表徵的運用是靈活的，不受題型的表徵形式所限制；能夠使用的表徵數量是豐富的，不只是唯一的表徵來處理所有的問題。並且在解題進行中，常常是兩種以上的表徵相輔相成。

受訪學生 S3 是屬於這類型學生。以下是他的作答情形（圖 22 及圖 23）與部分訪談內容：

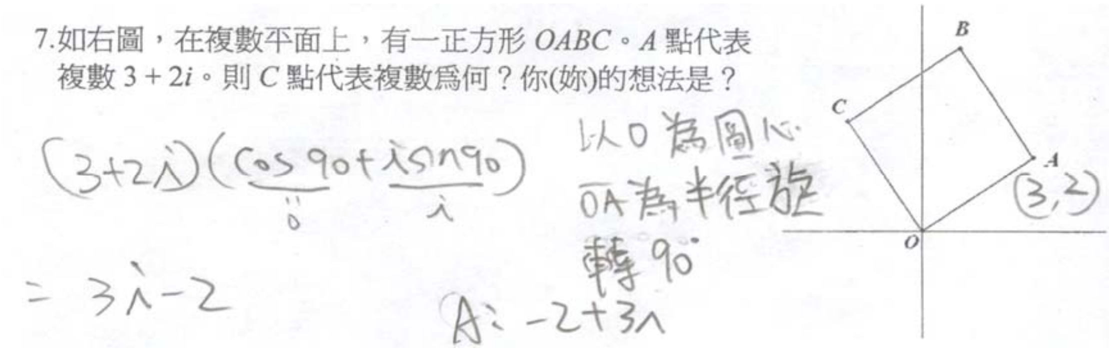


圖 22 靈活豐富型學生 S3 運用幾何變換、極式乘法法則與一般式運算規則之間的轉換轉移之作答情形（與圖 14 相同）

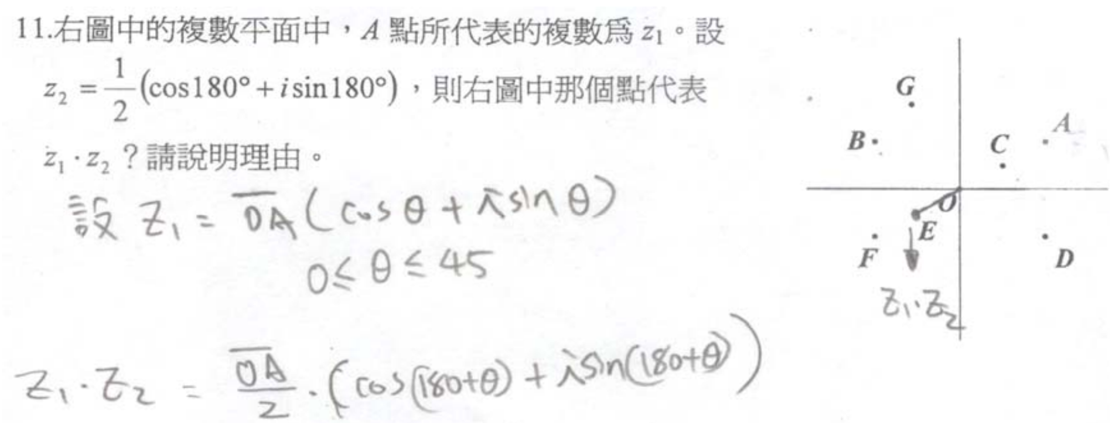


圖 23 靈活豐富型 S3 學生在幾何變換與極式乘法法則之間轉移之作答情形

T：第 7 題，你是用？

S3：旋轉。

T：為什麼這個代表旋轉？

S3：因為它是正方形，它們距離都一樣，可以想成一個圓，之前老師有教我

們旋轉。換成極式這樣旋轉。

T：像你這題寫 $(3+2i)(\cos 90° + i\sin 90°)$，你怎麼知道它是旋轉？

S3：像這個是逆時針 90 度，順時針就改成負 90 度，再用三角函數換回來。

T：…如果我這邊寫的是 θ 呢？（ $\cos\theta + i\sin\theta$ ）我不是寫度，而是寫 θ，θ 是一個角。代表什麼意思？

S3：代表 $\overline{OA}$ 再轉 θ 度，然後距離一樣。

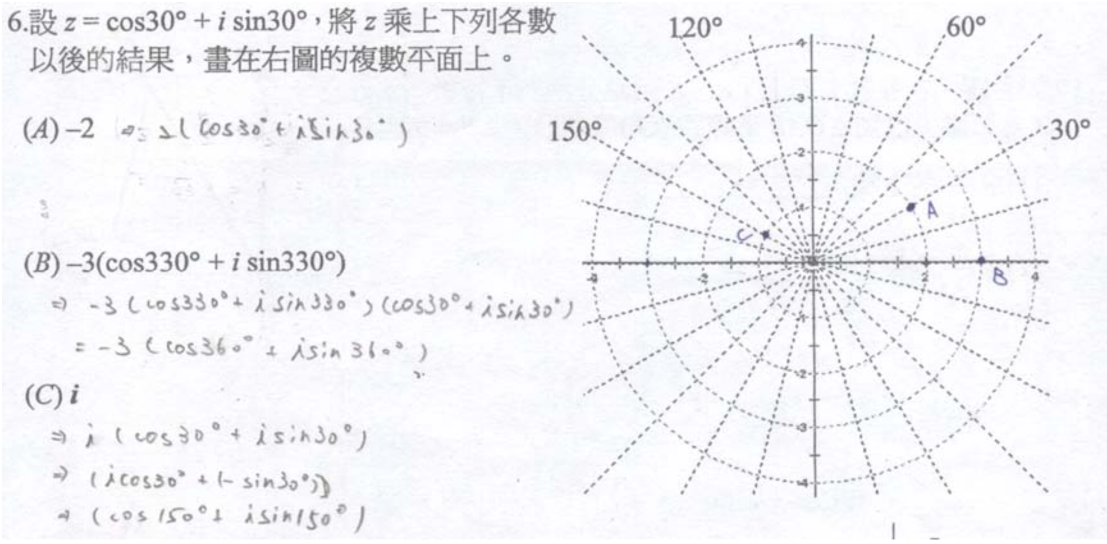
受訪的 S3 學生，能夠將極式乘法的表徵與旋轉、伸縮的幾何動作作連結，能以幾何變換解題，也能轉換爲極式乘法來解題，亦可使用一般式乘法來解題。在解題策略上，並不偏重任何一種解題方式，主要以幾何變換與極式乘法法則之間轉移爲主；其次若無法直接進行幾何變換或極式乘法法則時，也能將幾何變換轉移爲一般式運算程序，以及將極式乘法法則轉換爲一般式運算程序來處理。顯示這類的學生已完整掌握三種複數乘法的概念，亦可掌握不同的表徵，能根據題目的形式採用合適的表徵方式解題，也能視需要去作轉換轉移表徵。在全體樣本中，正好是概念結構中的表徵整合型的四位學生，其解題策略均爲靈活豐富型。而在其他未使用幾何變換的樣本作答情形，並未發現能使用多重表徵轉換轉移之方式，均爲依照題意使用單一表徵進行計算，或僅轉換或轉移表徵一次的情形。

從問卷作答情形上來看，面對複數乘法問題時，靈活豐富型學生的解題方式，傾向使用幾何變換與極式乘法法則，而使用一般式運算規則較前兩者少。顯示此類型學生主要以概念性知識來處理問題，尤其是過程概念，而非程序性計算。從表徵的冰山理論來分析，此類學生建構了多重表徵概念，面對問題時可以在腦中轉動整個冰山，讓各種不同但合適的表徵輪流出現，並且整合各表徵成爲解法，故其解題策略是豐富而靈活地。

（二）情境型策略

此類型學生在面對複數乘法問題時，選擇所採取的解題方式會受到題意情境的影響，通常採用與題意相同表徵來處理問題，或者依據學生之喜好來決定解題方式。並不會將兩三種複數乘法概念整合使用，僅可能進行其中一種乘法法則後，再進行複數表徵的轉換或轉移。

情境型策略學生遇到極式與數字的乘積時，常常將數字與式子分開處理，無法整合在一起（如圖 24）；這類型學生選擇極式乘法法則，但並未將 －2 和 i 等數字轉換爲極式，也未使用複數乘法的幾何變換。此類型學生在處理一般式與極式的乘積時，採用題意上的極式乘法法則，而非繪圖後採用幾何旋轉概念處理（如圖 25）。



6.設 $z=\cos30°+i\sin30°$，將 z 乘上下列各數以後的結果，畫在右圖的複數平面上。

(A) -2 $\Rightarrow 2(\cos30°+i\sin30°)$

(B) $-3(\cos330°+i\sin330°)$

$\Rightarrow -3(\cos330°+i\sin330°)(\cos30°+i\sin30°)$

$=-3(\cos360°+i\sin360°)$

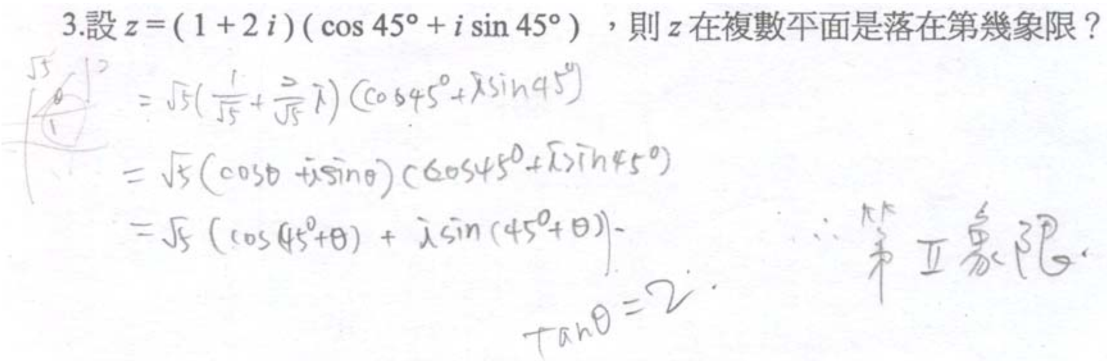
(C) i

$\Rightarrow i(\cos30°+i\sin30°)$

$\Rightarrow (i\cos30°+(-\sin30°))$

$\Rightarrow (\cos150°+i\sin150°)$

圖 24 情境型策略學生之作答情形之一



3.設 $z=(1+2i)(\cos45°+i\sin45°)$，則 z 在複數平面是落在第幾象限？

$=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)(\cos45°+i\sin45°)$

$=\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos45°+i\sin45°)$

$=\sqrt{5}(\cos(45°+\theta)+i\sin(45°+\theta))$ ∴第II象限.

$\tan\theta=2$

圖 25 情境型策略學生之作答情形之二

以下是屬於此類型的樣本 S4 之部分訪談內容：

T：你處理極式是沒有問題的？

S4：嗯！

T：那你在解這種題目時，你會比較喜歡用 $(a+bi)(c+di)$ 這樣做，還是用極式相乘這樣做？你比較喜歡哪一個？

S4：比較喜歡簡單的，就用這個 $(a+bi)(c+di)$ 。

T：可是你還是會極式嘛！極式對你來說，是…

S4：比較複雜的。

T：簡單的意思是說？為什麼你會覺得它比較簡單？

S4：數字乘一乘就出來了。

…

T：那什麼時候你會用極式來做？

S4：角度剛剛好比較特別。

T：如果角度沒有剛好，你就會轉成$a+bi$這樣做。

S4：嗯！

T：像第 11 題，A 代表 z_1 嘛！像剛剛有一題也是一樣，沒有給妳角度，你就會有困難。

S4：對！

T：你會把這個角度設成θ來做？

S4：比較不會這樣做。

T：你比較習慣有數字，再來處理？

S4：嗯！

訪談內容顯示此類學生，會視題目的形式，與個人的喜好來決定解題方式。S4 可以使用極式乘法法則解題，也可以使用一般式運算規則解題。若角度合適則會選擇極式乘法法則，不合適則會選擇轉換爲一般式運算規則。無法爲了採取概念方式解題而假設未知數，寧可假設實際數字來進行運算。

所有樣本中解題屬於情境型策略的學生有 9 人（約占 11%）。此類型學生並未使用幾何變換來解題。而從整體作答情形來看，此類樣本之極式乘法法則的使用與一般式運算規則的使用是均衡地出現，此類樣本也可以進行兩者之間的轉換。這類學生的特徵是，解題方向的出發點與題目訊息的表徵形式有相關性，或者與學生個人喜好有關，使用表徵轉換轉移的靈活性不高，每一題的作法最多只出現一次轉換或轉移。這類型學生並沒有幾何變換的解法出現，只要碰到圖形的題目，就會依照題意選擇轉移爲極式乘法，或轉移爲一般式運算來處理。

從表徵的冰山理論來分析，此類型學生有建構了一般式運算規則概念與極式乘法法則概念，但幾何變換概念相當模糊。如同冰山只有兩個主要的大角，而且轉動不易，無法在一種乘法動作進行時，同時在心中比對另一種乘法動作，擷取所需的部分組合而成整合概念。在教學上若能建構學生的幾何變換知識，並且提供複數乘法之多重表徵連結的學習方式，則可使此類學生的表徵運用上更靈活而豐富。

（三）機械型策略

機械型策略的學生，遇到複數乘法的題目，如同機械式的動作一般，均一律轉換或轉移爲一般式運算規則來處理。並未使用幾何變換來解題，在部分圖形題偶有極式乘法的概念出現，但並非主要解題方式。此類型學生將幾何圖形題目，擷取其一般式性質來進行乘法動作（如圖 26）。就算面對單純的兩極式相乘的題目（如圖 27），仍舊選擇轉換爲一般式來進行乘法動作。

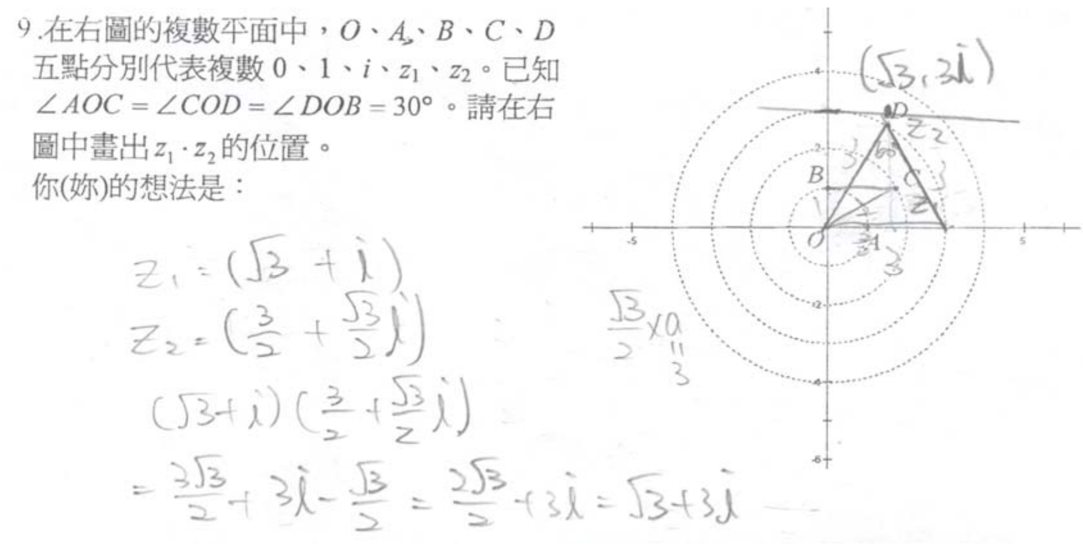


圖 26 機械型策略學生之作答情形之一

以下是此類型學生（訪談樣本 S6）的作答情形與部分訪談內容：

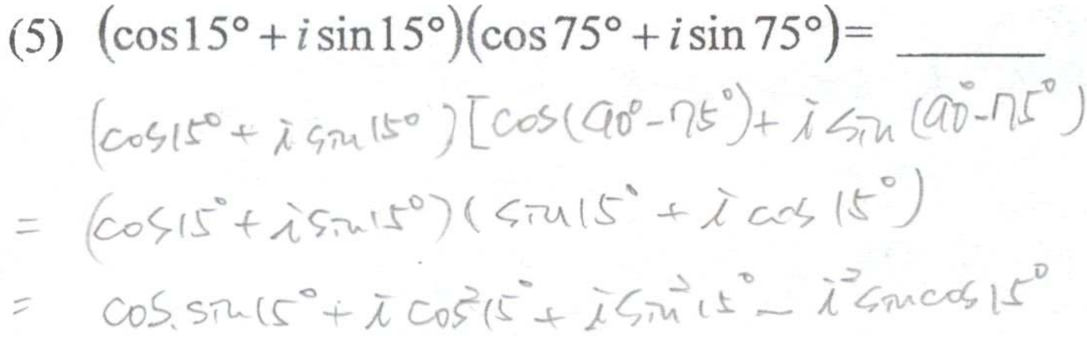


圖 27 機械型策略學生 S6 之作答情形

T：…像你這題（題目 1(5)），你嘗試把角度變一樣（均為變 15 度），然後變成數字乘開。你這樣做的原因是什麼？

S6：…就角度變一樣，然後乘開。

T：你沒有想到極式相乘的公式？

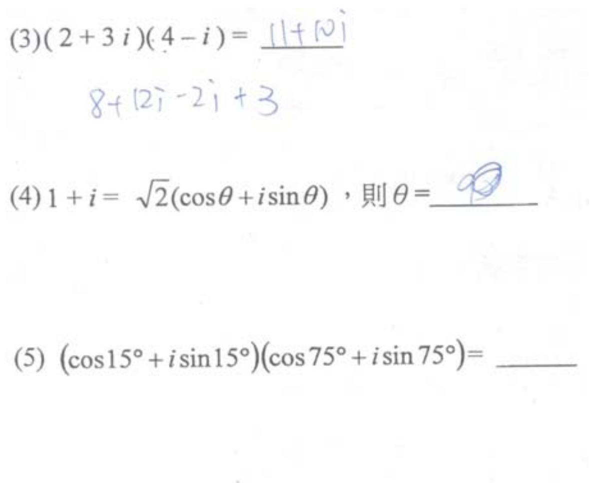
S6：……

如同冰山只有一個主要的山峰，此類型學生只有建構一般式運算概念，極式乘法法則概念可能未建構，如果有極式乘法法則概念則相當模糊，無法成為主要解題策略。在先備知識方面，觀察此類型的學生作答情形，發現他們可以計算三角函數值，具備將極式轉換為一般式的能力。故遇到極式乘法問題時，會利用一般式運算程序來處理。但並不代表他們瞭解極式乘法法則概念，只是利用程序步

驟(Procedure)的複數乘法概念來處理過程(Process) 類型的問題。此種類型的樣本有 48 人（約占 62%），佔了相當大的比例。建立極式與一般式之間的轉換，並強化極式乘法概念，是對本類型學生的教學首要任務。

（四）受限型策略

此類型學生只能使用一般式運算程序。其與機械型策略學生的差異在於，受限型策略學生無法求三角函數之値，三角函數是一個困難點，故此類學生無法將極式轉換爲一般式，也就無法利用一般式運算程序來處理極式乘法問題。面對複數乘法問題，只能處理一般式運算的題目（如圖 28），但是只要牽涉極式表徵，此類學生即無法作答。面對幾何題型類，有 5 位學生能將一般式與複數平面的點坐標做轉移，其他人處理複數平面有困難。下面是受訪學生 S9 的作答情形與訪談部分內容：


(3) $(2+3i)(4-i)=$ 11+10i

8+12i-2i+3

(4) $1+i=\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $\theta=$ ______

(5) $(\cos 15°+i\sin 15°)(\cos 75°+i\sin 75°)=$ ______

圖 28 受限型策略學生 S9 之作答情形之一

T：…你會把極式變成這樣子 $a+bi$ 嗎？

S9：嗯！不會…

T：你覺得把極式變成這樣子幾加幾 i 的困難在哪裡？是因為…

S9：三角函數。

此種類型的樣本有 16 人（約占 20%），受限於僅能使用一般式運算程序的因素，其解題策略亦受到限制。如果教學者能夠加強三角函數等複數乘法的先備知識，並能輔以複數平面的圖形表徵來說明一般式與極式的關係與轉換方式，應能提升此類學生的概念與解題策略。

三、概念結構與解題策略之關係

前述將複數乘法的概念結構分為表徵整合型、表徵轉移型、單一表徵型三種類型；並將學生面對複數乘法問題的解題策略分為靈活豐富型、情境型、機械型、受限型四種策略。考量所有樣本之診斷性問卷作答情形，依照概念結構與解題策略交叉比對，形成數種類型，藉以說明概念結構與解題策略的關係。同時比對各類型的概念結構、解題策略與複數基本性質題型作答情形，以期望找出各類型與前一類型之間的差異，以及複數乘法先備知識影響複數乘法概念建立之關係，形成本研究的結論，及作成教學上的建議。

以三種概念結構與四種解題策略分屬兩個維度，整理所有樣本質性資料（問卷作答情形、訪談資料），並將之歸屬於概念結構與解題策略各何種類型。整理結果如表 8，發現在概念結構與解題策略關係中，所有樣本可以分為五種類型：

表 8 概念結構與解題策略關係表

解題策略 / 概念結構	靈活豐富型	情境型	機械型	受限型
表徵整合型	第一類（5%）	無	無	無
表徵轉移型	無	第二類（12%）	第三類（15%）	無
單一表徵型	無	無	第四類（47%）	第五類（21%）

第一類型即為表徵整合型。第二類型與第三類型同屬於表徵轉移型，以「表徵轉移情境型」表示第二類型，「表徵轉移機械型」表示第三類型。第四類型與第五類型同屬於單一表徵型，以「單一表徵機械型」表示第四類型，「單一表徵受限型」表示第五類型。依表 8 之關係表，比對樣本質性資料與圖 10 診斷性測驗分析圖，建立此五種類型之圖形。說明如下：

（一）表徵整合型

此類型學生概念結構為表徵整合型，解題策略為靈活豐富型。其概關係圖如圖 29：

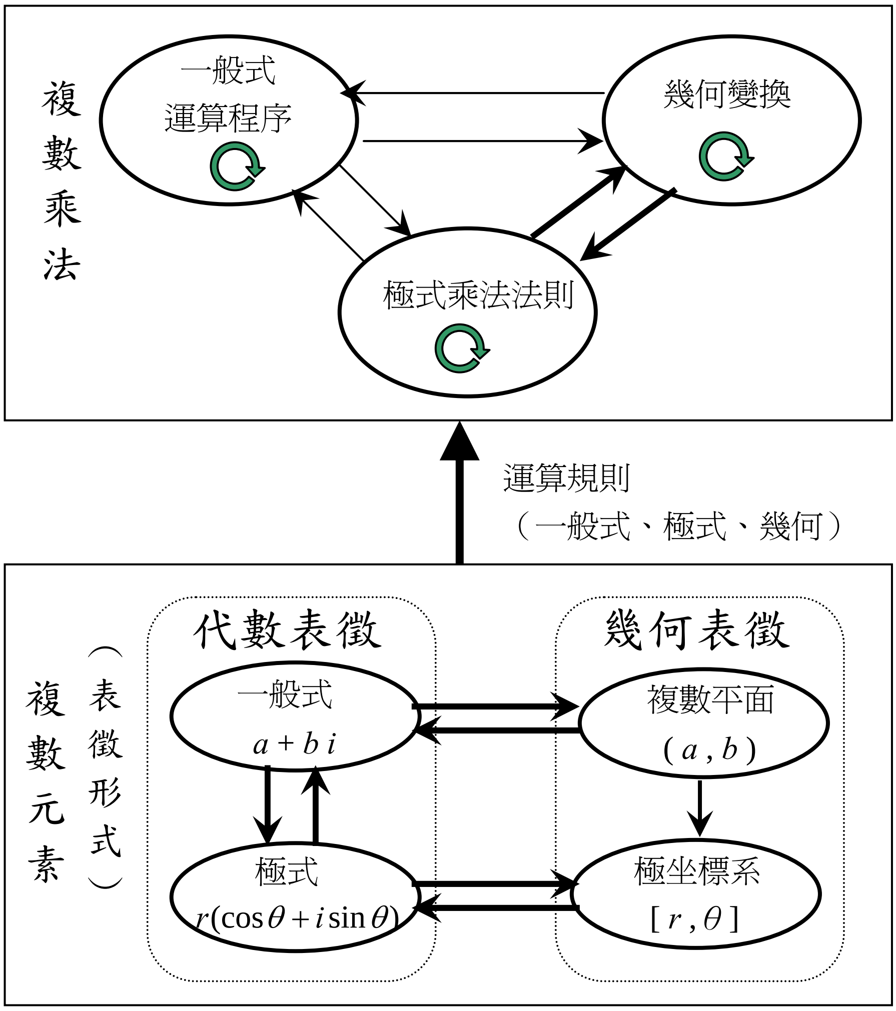
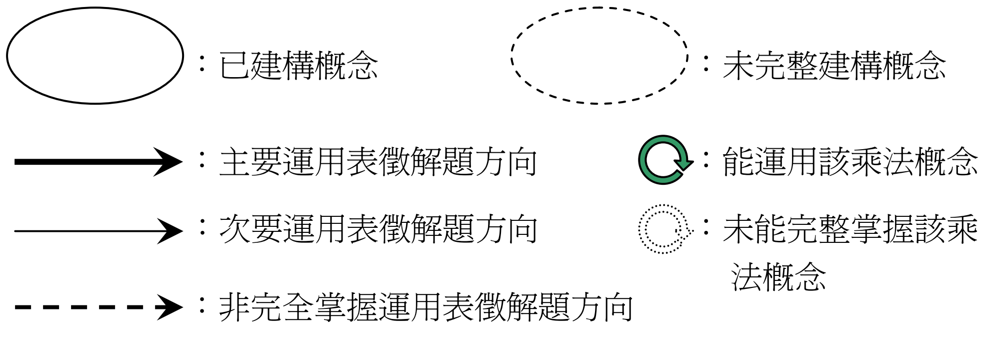


圖 29 表徵整合型樣本之概念結構與解題策略關係圖

註：各類概念結構與解題策略之模型圖例說明：



表徵整合型樣本之特徵爲：

1.均能使用幾何變換、極式乘法法則及一般式運算程序之複數乘法概念。

2.主要解題策略，爲幾何變換表徵之內轉換，及極式乘法法則表徵之內轉換。另外較常進行極式運算規則與幾何變換之間的表徵轉移。

3.次要解題策略，爲一般式運算程序與幾何變換之間相互轉移模式，及一般式運算程序與極式乘法法則之間相互轉換模式。

4. 面對屬於複數元素（表徵形式）的題目時，在一般式、極式、複數平面、極坐標系之間均可進行轉換轉移。

表徵整合型學生已經建構複數乘法的一般式運算程序、極式乘法法則與幾何變換三種概念，同時在解題策略上能夠靈活運用各種概念，並且能夠整合各種概念與表徵，選取及組合出合適的解題方式，以精緻、靈活、快速的流程來處理複數乘法問題。靈活豐富型主要以極式運算規則與幾何變換方式來處理問題，輔以一般式運算規則，可以看出這類學生均以過程概念(Procept)來處理問題，較少使用程序步驟(Procedure)與過程(Process)。這是教學者期望學生能夠達成的複數乘法概念與解題策略的境界。

（二）表徵轉移情境型

此類型學生概念結構爲表徵轉移型，解題策略爲情境型。其關係圖如圖 30。

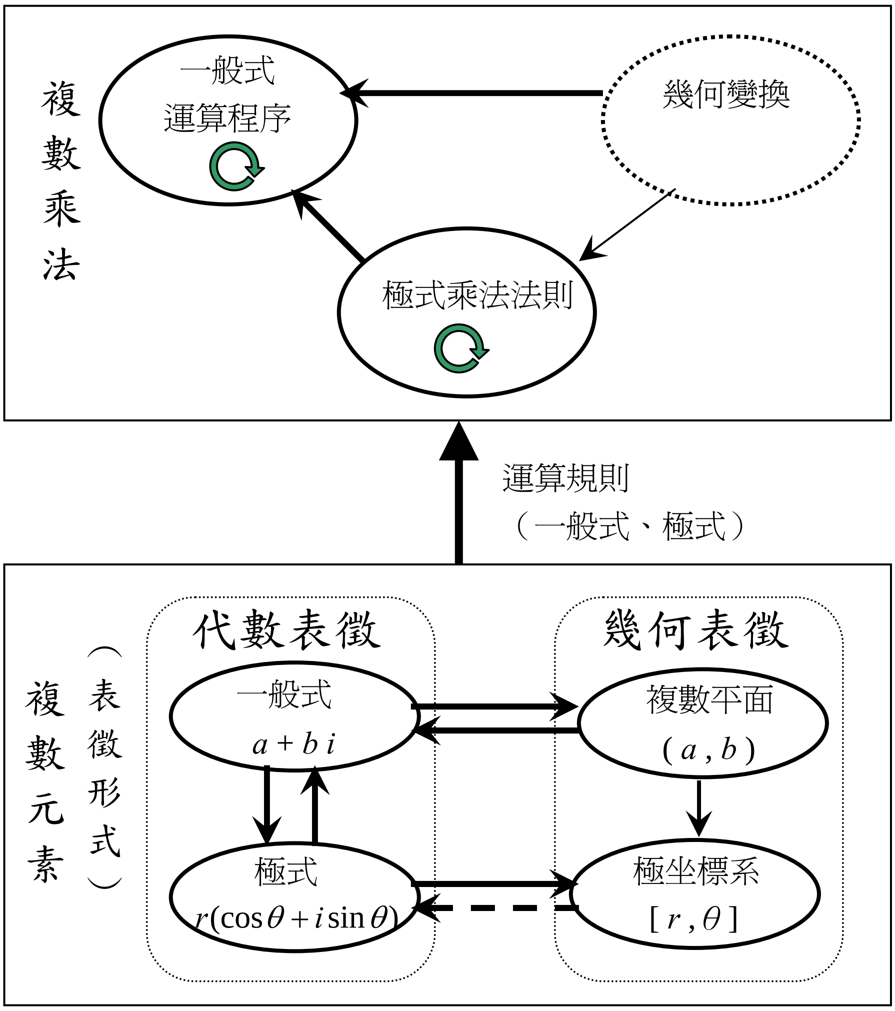


圖 30 表徵轉移情境型樣本之概念結構與解題策略關係圖

表徵轉移情境型樣本之特徵爲：

1.能使用極式乘法法則，及一般式運算程序，但未出現幾何變換之使用情形。

2.主要解題策略，包括使用極式乘法法則及一般式運算程序，另外傾向於將幾何變換轉移爲一般式運算程序，及將極式乘法法則轉換爲一般式運算程序。

3.次要解題策略，是將幾何變換題型轉移爲極式乘法法則來處理。

4.面對屬於複數元素（表徵形式）的題目時，將極式之代數表徵以極坐標方式繪於複數平面上之表現較弱。其他方向的轉換轉移則可以掌握。

表徵轉移情境型學生與表徵整合型之差別在於其幾何變換概念是相當模糊的，無法作爲解題方式，所以解題策略上會將幾何變換題目轉移爲另外兩種複數乘法處理方式，而且是依據題意或樣本個人喜好來選擇採用極式乘法法則或是一般式運算規則。建議在教學上，利用幾何變換圖形比對極式乘法的動作，利用動態鍊結多重表徵方式來協助學生建立幾何變換的概念。

（三）表徵轉移機械型

此類型學生概念結構爲表徵轉移型，解題策略爲機械型。其關係圖如圖 31：

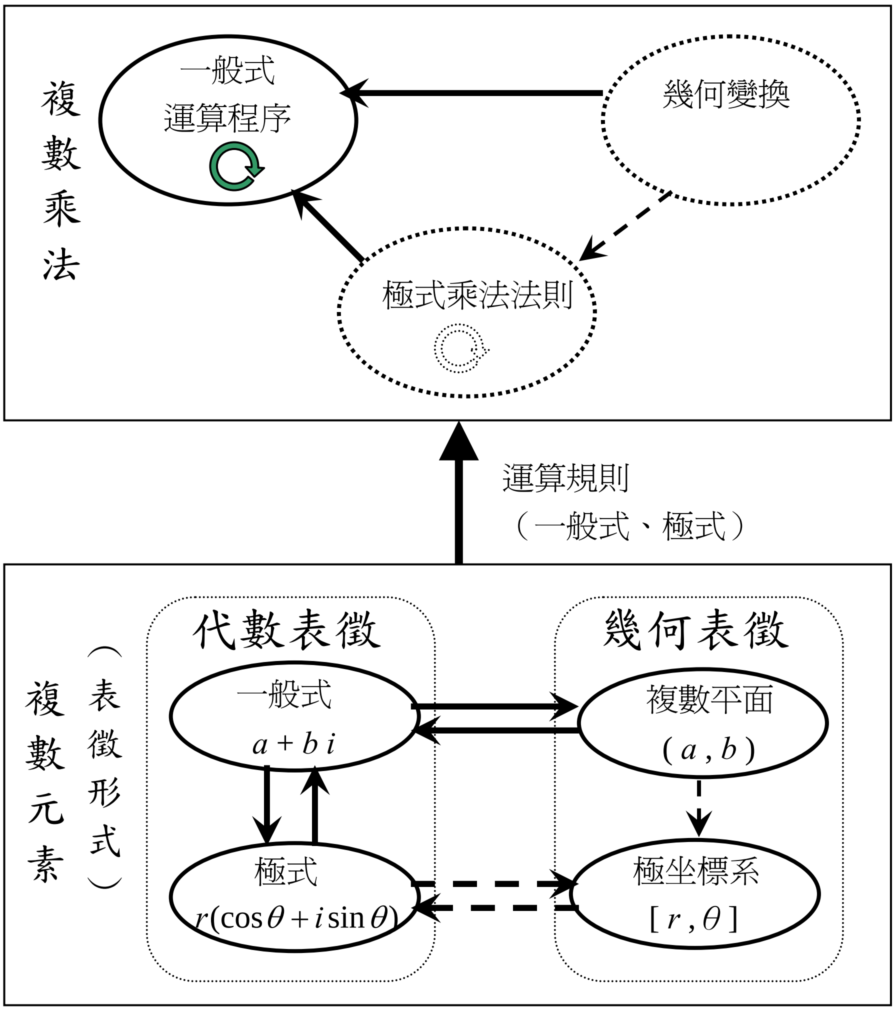


圖 31 表徵轉移機械型樣本之概念結構與解題策略關係圖

表徵轉移機械型樣本之特徵爲：

1.可以使用一般式運算程序，但未出現幾何變換之使用情形。極式乘法法則並未在合適時機使用，但偶而會出現極式乘法之解法。

2.主要解題策略，傾向於將幾何變換題目轉移爲一般式運算程序，以及將極式乘法法則轉換爲一般式運算程序。

3.幾何變換轉移爲極式乘法法則之解題策略很少出現。

4.面對屬於複數元素（表徵形式）的題目時，很少出現極坐標系與其他部分之間相互轉換轉移。可以掌握其他方向的轉換轉移。

表徵轉移機械型學生與表徵轉移情境型之差別，在於表徵轉移機械型學生之極式乘法法則概念的使用時機，未在合適的題目上使用。解題策略上傾向於將幾何變換題目轉移爲一般式運算程序來處理，以及極式乘法題目轉換爲一般式運算程序來處理，但在某些圖形題上偶會使用極式乘法法則來解題。建議在教學上，利用複數平面與極坐標系輔助說明極式的代數與幾何性質，以及絕對值與輻角的

角色；其次在代數表徵上著重練習極式乘法法則之運用，在幾何表徵上以圖形呈現極式乘法的幾何動作與幾何意義，來協助學生建立極式乘法法則概念與幾何變換的概念。

（四）單一表徵機械型

此類型學生概念結構爲單一表徵型，解題策略爲機械型。此類學生之概念結構與解題策略關係圖如圖 32：

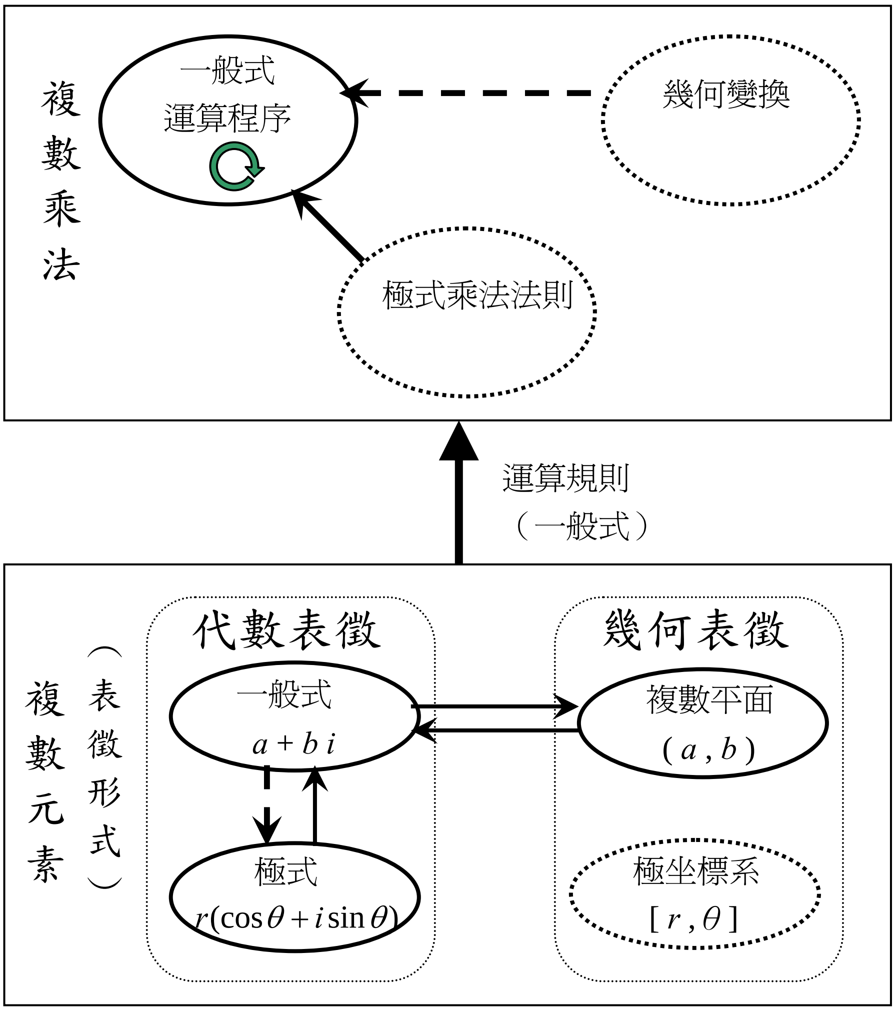


圖 32 單一表徵機械型樣本之概念結構與解題策略關係圖

單一表徵機械型樣本之特徵爲：

1.可以使用一般式運算程序，但未出現極式乘法法則，也未出現幾何變換之使用情形。

2.主要解題策略，傾向於將極式乘法法則轉換爲一般式運算程序。幾何變換轉移爲一般式運算程序較少運用。並無將幾何變換表徵轉移爲極式乘法法則表徵之處理方式。

3.面對屬於複數元素（表徵形式）的題目時，無法從極坐標系擷取絕對值與輻角以轉移爲極式表徵，而使用一般式時很少有轉換爲極式的使用情形，約 2/3 的樣本可以將極式轉換爲一般式。大部分樣本可將一般式繪於複數平面上，也可從複數平面上之點取得複數一般式表徵。

單一表徵機械型學生與表徵轉移機械型之差別在於無極式乘法法則概念之使用。解題策略上傾向於將極式乘法題目轉換爲一般式運算程序來處理，較少學生可以將幾何變換題目轉移爲一般式運算程序來處理。在教學上，首要目標是協助學生建立極式的概念，所以如同表徵轉移機械型學生的教學建議，利用複數平面與極坐標系輔助說明極式的代數與幾何性質，並且強化絕對值與輻角的概念，建立極式與一般式的轉換、極式與圖形的轉移能力；其次在代數表徵上著重練習極式乘法法則之運用，協助學生建立極式乘法法則概念。視情況輔助圖形表徵，以利建立幾何變換概念。

（五）單一表徵受限型

此類型學生概念結構爲單一表徵型，解題策略爲受限型。此類學生之概念結構與解題策略關係圖如圖 33。

單一表徵受限型樣本之特徵爲：

1.可以使用一般式運算程序，但未出現極式乘法法則，也未出現幾何變換之使用情形。

2.主要解題策略爲一般式運算程序。其他表徵形式均無法處理。

3.面對屬於複數元素（表徵形式）的題目時，無法從極坐標系擷取絕對值與輻角以形成極式表徵，一般式表徵與極式表徵無法相互轉換。約不到 1/3 的樣本能將一般式繪於複數平面上，或從複數平面上之點取得複數一般式表徵。

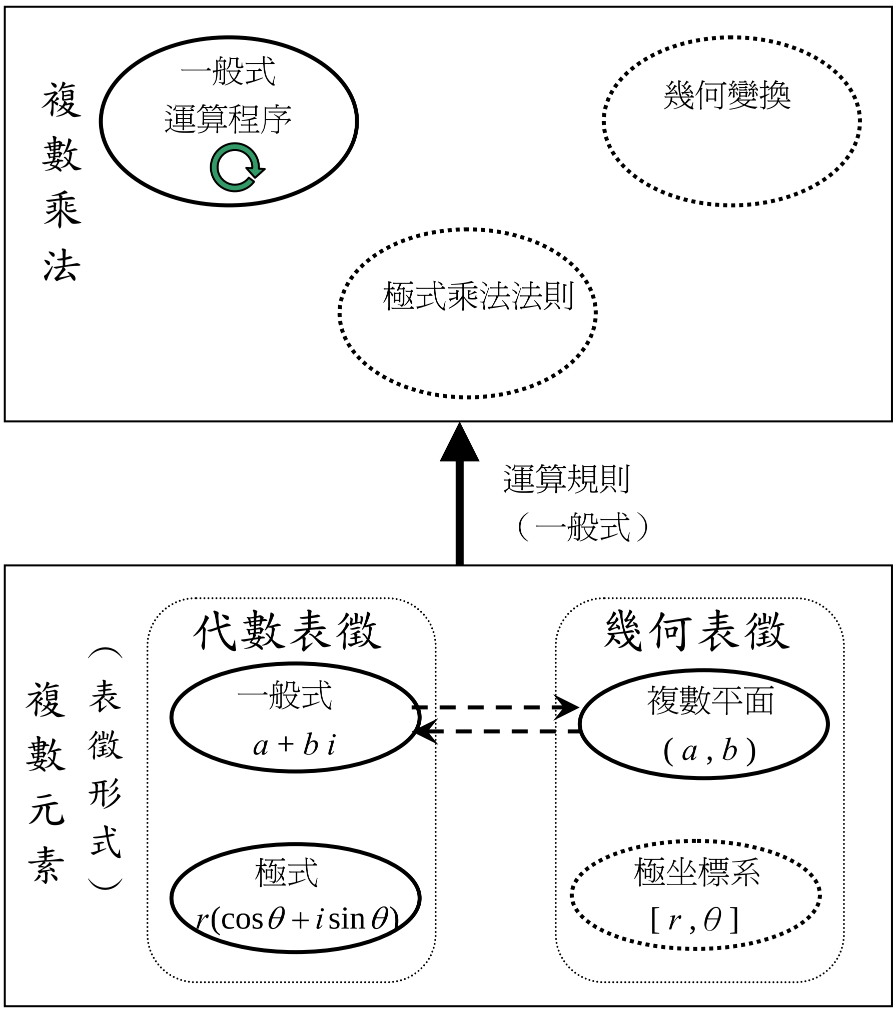


圖 33 單一表徵受限型樣本之概念結構與解題策略關係圖

單一表徵受限型學生與單一表徵機械型之差別在於只能使用一般式運算程序，無法將極式利用三角函數概念轉換爲一般式。解題策略上只能處理一般式運算程序，無法處理極式乘法法則與幾何變換。此類學生的複數乘法概念僅有基礎一般式乘法，在教學上的首要目標是教授學生三角函數的概念，以及極式表徵與絕對值、輻角之概念，使其能從代數運算上及幾何圖形上建構極式的基本概念。其次是導入極式乘法的概念與運作模式，最後視情況引入幾何圖形說明幾何變換。如此逐步讓此類型學生慢慢建構出較高層次的複數乘法的過程概念。

第肆章　複數乘法之動態視窗學習環境設計

本研究之第二個研究議題爲：應用電腦動態幾何軟體，設計複數乘法的學習環境，並探討教學成效。本章先就設計複數乘法的動態視窗學習環境部分，說明設計理念、設計方法與設計結果。學習環境的設計關係圖如圖 34（摘自左台益，2002）。

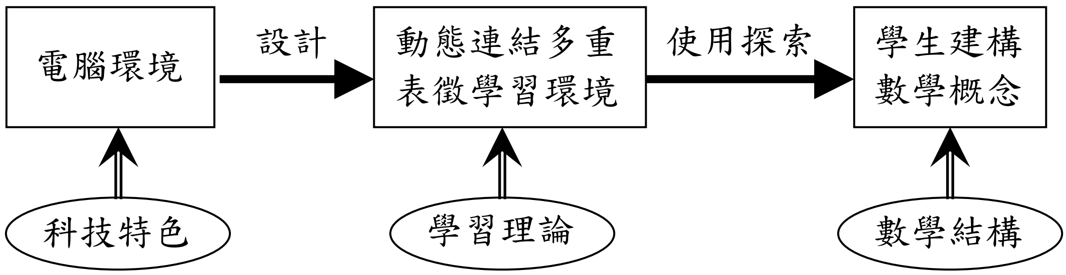


圖 34 設計學習環境之關係圖

第一節　設計理念

我們從教學實務與科技特色兩個面向，來分析設計理念。

一、教學實務

設計複數乘法的動態視窗學習環境，最主要的目的就是教學，要達成學生藉由此環境學習複數乘法之數學知識的目標。在教學實務上，從學習理論的數學概念抽象結構、外部表徵傳遞訊息、建立內在表徵，以及 Tso 提出動態連結多重表徵環境提供訊息與操作進行反思行動等等面向，設計學習環境可考量下列功能：

（一）符合教學內容：設計學習環境的目的，在使學習者能夠藉由此環境學習複數乘法的知識。故本研究設計之學習環境之教學內容，應以複數乘法的概念結構爲基礎，包含複數基本性質、一般式運算程序、極式乘法法則與幾何變換等等數學結構爲主要內容。不論是配合傳統教學而設計的輔助環境，或是單獨進行的電腦教學課程，都應該有主軸的課程來進行教學流程。若讓使用者漫無目的地操作此環境，能夠產生反思行動的機會較少。

（二）傳遞數學知識：任何具備教學或學習功能的工具，都以傳遞數學知識爲目標。設計者將需要傳授予使用者的數學知識，設計利用環境中各種表徵的呈現，經由合適的時機與流程提供使用者獲取數學知識的訊息。

（三）建構數學概念：使用者在操作此環境時，藉由觀察以獲得訊息，藉由操作以反思，可經由這些過程來建構新的數學概念（個體內在表徵）。所以設計此種環境時，除了以各種表徵傳遞主要數學訊息之外，可安排互動的方式，讓使用者從環境中藉由操作得到回饋的訊息；而不是只呈現靜態的圖片或文字，讓使用者只能觀察而已。

二、科技特色

由於電腦環境是現代科技的重要角色，所以要利用電腦軟體設計學習環境，應該凸顯科技的特色，達到教學或輔助教學的目的，彌補傳統教學的困境。利用電腦設計複數乘法的動態視窗學習環境，可考量下面三點特色：

（一）動態：傳統的學習環境，大多是在教室內的黑板上呈現文字或圖像，不容易有「動態」的效果。依 Mariotti 所提出，動態幾何環境包含工具與記號，爲包含時間與空間的環境。操作環境及各元件即爲工具，呈現的圖形與文字即爲記號。使用動態幾何軟體，則可以透過滑鼠或鍵盤的操作，改變電腦環境中的元件，而部分元件仍可維持預設的數學性質，如同符號仲介者，傳遞訊息予學習者。在改變中使用者可以觀察到前後圖像或文字的變化，進而從差異與不變的動態效果比對出此環境所要傳遞的數學知識。如果動態的呈現能單純化地傳達少量的數學知識，可讓使用者容易觀察與學習。

（二）連結多重表徵：視窗環境有利於設計多重表徵的環境，然而傳統教室環境也可以呈現多重表徵，故電腦視窗環境可以設計「連結」多重表徵的功能。連結多重表徵的呈現是提供使用者學習表徵轉換與轉移的因素。以複數乘法的數學結構爲例，在電腦環境中設計複數平面上一點與複數一般式的連結、極坐標平面上一點與複數極式的連結、極式乘法的代數表徵與幾何變換的幾何表徵之連結，還有複數極式乘以複數極式與乘積結果之連結等等。連結的呈現也可以從三個方向來設計：

1.同時呈現：當使用者點選幾何表徵時，同時呈現代數表徵。反之亦同。

2.同時變動：利用動態的效果設計，當幾何表徵改變時，其代數表徵同時改變。或者是在兩極式的乘積中，改變其中一個極式時，乘積結果會跟著改變。同理也可以運用於幾何變換上。由此對應性質可以顯示動態連結多重表徵的效果。

3.因果關係：當使用者觀察並瞭解某些操作所蘊含的意義，則進行該操作所出現的結果，會與此操作產生連結。例如畫面上顯示複數平面上兩個複數點，另有一些文字顯示兩極式的乘法，而按下此文字會開始進行複數平面上複數點的旋轉與伸縮動作，則此幾何動作會與文字產生連結。再配合教學者的說明，能讓使用者觀察到合適的連結關係。

（三）互動：雖然電腦學習環境與使用者的互動，現階段不易做到如同兩人對話或教學的程度，但是可以設計學習環境對於使用者合適的操作而呈現相對的回應。前述的動態連結多重表徵的功能，即爲環境與使用者互動的方式。環境中可以安排一些功能按鍵或文字，當使用者按下按鈕或改變文字時，能夠達成部分的功能或動作。如果使用者以有目的的方式操作，這些合適的回應，都可能提供使用者反思行動的過程。

第二節　設計方法

源於前述的設計理念，我們接著找出使用何種工具來進行設計動態視窗學習環境，以及所要設計的內容爲何。下面就設計工具與教學內容兩個部分來說明。

一、設計工具

我們發現在各種動態幾何環境中，GeoGebra 具有可以呈現複數代數表徵（一般式、極坐標）與幾何表徵（複數平面）的性質，同時可以結合網頁元件作爲操控與顯示環境（網頁可顯示代數表徵），也可以形成網頁學習環境作爲電腦環境教學或在校外透過電腦上網學習，故本研究選擇以 GeoGebra 爲主、JavaScript 語法與網頁元件爲輔，來設計使用於複數乘法的動態連結多重表徵之學習環境。

利用 GeoGebra 設計與製作學習網頁，GeoGebra 環境與輸出網頁兩者之關係如圖 35。設計 GeoGebra 成品之後，輸出爲網頁，則 GeoGebra 成品會內嵌在網頁中。而網頁的其他部分可利用網頁編輯軟體增加其他網頁元件（按鈕、輸入框、滑鼠事件）。網頁元件可以透過 JavaScript 語法來操控 GeoGebra 元件或取得 GeoGebra 元件的資訊。如圖 36。

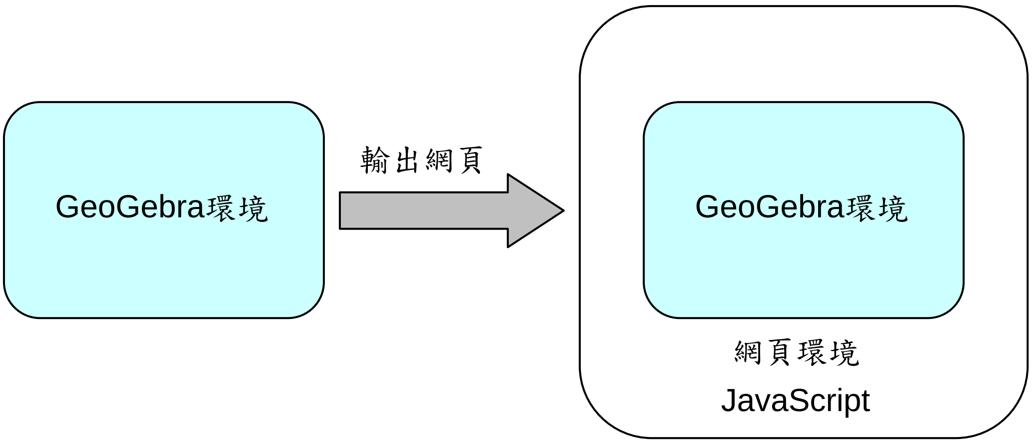


圖 35　GeoGebra 學習網頁與 JavaScript 關係圖

圖 36　JavaScript 操控 GeoGebra 關係圖

網頁元件透過 JavaScript 語法操控 GeoGebra 內元件，較常用的網頁元件有

按鈕與輸入框兩種。在設計學習網頁時，可以進行以下的功能：

（一）按鈕的功能：

1.GeoGebra 中元件的動作開始與停止。

2.設定 GeoGebra 中變數數值、取得變數數值、計算。

3.使 GeoGebra 中元件顯示或消失。

4.其他網頁或 JavaScript 功能。

（二）輸入框的功能：

1.顯示文字、數值與代數式。

2.輸入文字或數值，提供網頁或 GeoGebra 環境使用。

在 JavaScript 之中，可以編寫與數學相關的計算或動作函式(function)，可以彌補 GeoGebra 在動作、計算與邏輯判斷上不足的功能。在呈現代數表徵與幾何表徵上，以及呈現兩者的連結上，GeoGebra 與 JavaScript 可說是相輔相成。

在動態的設計方面，在 GeoGebra 中使用者可以使用滑鼠拖曳複數平面上的複數點，其跟隨點的一般式可以直接改變，呈現複數點目前所在位置代表的複數一般式；極坐標亦同，如圖 37。另外 GeoGebra 可以呈現角度的旋轉、線段的伸長與縮短；JavaScript 可以取得 GeoGebra 的資料來顯示數值與代數表徵，這些都可作爲設計動態連結多重表徵的環境元件。由於目前尚未有動態幾何軟體可以直接呈現「複數極式」的代數表徵，故在 GeoGebra 中選擇以極坐標來表示，並在教學進行中必須說明以極坐標形式來代表極式表徵，但在數學領域仍需書寫極式表徵，避免學生誤解。

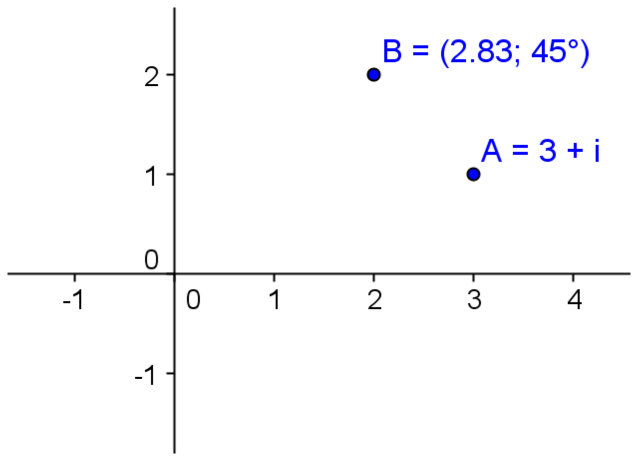


圖 37　GeoGebra 環境中呈現複數點的一般式與極坐標

二、教學內容

設計的複數乘法學習環境，主要在協助學生建構複數乘法的概念，並同時解決學生的困難。然而此環境的科技特色爲動態連結多重表徵與互動，並非訓練使

用者進行代數表徵運算，故設計的內容應著重於呈現複數或複數乘法的幾何表徵，並與代數表徵進行連結；以及使用「動態」的效果，一方面呈現複數乘法不同表徵間的動態連結，一方面提供表徵轉換轉移的示範。

從第參章的研究結果與發現，瞭解高中學生對於複數乘法的概念結構與解題策略之關係，可分為五種類型；並且發現這五類學生的差異與困難點，歸納出學生學習複數乘法的關鍵因素：

（一）先備知識方面：三角函數、極式的關鍵元素（絕對值、輻角）。

（二）表徵方面：(1)極式的代數表徵。(2)複數在複數平面上的幾何意義。(3)各種複數乘法表徵之間的轉換轉移。(4)「極式乘法的代數表徵轉換」與「幾何變換的幾何表徵轉換」之間的連結。

在設計視窗教學環境時考量上述的關鍵因素，將之安排在適當的視窗環境中。依據複數乘法的課程綱要與教學內容，將複數乘法學習環境的教學目標區分為六個單元，每個單元都訂定出一個教學目標。此六個單元為：（一）一般式轉極式；（二）極式轉一般式；（三）一般式乘積；（四）極式乘法；（五）極式除法；（六）棣美弗定理。依據雙向細目表分析此六個單元的歸屬如表 9。

表 9 六個單元的學習環境其功能在雙向細目表的歸屬

表徵轉移轉換 / 數學結構	代數轉代數	代數轉幾何	幾何轉代數	幾何轉幾何
複數基本性質		1 一般式轉極式 2 極式轉一般式	1 一般式轉極式 2 極式轉一般式	
一般式運算程序	3 一般式乘積			
極式乘法法則		4 極式乘法 5 極式除法	4 極式乘法 5 極式除法	4 極式乘法 5 極式除法
幾何變換		4 極式乘法 5 極式除法 6 棣美弗定理	4 極式乘法 5 極式除法 6 棣美弗定理	4 極式乘法 5 極式除法 6 棣美弗定理

以下訂定六個單元的教學綱要與目標，作為利用動態幾何軟體來設計複數乘法的視窗學習環境之教學內容設計的基準。

（一）一般式轉極式：此單元利用複數平面上的點，來連結複數一般式，教導如

何在圖形上找出絕對值與輻角，以形成極式表徵，並引導出代數計算方式。目標為使用者能將複數一般式轉換為極式。

（二）極式轉一般式：此單元利用複數平面上的點，來連結複數極式，並教導如何在圖形上找出實部與虛部，以形成一般式表徵，並引導出代數計算方式。目標為使用者能將複數極式轉換為一般式。

（三）一般式乘積：一般式運算程序以代數運算為主，故首先呈現一般代數運算模式。經由此代數運算方式，驗證在複數平面上的兩個複數點乘積的位置。以為下一單元極式乘法的幾何意義作鋪路。

（四）極式乘法：經由一般式乘積單元所得到的兩複數的乘積位置，驗證極式乘法公式確實成立（並非以代數表徵證明）。本單元為複數乘法的核心部分，要呈現兩複數極式乘積（輻角相加、絕對值相乘）的幾何意義（旋轉與伸縮），並從動態呈現的形式來設計。目標為學習者可以瞭解極式乘法法則的代數計算模式，以及與幾何變換的連結關係。

（五）極式除法：從說明除以一個複數是乘以該複數的倒數出發，引導出兩極式除法符合輻角相減、絕對值相除的代數計算模式。與極式乘法單元相同地呈現動態的旋轉與伸縮效果。目標為學習者可以瞭解兩極式除法的的代數表徵與幾何表徵的轉換轉移。

（六）棣美弗定理：此單元為極式乘法的推廣應用。從相似三角形出發，以幾何表徵來呈現複數的 n 次方，並嘗試處理複數的 n 次方根的問題。目標為使用者能透過幾何圖形來處理複數 n 次方及 n 次方根的問題，並能與棣美弗定理的代數表徵作連結。

第三節　設計結果

利用 GeoGebra 與網頁 JavaScript 語法為工具，複數乘法六個單元教學目標為基礎，設計出六個動態視窗的學習環境。以下就此學習環境與其特色作說明。

一、複數乘法的動態視窗學習環境

依據複數乘法教學的六個單元教學目標，各設計出一個網頁型態的學習環境。此六個視窗學習環境之命名與單元名稱相同，依序為：（一）一般式轉極式；（二）極式轉一般式；（三）一般式乘積；（四）極式乘法；（五）極式除法；（六）棣美弗定理。網址請參考附錄四。以下說明此六個視窗學習環境。

（一）一般式轉極式

本網頁為複數乘法的啓始網頁，主要功能在介紹複數的絕對值與輻角（代數表徵與幾何表徵），進一步引導出如何將將複數一般式轉換為極式，在數學結構上屬於複數基本性質，為複數乘法的先備知識。網頁如圖 38。

1一般式轉極式

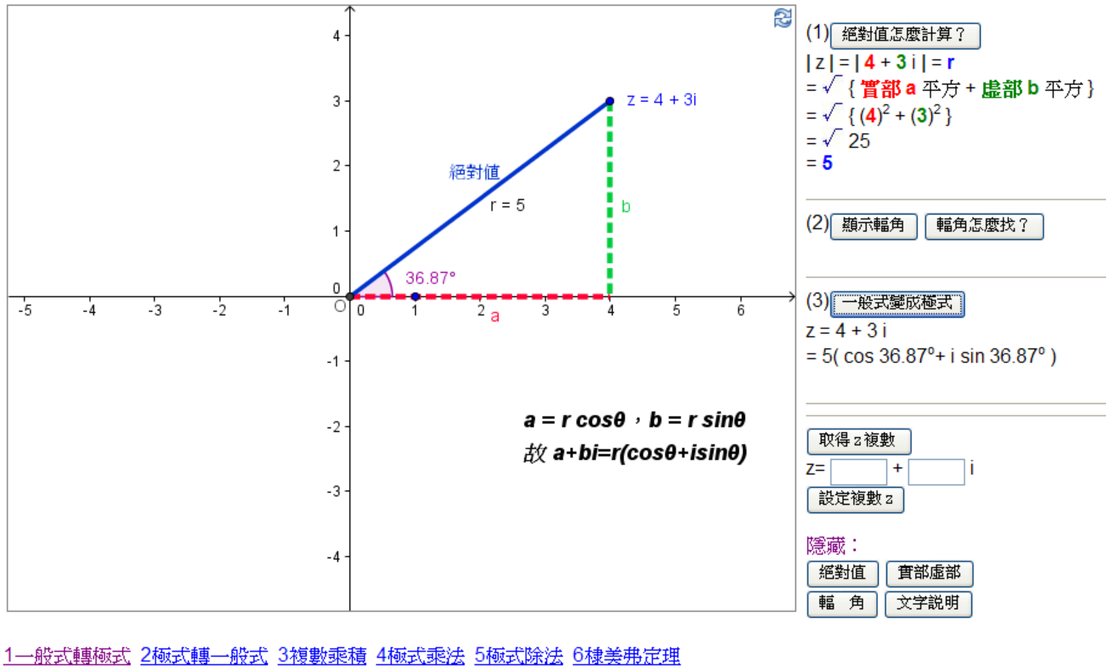


圖 38 複數乘法之動態視窗學習環境（一）一般式轉極式

在本網頁中有三個部分使用動態連結多重表徵的呈現方式：

1.在網頁右側出現「絕對值怎麼計算？」的代數示意式後，對其上的「實部 a」按下滑鼠左鍵，則左側的 GeoGebra 之複數平面區會出現對應的複數實部，並以相同的紅色來呈現。同理「虛部 b」也有此功能。而對絕對值「r」按下滑鼠左鍵後，會從原點慢慢地延伸出一個線段到複數點 z，表示爲原點到複數 z 的距離（均以藍色表示）。目的是藉由動態的延伸動作讓使用者瞭解絕對值的幾何意義，並經由操作建立代數表徵與幾何表徵的連結。

2.按下右側「顯示輻角」按鈕，會在複數平面中出現一個線段，一端點連結著原點，另一端點自 x 軸正向轉到複數點 z 所在位置。此功能之目的在讓使用者瞭解複數輻角的幾何意義。

3.按下右側「一般式變爲極式」按鈕，會在 GeoGebra 環境中出現一般式轉換爲極式的計算公式，並在右方出現目前複數點 z 的一般式轉換爲極式的結果。教學者可藉由說明來強調極式的兩個重要元素爲絕對值與輻角，可以透過複數平面幾何表徵來得到極式的代數表徵。

上述三項功能，在拉動 GeoGebra 複數平面上的複數點 z 之後，重新點選右方的功能，數值結果會隨著 z 的新位置而改變。如此可提供使用者試驗在不同複數的情況下來找尋絕對值、輻角與極式的共同模式，進而學習將一般式轉換爲極式的基本性質。另外可直接從幾何表徵中擷取極式的絕對值與輻角兩個主角，降

低極式代數表徵中三角函數讓學習者感受困難的影響程度。

（二）極式轉一般式

本網頁與前一網頁（一般式轉極式）作爲對應，主要功能在介紹如何將複數極式轉爲一般式。經由此兩學習環境的觀察與操作，期望使用者能夠掌握複數一般式與極式之間的轉換，並回想在複數平面上的幾何表徵呈現方式。如圖 39。

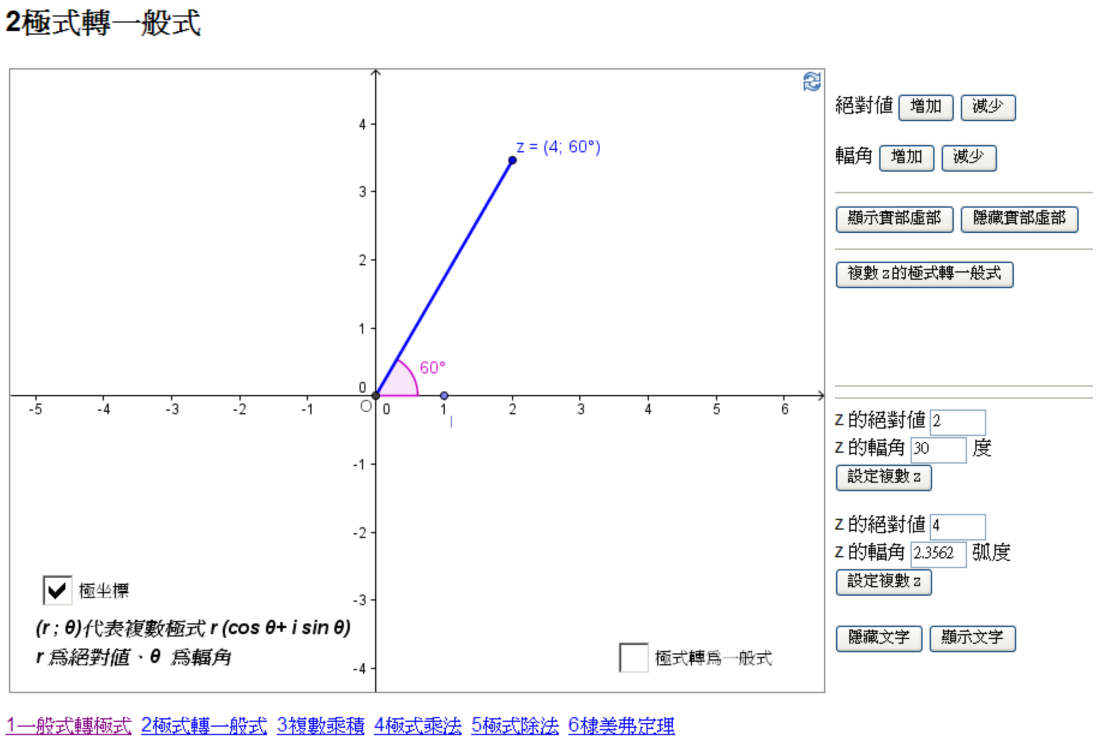


圖 39 複數乘法之動態視窗學習環境（二）極式轉一般式

此網頁設計與前一網頁類似，使用顏色作爲實部與虛部之連結方式。在教學一開始要說明以 GeoGebra 的極坐標格式（$r;\theta$）來代表複數的極式 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$，此爲電腦環境之功能限制。另外藉由詢問絕對值增加或減少時，複數點 z 會如何移動，以及輻角增加或減少時，複數點 z 會如何移動，按下按鈕呈現動態的結果，讓使用者觀察到複數點伸縮與旋轉的效果，是與絕對值及輻角有關，以作爲複數的極式乘法之幾何意義的預備動作。

（三）複數乘積

此網頁是以代數表徵爲主，幾何表徵爲輔助角色。主要是請學習者直接計算兩複數一般式的乘積，而以電腦計算模式來檢驗。視窗右方可以呈現兩複數點，經由分配律計算的過程與結果，表示一般式乘積的代數表徵。拉動複數平面上的 z 點或 w 點，則兩者乘積 P 點也會隨之變動（仍在 z 與 w 的乘積位置）。而「顯示絕對值」會在複數平面上出現 z、w 與乘積 P 的絕對值線段，讓使用者觀察三

者之間的關係，並提供使用者思考藉由幾何表徵連結到極式乘法的機會。網頁如圖 40。

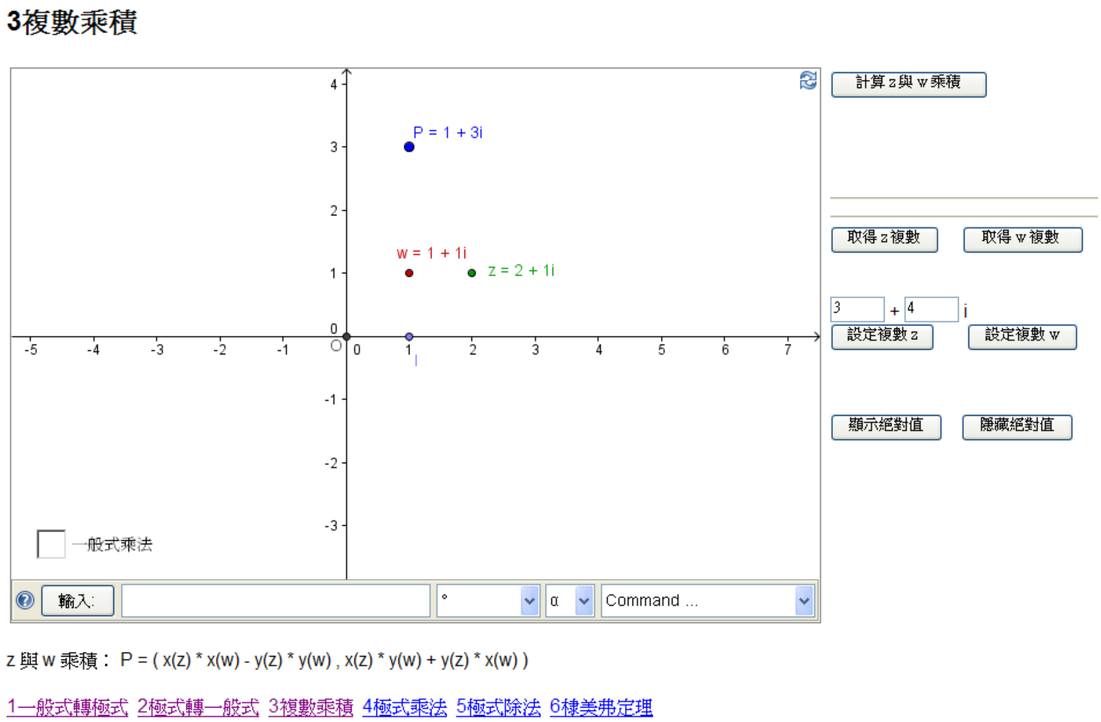


圖 40 複數乘法之動態視窗學習環境（三）複數乘積

（四）極式乘法

此網頁的主要目的是在呈現極式乘法在複數平面上的幾何動作，以及極式乘法的代數表徵與幾何變換的幾何表徵之間的連結。由前一網頁（複數乘積）所得到電腦計算兩複數乘法的乘積點，來找出兩極式乘法的乘積點位置，如圖 41。

在本網頁中有三個部分使用動態連結多重表徵的呈現方式：

1.點選「顯示旋轉」，則在複數平面上從複數點 w 開始，旋轉複數 z 的輻角角度，對應於極式乘法的代數表徵中兩輻角相加的部分。這是將「角度加法」與「旋轉增加」的動態連結。

2.接續旋轉動作之後，點選「顯示伸縮」，則在複數平面上從複數點 w 已旋轉後的位置開始，伸縮複數 z 的絕對值長度，對應於極式乘法的代數表徵中兩絕對值相乘的部分。此部分採用國中課程中的相似形的比例概念，來說明旋轉倍數即爲絕對值的大小，將「絕對值相乘」與「伸縮長度」做動態連結。

3.改變 z 或 w 的位置，則乘積 P 的位置隨之改變，亦可進行旋轉與伸縮動作，亦符合極式乘法的法則。就算 z 或 w 的的絕對值小於 1，或是輻角爲負角，仍可進行同樣的旋轉與伸縮動作，並不需要轉換爲除法。即以一種幾何變換概念可以用在所有的複數情況上。

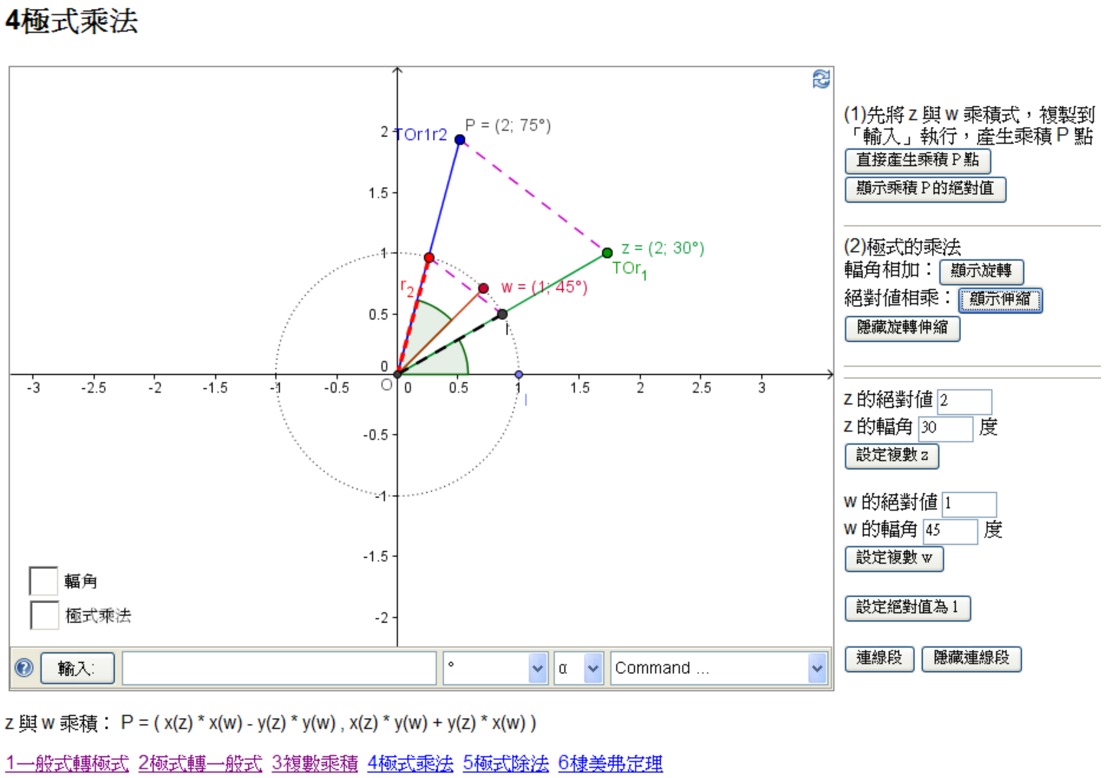


圖 41 複數乘法之動態視窗學習環境（四）極式乘法

旋轉與伸縮這兩個動作在為複數極式乘法描繪出複數平面上的幾何動作，並為極式乘法法則與幾何變換的關連作解釋。同時也在複數平面的幾何動作上，驗證了極式乘法公式中絕對值相乘、輻角相加的結果，而並不需要透過三角函數的代數證明。最終的目的，也期望使用者利用操作此環境建構極式乘法法則概念與幾何變換概念之後，可以整合兩種表徵並加以應用。

（五）極式除法

本網頁為前一網頁（極式乘法）的延伸推廣。不僅在代數表徵上除法為乘法的反運算，在幾何表徵上仍舊是旋轉與伸縮，也呈現反向動作。從單一複數 z 的極式倒數開始，進入 w 除以 z 的極式表徵關係式，同時在複數平面上呈現旋轉與伸縮的動作。如圖 42。

此網頁之動態連結多重表徵的設計，與極式乘法網頁相同。不同的是兩複數除法進行輻角相減，動態連結到反向旋轉分母複數的輻角；進行絕對值相除，動態連結到伸縮分母複數的的絕對值倒數倍數。期望使用者可以從代數表徵與幾何表徵的動態連結上，看出除法即為找出輻角差，及與原點距離（絕對值）之商兩個角色，立即形成商的極式表徵。

5極式除法

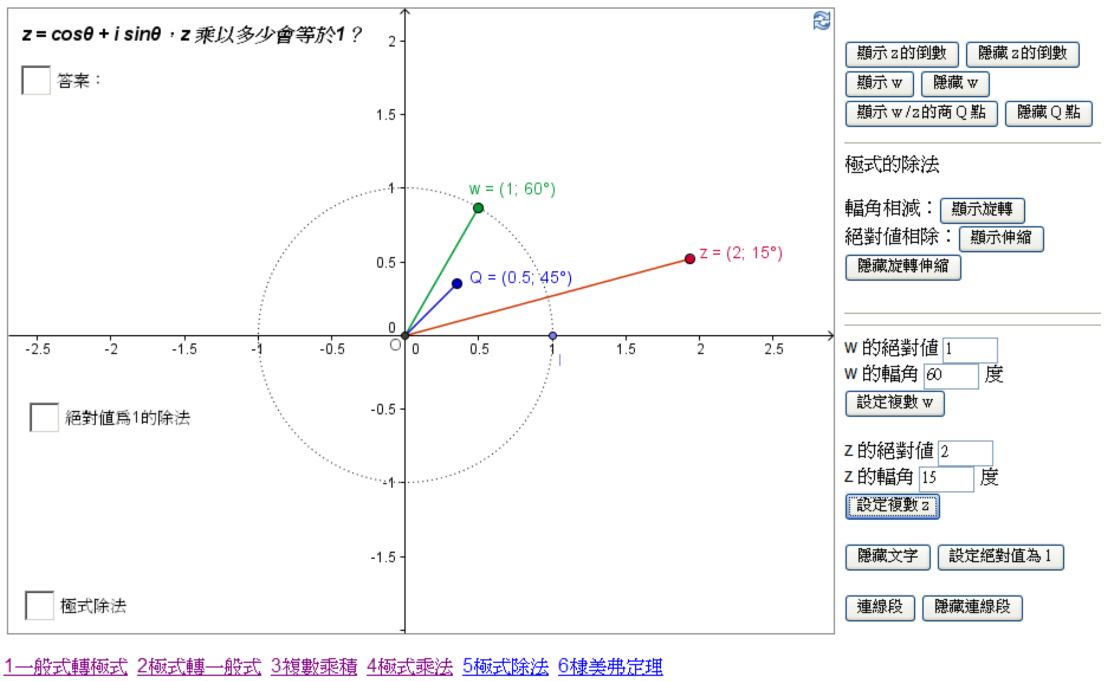


圖 42 複數乘法之動態視窗學習環境（五）極式除法

（六）棣美弗定理

6棣美弗定理

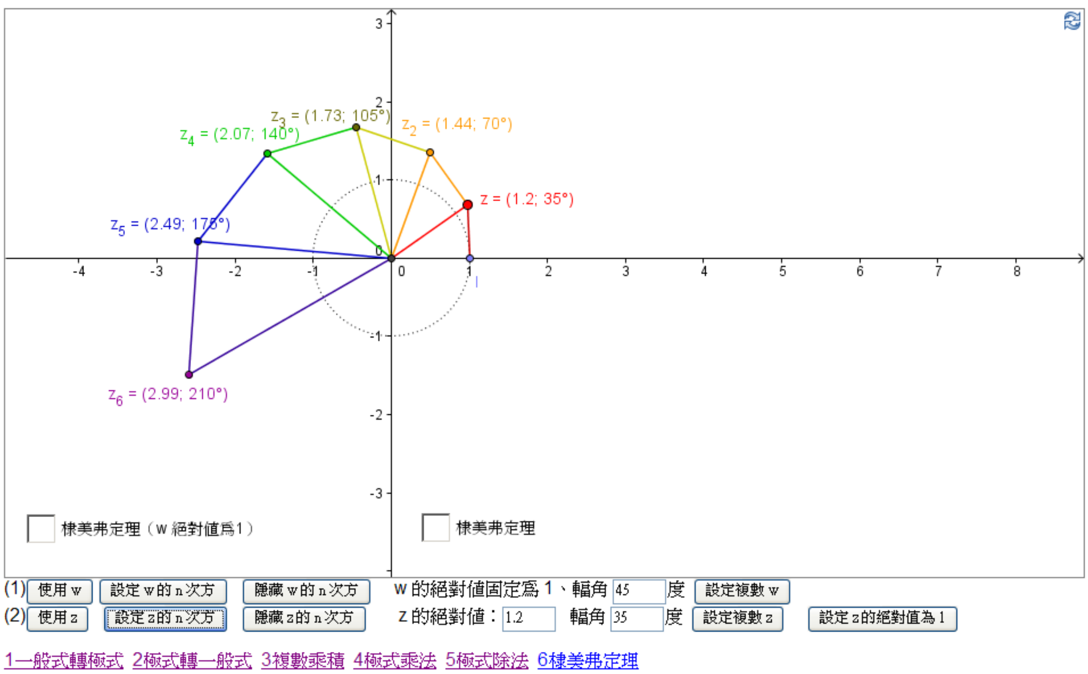


圖 43 複數乘法之動態視窗學習環境（六）棣美弗定理

本網頁內容爲極式乘法的代數性質推廣，並對複數平面上呈現複數的 n 次方

的複數點來進行連結。藉由前兩個網頁（複數乘法）所獲得的旋轉與伸縮概念，建構出複數的 n 次方在複數平面上爲連續建構相似三角形。這在動態幾何環境中稱爲迭代（iterate），類似遞迴概念的作圖法。由此使用者可以將代數的棣美弗定理，轉移到幾何的相似形，並且產生連結。反之在代數上計算複數的 n 次方根是較爲繁複的，使用者可藉由操作本網頁環境，從幾何的方向來找到 n 次方根，而且是 n 個 n 次方根，簡化計算的過程。網頁如圖 43。

本網頁使用動態連結多重表徵的功能有兩個部分：

1.不論控制絕對值爲 1（使用 w），或是開放絕對值不限制（使用 z），在按下「設定 w 的 n 次方」（或 z 的 n 次方），會利用相似三角形呈現 w（或 z）的平方，此處可以極式乘法的幾何動作來解釋。繼續按下同一按鈕，可以出現 w（或 z）的三次方、四次方、五次方，最高到六次方。此部分可從幾何圖形來解釋棣美弗定理的代數意義。

2.當 w（或 z）改變時，其 n 次方之複數位置會隨之改變。故期望複數 z 的 n 次方會等於一特定複數 α 時，即 z 爲 α 的 n 次方根，可藉由拖曳 z 點控制其 n 次方之複數位置到達 α 以獲得 z 之解，並嘗試尋找另一個符合的位置，而不以獲得一解即結束。至此可利用幾何性質作爲代數公式解的說明。

如此尋找 z 點的過程，是在棣美弗定理之幾何表徵下逆推複數的反思行動，這必須已統合複數乘法之代數表徵與幾何表徵才能運用。而使用者若已經建構複數乘法的幾何變換概念，則對棣美弗定理的幾何表徵應可容易地學習並整合代數表徵。而在使用者已將代數與幾何連結與統整的情況下，會比僅有代數公式概念更能靈活運用，面對問題會有更多的表徵可供運用。

二、學習環境的特色

（一）動態連結多重表徵性質

此爲本學習環境的特色，凸顯與傳統環境在功能上的差異。就以下幾點來說明：

1.具有呈現多重表徵的功能：同時呈現代數表徵與幾何表徵，並有對應的關係。可以適時出現計算公式的代數式，也可出現輔助的幾何圖形。

2.動態的效果：旋轉與伸縮是幾何的動態動作，而非僅是加法和乘法的計算而已。拖曳關鍵的複數點，可以使其他符合數學關係的複數點隨之變動，從中觀察到不變的數學性質。

3.具有動態連結的功能：在使用者改變代數表徵時，環境中對應的幾何表徵會隨之改變；同樣地改變幾何表徵時，環境中對應的代數表徵也會隨之改變。雖然部分動態連結功能需要使用者按下執行按鈕才有動作，達到動態連結的效果，但是經由使用者有目的的操作，亦可產生反思行動，協助使用者學習數學概念。傳統的環境可能一次只呈現靜態的代數表徵與幾何表徵，不容易直接改

變；要呈現動態的效果可能要作多次的替換動作，在動態上與連結上的效果與時效性有限。

4.時間差的效果：(1)利用時間差，來呈現乘法的動作，一步一步呈現旋轉與伸縮。(2)利用時間差，呈現乘積的結果，顯示出相乘兩複數與乘積的因果關係。

（二）視窗型環境

本研究由電腦視窗環境設計的學習網頁，具有下面幾點性質：

1.上網可操作：只要透過網路，可以連結到學習網頁。不需要安裝特定的軟體。操作元件也是學生熟悉的網頁物件。具有易進入、易操作、免費等特性。

2.單人可操作：使用者只要知道操作流程（操作過一次，或是操作手冊），即可自行操作，並不需要教學者必須在場進行教學。

3.離場可操作：就算不在學校的電腦教室裡，只要所在場所可以上網，或是得到本環境之電腦檔案，使用者仍可以進入本學習環境來操作，不限制在學校內才可以使用。

由上述幾點，可知本視窗環境，除了上手容易之外，亦具備遠距教學的功能。這也是現代科技應用於教學與學習的特色之一。

（三）教學內容

1.本環境依據設定的複數乘法教學內容來編排設計，循序漸進。進行到後面的學習網頁時，並不需要頻頻切換回前面的網頁來比對。若需要切換其他網頁，在每個網頁的下方有各網頁的連結，可利用電腦視窗環境的操作方式立即達成。

2.各網頁教學進行的內容與流程，均設計在網頁的右方（棣美弗定理是在網頁下方），由上而下依序排列操作元件或相關代數表徵。教學者或使用者可以依序進行教學或學習流程。

第伍章　動態視窗學習環境之教學實驗

本研究之第二個研究議題爲：應用電腦動態幾何軟體，設計複數乘法的學習環境，並探討教學成效。第肆章已說明基於動態連結多重表徵特色與學習理論設計出複數乘法的視窗學習環境，然而利用此學習環境進行教學的成效爲何？與傳統教學環境的成效有何差異？學生對於此種學習環境是接受還是排斥？以下就探討此種學習環境的教學成效，分別說明研究的方法、研究發現與討論。

第一節　研究方法

一、研究設計

由於本研究所設計的複數乘法之視窗學習環境，教學內容從複數基本性質、一般式演算程序到極式乘法與幾何變換，部分教學內容是爲了解決針對概念結構與解題策略之研究所得學生的關鍵點與困難處而設計，故要探討本研究設計出的學習環境之教學成效，則利用第一階段的診斷性問卷作爲前測工具，目的在統計分析受測學生的概念結構分佈情形；預期此學習環境能夠提升的學生之概念層級，設計出後測工具，目的在統計分析經過教學實驗的學生學習結果。而在探討視窗學習環境與傳統教學環境之教學成效差異方面，本研究選定實驗組樣本與對照組樣本，實驗組的學生進行本研究設計的複數乘法視窗學習環境教學，對照組則進行傳統環境教學；所有樣本均在教學前進行前測，教學後進行後測，教學進行中以學習單作輔助，比較此二種學習環境下，學生學習結果的差異。並從實驗組中以立意取樣方式隨機挑選數個樣本，針對前測、後測之作答情形與電腦學習環境之使用情形進行訪談。此第二階段關於視窗學習環境之教學成效研究流程請參考圖 44。

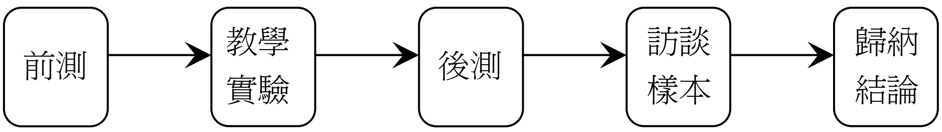


圖 44 動態視窗學習環境教學實驗之研究流程

由於採用第一階段的診斷性問卷作爲前測，並利用第一階段的研究結果來作爲第二階段分析的工具，故選擇的樣本同第一階段研究，爲學習過複數的一般式乘法與極式乘法的高中生。教學的內容並非僅針對尚未學習複數乘法的學生而設計，而是以本研究設計的學習環境爲範疇。

爲了明確地探討使用複數乘法學習環境的視窗學習環境中的學生之學習結果，與傳統教學環境中學生的學習結果有何不同，故可變變因僅爲學習環境之差異，其他方面的變因必須控制相同，包含教學的內容、教學的時間長短與進行的

程序，以及教學者均爲相同。實驗組與對照組的可變變因與控制變因如表 10。

表 10 第二階段實驗設計實驗組與對照組之可變變因與控制變因

可變變因	控制變因
實驗組（動態連結多重表徵視窗學習環境） 對照組（傳統教室黑板教學）	教學內容 教學時間 教授者

在實驗組與對照組的教學內容控制一致，同樣有六個單元：（一）一般式轉極式；（二）極式轉一般式；（三）一般式乘積；（四）極式乘法；（五）極式除法；（六）棣美弗定理。實驗組在電腦環境上所看到的教學內容，也必須呈現在控制組的傳統環境中。例如在第一與第二單元，電腦環境上呈現紅色或綠色線段，則傳統環境的黑板上也呈現紅色或綠色線段；第六單元電腦環境上呈現連續的相似三角形，則傳統環境的黑板上也繪出連續的相似三角形。各組的教學均爲研究者進行，務必求教學內容相同，控制差異僅在於環境這個因素。

二、研究樣本

由於本階段研究旨在探討高中學生進行本研究設計之視窗學習環境之教學成效，而所採用的前測工具是第一階段分析概念結構與解題策略的診斷性問卷，故研究樣本也選取已經學過複數乘法單元的高中學生；同時期盼研究樣本在不同的程度均有代表性，而且在進行測驗及訪談時，能夠適切並忠實地回答問題，此研究樣本必須不能經過程度篩選的分班，故此階段採立意取樣，選取北部某公立高中內兩班高二自然組學生，以及一班高三自然組學生作爲研究樣本。選取自然組的原因，與第一階段研究相同，自然組學生較能回應與表達其數學概念與思考歷程。

實驗組爲一班高二自然組學生，有效樣本 41 人，高一入學基測 PR 值範圍爲 65~78，實驗組代號爲 E。一班高三自然組學生爲對照組一，有效樣本 30 人，高一入學基測 PR 值範圍爲 65~82，對照組一代號爲 C1。另一班高二自然組學生爲對照組二，有效樣本 36 人，高一入學基測 PR 值範圍爲 68~77，對照組二代號爲 C2。此三組高一入學成績在全國考生中約屬於中等成績。該學校並未經過程度篩選，在其高一的數學平均成績上，低分至高分各程度均有，分佈平均。此三個班平時均爲筆者任教數學課。

對照組二與實驗組的背景、程度均相當，可以比較出教學實驗與傳統教學的成效差異。而另外選取高三自然組作爲對照組的原因，是依據動態連結多重表徵學習環境的設計理論，可以預期實驗組學生在概念建構上應有某些部分的提升；而本研究想瞭解此類學生學習成效與概念建構提升程度到何種範圍，故再選取高三學生作爲對照組，研究兩組之間的差異。此高三學生已經參加過大學入學考試

之學科能力測驗，在數學課程中曾經複習過複數一般式與極式的部分，不會因爲其距離高一學習時間過久而淡忘；反而可能因學習知識較多，經過複習與參與考試可能使其較能強化與統整複數乘法知識。

當實驗組後測完成，其所有樣本之前測、後測依概念結構分析圖形分類後，以立意取樣抽方式，在前測結果分類之表徵轉移機械型、單一表徵機械型與單一表徵受限型各隨機抽取一至二人，針對其前測作答情形、後測作答情形與使用電腦學習環境後之適應性等等因素進行訪談，樣本背景如表 11。

表 11 實驗組訪談樣本之背景

代號	性別	高一數學程度（以成績在班排名區分上中下）	前測之概念結構與解題策略分類
S10	女	中	單一表徵機械型
S11	女	上	表徵轉移機械型
S12	男	下	單一表徵受限型
S13	男	下	單一表徵受限型
S14	男	下	單一表徵機械型

三、研究工具

實驗組 E 與對照組 C1、C2 在教學前進行前測，教學後進行後測。實驗組另選取三名樣本進行訪談。實驗組與對照組，均設計相同的學習單（若部分內容因環境差異無法處理同一題目，則修改爲適合該環境之題目），在各自教學進行中配合使用。以下就前測與後測工具及訪談與學習單作說明。

（一）複數乘法教學之前測

利用第一階段的診斷性問卷，作爲第二階段教學實驗的前測題目，因爲第一階段診斷性問卷具有信度與效度，並且能夠整理分析學生的概念結構與解題策略之類型。而依據第一階段的測驗結果，將診斷性問卷題目作一些修改，再作爲前測問卷題目。

1.刪除診斷性問卷之「1(1) $i^2=$______」題目。依據第一階段統計結果，此題全部樣本均作答，答對率 96%，本題結果呈現「幾乎所有學生都瞭解 $i^2=-1$」的訊息，故在前測時不測驗此題。進行 Cronbach's Alpha 分析時，刪除本題提高 Alpha 係數 0.001，對整體信度影響不大。

2.調整部分題號順序，將較簡易、花費時間較少的題目集中於第一份試卷。

3.改變原第一階段診斷性問卷之第 6 題，(A)由 –2 改爲 –1，(B)由 $-3(\cos 330°+i\sin 330°)$ 改爲 $-2(\cos 330°+i\sin 330°)$，數值變小，並調整圖形作答區的大小，以方便受測者作答。

4.經專家建議在圖形上減少不必要的線段，減少判斷上的混淆與障礙。

其他題目則維持不變。如此整理得到前測題目仍為 14 題，如附錄五。分為第一份試卷與第二份試卷各一張。兩份試卷各使用 50 分鐘進行測驗。在進行整理與分析資料時時將兩份試卷合併處理。其雙向細目表如表 12，本測驗具有內容相關效度。前測題目亦經過專業研究人員鑑定，具有專家效度。在信度方面，在北部某公立高中以隨機方式選取高二自然組一班共 39 位學生進行測驗（此 39 位學生並非實驗組與對照組樣本），得到結果進行 SPSS 的 Cronbach's Alpha 信度分析（參考附錄六），得到 Alpha 係數均在 0.916 以上，顯示後測題目具有高度以上的信度。

表 12 第二階段研究前測之雙向細目表

表徵轉換 轉移 / 數學結構	代數轉代數	代數轉幾何	幾何轉代數	幾何轉幾何
複數基本性質	1(1)Ag→Ag 1(3)Ag→Ai	1(3)Ag→G 2(1)Ag→G 2(2)Ai→G 2(3)Ai→G	4(1)G→Ag 4(2)G→Ai	
一般式運算程序	1(2)Ag→Ag 1(4)Ai→Ag 14Ag→Ai	3Ag→G 10(1)Ai→Ag→G 10(2)Ai→Ag→G 10(3)Ai→Ag→G	6(2)G→Ag 9G→Ag	
極式乘法法則	1(4)Ai→Ai 14Ag→Ai	3Ai→G 8Ai→G 10(1)Ag→Ai→G 10(2)Ai→G 10(3)Ag→Ai→G	5G→Ag 6(2)G→Ag 9G→Ag	11G→G 13G→G
幾何變換		10(3)Ag→Ai→G 12Ai→G	5G→Ag 7(2)G→Ai 9G→Ag	6(1)G→G 7(1)(2)G→G 11G→G 12G→G

(二)複數乘法教學之後測

由第一階段複數乘法的概念結構與解題策略的研究結果，可以發現樣本對一般式運算程序的題目是百分之百可以作答，而後測的功能定位於診斷學生經過電腦的學習環境或傳統的教學環境後學習成效，預期經過教學之後，學生建立極式乘法法則概念或幾何變換概念應有所提升，故後測部分重新設計測驗題目。取消複數基本性質類題目，降低一般式運算程序類題目數量，維持極式乘法法則題目比例，提高幾何變換類題目比例。

題目的來源仍是源自於前測題目，將題型簡化，大部分題目單純測驗單一解題策略，並且符合教學進行的內容。如此設計出的後測題目共 10 題，如附錄七。

其雙向細目表如表 13，具有內容相關效度。

表 13 第二階段研究後測之雙向細目表

表徵轉換 轉移 / 數學結構	代數轉代數	代數轉幾何	幾何轉代數	幾何轉幾何
複數基本性質				
一般式運算程序		1 Ag→G	2 G→Ag	
極式乘法法則	3 Ai→Ai	1 Ai→G	2 G→Ai 4 G→Ai	6 G→G
幾何變換		1 Ai→G 8 Ag→G & Ai→G	2 G→Ai 5 G→Ai→Ag	7 G→G 9 G→G 10 G→G

後測題目亦經過專業研究人員鑑定，具有專家效度。在信度方面，在北部某公立高中以隨機方式在三個高三自然組班選取共 25 位學生進行測驗（此 25 位學生並非實驗組與對照組樣本），得到結果進行 SPSS 的 Cronbach’s Alpha 信度分析（參考附錄八），得到 Alpha 係數均在 0.86 以上，顯示後測題目具有中度以上的信度。

(三)實驗組樣本訪談

此部分訪談的目的，針對前測、後測之作答情形與電腦學習環境之使用情形進行訪談。詢問受訪樣本在前後測的差異、對於電腦的學習環境適應情形，以及在樣本心目中電腦學習環境與傳統學習環境的差異與個人喜好程度。故從樣本前測與後測作答情形爲開始問題，並詢問其對電腦環境的感受，採半結構式訪談。訪談中均全程錄音，錄音檔轉換成逐字稿作爲資訊來源之一。

(四)教學課程之學習單

學習單的設計目的有二：

1.輔助教學進行：學生在填寫學習單，一方面有專注學習的焦點，另一方面在對照學習環境與學習單的問題時，學生藉由操作或觀察環境來驗證學生心中的假設與澄清疑慮，可以進行反思行動，以學習新的知識。如果沒有學習單輔助，學生可能僅進行觀察或操作，產生問題而得到回饋的機會較少。

2.資料來源：學生在教學過程中填寫學習單，可能是從無到有而建構概念的過程紀錄。學習單亦可作爲資料蒐集與處理的來源之一。

然而學習單的設計，並非僅針對動態視窗環境所設計。由於本研究設定實驗組與對照組，分別進行視窗學習環境與傳統學習環境的教學，故學習單的設計應適用於兩種教學環境，亦即採用相同的學習單也是控制變因。然而在設計時實驗組的學習單有兩題的部分字樣是引導操作視窗學環境的用語，在對照組中的學習單改爲適合傳統環境的進行用語。其餘部分一模一樣，可參考附錄九。

學習單的內容亦配合教學進行的內容，每個單元呈現重點（在方框內），另外有對應教學流程的代數問題與幾何問題，每個單元結尾留下可供筆記部分。另外附簡易的三角函數値表，提供學生查詢。

四、研究過程、資料蒐集與處理

在取得實驗組 E 與對照組 C1、C2 所有樣本與導師、數學任課教師同意，並說明整個研究的進行流程後，預定舉行前測之前一週通知樣本測驗時間與測驗範圍，接著進行前測。前測完成後，依各組屬性進行電腦學習環境教學或傳統教學。教學完成後再進行後測。研究流程時間如表 14。

表 14 第二階段研究流程時間表

	實驗組 E	對照組 C1	對照組 C2
前測	98/04/07	98/04/13	98/05/20
教學	98/04/30	98/04/28	98/06/03
後測	98/05/01	98/04/30	98/06/06
訪談	98/05/07(S10、S11) 98/05/08(S12) 98/05/10(S13、S14)	無	無

前測資料與後測資料，均如同第一階段診斷性問卷資料處理方式，依據第一階段概念結構與解題策略分析圖形，將實驗組與兩個對照組的樣本各分爲五大類。在前測部分，比對前測題目之雙向細目表，依據第 5、6(1)、7(1)(2)、9、10(3)、11、12 等題之作答情形來判定樣本是否建構幾何變換概念；依據 1(4)、3、5、6(2)、8、9、10(1)(2)(3)、11、13、14 等題之作答情形來判定樣本是否建構極式乘法法則概念；依據 1(2)(4)、3、6(2)、9、10(1)(2)(3)、14 等題之作答情形來判定樣本是否建構一般式運算程序概念。同樣在後測部分，比對後測題目之雙向細目表，依據第 1、2、5、7、8、9、10 等題之作答情形來判定樣本是否建構幾何變換概念；依據 1、2、3、4、6 等題之作答情形來判定樣本是否建構極式乘法法則概念；依據 1 與 2 等題之作答情形來判定樣本是否建構一般式運算程序概念。

建立實驗組與對照組之前測、後測之類別與人數比例後，從以下幾個方式來比對分析資料：

1.比較各組之內，後測各類人數與前測各類人數之差異，可以看出各類型概念人

數提升程度。

2.比對實驗組與兩個對照組，其前測差異與後測差異，並從學生作答情形提出發現與討論，歸納出不同教學環境造成不同成效之結論。

從實驗組中接受訪談樣本之訪談逐字稿，來分析學生的概念使用情形、對於電腦學習環境之接受情形，以及比較電腦學習環境與傳統學習環境在受訪樣本心目中觀感之差異。其回答之內容即為研究結果的質性資料來源，亦可作為修改學習環境設計之意見與方針。比對同一樣本之前測、學習單與後測的作答資料，可以看出樣本在建構概念的流程，以及使用表徵的情形。

五、研究限制

（一）本研究設計複數乘法學習環境，是由研究者主觀分析教學內容，蒐集相關書籍與網路資料而設計出，其他研究者設計出之學習環境可能有所不同。若以不同的視窗學習環境來進行實驗教學，則研究結果可能不同。

（二）本研究所設計之學習環境，僅限於複數與複數乘法的相關課程，因此研究結果僅限於解釋此複數乘法之數學概念建構與學習情形。

（三）教學實驗之實驗組與對照組的樣本，在地域與學生背景上有其特定性。若選取不同地區、不同類組的學生作為實驗樣本，所得到的結果可能有所差異。如要將本研究結論推論到其他學校或不同類組學生時，應注意本研究樣本之特性。

（四）教學實驗之實驗組與對照組的樣本，乃依本研究設計選取已學習過複數乘法的高二與高三學生來抽樣。若選取的樣本是尚未學習過複數一般式乘法，或尚未學習過複數極式乘法，則結果可能與本研究之結果不同。

（五）第二階段學習環境之教學成效分析，係根據並採用第一階段研究結果與工具。如果使用不同的評量工具來檢測本研究學習環境之教學成效，可能會得到不同的結果，但也可能失去本研究之脈絡與連貫性。

第二節　研究發現與討論

一、動態視窗環境之教學成效

將實驗組樣本之前測作答情形，與後測的作答情形，依第一階段研究結果之概念結構與解題策略分成五類，統計資料如表 15。

表 15 實驗組 E 之前測、後測分類統計表

實驗組 E	表徵整合型	表徵轉移情境型	表徵轉移機械型	單一表徵機械型	單一表徵受限型
前測	3 (7%)	2 (5%)	12 (29%)	18 (44%)	6 (15%)
後測	28 (68%)	8 (20%)	0 (0%)	3 (7%)	2 (5%)

註：有效樣本 41 人。

從分類統計表的數據來看，在前測時實驗組各類型人數比例與第一階段研究的樣本在各類型人數比例上是相近的（請參考表 8）。經過動態視窗教學後，可以使實驗組近九成的樣本掌握複數之極式乘法概念（表徵整合型與表徵轉移情境型合計），面對極式乘法問題時不會再機械式地轉換回一般式處理（表徵轉移機械型爲 0）；近七成的樣本掌握複數之幾何變換概念（表徵整合型）。顯示本研究設計的動態視窗教學環境具有教學成效，能夠讓多數學習者掌握較多的複數乘法概念與表徵。再以前測分類爲縱軸，後測分類爲橫軸，形成表 16 的交叉分析表。

表 16 實驗組 E 之前測、後測分類交叉分析表

前測＼後測	表徵整合型	表徵轉移情境型	表徵轉移機械型	單一表徵機械型	單一表徵受限型	合計
表徵整合型	3	–	–	–	–	3 (7%)
表徵轉移情境型	2	–	–	–	–	2 (5%)
表徵轉移機械型	11	1	–	–	–	12 (29%)
單一表徵機械型	11	5	–	2	–	18 (44%)
單一表徵受限型	1	2	–	1	2	6 (15%)
合計	28 (68%)	8 (20%)	0 (0%)	3 (7%)	2 (5%)	

由交叉分析表可發現，前測爲表徵轉移情境型的兩位學生原本已經可以掌握複數一般式運算程序與極式乘法法則，經由本研究設計之動態視窗環境之教學後，在後測時均提升爲表徵整合型學生。前測爲表徵轉移機械型學生與單一表徵機械型學生，經由動態視窗環境之教學後，大部分也能在後測時提升爲表徵整合型學生，部分提升爲表徵轉移情境型。但前測爲單一表徵受限型學生的提升人數比例並不大。下面就前測爲表徵轉移機械型、單一表徵機械型與單一表徵受限型的學生，從其前測、後測與訪談結果來分析與討論。

（一）前測為表徵轉移機械型學生

接受訪談的樣本 S11 前測的作答情形屬於表徵轉移機械型學生。以下為該樣本的部分訪談內容：

T：以前老師有教過你們伸縮旋轉這種想法嗎？
S11：沒有。
T：都沒有。那是上電腦課，才有這樣的想法？
S11：才有這種。
T：你覺得我們上這樣的電腦課，對你有沒有幫助？
S11：有，圖形。
T：圖形比較有幫助？
S11：對！
T：那在算式子上有幫助嗎？
S11：比較少。
T：像你極式方面，有比較好嗎？像你在做前測和後測比較的時候。
S11：有啊！會想到角度相減。
T：對你在處理旋轉伸縮...
S11：有比較好。

表徵轉移型的學生，可以掌握複數乘法的一般式運算程序，部分學生對於極式乘法法則可以掌握，部分則選擇轉換為一般式乘法來處理。透過動態連結多重表徵環境，一方面提供動態的幾何表徵給予使用者學習幾何變換的助力，一方面幾何表徵與代數表徵的連結提供學習者操弄不同表徵間的轉移之機會。此種環境可以協助大多數表徵轉移型的學生學習表徵的轉換轉移，並且整合代數表徵與幾何表徵，發展為表徵整合型學生。

（二）前測為單一表徵機械型學生

接受訪談的樣本 S10 前測的作答情形屬於表徵轉移機械型學生。以下為該樣本的部分訪談內容：

T：你當初前測的時候，在做像這種的極式相乘，你好像都會把它變成 $a+bi$ 這樣乘開來對不對？
S10：嗯！
T：那時候還不會絕對值相乘、輻角相加。
S10：不會，沒想到。
T：沒有想到。可是你後測的時候，都做出來了對不對？
S10：嗯！這個...
T：是因為說我們上電腦教學之後，你就學會這個方法嗎？
S10：對啊！
T：像第 1 題（後測），你看到「乘以 i」，你第一個想法是什麼？
S10：就是 i 等於這個東西，等於 $\cos 90° + i\sin 90°$。

T：然後呢？
S10：想說就是轉 90 度。（手比旋轉動作）
T：（後測第 4 題）我說這兩個相除，z 除以 w，你覺得角度應該幾度？
S10：45 吧！
T：45，為什麼？
S10：就…（手勢）它轉下來，它也轉下來，就在這裡啦！然後就減掉它們的，它們原本這麼大，減掉它們轉下來的角度。
T：就是他們差這個。
S10：對！
T：像這個（後測第 9 題），一個複數的平方等於 i，你寫說應該在第一象限，角度是 45 度。為什麼是 45 度？你這裡寫 90 度除以 2 是 45 度，這是什麼意思？
S10：那時候想說 i 就是在 90 度的地方，複數 z 就是…然後除以 2，就是 z 的地方。
T：是因為說，它的平方等於 i。那 90 度除以 2 的意思是說？
S10：原本前面不是說， z 是 30 度，z^2 就是往上 30 度。現在這個 i 是 90 度，原本 z 的平方是 90 度，要除以 2。
T：他本來…你剛剛說 i 是 90 度，所以它平方是變成 i… 90 度，所以你就把它除以 2 變成 45 度。
S10：對！

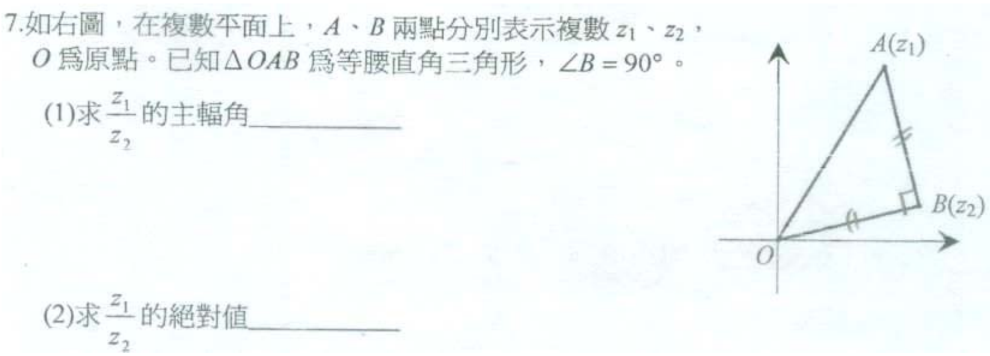


圖 45 樣本 S10 前測作答情形之一

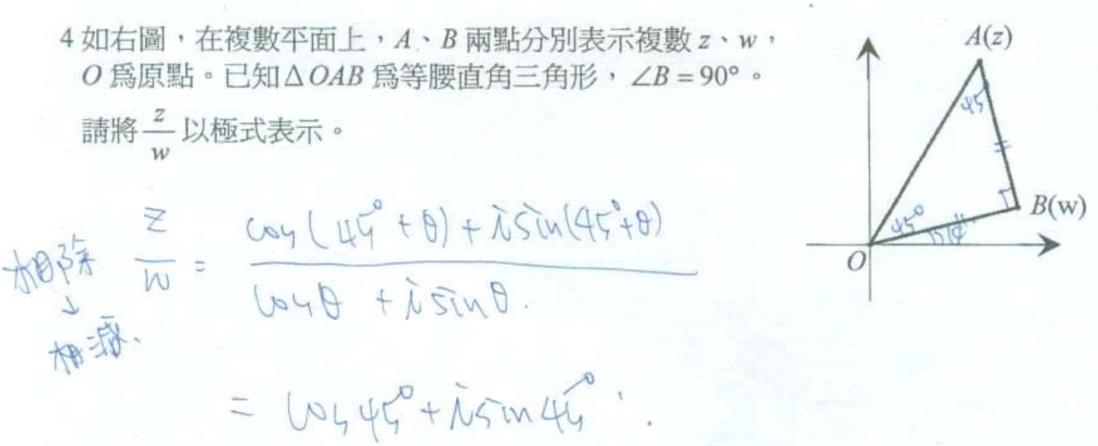


圖 46 樣本 S10 後測作答情形之一

樣本 S10 在前測時，無法進行極式乘法運算，甚至連絕對值與輻角兩個極式的主要概念也無法掌握，如圖 45，S10 沒有作答。而在後測類似的題目（如圖 46），S10 可以從圖形中擷取輻角來進行極式的除法。雖然 S10 在此題未注意到絕對值的角色，而從 S10 的訪談對答，配合手勢模仿電腦學習環境的（五）極式除法網頁之動作，顯見其有接受到電腦的訊息，並且發展為幾何變換概念，在後測時與訪談時回想起來。而 S10 可以從電腦學習環境的（六）棣美弗定理網頁的動作，利用平方的觀念反向思考來處理平方根的問題，顯示出該樣本整合幾何表徵與代數表徵，並能靈活運用於解題。S10 看到 i，不僅只想到一般式表徵，而且想到 $i = \cos 90° + i\sin 90°$ 的極式表徵，甚至更進一步想到乘以 i 的幾何動作為旋轉 90 度，可以看出進行動態視窗教學後，能使大部分單一表徵機械型學生建立極式乘法概念，並從視窗環境的幾何變換動作中，學習整合數種表徵之間的連結。

單一表徵機械型的學生，經動態連結多重表徵環境的學習，約六成學生發展為表徵整合型學生；約三成學生發展成為表徵轉移情境型的學生。這表示雖然學生原本只能掌握單一表徵（一般式運算程序），但因動態連結多重表徵環境之功能，讓學生觀察到旋轉與伸縮的幾何性質，以及幾何變換與極式乘法的連結關係，可以協助學生建構極式乘法法則概念，也可進一步協助學生建構幾何變換概念。

（三）前測為單一表徵受限型學生

單一表徵受限型的學生，經動態連結多重表徵環境的學習，僅有約半數能提升為表徵整合型或表徵轉移型，半數仍停留在單一表徵型。前面與 S11 的訪談回答中，S11 就已經提到此種視窗學習環境，對計算代數式上的幫助較少。從過程概念理論來分析，複數的極式乘法法則概念，屬於程序性知識，應透過重複的演練以協助建構其概念。故動態連結多重表徵學習環境對原本單一表徵概念較弱的學生幫助有限。

雖然如此，但有部分單一表徵受限型的學生仍可經由動態連結多重表徵環境，學習多重表徵的轉換轉移並整合，大幅提昇為表徵整合型學生。以下為此類學生 S12 的回答：

T：你以前高一的時候，老師有教旋轉跟伸縮這些嗎？
S12：忘記了…
T：那你現在會這個…
S12：因為從電腦來看還蠻清楚的。
T：像你這邊算極式沒問題嘛！（後測）
S12：對！
T：在你前測時，極式的題目都沒寫出來。

S12：看不懂。看不懂極式是什麼。

T：以前就沒學好？

S12：對！

T：第 5 題，你寫「B 為 A 之輻角加 60 度」，你把極式寫出來了，可是接下來發展還是沒辦法知道複數怎麼寫。你把 2＋i 寫出來，假設它是一個極式，B 也找出極式，輻角 θ 加 60 度。接下來發展不下去了。

S12：找不到 θ 是多少，那個三角函數不是我知道的。

T：第 6 題，你寫「距離相乘、角度相加」。你能不能告訴我，z 乘 w 是怎麼出來的？

S12：z 是這樣子，w 是這樣子（手指圖上兩者的輻角）。z 乘 w 是這樣子轉過來（手指 z 的輻角），乘 w 角度就會轉過來，（手指 w 位置）轉到這裡。

T：電腦的你還記得？

S12：對！

T：第 9 題，你會寫出兩個答案。第一個你寫「i 輻角為 $90°$，除 2 為 $45°$」，你可找出第一個答案。第二個答案是怎麼來的？

S12：因為是平方的話，就會有兩個答案。

T：那另外一個答案是怎麼來的？你寫 $360°+90°=450°$。

S12：這個是同界角，（手指 i）是這個的同界角。

T：你這個想法是以前就會嗎？

S12：一樣是上課就會。（電腦課）

T：上課時我好像沒有提到這部分。我們都在做圖形的變換嘛！沒有說同界角這個作法。

S12：看到圖形自然就會了。

T：會不會你高一就學過？

S12：不可能！

T：你說你高一不會，上過電腦課就會這件事？

S12：對！

T：如果說，假設 z 在這裡（第一個答案），z 平方會在哪裡？

S12：就是這邊的角度，再搬過去一次。

T：假設 z 現在在這裡（第二個答案），z 平方會在哪裡？

S12：就是這主輻角（手指第二個答案的主輻角），再搬一次。

T：這就跟我們上電腦課有關係。

S12：就是搬兩次。

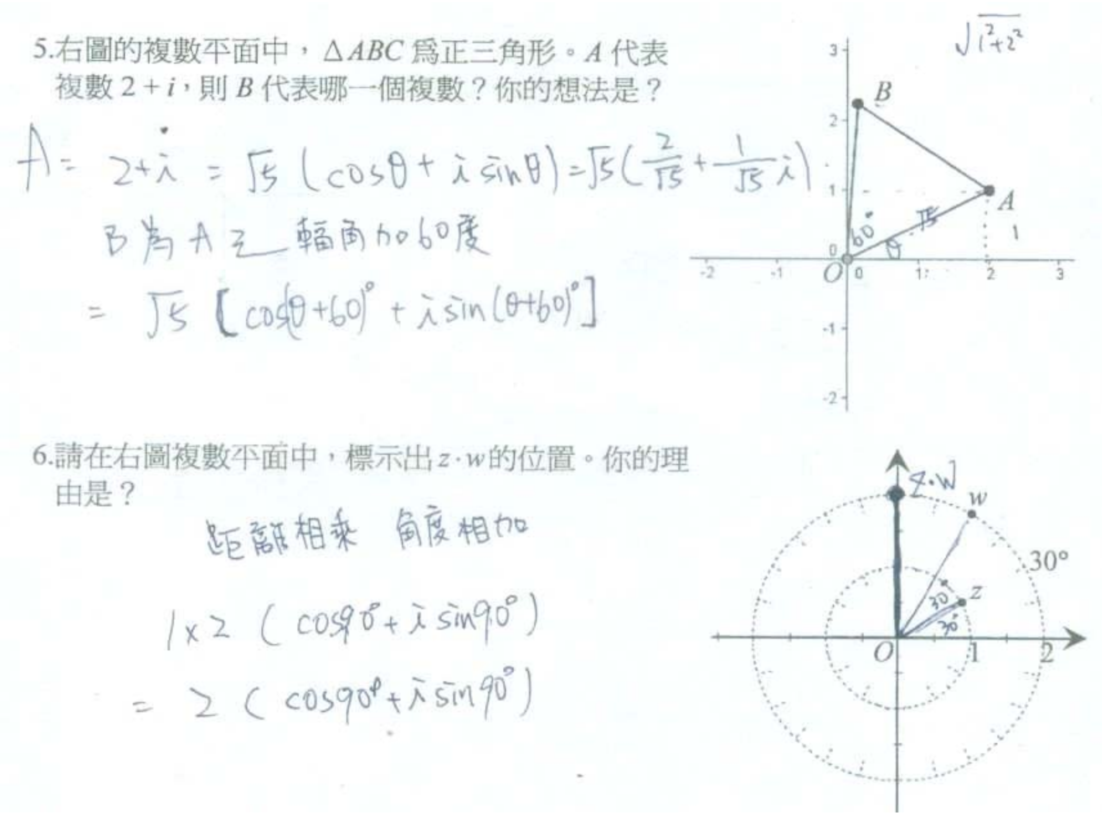


圖 47 樣本 S12 後測作答情形之一

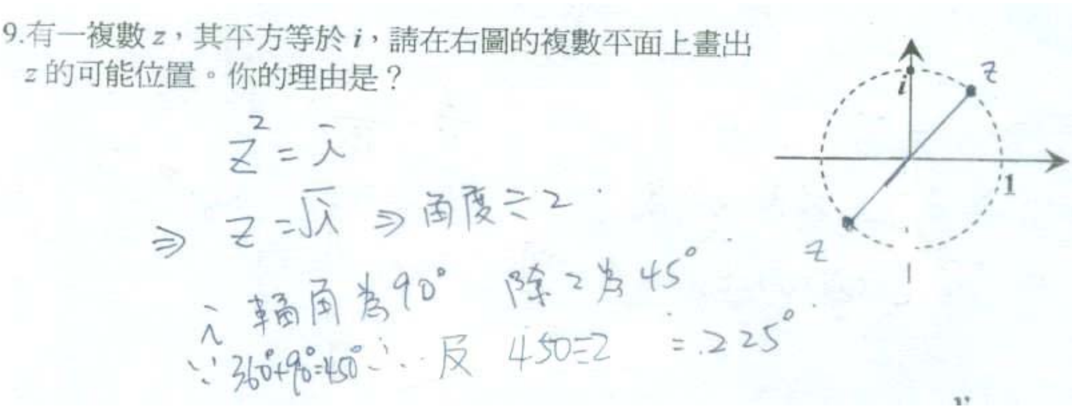


圖 48 樣本 S12 後測作答情形之二

樣本 S12 在前測的結果是單一表徵受限型的學生，僅會進行一般式運算程序，不會極式乘法與幾何變換，也無法計算三角函數之值。在訪談的回答中，顯示該生對三角函數仍舊無法完全掌握，因爲本研究設計電腦學習環境並非針對教授三角函數概念而設計。但是經過此環境之學習後，S12 可以掌握極式乘法與幾何變換，回答問題時會模仿電腦環境的旋轉動作，並且整合平方的動作來處理平方根問題。顯見原本只會一般式運算程序的學生，經動態連結多重表徵環境的教學，仍有機會建構複數極式乘法法則概念與幾何變換概念，並藉由回想電腦環境的動作來整合表徵及處理問題。

由前述各種類型的學生作答與訪談資料，可對本研究設計之動態視窗環境之教學成效作部分結論：動態視窗環境在教學上有其成效，藉由環境的代數表徵與幾何表徵的動態連結，能夠協助大部分實驗組的學生建構極式乘法法則概念與幾何變換概念，並經由回想及學習視窗環境的動作來整合與運用各種表徵。然而對單一表徵受限型的部分學生，動態視窗環境的教學成效有限。

二、動態視窗環境與傳統教學環境之教學成效差異

動態視窗環境有其教學成效，然而與傳統環境教學相比呢？表 17 與表 18 爲兩組對照組前測與後測分類交叉分析表。

表 17 對照組 C1 之前測、後測分類交叉分析表

後測 前測	表徵 整合型	表徵轉移 情境型	表徵轉移 機械型	單一表徵 機械型	單一表徵 受限型	合計
表徵 整合型	2	1	–	–	–	3 (10%)
表徵轉移 情境型	3	1	–	–	–	4 (13%)
表徵轉移 機械型	5	5	–	–	–	10 (33%)
單一表徵 機械型	4	5	–	–	–	9 (30%)
單一表徵 受限型	3	1	–	–	–	4 (13%)
合計	17 (57%)	13 (43%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	

註：有效樣本 30 人。

表 18 對照組 C2 之前測、後測分類交叉分析表

後測 / 前測	表徵整合型	表徵轉移情境型	表徵轉移機械型	單一表徵機械型	單一表徵受限型	合計
表徵整合型	1	–	–	–	–	1 (3%)
表徵轉移情境型	2	2	–	–	–	4 (11%)
表徵轉移機械型	2	3	–	–	–	5 (13%)
單一表徵機械型	9	7	2	–	–	18 (50%)
單一表徵受限型	4	3	1	–	–	8 (22%)
合計	18 (50%)	15 (42%)	3 (8%)	0 (0%)	0 (0%)	

註：有效樣本 36 人。

從量化的數據來看，三組的前測結果在五種概念結構的比例上相近，但後測結果的比例則有所差異。兩組對照組經過傳統教室環境的教學後，所有樣本均能提升為表徵整合型或表徵轉移型，均建構了極式乘法法則的概念，這表示傳統環境教學對於代數表徵的學習有其功效。而兩組對照組個別在表徵整合型與表徵轉移型的人數比例上相近，表示約半數的學生能夠整合代數與幾何表徵並運用。對照組 C1 之樣本因為經過複習、參與學測及學習較多數學知識，故在前測之表徵整合型與表徵轉移型之人數比例較 E 與 C2 多，後測之表徵整合型之人數比例上較 C2 多。雖然是進行傳統環境教學，但其教學內容之來源為本研究設計之動態連結多重表徵學習環境的教學內容轉換為傳統環境之教學內容，是針對本研究第一階段發現學生學習複數乘法的關鍵與困難點而設計，故在本研究之傳統環境教學下，能夠使約半數的樣本發展成為表徵整合型學生。若是進行一般高中課程標準下教學內容的傳統環境教學，則其教學成效經由本研究工具之測驗並分類，應該接近前測結果而非後測，因為本研究所選取的樣本即已經過一般高中課程標準之傳統教學。

從比對實驗組與對照組的數據來看，實驗組樣本提升為表徵整合型的樣本比例較兩組對照組都要高。尤其是實驗組在前測為表徵轉移型的學生，幾乎全數在後測時發展為表徵整合型學生。這表示透過動態連結多重表徵視窗環境之教學，使原本已有極式乘法法則概念的學生，藉由環境動態呈現極式乘法的幾何意義為旋轉與伸縮，及極式乘法的代數表徵與幾何變換的幾何表徵之連結，讓多數表徵轉移型學生能學習多重表徵連結與整合運用。

然而對照組樣本經由傳統教學環境，均能提升為表徵整合型或表徵轉移型學

生；實驗組樣本卻有部分單一表徵型學生經過視窗環境教學，仍舊在後測為單一表徵型學生，進步有限。顯見傳統教學環境在代數表徵轉換的教學與使用上有其成效，在單一表徵型學生中，對照組的教學成效較實驗組為佳；視窗環境教學則在代數表徵與幾何表徵的連結與整合之教學與使用上有其成效，對表徵轉移型學生的助益較大。以下是實驗組樣本 S13 的訪談部分內容：

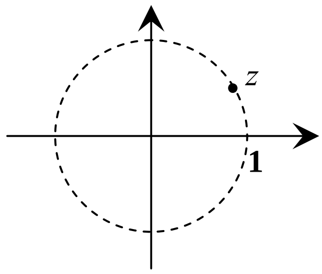
T：你在操作電腦時，有沒有碰到什麼樣的問題？
S13：操作電腦上，有網頁跑出來會比較清楚。
T：網頁比較清楚？
S13：對！因為它還有加圖案。操作起來比較簡單。
T：那在計算上呢？像你在後測上有一些題目是空著的。對你計算上有什麼幫助嗎？你剛剛說概念的地方比較清楚，那在計算上呢？
S13：有加圖案吧！
T：像你這些是根據你在操作電腦上找到的答案嗎？（學習單）
S13：有一部分是。有一部份自己想出來的。
T：你學習單大概能寫出來一半。現在來看後測。你後測的題目有一些空白。空白的原因是？
S13：想不到。
T：你學習單上都有寫旋轉、伸縮、極式，可是到後測就沒寫？
S13：一考後測時，就忘記了。
T：像你這題，兩個極式相乘，你是變成 a+bi 相乘。你有想到極式嗎？
S13：…..
T：你不是用極式做的，沒辦法寫出來的原因是什麼？
S13：嗯…還不熟悉。
T：電腦環境對於你做這個極式乘法，沒辦法讓你對極式很熟悉？
S13：應該是操作不夠。
…
T：你剛剛有提到，操作電腦環境，會讓你想到圖案。這圖案在你看題目時，會浮現那個圖案嗎？還是說沒辦法連在一起？
S13：可能要有提示，才有辦法聯想起來。
…
T：但是操作電腦時，會看到圖案；考試的時候，不太容易連到電腦的圖案？
S13：要花時間想，需要多一點提示。
T：所以有一些複雜的敘述，對你來說是困難的。那如果我用電腦環境教你們，你覺得可以再加強哪些地方？讓你在做題目時會比較容易掌握。
S13：就是操作電腦的時候，連題目一起做。(手比電腦螢幕)
T：就是操作電腦的時候，題目在旁邊做的時候，考試就比較容易想到。
S13：印象也比較深刻。

實驗組樣本 S13 在前測結果為單一表徵受限型，後測為單一表徵機械型。不考慮樣本的個人因素，經實驗組與對照組比對，實驗組後測仍維持在單一表徵型的樣本，無法提升進步的原因可能有：(1)對電腦環境不熟悉，對傳統環境較能接受；(2)無法連結後測的紙筆測驗題目與視窗學習環境的數學知識。(3)受到電

腦環境影響，只著重於電腦呈現的訊息，未能發現其中的數學知識，或接收訊息未能內化建構個人概念。(4)其他未知原因。有待後續研究。

另外關於實驗組與對照組的差異，以下從多重表徵的連結與使用情形來分析。後測第 1 題的題目爲：

1.在右圖的複數平面中，請標示出 z 乘 i 的結果位置。
你的理由是？



此題題型爲代數表徵與幾何表徵之間作轉移，樣本可能採取一般式運算程序、極式乘法法則或幾何變換等等方式來作答。在作答情形中，若樣本看到「乘 i」立即想到「旋轉 90 度」，表示其使用幾何變換概念來處理；若樣本看到「乘 i」想到「乘 $(\cos 90° + i\sin 90°)$ 」，表示其使用極式乘法法則概念來處理；若直接假設 z 的一般式 $a+b\,i$，直接乘以 i，表示其使用一般式運算程序概念來處理。統計實驗組 E 與對照組 C1、C2 的作答方式之比例如下表：

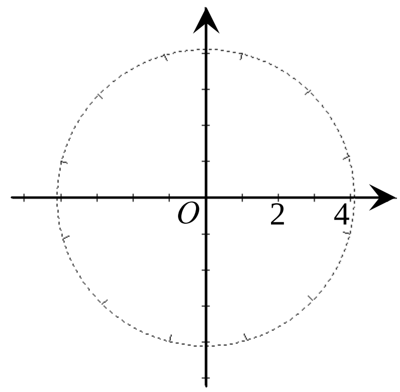
表 19 後測第 1 題作答情形表

組別	想到旋轉 90 度	想到旋轉，但角度錯誤	想到乘 $(\cos 90° + i\sin 90°)$	假設 z 一般式直接乘以 i
E	48.8 %	12.2 %	14.6 %	14.6 %
C1	16.7 %	10 %	40 %	26.7 %
C2	13.9 %	無	25 %	27.8 %

實驗組與對照組進行相同內容的教學，但從作答情形可以發現，視窗學習環境使實驗組超過半數的樣本看到「乘 i」想到旋轉，並有接近半數的樣本旋轉角度正確；但是兩組對照組中不到三分之一的樣本能想到旋轉，大部分樣本從極式與一般式中尋找解題方法。這顯示視窗學習環境能夠提供半數以上的實驗組樣本建立代數表徵與幾何表徵的連結，及直接使用幾何變換的理由；但是傳統教學環境對於樣本建立代數表徵與幾何表徵的連結的效果不如視窗學習環境，對照組樣本大多仍須從極式乘法與一般式乘法中尋找處理問題的方法。

另外從後測第 8 題來分析。題目如下：

8.請在右圖的複數平面上，標示出 $(1+4i)(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ 的位置。



此題型結合了複數一般式、複數極式等代數表徵與複數平面幾何表徵，可以看出樣本是否能整合一般式乘法、極式乘法與幾何變換三種概念。實驗組中，有 34.1 %的樣本可以將「乘 $(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ 」轉移為幾何變換的「旋轉 60 度」，從複數平面 1 + 4 i 的位置旋轉 60 度標示答案，甚至有 4.9 %的樣本會仿照電腦的旋轉與伸縮方式繪圖；對照組 C1 與 C2 分別僅有 26.7 %、11.1 %的樣本採用此方式作答，沒有樣本會仿照傳統環境中黑板圖示與教學者手勢表示旋轉的方式作答。其餘樣本則選擇轉換為極式或一般式計算結果再來標示。這表示動態連結多重表徵的呈現方式較傳統教學方式更能協助學生連結並整合數種表徵，並於解題時思考運用。

三、樣本對動態視窗環境的接受情形

雖然動態視窗環境，使較多數學生能夠掌握多重表徵連結與整合運用，但是對部分單一表徵型學生的教學成效有限。是否意味著樣本對動態視窗環境接受情形不佳呢？以下從樣本接受訪談的內容來分析接受情形。

T：像我們上課用電腦這樣上，你覺得你學習這部分，有沒有什麼幫助？
S10：會比較好。
T：比較容易瞭解嗎？
S10：嗯！
T：可是上電腦，跟在教室上不太一樣。
S10：嗯！
T：那電腦的效果，跟在上課講，會一樣嗎？
S10：不一樣。
T：不一樣喔？你覺得那邊不一樣？
S10：就看電腦比較生動。
T：電腦比較生動？
S10：因為會跑圖形。
T：那你會想說以後這類都用電腦來上課嗎？
S10：嗯！…
T：你對電腦會排斥嗎？

S10：不會！

T：那反過來講，你對電腦這樣來上課，你可以接受嗎？

S10：嗯！這樣還可以。

T：接收度算高還是低？

S10：偏高吧！

T：假如以後有機會上電腦課的話，你的接收度怎麼樣？譬如說喜歡上，還是不喜歡上，還是說？

S11：蠻喜歡上。因為有圖片。

T：有圖片？

S11：我喜歡看圖片。

T：你覺得看圖片…

S11：比較好吸收。

T：比較好吸收，就是馬上可以學起來。

S11：對！

T：就是電腦可以幫助你吸收，然後有圖片比較容易…

S11：比較好想。

T：你覺得上電腦課，對你學這個有幫助？

S12：很有幫助，很快就學會了。

T：你覺得為什麼？跟平常在教室上課來比，你學會比較快？

S12：平常用講的比較抽象，而且沒有電腦的連續效果。

T：你覺得電腦會有連續效果。有哪些是一般上課沒有的東西？

S12：比如說線條的伸縮，你可以自己操作。不是只有老師在那邊教，哪邊有問題，可能有一個 idea，你就可以自己試試看。可以幫助解決很多本來沒有辦法知道的問題。

T：如果以後有機會上這類的電腦課，你的接受程度？

S12：接受度還算蠻高的。

T：你覺得算這種複數的題目會很困難嗎？上電腦課前。

S12：都看不懂。

T：上過電腦課呢？

S12：覺得還蠻基礎的，很簡單。

T：如果來比較，看題目是用到幾何的旋轉伸縮那種想法，跟我們要計算的像 $a+bi$ 乘上 $c+di$，還有極式相乘，輻角相加、絕對值相乘那種，你覺得這兩種來比較的話，哪一種比較困難？

S12：當然是計算比較困難，你不知道那個東西是怎麼變出來的，只能說用數學方法去把它算出來的。

T：那你覺得旋轉伸縮對你來說比較容易？

S12：簡單扼要。

受訪學生在訪談中，均表示能接受此電腦學習環境的教學。另外在電腦學習環境與傳統教學環境之比較，學生表示：「(1)電腦環境有動態效果，傳統環境的呈現比較抽象。(2)電腦環境可以自行操作，可以透過操作以驗證心中的想法與解決疑點。」從學生在訪談時的敘述，並比對這三位受訪樣本的後測作答情形（表 19 爲一個例子），發現電腦學習環境可以提供一些動態的圖像，讓學生在觀察與思考時有實例可以依循；而在傳統教學環境，學生沒有動態的實例可循，只能依據教學者的敘述與黑板上的靜態圖示來想像可能的變化。另外以 S12 的訪談敘述來看，該樣本能透過電腦學習環境的操作來驗證想法與解決疑點，從 Tso 提出學習環境設計理論來看，正是學習者透過反思行動以形成抽象概念。

樣本 S12 在前測分類爲單一表徵受限型，但不僅在經過電腦學習環境之教學後，提升爲表徵整合型學生，同時在訪談回答中，能夠清楚說明電腦環境的功能與對該樣本的幫助。顯示電腦學習環境不僅讓樣本 S12 在複數乘法知識的學習過程中產生反思行動，也讓 S12 對他與此環境之互動產生後設認知。由此可知電腦學習環境不僅在教學上有成效，也可能使學生審視自己的學習情況。

第陸章　結論與建議

本章依據本研究之發現與討論所得結果，回應本研究所提出之研究議題，歸納整理出最後的結論。並針對研究結論提出教學上的建議，以及檢討本研究可能的疏漏或不足之處，提出未來研究上的建議。以下區分為研究結論與建議兩節說明。

第一節　研究結論

本節綜合研究發現與討論，作成研究結論。以下就兩個研究議題分別提出研究結論：

一、概念結構與解題策略

（一）高中生的複數乘法概念之概念結構

高中生對於複數乘法的概念結構，可分為三種類型：

1.表徵整合型：已建構一般式運算程序概念、極式乘法法則概念與幾何變換概念，並整合多重表徵，能統整使用合適的解題方式。

2.表徵轉移型：已建構一般式運算程序概念與極式乘法法則概念，但未完整建構幾何變換概念，處理複數乘法問題時會將幾何題型轉移為極式乘法法則或一般式運算程序來處理。

3.單一表徵型：已建構一般式運算程序概念。處理其他類型的複數乘法問題，會轉換或轉移為一般式運算程序來處理。

從過程概念理論來看整體複數乘法概念，一般式運算程序屬於程序步驟(Procedure)，極式乘法法則可視為過程(Process)，而幾何變換則為過程概念(Procept)。從整體比例來看，約僅有 5 %的學生學習複數乘法概念至過程概念層次，並能整合代數表徵與幾何表徵；大部分學生的複數乘法概念仍停留在代數運算的程序步驟與過程的層次。而全部僅有約 32 %的學生能使用極式乘法法則，亦可看出半數以上的學生仍未能瞭解極式乘法的概念。

（二）高中生處理複數乘法問題的解題策略

高中生對於複數乘法問題的解題策略，可分為四種類型：

1.靈活豐富型策略：能使用一般式運算規則、極式乘法法則與幾何變換來處理問題；能整合多重表徵，結合不同的複數乘法概念；面對複數乘法的問題時，會找出合適的線索與表徵，利用表徵的轉換或轉移，轉變為合適的解題方法，不受題意或情境影響。

2.情境型策略：能使用一般式運算規則與極式乘法法則來處理問題。面對複數乘法問題時，選擇所採取的解題方式會受到題意情境的影響，通常採用與題意相

同表徵來處理問題，或者依據學生之喜好來決定解題方式。並不會將兩三種複數乘法概念整合使用。

3.機械型策略：面對複數乘法的題目，一律轉換或轉移爲一般式運算規則來處理。並未使用幾何變換來解題，在部分圖形題偶有極式乘法的概念出現，但並非主要解題方式。

4.受限型策略：只能使用一般式運算程序。無法將極式轉換爲一般式。面對極式乘法題型與幾何題型時會產生困難。

解題策略是靈活豐富型的學生即爲表徵整合型的學生，也是少數。解題策略爲情境型者也只有 12 %。大部分學生都屬於機械型與受限型，表示共有約 83 % 的學生面對複數乘法時，第一個想到的是使用一般式運算規則來處理。表徵方面使用代數表徵的處理多於幾何表徵。從此可看出大部分高中生處理複數乘法問題的解題策略是單調而不夠豐富靈活。

（三）概念結構與解題策略之關係

整體樣本依概念結構與解題策略之相互關係，可分爲五種類型：

表 20 概念結構與解題策略的相互關係之五種類型

類型	概念結構	解題策略	與前一類型之差異
表徵整合型	表徵整合型	靈活豐富型	
表徵轉移情境型	表徵轉移型	情境型	無法使用幾何變換， 無法整合多重表徵與概念
表徵轉移機械型	表徵轉移型	機械型	極式乘法法則概念較薄弱， 解題傾向轉爲一般式運算程序
單一表徵機械型	單一表徵型	機械型	僅能使用一般式運算程序，無法使用幾何變換、極式乘法法則；將幾何變換題型或極式乘法法則題型轉換轉移爲一般式處理
單一表徵受限型	單一表徵型	受限型	僅能使用一般式運算程序， 無法將極式與幾何變換題型轉換轉移爲一般式來處理

複數乘法知識的教學目標，是期望高中生能成爲表徵整合型之學生。從這五類學生的差異與困難點，可以瞭解學生學習複數乘法的關鍵因素：

1.先備知識方面：三角函數、極式的關鍵元素（絕對值、輻角）。

2.表徵方面：

(1)極式的代數表徵。

(2)複數在複數平面上的幾何意義。（包括一般式與極式）

(3)各種複數乘法表徵之間的轉換轉移。

(4)「極式乘法的代數表徵」與「幾何變換的幾何表徵」之間的連結。

二、複數乘法之動態視窗環境設計

設計複數乘法的動態視窗環境，必須基於數學結構、科技特色與學習理論三個面向的考量：

（一）數學結構：將複數乘法知識依據課程綱要與教學內容區分為數個單元，並依據第一階段研究所得樣本學習複數乘法的關鍵因素與困難點來設計。

（二）科技特色：從以下兩點來呈現：(1)使用者與視窗學習環境之互動；(2)動態連結多重表徵。本研究設計呈現複數之代數表徵之一般式、極式與幾何表徵的複數平面，是利用 GeoGebra 與 JavaScript 結合的科技環境特色。

（三）學習理論：動態連結多重表徵環境提供學習者外部表徵與反思行動之訊息及操作，協助學習者建構概念。設計此環境應考量動態連結多重表徵呈現方式，以及使用者與視窗環境互動部分，提供使用者進行反思行動的機會。

其次，選定設計軟體，將教學內容利用動態連結多重表徵性質設計出教學環境。並擬定教學實驗及評量方式，檢驗此動態視窗環境之教學成效，作為修改教學環境之依據。

本研究所設計複數乘法之動態視窗環境為六個單元：(1)一般式轉極式；(2)極式轉一般式；(3)一般式乘積；(4)極式乘法；(5)極式除法；(6)棣美弗定理。其環境在動態連結多重表徵、視窗型環境及教學內容具有特色。詳細介紹請參考第肆章。

三、動態視窗環境之教學成效

（一）動態視窗環境之教學成效

動態視窗環境在教學上有其成效，能夠對大部分實驗組的學生，藉由環境的代數表徵與幾何表徵的動態連結，協助其建構極式乘法法則概念與幾何變換概念，並經由回想及學習視窗環境的動作來整合與運用各種表徵。然而對單一表徵受限型的部分學生，動態視窗環境的教學成效有限。

（二）動態視窗環境與傳統教學環境之教學成效差異

透過動態連結多重表徵視窗環境之教學，使較多數學生能學習多重表徵連結與整合運用。視窗環境在代數表徵與幾何表徵的連結與整合之教學與使用上有其成效，對表徵轉移型學生的助益較大，並能提供半數以上學生建立代數表徵與幾何表徵的連結，以及面對問題時直接進行幾何變換的理由。傳統教學環境在代數表徵轉換的教學與使用上有其成效，單一表徵型學生在此環境的學習效果較佳；然而在此傳統教學環境下之學生在處理代數與幾何之間轉移的複數乘法問題時，多數仍選擇從極式或一般式等代數表徵中尋找解題方法。

（三）樣本對動態視窗環境的接受情形

受訪樣本均表示能夠接受動態視窗環境的教學。樣本並能比較出動態視窗環境與傳統教學環境的差異，以及提到電腦環境可以自行操作，可以透過操作以驗證心中的推測與解決疑點。電腦學習環境可以提供一些動態的圖像，讓學生在觀察與思考時有實例可以依循；而在傳統教學環境，學生沒有動態的實例可循，只能依據教學者的敘述與黑板上的靜態圖示來想像可能的變化。電腦學習環境不僅在教學上使學生產生反思行動達到學習效果，也可能使部分學生對他與此環境之互動產生後設認知，能夠審視自己的學習情況。

第二節　建議

研究者依據本研究結果，並參酌國內目前高中的課程設計與教學實況，對複數乘法之教學與未來研究提出建議。

一、對於複數乘法教學之建議

（一）三角函數是多數學生的困擾。在進行複數極式的教學之前，建議先讓學生建立三角函數的概念與計算，以利學習複數的一般式與極式之間的轉換，使學生在面對極式乘法問題時仍有轉換回一般式乘法來解題的方式。

（二）強化複數平面、極坐標平面的概念，以提供一般式與極式的代數表徵與幾何表徵之轉移管道。同時建立極式的重要關鍵元素—絕對值與輻角的代數與幾何意義連結，可減少三角函數運算，而從幾何表徵中獲得極式元素資訊。

（三）極式乘法為一乘法的「動作」，建議進行其代數表徵計算之教學時，能配合呈現幾何表徵之旋轉與伸縮動作作為比對，同時為建構幾何變換概念作準備。

（四）由於幾何變換概念並未編入高中課程標準，教師需要自行設計教學課程。而幾何變換是極式乘法法則的幾何意義與幾何動作，建議設計與使用多重表徵環境，並利用動態連結多重表徵之特性，同時呈現代數乘法與幾何動作之效果，以協助學生建立幾何變換概念，以及建立幾何表徵動作與代數表徵運算之連結概念。

（五）教學者設計動態連結多重表徵之視窗學習環境，應注意評量其對於過程概念知識之教學成效。設計上應輔以代數演算以強化建立過程概念，否則視窗學習環境在需要進行代數演算的過程概念部分之教學成效，可能不如傳統教學環境之教學成效。

（六）設計教學環境或學習環境，並不是製造計算機（計算器），輸入數值馬上

得到答案；而是爲了教學、學習、輔助教學來使用，使用者藉由操作、觀察學習環境所呈現的訊息，及比對使用者原有的數學概念，產生反思行動，而建構新數學概念。所以學習環境配合教學的進行應該循序漸進，並非一開始就呈現結果，而要考量依序出現的訊息，能否能達到教學的效果。

二、對於研究之建議

（一）可根據本研究的研究工具，增加診斷性問卷之受測樣本，擴大到多數學校，以獲得多數高中生的研究資料與結果。

（二）建議爭取學習時效，在高中生剛學習複數極式乘法之後，立即進行研究與測驗，以降低時間影響學習概念退化之因素。

（三）建議縮小研究範圍，例如僅研究極式乘法法則或幾何變換；表徵方面可以只研究代數轉幾何等等範疇，以獲得更詳細的細部資訊與結論。

（四）建議設計工具，檢測經動態連結多重表徵教學環境後之樣本，其仍停留在單一表徵型之確切原因。

（五）建議可以在學生尚未學習複數之極式時，進行本研究之教學實驗，以瞭解在本環境下建構極式乘法與幾何變換之新概念之成效。

（六）在動態連結多重表徵環境下，進行以時間因素爲變因之研究。例如在動態效果出現時，過程的時間長與短，與學生建構特定數學知識的成效之關係。以此作爲改進設計之依據。

（七）可以研究設計動態連結多重表徵視窗學習環境，與設計計算機型環境（輸入即得結果），比較兩者的教學成效差異。

（八）在高中課程中，極式的代數表徵中有三角函數的角色。本研究中顯示三角函數表徵會形成部分學生的困難。而本研究受限於 GeoGebra 環境的元件功能，只能以極坐標 $(r;\theta)$ 來表示極式。建議研究若分別以 $re^{i\theta}$、極坐標 $(r;\theta)$（或高中課程中 $[r;\theta]$ 的表示法）、$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 三種不同表徵來進行複數乘法教學，是否在建構概念的效果上有所差異。

參考文獻

一、中文部分

Felix Klein 原著，舒湘芹、陳義章、楊欽樑譯(2004)。高觀點下的初等數學-第一卷 算數代數分析。九章出版社。

William P. Berlinghoff 與 Fernando Q. Gouvêa 著(2004)，洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊譯(2008)。溫柔數學史。博雅書屋。

Maor 著(1994)，鄭惟厚譯(2000)。毛起來說 e。天下文化出版社。（原著 1994 年出版）

林佳蓁、柳賢(民 95)。電腦化動態評量教學系統在高職一年級學生複數單元學習成效之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。

李昭慧、謝豐瑞(民 92)。利用棣美弗定理解 n 次方根之概念心像研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。

郭生玉(2004)。教育測驗與評量。精華書局。

黃見益、左太政(民 94)。中部地區高二學生複數極式之錯誤類型。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。

黃淑華、謝豐瑞(民 91)。高中生複數學習歷程中之數學思維研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。

洪萬生(民 94)。從程序性知識看《算數書》。師大學報：人文與社會類，50(1)，75-89。

陳鳳珠(2007)。虛數 $\sqrt{-1}$ 的誕生。HPM 十年風華，第三卷第二三期合刊。。

秦爾聰(1993)。數學概念和演算能力背後的數學學習理論-Procept Theory。「九年一貫數學學習領域綱要諮詢意見-理念篇」研討會論文集。

張美珠（民 92）。動態環境中廣義角概念學習之研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。

張敬楷（民 95）。中學生平行線概念認知結構之研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。

陳美卿、蕭龍生(民 90)。高雄市高中生複數絕對值概念及運算錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。

陳天宏（民 92）。國中生線對稱概念學習研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。

陳佳吟、左太政（民 94）。高中生在複數的極式單元錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。

單維彰（2007）。數學中最美的等式。科學月刊第 452 期。

左台益（2002）。Van Hiele 模式之國中幾何教材設計。中等教育第 53 卷第 3 期，44-53。

蔡志仁（民 89）。動態連結多重表徵視窗環境下橢圓學習之研究。國立臺灣師範

大學數學研究所碩士論文。
吳銘川、宋傳欽（民 97）。高一學生複數與複數平面解題主要錯誤類型及其補救教學之研究。國立政治大學應用數學研究所碩士論文。
余酈惠（民 92）。高雄市高職學生運用 GSP 軟體學習三角函數成效之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。
袁小明(2003)。數學史。九章出版社。

二、英文部分

David DeVries(2004). Solution – What Does It Mean ? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2004 .

David Tall, Eddie Gray, Maselan Bin Ali, Lillie Crowley, Phil DeMarois, Mercedes McGowen, Demetra Pitta, Marcia Pinto, Michael Thomas, Yudariah Yusof. Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, Volume* 1*, Issue* 1 *January* 2001 , pages 81 – 104.

ED Dubinsky(1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical Thinking*. (pp. 95-126). Boston: Kluwer.

Goldin, A.(1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathemetics*. Edited by Claude Janvier: Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ. P125-145.

Gray, E.M. & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 115-141.

James J. Kaput(1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. In S. Wagner and C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates, 1989.

Janvier, C. (1987a). Multiple embodiment principle. Excerpts from the conference.

Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp 99-107). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of function as an example. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp 679-71). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T. & Behr. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problem of representation in teaching and learning of mathematics* (pp 33-40). Hillsdale, NJ：Lawrence Erlbaum.

Palmer, S. E.(1977). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch, & B. B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization*. Hillsdate, NJ: LEA.

Rossana Falcade & Colette Laborde & Maria Alessandra Mariotti (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Springer Science + Business Media B.V.* 2007.

Tai-Yih Tso (2001). On the design and implementation of learning system with dynamic multiple linked representations. *Common Sense in Mathematics Education,*115-134.*Proceedings of* 2001 *The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education,* Taipei, Taiwan, 19 – 23 November 2001.

附錄

附錄一、診斷性問卷題目

複數乘法概念結構與解題策略研究問卷

1.請計算下列各題：

(1) i^2 =______

(2) $\left|\sin 30° \cdot i + \cos 30°\right|$ =________

(3) (2 + 3 i)(4 – i) = ______

(4) 1 + i = $\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ ，則 θ =________

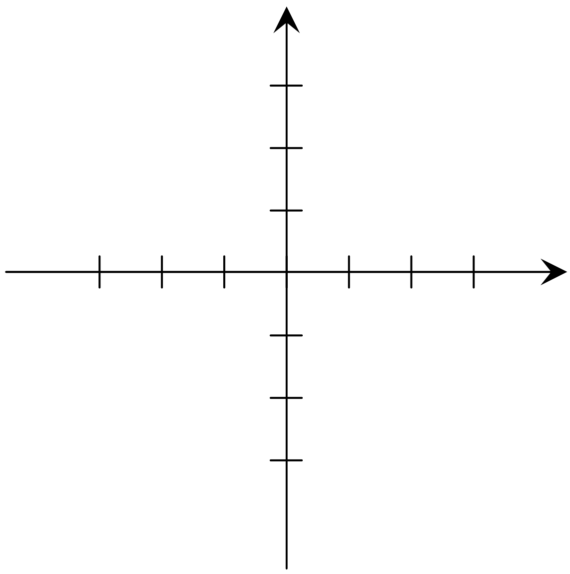
(5) $(\cos 15° + i\sin 15°)(\cos 75° + i\sin 75°)$ = ______

2.請在複數平面上標出下列各複數的位置。

(1) $z_1 = -3i - 2$

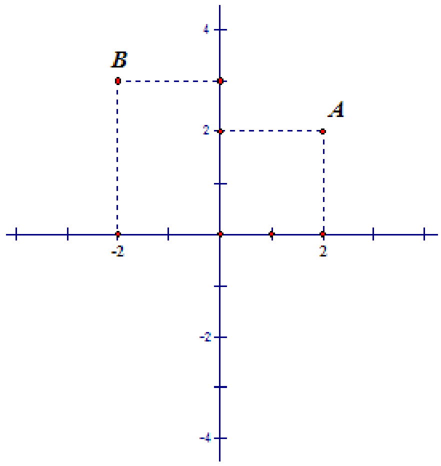
(2) $z_2 = \cos 30° + i\sin 30°$

(3) $z_3 = 2(\cos 300° + i\sin 300°)$



3.設 z = (1 + 2 i) (cos 45° + i sin 45°) ，則 z 在複數平面是落在第幾象限？

4.如右圖，在複數平面上有兩點 $A(z_1)$、$B(z_2)$，



(1)請寫出 B 點所代表的複數（以 $a+bi$ 表示）

(2)請寫出 A 點所代表的複數極式

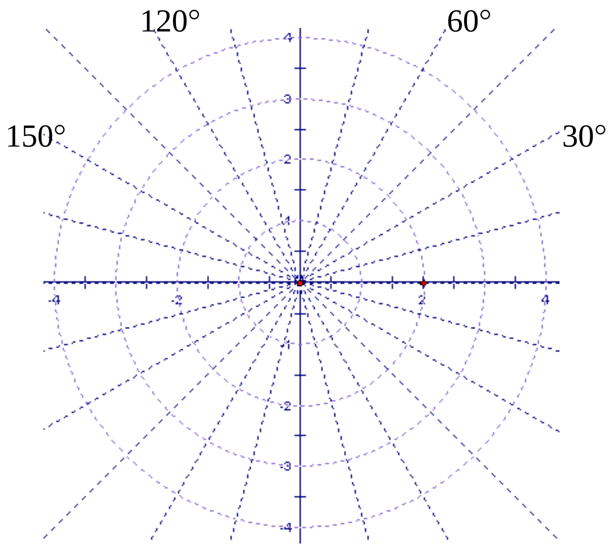
5.設複數 $z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，若 $z\cdot i=2(\cos k\pi+i\sin k\pi)$，且 k 爲正數。求 k 的最小值____

6.設 $z=\cos30°+i\sin30°$，將 z 乘上下列各數以後的結果，畫在右圖的複數平面上。

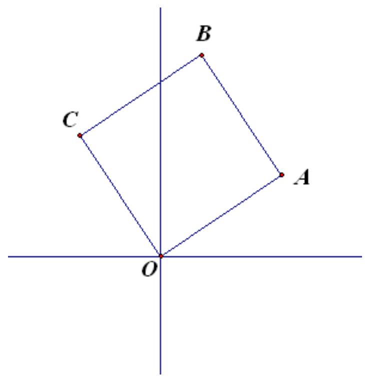
(*A*) -2

(*B*) $-3(\cos330°+i\sin330°)$

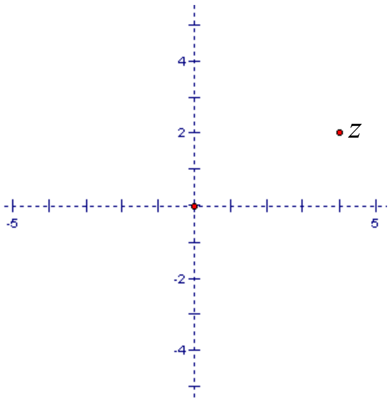
(*C*) $\boldsymbol{i}$



7.如右圖，在複數平面上，有一正方形 $OABC$。A 點代表複數 $3+2i$。則 C 點代表複數爲何？你(妳)的想法是？

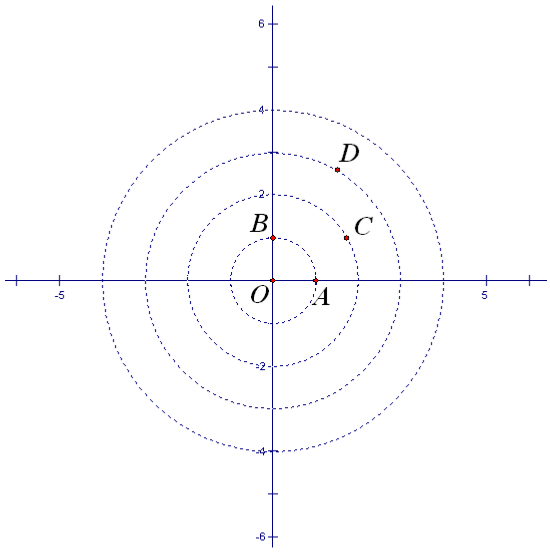


8.右圖的複數平面上有一點 z，將 z 對原點順時針方向旋轉 90 度，所得之點爲 z_1，請在右圖上標出 z_1 的位置。z_1 等於下列哪一個數？請說明理由：$(A)\ -z$ $(B)\ -\bar{z}$ $(C)\ iz$ $(D)\ -iz$ $(E)\ z^2$



9.在右圖的複數平面中，O、A、B、C、D 五點分別代表複數 0、1、i、z_1、z_2。已知 $\angle AOC=\angle COD=\angle DOB=30°$。請在右圖中畫出 $z_1\cdot z_2$ 的位置。

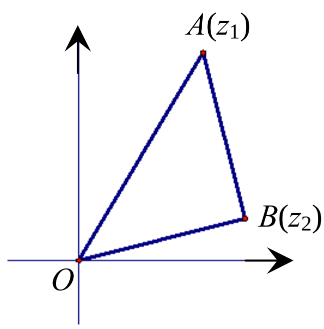
你(妳)的想法是：



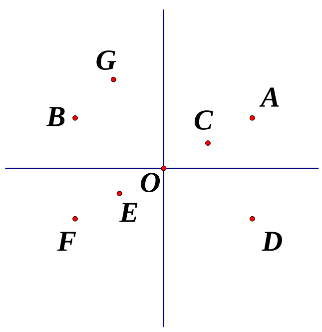
10.如右圖，在複數平面上，A、B 兩點分別表示複數 z_1、z_2，O 爲原點。已知 ΔOAB 爲等腰直角三角形，$\angle B=90°$。

(1)求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的主輻角__________

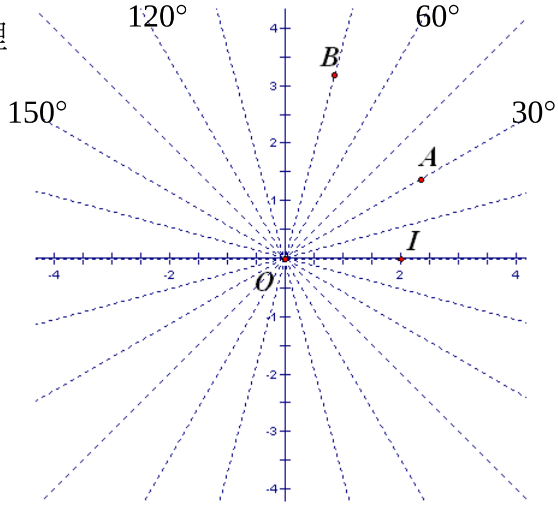
(2)求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的絕對值__________



11.右圖中的複數平面中，A 點所代表的複數爲 z_1。設 $z_2=\dfrac{1}{2}(\cos 180°+i\sin 180°)$，則右圖中那個點代表 $z_1\cdot z_2$？請說明理由。



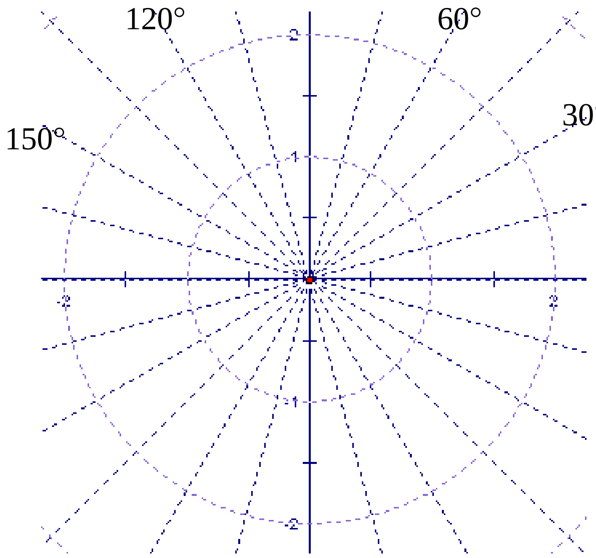
12.如右圖的複數平面上，A、B 分別代表 z、w 兩個複數。已知 $\angle IOA=30°$、$\angle IOB=75°$，試畫出 $\dfrac{w}{z}$ 的可能位置，並說明理由。



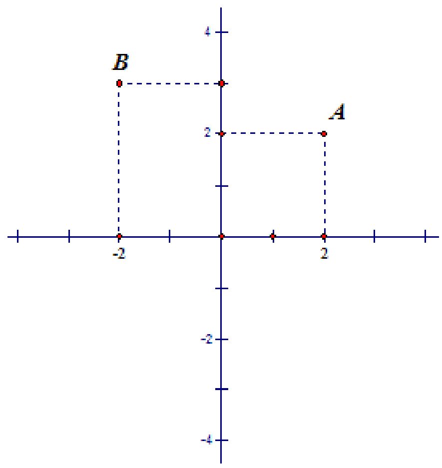
13.將複數

$$z=(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$$

畫在右圖的複數平面上。



14.如右圖，在複數平面上有兩點 $A(z_1)$、$B(z_2)$，計算 $z_1\cdot z_2$ 的絕對值。



附錄二、第一階段研究診斷性問卷之內部一致性信度分析結果（SPSS 13 版）

一、考量測驗題目所使用的複數乘法概念層級：（Cronbach’s Alpha = 0.844）

此種編碼即爲第參章研究方法所述之編碼方式，因 Alpha 係數需爲數值型，故調整爲數值代碼。使用幾何變換概念解題編碼爲 7（若此層級可進一步區分兩層次，則加入編碼 8 表示較高層次），使用極式概念解題編碼爲 5，使用一般式乘法概念解題編碼爲 3（若此層級可進一步區分兩層次，則加入編碼 4 表示較高層次），使用複數基本性質解題編碼爲 1（若此層級可進一步區分兩層次，則加入編碼 2 表示較高層次），不明方法或只有答案則編碼爲 0.5，未作答編碼爲 0。此種編碼方式之目的在於凸顯使用較高層級概念，故給予較大數值的代碼。

將此資料進行 SPSS 之內部一致性分析，樣本數 25，題數 25，所得 Cronbach’s Alpha 值 α =0.844，顯示此測驗具有內部一致性中等以上之信度。

Reliability

Warnings

The space saver method is used. That is, the covariance matrix is not calculated or used in the analysis.
Scale has zero variance items.

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	25	100.0
	Excluded(a)	0	.0
	Total	25	100.0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.844	25

Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
E1P1	1.000	.0000	25
E1P2	.920	.2363	25
E1P3	1.000	.0000	25
E1P4	1.040	.2000	25
E1P5	3.340	1.8012	25
E2P1	1.000	.0000	25
E2P2	1.400	.5590	25

E2P3	1.060	.5268	25
E3	2.880	.8201	25
E4P1	1.000	.0000	25
E4P2	.920	.2363	25
E5	2.220	1.7916	25
E6P1	2.320	1.4711	25
E6P2	2.180	1.8364	25
E6P3	2.260	1.6528	25
E7	6.420	2.1779	25
E8P1	4.760	3.3327	25
E8P2	2.780	2.4920	25
E9	3.460	2.2264	25
E10P1	2.160	2.4440	25
E10P2	2.060	2.5873	25
E11	3.800	3.1225	25
E12	3.320	2.3580	25
E13	3.800	2.1794	25
E14	3.040	1.6197	25

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
E1P1	59.140	413.344	.000	.845
E1P2	59.220	410.585	.282	.844
E1P3	59.140	413.344	.000	.845
E1P4	59.100	412.813	.060	.845
E1P5	56.800	389.250	.293	.842
E2P1	59.140	413.344	.000	.845
E2P2	58.740	416.544	-.154	.848
E2P3	59.080	404.452	.407	.842
E3	57.260	406.544	.185	.844
E4P1	59.140	413.344	.000	.845
E4P2	59.220	411.043	.234	.844
E5	57.920	356.743	.789	.823
E6P1	57.820	374.956	.636	.831
E6P2	57.960	361.811	.689	.827
E6P3	57.880	361.485	.782	.825

E7	53.720	397.127	.132	.850
E8P1	55.380	361.089	.325	.849
E8P2	57.360	350.365	.609	.828
E9	56.680	358.518	.591	.829
E10P1	57.980	357.635	.538	.832
E10P2	58.080	360.035	.475	.835
E11	56.340	328.869	.660	.825
E12	56.820	361.706	.514	.833
E13	56.340	363.369	.544	.832
E14	57.100	387.104	.371	.839

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
60.140	413.344	20.3309	25

二、考量樣本回答時，是否使用該題雙向細目表中，使用概念之可能層級：（Cronbach's Alpha = 0.861）

此種編碼考量同一題中可能使用不同的層級解題概念，但並不強調是何種層級。比對雙向細目表中，該題可能採取的解題層級，採用最高層級概念解題編碼爲 4，次高層級概念解題（如果有的話）編碼爲 3，第三高層級概念解題（如果有的話）編碼爲 2，不明作法或僅有答案則編碼爲 1，未做答編碼爲 0。例如診斷性問卷中第 14 題，可以使用一般式運算程序、極式乘法法則、與幾何變換三個層次概念來解題，故樣本若以幾何變換概念解題則編碼爲 4，以極式乘法法則概念解題則編碼爲 3，以一般式運算程序概念解題則編碼爲 2。例如問卷中第 1(5) 題，可以使用一般式運算程序、極式乘法法則兩個層次概念來解題，故樣本若以極式乘法法則概念解題則編碼爲 4，以一般式運算程序概念解題則編碼爲 1。此種編碼方式僅就各題動用概念之高低層次，而不強調各題之間的差異性。

將此資料進行 SPSS 之內部一致性分析，樣本數 25，題數 25，所得 Cronbach's Alpha 值 α =0.861，顯示此測驗具有內部一致性高等信度。

Reliability

Warnings

The space saver method is used. That is, the covariance matrix is not calculated or used in the analysis.
Scale has zero variance items.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.861	25

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	25	100.0
	Excluded(a)	0	.0
	Total	25	100.0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
E1P1	4.000	.0000	25
E1P2	3.600	1.1180	25
E1P3	4.000	.0000	25
E1P4	3.040	.2000	25
E1P5	2.960	1.3064	25
E2P1	4.000	.0000	25
E2P2	3.280	.8426	25
E2P3	2.640	1.1136	25
E3	2.880	.6000	25
E4P1	4.000	.0000	25
E4P2	3.600	1.1180	25
E5	2.160	1.4629	25
E6P1	2.360	1.1860	25
E6P2	2.080	1.5524	25
E6P3	1.600	.9129	25
E7	3.560	1.0440	25
E8P1	2.720	1.9044	25
E8P2	1.800	1.1902	25
E9	2.120	1.3013	25
E10P1	1.520	1.3266	25
E10P2	1.240	1.3000	25
E11	2.120	1.6155	25
E12	2.680	1.8868	25
E13	3.040	1.7436	25
E14	1.960	.9345	25

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
E1P1	64.960	200.040	.000	.862
E1P2	65.360	188.740	.327	.859
E1P3	64.960	200.040	.000	.862
E1P4	65.920	199.493	.090	.862
E1P5	66.000	186.833	.322	.859
E2P1	64.960	200.040	.000	.862
E2P2	65.680	199.560	-.010	.866
E2P3	66.320	185.727	.431	.855
E3	66.080	197.577	.125	.862
E4P1	64.960	200.040	.000	.862
E4P2	65.360	192.907	.189	.863
E5	66.800	167.583	.800	.841
E6P1	66.600	180.750	.561	.851
E6P2	66.880	170.027	.682	.845
E6P3	67.360	180.323	.770	.847
E7	65.400	198.500	.015	.867
E8P1	66.240	176.773	.388	.860
E8P2	67.160	178.390	.636	.849
E9	66.840	175.890	.651	.848
E10P1	67.440	179.173	.538	.852
E10P2	67.720	178.293	.578	.850
E11	66.840	168.057	.701	.844
E12	66.280	170.460	.528	.853
E13	65.920	170.827	.574	.850
E14	67.000	189.583	.372	.857

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
68.960	200.040	14.1435	25

附錄三、第一階段研究診斷性訪談開始問題

1.妳知道什麼叫做複數？

2.那複數的絕對值是？

3.換個說法，複數 $a+b\,i$ 的絕對值是？

4.那複數 $a+b\,i$ 的輻角是？

5.你知道什麼是複數平面？

6.什麼是複數的極式？

7.極式 $2(\cos 30°+i\sin 30°)$ 的絕對值？輻角？

8.會不會將極式轉換爲一般式？困難點？

9.你覺得複數的乘法是什麼？

10.舉個例子，$(a+b\,i)$ 乘上 $(c+d\,i)$ 等於？

11.會不會做極式乘法？困難點？

12.如果是 $r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ ，會等於什麼？

13.解題都是轉成一般式 a + b i 來解，是只會(a + b i)(c + d i)？或是喜好？

14.你覺得一個複數乘上另一個複數，在複數平面上的點會如何變動？如果從極式的乘法來想的話？

15.各題的寫法提問。

附錄四、複數乘法之動態連結多重表徵學習網頁網址

一、一般式轉極式

http://science.math.ntnu.edu.tw/ELME/DGE/reheart/complex/1.html

二、極式轉一般式

http://science.math.ntnu.edu.tw/ELME/DGE/reheart/complex/2.html

三、複數乘積

http://science.math.ntnu.edu.tw/ELME/DGE/reheart/complex/3.html

四、極式乘法

http://science.math.ntnu.edu.tw/ELME/DGE/reheart/complex/4.html

五、極式除法

http://science.math.ntnu.edu.tw/ELME/DGE/reheart/complex/5.html

六、棣美弗定理

http://science.math.ntnu.edu.tw/ELME/DGE/reheart/complex/6.html

註：若未來因某些因素導致無法進入此六個學習網頁，可利用網路搜尋網頁，輸入「許技江」、「複數乘法」兩組關鍵字，來找尋新的網頁位址。

附錄五、第二階段研究前測試題

第一份試卷

動態連結多重表徵視窗環境下
複數乘法學習之研究

教學實驗前測題目卷
第一部份

測驗研究人：許技江

測驗時間：民國 98 年　月　　日

使用時間：50 分鐘

受測者：　　　班　　　號姓名

說明：感謝您接受本次測驗。受測時間長度爲 50 分鐘。第一部份測驗卷共有八大題。編號爲 1~8。請盡量寫出您的想法。我們會依照您的想法來評量給分。

1.請計算下列各題：

(1) $\left|\sin 30^\circ \cdot i + \cos 30^\circ\right|$ =________

(2) (2 + 3 i)(4 – i) = ______

(3) 1 + i = $\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ ，則 θ =________

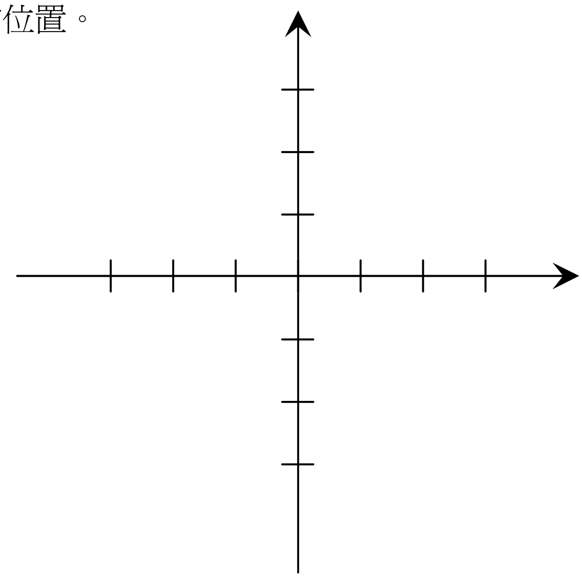
(4) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$ = ______

2.請在右圖的複數平面上標出下列各複數的位置。

(1) $z_1 = -3i - 2$

(2) $z_2 = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$

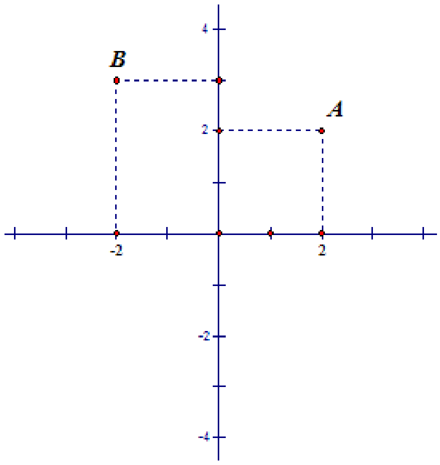
(3) $z_3 = 2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$



3.設 $z = (1 + 2 i) (\cos 45° + i \sin 45°)$ ，則 z 在複數平面是落在第幾象限？

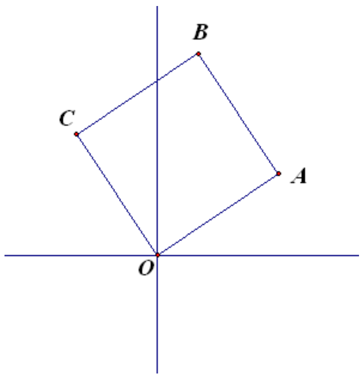
4.如右圖，在複數平面上有兩點 $A(z_1)$、$B(z_2)$，

(1)請寫出 B 點所代表的複數（以 $a+bi$ 表示）



(2)請寫出 A 點所代表的複數極式

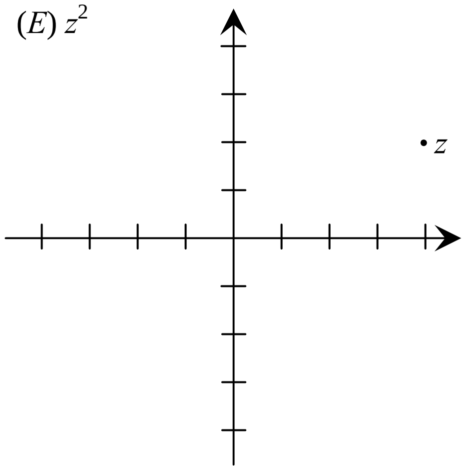
5.如右圖，在複數平面上，有一正方形 $OABC$。A 點代表複數 $3 + 2i$。則 C 點代表複數爲何？你(妳)的想法是？



6.右圖的複數平面上有一點 z，將 z 對原點順時針方向旋轉 90 度，所得之點爲 w，請在右圖上標出 w 的位置。w 等於下列哪一個數？

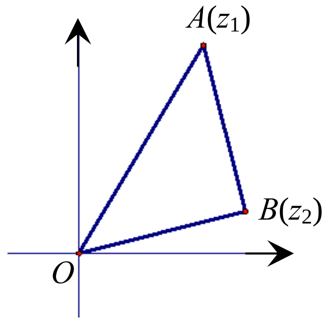
________$(A)\ -z$　$(B)\ -\bar{z}$　$(C)\ iz$　$(D)\ -iz$　$(E)\ z^2$

請說明理由：



(背面尚有題目)

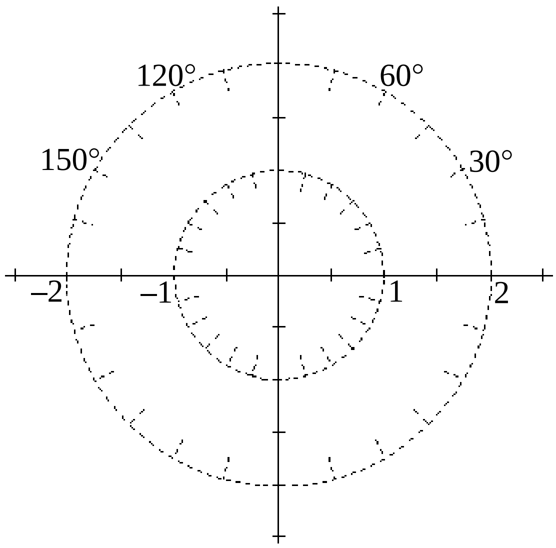
7.如右圖，在複數平面上，A、B 兩點分別表示複數 z_1、z_2，O 爲原點。已知 ΔOAB 爲等腰直角三角形，$\angle B = 90°$。



(1)求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的主輻角____________

(2)求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的絕對值____________

8.將複數 $z = (\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})^{11}$ 畫在右圖的複數平面上。



第二份試卷

動態連結多重表徵視窗環境下
複數乘法學習之研究

教學實驗前測題目卷
第二部份

測驗研究人：許技江

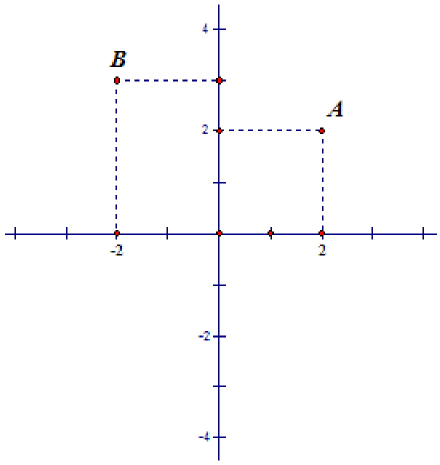
測驗時間：民國 98 年　月　　日

使用時間：50 分鐘

受測者：　　　班　　　號姓名

說明：感謝您接受本次測驗。受測時間長度爲 50 分鐘。第二部份測驗卷共有六大題。編號爲 9~14。請盡量寫出您的想法。我們會依照您的想法來評量給分。

9.如右圖，在複數平面上有兩點 $A(z_1)$、$B(z_2)$，計算 $z_1 \cdot z_2$ 的絕對值。

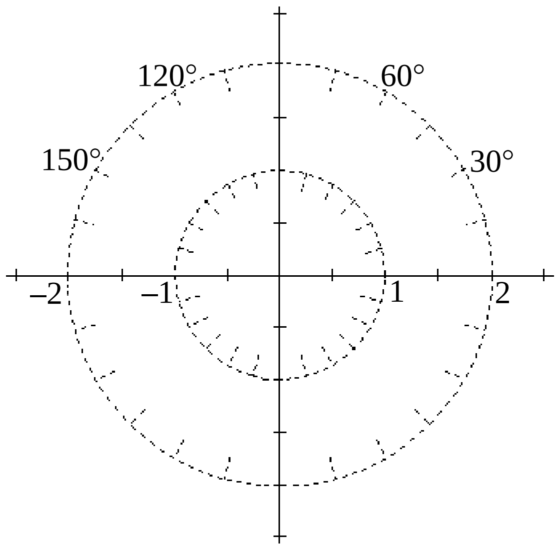


10.設 $z = \cos30° + i\sin30°$，將 z 乘上下列各數以後的結果，畫在右圖的複數平面上。

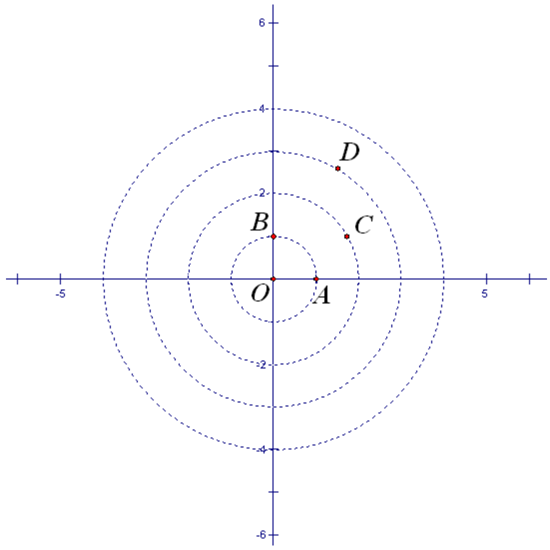
(*A*) -1

(*B*) $-2(\cos330° + i\sin330°)$

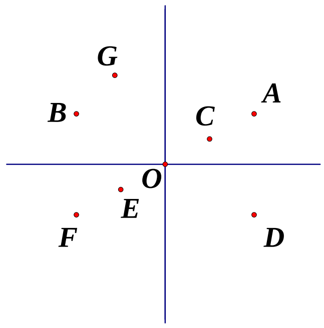
(*C*) $\boldsymbol{i}$



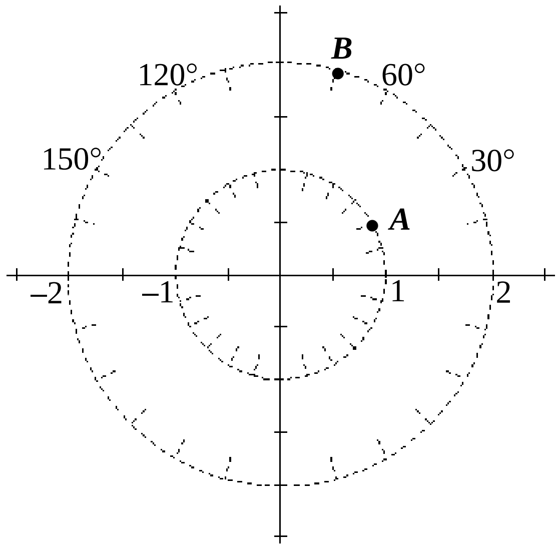
11.在右圖的複數平面中，O、A、B、C、D 五點分別代表複數 0、1、i、z_1、z_2。已知 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOB = 30°$。請在右圖中畫出 $z_1 \cdot z_2$ 的位置。
你(妳)的想法是：



12.右圖中的複數平面中，A 點所代表的複數爲 z_1。設 $z_2=\frac{1}{2}(\cos 180°+i\sin 180°)$，則右圖中那個點代表 $z_1\cdot z_2$？請說明理由。



13.在右圖的複數平面上，A、B 分別代表 z、w 兩個複數。試畫出 $\frac{w}{z}$ 的可能位置，並說明理由。



14.設複數 $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，若 $z\cdot i=2(\cos k\pi+i\sin k\pi)$，且 k 爲正數。求 k 的最小值____

附錄六、第二階段研究前測問卷之內部一致性信度分析結果（SPSS 13 版）

一、考量測驗題目所使用的複數乘法概念層級：（Cronbach’s Alpha = 0.916）

將此資料進行 SPSS 之內部一致性分析，樣本數 39，題數 24，所得 Cronbach’s Alpha 值 α = 0.916，顯示此測驗具有內部一致性高等以上之信度。

Warnings

The space saver method is used. That is, the covariance matrix is not calculated or used in the analysis.
Scale has zero variance items.

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	39	100.0
	Excluded(a)	0	.0
	Total	39	100.0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.916	24

Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
E1P1	.923	.2700	39
E1P2	3.000	.0000	39
E1P3	.974	.4860	39
E1P4	2.513	1.7603	39
E2P1	.859	.3431	39
E2P2	.859	.3431	39
E2P3	.846	.3655	39
E3	2.179	1.4257	39
E4P1	.923	.2700	39
E4P2	.705	.3387	39
E5	5.897	3.4282	39
E6P1	5.218	3.0754	39
E6P2	1.731	1.5340	39
E6P3	1.295	2.1204	39
E7	1.192	2.3045	39
E8P1	2.859	2.1732	39
E8P2	3.282	2.2237	39

E9	2.192	1.5201	39
E10P1	2.410	1.8879	39
E10P2	2.000	1.5000	39
E11	1.692	2.0119	39
E12	2.397	2.7173	39
E13	1.564	1.9540	39
E14	2.154	1.6309	39

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
E1P1	48.744	612.380	.044	.917
E1P2	46.667	613.044	.000	.917
E1P3	48.692	604.192	.361	.916
E1P4	47.154	548.134	.750	.908
E2P1	48.808	601.561	.675	.915
E2P2	48.808	601.850	.658	.915
E2P3	48.821	600.862	.672	.915
E3	47.487	572.230	.569	.912
E4P1	48.744	606.248	.506	.916
E4P2	48.962	604.255	.521	.916
E5	43.769	518.037	.533	.918
E6P1	44.449	531.037	.512	.916
E6P2	47.936	557.410	.736	.909
E6P3	48.372	542.602	.668	.909
E7	48.474	543.223	.601	.911
E8P1	46.808	543.771	.637	.910
E8P2	46.385	544.901	.609	.911
E9	47.474	557.526	.741	.909
E10P1	47.256	546.511	.713	.909
E10P2	47.667	560.728	.705	.910
E11	47.974	543.249	.701	.909
E12	47.269	515.432	.731	.908
E13	48.103	537.937	.787	.907
E14	47.513	554.914	.722	.909

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
49.667	613.044	24.7597	24

二、考量樣本回答時，是否使用該題雙向細目表中，使用概念之可能層級：（Cronbach's Alpha = 0.947）

將此資料進行 SPSS 之內部一致性分析，樣本數 39，題數 24，所得 Cronbach's Alpha 值 $\alpha = 0.947$，顯示此測驗具有內部一致性高等信度。

Warnings

The space saver method is used. That is, the covariance matrix is not calculated or used in the analysis.
Scale has zero variance items.

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	39	100.0
	Excluded(a)	0	.0
	Total	39	100.0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.947	24

Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
E1P1	3.692	1.0798	39
E1P2	4.000	.0000	39
E1P3	2.718	1.0990	39
E1P4	2.333	1.5275	39
E2P1	3.410	1.4090	39
E2P2	3.410	1.4090	39
E2P3	3.385	1.4621	39
E3	2.154	1.3086	39
E4P1	3.692	1.0798	39
E4P2	2.436	1.6511	39
E5	3.103	1.6351	39
E6P1	3.000	1.7321	39
E6P2	1.846	1.3086	39
E6P3	.949	1.2343	39

E7	.718	1.1227	39
E8P1	2.487	1.6839	39
E8P2	2.051	1.2555	39
E9	2.154	1.4242	39
E10P1	2.205	1.6251	39
E10P2	1.359	.9594	39
E11	1.103	1.2311	39
E12	1.436	1.3726	39
E13	1.436	1.6826	39
E14	2.077	1.5111	39

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
E1P1	53.462	482.202	.082	.950
E1P2	53.154	487.239	.000	.949
E1P3	54.436	457.305	.611	.945
E1P4	54.821	435.467	.775	.943
E2P1	53.744	438.038	.801	.943
E2P2	53.744	438.459	.793	.943
E2P3	53.769	436.551	.795	.943
E3	55.000	450.000	.640	.945
E4P1	53.462	458.623	.594	.945
E4P2	54.718	449.313	.503	.947
E5	54.051	438.682	.670	.944
E6P1	54.154	444.344	.546	.946
E6P2	55.308	447.166	.693	.944
E6P3	56.205	455.957	.565	.946
E7	56.436	458.516	.571	.945
E8P1	54.667	436.123	.686	.944
E8P2	55.103	451.252	.645	.945
E9	55.000	438.579	.782	.943
E10P1	54.949	432.366	.773	.943
E10P2	55.795	454.852	.769	.944
E11	56.051	450.734	.669	.944
E12	55.718	445.629	.686	.944
E13	55.718	435.471	.697	.944

E14	55.077	441.494	.684	.944

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
57.154	487.239	22.0735	24

附錄七、第二階段研究後測試題

動態連結多重表徵視窗環境下
複數乘法學習之研究

教學實驗後測題目卷

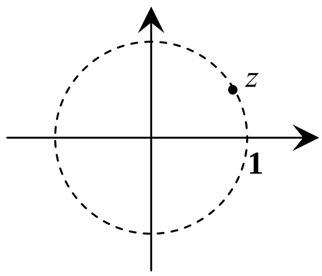
測驗研究人：許技江

測驗時間：民國 98 年　月　　日

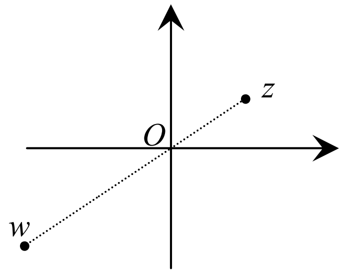
使用時間：50 分鐘

受測者：　　　班　　　號姓名

1.在右圖的複數平面中，請標示出 z 乘 i 的結果位置。
你的理由是？

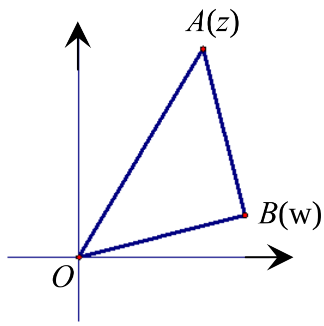


2.右圖的複數平面中，已知 $|w| = 2\,|z|$。複數 z 乘上什麼複數，會等於複數 w？

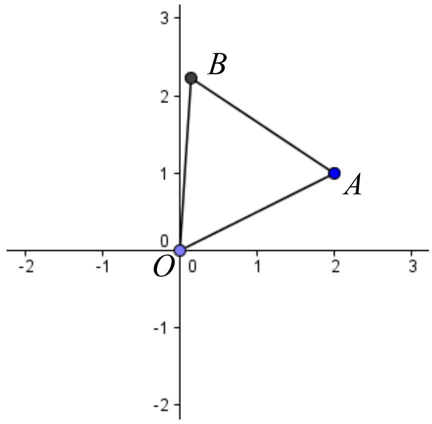


3.兩複數 $z = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$ 、 $w = 4(\cos 45° + i\sin 45°)$ ，求 $z \cdot w$ 及 $\dfrac{w}{z}$ 。

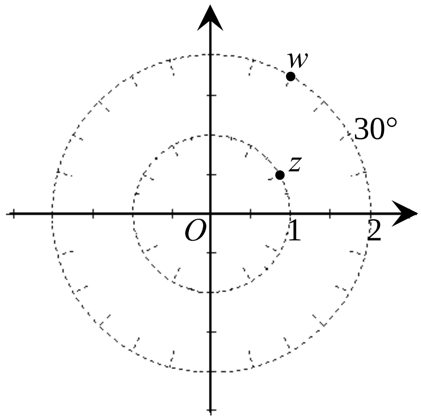
4 如右圖，在複數平面上，A、B 兩點分別表示複數 z、w，O 為原點。已知 ΔOAB 為等腰直角三角形，$\angle B = 90°$ 。
請將 $\dfrac{z}{w}$ 以極式表示。



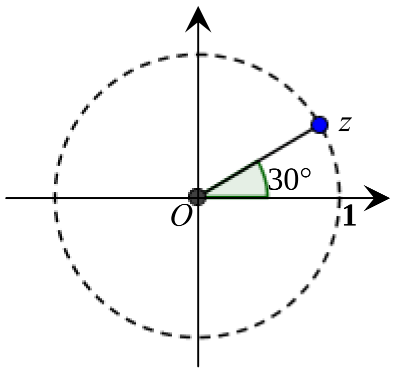
5.右圖的複數平面中，ΔABC 爲正三角形。A 代表複數 $2+i$，則 B 代表哪一個複數？你的想法是？



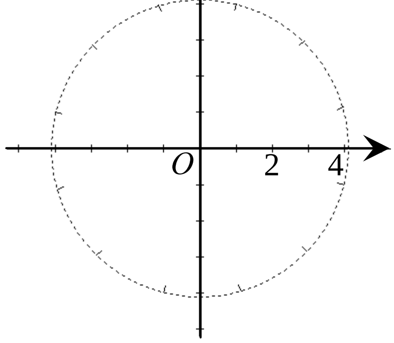
6.請在右圖複數平面中，標示出 $z\cdot w$ 的位置。你的理由是？



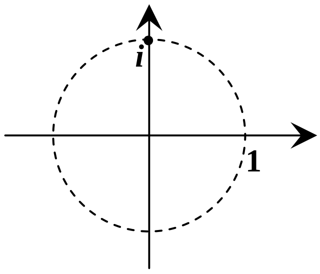
7.右圖複數平面的單位圓上有一點 z。請標示出 z^2、z^3、z^6 的位置。簡略說一下你的想法。



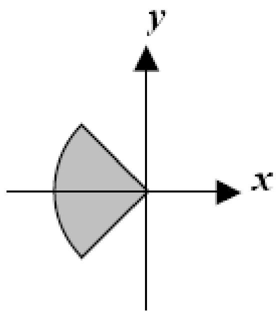
8.請在右圖的複數平面上，標示出 $(1+4i)(\cos 60°+i\sin 60°)$ 的位置。

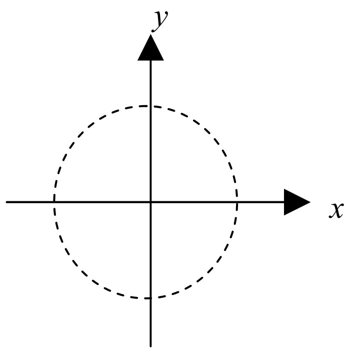


9.有一複數 z，其平方等於 i，請在右圖的複數平面上畫出 z 的可能位置。你的理由是？



10.右圖陰影部分所示爲複數平面上區域 $A=\{z \mid z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ 0\le r\le 1,\ \frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\}$ 之略圖。請在下圖的單位圓中，畫出區域 $D=\{w \mid w=z^3,\ z\in A\}$ 的略圖。你的想法是？





附錄八、第二階段研究後測問卷之內部一致性信度分析結果（SPSS 13 版）

一、考量測驗題目所使用的複數乘法概念層級：（Cronbach’s Alpha = 0.876）

將此資料進行 SPSS 之內部一致性分析，樣本數 25，題數 10，所得 Cronbach’s Alpha 值 α =0.876，顯示此測驗具有內部一致性中等以上之信度。

Reliability

Warnings

The space saver method is used. That is, the covariance matrix is not calculated or used in the analysis.

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	25	100.0
	Excluded(a)	0	.0
	Total	25	100.0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.876	10

Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
E1	3.540	2.0459	25
E2	2.780	2.2318	25
E3	4.080	1.7059	25
E4	3.320	2.3580	25
E5	3.120	2.1471	25
E6	3.700	1.9791	25
E7	4.280	2.1119	25
E8	2.700	1.8819	25
E9	3.140	1.8000	25
E10	2.340	2.4779	25

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total	Cronbach's Alpha if Item

			Correlation	Deleted
E1	29.460	168.665	.625	.862
E2	30.220	164.231	.644	.861
E3	28.920	173.243	.666	.861
E4	29.680	163.143	.620	.863
E5	29.880	170.693	.548	.868
E6	29.300	175.375	.510	.871
E7	28.720	172.502	.524	.870
E8	30.300	175.896	.533	.869
E9	29.860	171.448	.665	.861
E10	30.660	156.682	.697	.856

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
33.000	206.042	14.3542	10

二、考量樣本回答時，是否使用該題雙向細目表中，使用概念之可能層級：

（Cronbach’s Alpha = 0.868）

將此資料進行 SPSS 之內部一致性分析，樣本數 25，題數 10，所得 Cronbach’s Alpha 值 α =0.868，顯示此測驗具有內部一致性高等信度。

Reliability

Warnings

The space saver method is used. That is, the covariance matrix is not calculated or used in the analysis.

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	25	100.0
	Excluded(a)	0	.0
	Total	25	100.0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.868	10

Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
E1	2.280	1.0214	25
E2	1.800	1.2583	25
E3	3.360	1.3191	25
E4	2.680	1.8868	25
E5	2.640	1.7292	25
E6	2.280	1.1372	25
E7	2.560	1.2275	25
E8	1.760	1.0909	25
E9	2.000	1.0408	25
E10	1.440	1.4742	25

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
E1	20.520	72.010	.583	.858
E2	21.000	69.750	.563	.858
E3	19.440	66.673	.685	.848
E4	20.120	61.443	.614	.858
E5	20.160	65.557	.522	.865
E6	20.520	71.677	.530	.860
E7	20.240	69.940	.571	.857
E8	21.040	71.373	.575	.857
E9	20.800	69.917	.699	.850
E10	21.360	65.157	.665	.849

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
22.800	83.167	9.1196	10

附錄九、第二階段研究配合實驗教學進行之學習單

動態連結多重表徵視窗環境下
複數乘法學習之研究

教學實驗課程
學習單

教學者：許技江

實施時間：民國 98 年　　月　　日

使用時間：100 分鐘

作答者：　　班　　號姓名

電腦操作說明：

1.請開啟網路瀏覽器（*IE* 或 *FireFox*....）。輸入網址：
http://ppt.cc/iAW7
或 **http://tinyurl.com/dmf4wl**
或 **http://teach.ymhs.tyc.edu.tw/t1086/dirto/dir.htm**

2.如果看不到網頁中間的三角形 *ABC*，請點選下載網頁上的「支援 *Java* 安裝程式」，並且安裝。

3.安裝完成後，關閉瀏覽器（請勿重開機）。重複第 1 的動作，應該可以看到網頁中間的三角形 *ABC*。

4.點選網頁上的「進入複數乘法的教學網頁」。開始操作電腦輔助教學環境。

5.如果有疑問，請向老師提出。

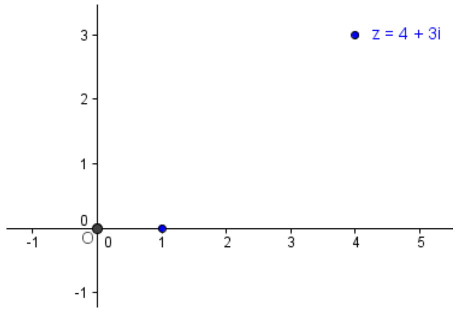
一、複數一般式轉極式

老師說： 複數 $z = a + bi$

1.**絕對值**怎麼計算？

2.**輻角**怎麼找？ *Ans*： $Arg(z) = \theta$，

$\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ ， $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$

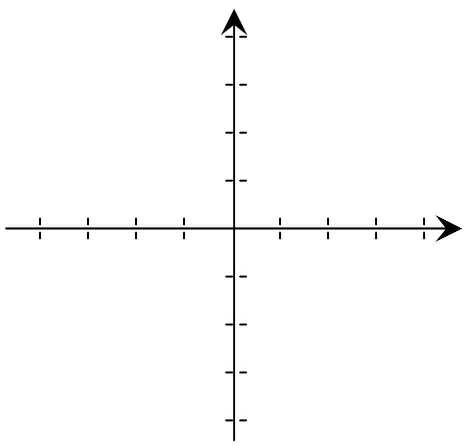


1.利用電腦的 *GeoGebra* 程式，找出複數 $z = -3 + 4i$ 的絕對值______________

輻角_____________

2.利用複數絕對值公式檢驗第 1 題電腦計算結果是否正確。

3.請在下圖複數平面上，畫出 $z = -3 + i$ 的位置，並標示出 z 的絕對值和輻角：



4.若 $z = -3 + i$ 的輻角為 θ ，則 $\cos\theta$ =____________，$\sin\theta$ =____________

P.1

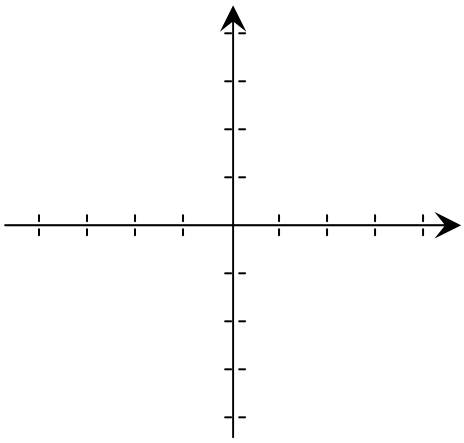
老師說：複數一般式轉為極式

找到複數 z 的絕對值為 r，輻角為 θ，則複數 $z = a + b\,i = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

例： $z = 4 + 3\,i =$

5. $z = -3 + i$ 的極式表示法為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

6.已知 z 的絕對值為 2，在下圖的複數平面上，繪出 z 點的位置：



P.2

二、複數極式轉一般式

想想看：複數平面上 $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$。當 z 的絕對值變大時，z 點會如何變動？輻角變大時，z 點會如何變動？

老師說：**極式轉一般式** $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = a + b\,i$，則 $a = r\cos\theta$ ，$b = r\sin\theta$

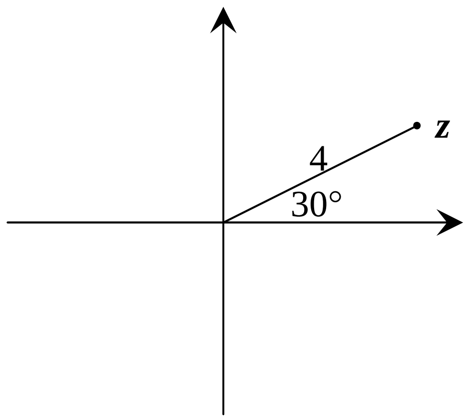
例：$z = 4\,(\cos 60° + i\sin 60°) =$

1.極式 $z = 2\,(\cos 70° + i\sin 70°)$的實部為__________

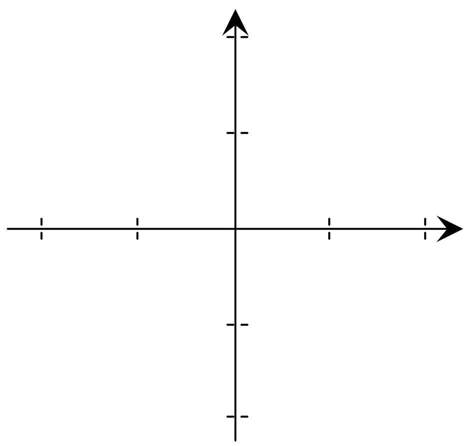
虛部為__________

2.在下圖的複數平面上，z 點的極式表示法為____________________

一般式表示法為____________________



3.在右圖複數平面上，
畫出所有滿足 $|z| = 1$ 的 z 點軌跡圖形。



P.3

三、複數一般式的乘法

老師說：一般式乘法分配律

$$(a+bi)(c+di)=ac+ad\,i+bc\,i-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

1.請在下面計算（$2+i$）($1+i$）的結果____________________

2.計算（$\cos 30° + i\sin 30°$）($\cos 45° + i\sin 45°$）=____________________

P.4

四、極式的乘法

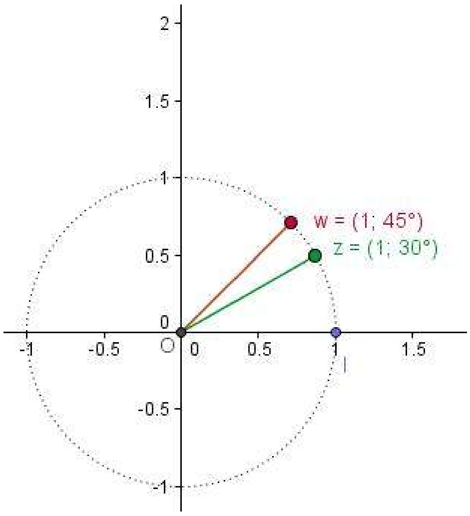
老師說：**重點**：**極式的乘法**：輻角相加（**旋轉**）、絕對值相乘（**伸縮**）

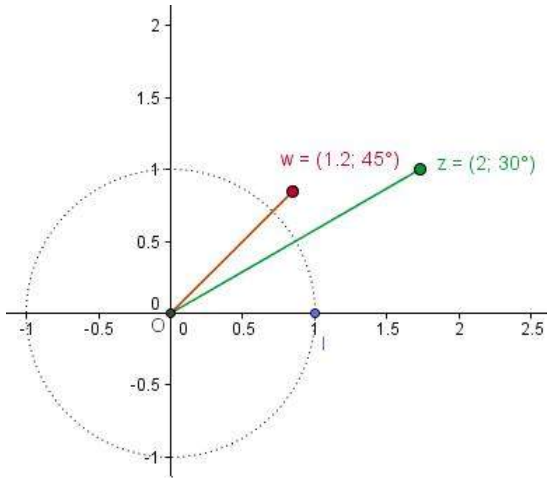
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\boldsymbol{r_1}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot\boldsymbol{r_2}(\cos\beta + i\sin\beta) = \boldsymbol{r_1 r_2}[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]$$

例：$(\cos 30° + i\sin 30°)\cdot(\cos 45° + i\sin 45°) =$

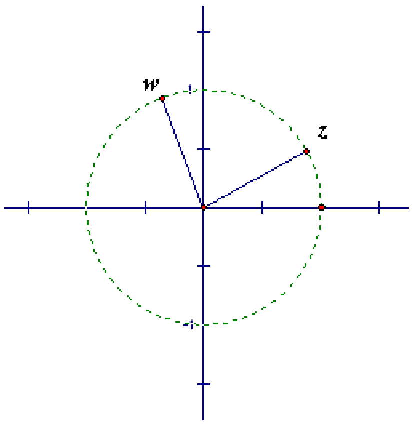
例：$2(\cos 30° + i\sin 30°)\cdot 1.2(\cos 45° + i\sin 45°) =$





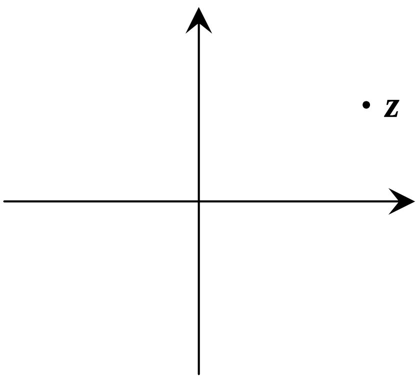
1.把一個複數 z 乘上極式$(\cos 30° + i\sin 30°)$，就是在複數平面上把 z 對原點旋轉____________。所以 z 乘上 i，就是 z 對原點旋轉____________；z 乘上(-1)，就是 z 對原點旋轉____________

2.在右圖複數平面中，單位圓上有兩點 z、w。請標示出 $z\cdot w$ 的位置。



P.5

3.在下圖複數平面上有一點 z，設 $w=z(\cos 30°+i\sin 30°)$。請畫出 w 的位置。



4.把一個複數 z 乘上 2，就是在複數平面上把 z 對原點 O 伸縮______________倍。

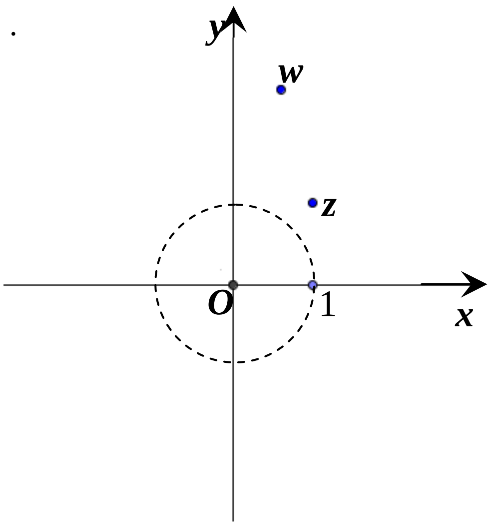
在複數平面上把 z 對原點 O 伸縮 $\dfrac{1}{3}$ 倍，則該點可以表示成________________

5.請在右圖的複數平面上，畫出下面複數的位置．

(1) $\dfrac{z}{|z|}$

(2) $\dfrac{z}{|z|}\cdot w$

(3) $z\cdot w$



五、極式的除法

老師說：$z=\cos\theta+i\sin\theta$，z 乘以多少會等於 1？

$\dfrac{1}{z}=$

設 $w=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ，$z=\cos\beta+i\sin\beta$ ，則 $\dfrac{w}{z}=w\cdot\dfrac{1}{z}=$

1.(1)設 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ，z 對原點旋轉________角度時到達 $\dfrac{1}{z}$ 。

(2)計算 $\dfrac{\cos 60°+i\sin 60°}{\cos 15°+i\sin 15°}$ =____________________

2.把一個複數 z 除以極式($\cos 30°+i\sin 30°$)，就是在複數平面上把 z 對原點旋轉____________________

所以 z 除以 i，就是 z 對原點旋轉____________________；

老師說：設 $w=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ，$z=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ ，

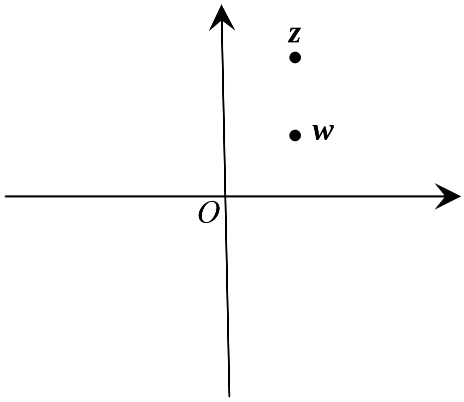
則 $\dfrac{w}{z}=$

重點：兩極式相除時，絕對值____________，輻角____________

P.7

3.在下圖的複數平面中，O 與 z 的距離為 2，O 與 w 的距離為 1，$\angle zOw = 25°$，則

$\frac{z}{w}$ 的極式表示法為____________



P.8

六、棣美弗定理與 n 次方根

老師說：棣美弗定理：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$$
$$\vdots$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

例：$(\cos45°+i\sin45°)^6=$

$$\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^n=r^n\left[\cos n\theta+i\sin n\theta\right]$$

例：$\left[2(\cos45°+i\sin45°)\right]^n=$

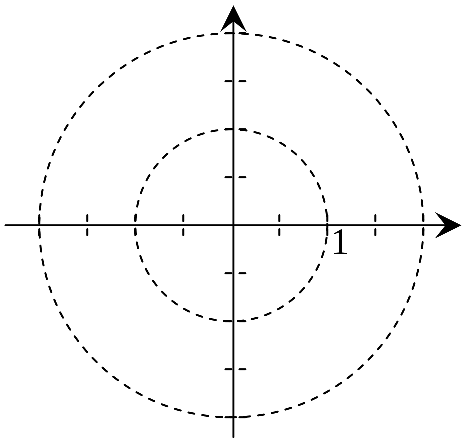
1.設 $z=\cos30°+i\sin30°$，若 $z^n=1$，求 n。

老師說：$z^n=1$，設 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，則 $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos0+i\sin0$

旋轉 n 次 θ 角回到 1 的點，則 θ 角可能是

2.一個複數 z 的 6 次方等於 1，此複數的可能答案爲________________

3.請找出 $z^3 = 8$ 的三個 z 解，在右圖的複數平面上標示出來。



P.10

附表一：

三角函數值表（一）

度	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
0	0.0000	1.0000	0.0000	——	1.0000	——	90
1	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	1.0002	57.2987	89
2	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	1.0006	28.6537	88
3	0.0523	0.9986	0.0524	19.0812	1.0014	19.1073	87
4	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	1.0024	14.3356	86
5	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	1.0038	11.4737	85
6	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84
7	0.1219	0.9925	0.1228	8.1444	1.0075	8.2055	83
8	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82
9	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81
10	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80
11	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79
12	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78
13	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77
14	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76
15	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75
16	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74
17	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73
18	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72
19	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71
20	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70
21	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69
22	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68
23	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67
24	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66
25	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	度

P.11

附表二：

三角函數值表（二）

度	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
25	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65
26	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64
27	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63
28	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62
29	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61
30	0.5000	0.8660	0.5773	1.7321	1.1547	2.0000	60
31	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59
32	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58
33	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57
34	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56
35	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55
36	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54
37	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53
38	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52
39	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51
40	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50
41	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49
42	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48
43	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47
44	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46
45	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	度

P.12