

2001 年第二屆亞洲物理奧林匹亞

競賽理論和實驗競賽試題

林明瑞

國立臺灣師範大學 物理系

理論第一題

月球何時會成為同步衛星？

月球自轉之週期，與月球繞地球運行(或稱公轉)之週期，目前正好是相同的，因此月球總是以相同的一面，面向著地球。這兩種週期所以會相同的原因，可能是月球與地球間的潮汐力，長期作用的結果。

不過，目前地球自轉之週期，較月球繞地球公轉之週期為短。因此，潮汐力仍然繼續作用，以致地球的自轉速度變慢，而月球與地球間的距離，也變得越來越遠。

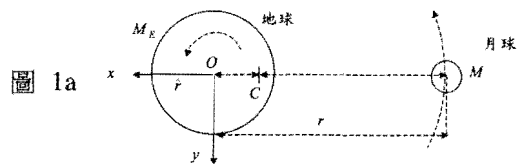
在本問題中，我們想估計，到底還需要多久，地球自轉之週期，才會等於月球繞地球公轉之週期。到那個時候，月球將成為一顆同步衛星，就像固定在天空中的物體一樣，永遠出現在同一位置，觀察者必須位在地球面對月球的那一面，才能看到月球。另外我們也想知道，當前述的兩種週期變成相同時，地球自轉一次，究竟需要多少時間。

我們採用兩種右手制的直角坐標系，做為參考基準。這兩種坐標系的第三坐標軸，彼此同向平行，均垂直於月球的軌道平面。

(甲)第一個坐標系，稱為質心(或簡稱 CM)坐標系，是一個慣性參考系，其原點位於「地球-月球」系統的質心 C 。

(乙)第二個坐標系，稱為 xyz 坐標系，原點位於地心 O ， z 軸與地球的自轉軸重合，而 x 軸則沿著月球與地球之間的連心線，其正方向與圖 1a 中標示之單位向量 \hat{r} 相同。在此坐標系中，月球永遠位在負 x 軸上。

注意：圖 1a 並未依照實際比例繪製，圖中兩個彎曲箭頭所指之方向，即為地球自轉及月球公轉之方向。地球與月球間之距離以 r 表示。



下列之數據，均屬已知：

- (a)在目前，月球到地球之距離為 $r_0 = 3.85 \times 10^8 \text{m}$ ，且每年增加 0.038m
- (b)月球目前之公轉週期為 $T_M = 27.322 \text{日}$
- (c)月球質量為 $M = 7.35 \times 10^{22} \text{kg}$
- (d)月球半徑為 $R_M = 1.74 \times 10^6 \text{m}$
- (e)地球目前之自轉週期為 $T_E = 23.933 \text{小時}$
- (f)地球質量為 $M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{kg}$
- (g)地球半徑為 $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{m}$
- (h)萬有引力常數 $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

答題時，可做以下各假設：

- (i)「地球-月球」是一個孤立的系統，與宇宙

其餘部分完全隔絕。

- (ii) 月球繞地球的軌道為圓形。
- (iii) 地球的自轉軸垂直於月球的軌道平面。
- (iv) 如月球不存在，且地球亦無自轉，則地球的質量分布將呈球對稱，地球的半徑為 R_E 。
- (v) 不論是地球或月球，當繞通過其中心之任一軸轉動時，其轉動慣量 I ，均與質量為 M 、半徑為 R 之均勻實體圓球相同，即 $I = \frac{2}{5}MR^2$ 。
- (vi) 地球周圍的水，相對於 xyz 坐標系，恆保持靜止。

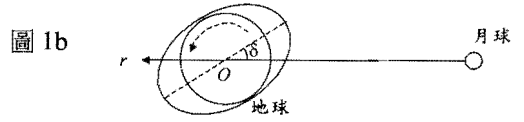
試回答下列問題：

- (1) 以質心 C 為參考點，「地球-月球」系統的總角動量 L ，目前的量值為何？
- (2) 當地球自轉的週期，等於月球公轉的週期時，地球自轉一次需時多久？答案以 T 代表，並以目前之「日(或天)」為單位。只需要求出近似解，因此可用逐次逼近法(疊代法)求解。
- (3) 將地球視為一自轉固體圓球，在靜止之海水層下轉動。有一種模型，考慮了自轉固體圓球與海水層之間的摩擦力。依其假設，由於地球轉動得較快，會拖拉潮汐，一起跟著前進，使兩端漲潮區之連心線，與 x 軸成一角度 δ ，如圖 1b 所示。

因此，以 O 為參考點時，月球對地球的潮汐力，會有力矩 Γ ，而使地球的自轉變慢。此模型假設 δ 角為固定值，與地球至月球之距離 r 無關，但等到月球公轉與地球自轉彼此同步時，摩擦力不復存在， δ 角也就變成零。因此，力矩 Γ 與地球至月球之距離 r 有一種比例

關係，即 Γ 與 $\frac{1}{r^6}$ 成正比。

根據此一模型，地球自轉與月球公轉的週期，需再過多少時間，才會相等？答案以 t_f 代表，並以目前之「年」為單位。



下列數學公式在答題時可能有用：

(M1) 若 $0 \leq s < r$ ，而 $x = s \cos \theta$ ，則

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rx}} \approx \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} + \frac{3x^2 - s^2}{2r^3} + \dots \right)$$

(M2) 若 $a \neq 0$ ，而 $\frac{d\omega}{dt} = b\omega^{1-a}$ ，則

$$\omega^a(t') - \omega^a(t) = (t' - t)ab$$

理論第二題

電偶極在磁場下的運動

在均勻恆定的磁場 \vec{B} 作用下，一群帶電粒子質點組的平移運動會和轉動互相耦合在一起。因此，動量守恆及沿著 \vec{B} 方向的角動量分量守恆也會受到修正，而與無磁場存在時的形式不同。這可由以下的問題來說明。

考慮一個由質量同為 m ，帶電量分別為 q 及 $-q$ ($q > 0$) 的兩個質點所組成的電偶極，這兩個質點是由一長度為 ℓ ，質量可以忽略不計的剛性絕緣棒所連結。令 \vec{r}_1 為帶電量是 q 的質點之位置向量， \vec{r}_2 為帶電量是 $-q$ 的質點之位置向量，且 $\vec{\ell} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 。將此電偶極對質量中心旋轉的角速度記為 $\vec{\omega}$ 。將質量中心的位置向量及速度向量分別記為 \vec{r}_{CM} 和 \vec{v}_{CM} 。相對論效應及電磁輻射效應可忽略。

作用在一帶電量為 q ，速度為 \vec{v} 的質點上的磁力為 $q\vec{v} \times \vec{B}$ ，其中兩向量的叉乘積 $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$

，用向量的 x 、 y 、 z 分量來表示為：

$$(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_x = (\vec{A}_1)_y (\vec{A}_2)_z - (\vec{A}_1)_z (\vec{A}_2)_y$$

$$(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_y = (\vec{A}_1)_z (\vec{A}_2)_x - (\vec{A}_1)_x (\vec{A}_2)_z$$

$$(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_z = (\vec{A}_1)_x (\vec{A}_2)_y - (\vec{A}_1)_y (\vec{A}_2)_x$$

(1) 守恆律

(a) 算出作用在電偶極之總力及相對於質量中心之總力矩，從而寫下電偶極質量中心的運動方程式及其對質量中心轉動的方程式。

(b) 從質量中心的運動方程式，導出修正後的總動量守恆律並將此對應的守恆量記為 \vec{P} 。將守恆之能量 E 用 \vec{v}_{CM} 及 $\vec{\omega}$ 表出。

(c) 角動量是由二個部分組成，一部分是由於質量中心的運動，另一部分是由於相對於質量中心的轉動。

由修正後的總動量守恆律及對質量中心轉動的運動方程式，證明以下定義之量 J 為守恆：

$$J = (\vec{r}_{CM} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \hat{B}$$

I 為相對於質心的轉動慣量。

注意：對任意三向量 \vec{A}_1, \vec{A}_2 和 \vec{A}_3 ，以下三關係式皆成立

$$\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = -\vec{A}_2 \times \vec{A}_1$$

$$\vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) = (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3$$

$$\vec{A}_1 \times (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) = (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_3)\vec{A}_2 - (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2)\vec{A}_3$$

重覆運用上列前二個公式可幫助導出本題中的守恆律。

在下題中，令 \vec{B} 的方向指向 z -軸的方向。

(2) 在垂直於 \vec{B} 的平面中運動

假設電偶極的質量中心一開始是靜止在原點，且向量 $\vec{\ell}$ 是指向 x -軸方向，電偶極起始的角速度是 $\omega_0 \hat{z}$ (\hat{z} 是 z -軸方向的單位向量)。

(a) ω_0 若小於某一臨界值 ω_c ，則此電偶極無法

對其質量中心完成整圈的轉動。求出 ω_c 。

(b) 對一任意 $\omega_0 > 0$ ，質量中心在 x -方向所能達到的最大位移量 d_m 為何？

(c) 剛性棒上所受到的張力為何？將其用角速度 ω 表示之。

理論第三題

表面原子的熱振動

某金屬元素之晶體係屬面心立方體 (fcc) 結構，此面心結構單位晶胞的原子規則性排列為在簡單正方體的每一頂點均有一個原子，及在各個面的正中心各分佈有一個原子，如圖 3a 所示。今以 $(a, 0, 0)$ 、 $(0, a, 0)$ 及 $(0, 0, a)$ 分別表示 x 、 y 、 z 軸上原子位置的座標，已知晶體的晶格常數 $a = 3.92 \text{ \AA}$ (即立方體的各邊邊長為 3.92 \AA)。

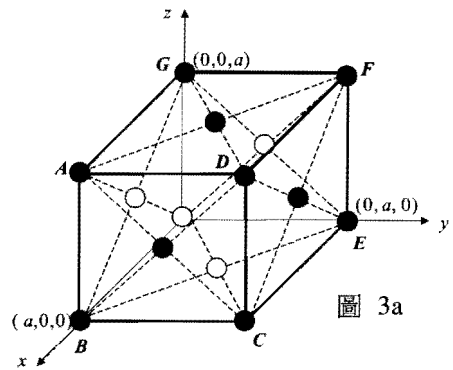


圖 3a

(1) 切割晶體，使 ABCD 所在之平面成為晶體樣品的表面，並選此表面從事低能量電子繞射實驗。動能 64.0 eV 的自由電子以 $\phi_0 = 15.0^\circ$ 之入射角 (ϕ_0 即入射電子束與樣品表面法線之夾角) 對此表面入射，入射面為 AC 與樣品表面之法線所構成。假設此低能量電子只能被最表面層原子所散射。

(a) 電子束的物質波波長為若干？

(b)若利用一偵測器來偵測繞射後仍不偏離入射面之電子，則偵測器與樣品表面之法線相夾那些角度時，可測出繞射電子束？

(2)晶體原子受熱將產生振盪，其振盪可視為簡諧運動，溫度越高其振盪的振幅也越大。低能量電子繞射可用來探測表面層原子熱振盪的平均振幅，繞射強度 I 與每秒鐘被散射進入偵測器的電子數成正比，已知繞射強度 I 與表面原子熱振盪位移 $\bar{u}(t)$ 的關係為

$$I = I_0 \exp \{ - \langle [(\bar{K}' - \bar{K}) \cdot \bar{u}]^2 \rangle \} \quad (1)$$

上式中 I 、 I_0 為絕對溫度 T 與 0 K 時的繞射強度， \bar{K} 與 \bar{K}' 別為電子繞射前、後的波向量，式中 $\langle \rangle$ 表示對時間的平均，而一粒子的波向量 \bar{K} 與動量 \bar{p} 的關係為 $\bar{K} = 2\pi \bar{p} / h$ ，式中 h 為卜朗克常數。

為量測表面原子的振盪振幅，以一準直電子束對此金屬晶體的表面入射，入射動能為 64.0 eV ，入射角 θ 為 15.0° ，偵測器被安排僅測量鏡面反射且為彈性碰撞電子束的強度。圖 3b 為某生所做之此表面的 $\ln(I/I_0)$ 與絕對溫度 T 的實驗關係圖，已知一個原子在垂直樣品表面方向(即 \hat{x} 方向)的熱振動總能量為 $k_B T$ ， k_B 為波茲曼常數。

- (a) 試求此表面原子在垂直表面方向的振動頻率。
- (b) 試求絕對溫度 300 K 時表面原子在垂直表面方向振動位移的方均根，即 $\sqrt{\langle u_x^2(t) \rangle}$ 之值。

下列各值為已知：

元素原子量 = 195.1

波茲曼常數 = $1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K}$

電子的質量 = $9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}$

基本電荷 = $1.60 \times 10^{-19}\text{ C}$

卜朗克常數 $h = 6.63 \times 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{S}$

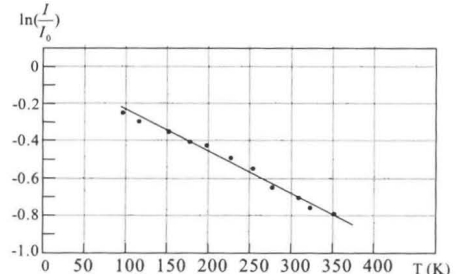


圖 3b

實驗試題

太陽電池的基本特性

一、背景說明：

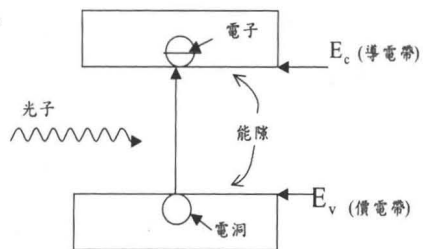
本實驗之目的主要在於探討太陽電池之基本特性，太陽電池能夠吸收電磁波，並將所吸收之光子能量轉換為電能。太陽電池之主要結構包含一個二極體，在沒有光的照射下其順向電壓、電流關係之經驗關係式為

$$I = I_0 (e^{\beta V} - 1)$$

式中 I_0 與 β 為常數。

二極體主要是由能隙為 $E_C - E_V$ 的半導體所構成(參看圖一)，當入射光子能量大於其能隙時，光子會被半導體所吸收，並產生電子、電洞對。

電子與電洞對會分別受到二極體之內電場的影響而產生光電流(照光產生的電流)。除了光電流之外，太陽電池還有一些重要的參數。



圖一

以下是一些專有名詞與基本原理的解說：

- (1) 短路電流 (I_{SC}) 為外部電路短路時，也就是負載電阻為零時，太陽電池的輸出電流。
- (2) 開路電壓 (V_{OC}) 為外部電路斷路時，也就是負載電阻無限大時，太陽電池的輸出電壓。
- (3) P_m 是太陽電池輸出的最大功率，也就是 $I \times V$ 的最大值。
- (4) 充填因子 FF 定義為 $P_m / (I_{SC} V_{OC})$ ，是代表太陽電池性能優劣的一個重要參數。
- (5) 因為光電流的產生是藉由半導體吸收光子而引起的，光電流的光譜反應可用於決定半導體的能隙。從能隙值，可推測半導體之材料為何。

- (6) 只要入射光子能量大於半導體的能隙都會對

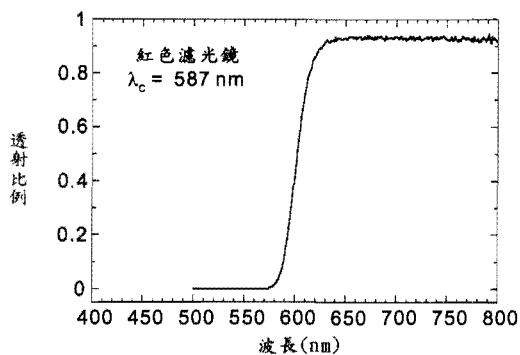
太陽電池之光電流 I_{ph} 的產生有貢獻，所以

$$I_{ph} \propto \int_{\lambda_c}^{\lambda_0} N(\lambda) d\lambda$$

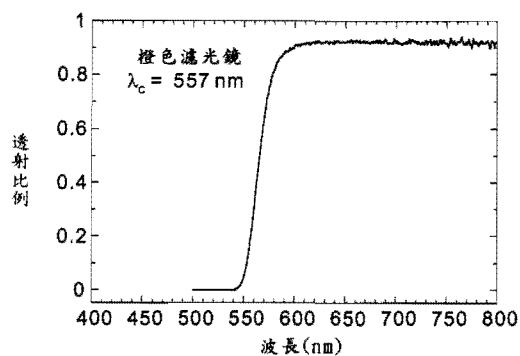
式中 $N(\lambda)$ 是當光波波長為 λ 時每單位波長範圍的入射光所產生之電子數目， λ_c 是濾光片的截止波長（參看圖二、圖三與圖四）， λ_0 為能夠產生光電流的最大反應波長。考慮太陽電池的光譜反應， $N(\lambda)$ 在可見光範圍內可以視為常數，而濾光鏡會濾除所有低於某個波長 λ_c 以下的光波。因此加上濾光鏡後，光電池所產生的光電流 I_{ph} ，

其光譜反應可近似為 $I_{ph} \propto (\lambda_0 - \lambda_c)$

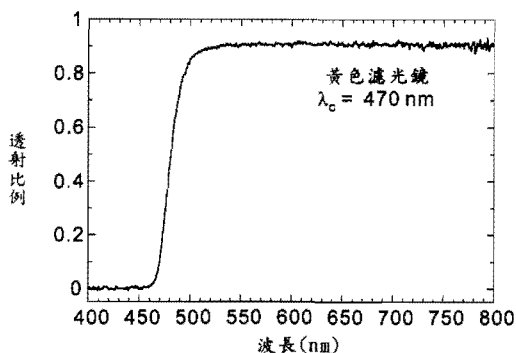
- (7) 光子能量 E 與光子波長的關係為的單位為 $E=1240/\lambda$ ， λ 的單位為 nm (10^9m)，而 E 的單位為 eV（電子伏特）。



圖二



圖三



圖四

二、設備與材料

- (1) 附接線的黑色盒裝太陽電池
- (2) 三用電錶二具
- (3) 乾電池 (1.5V × 2) 一組
- (4) 精密可變電阻 (5kΩ) 一個

【注意：不要將可變電阻的中間接頭（紅線）直接接到電池上，這樣做會燒壞電阻】

(5)白色光源附電源一組

(6)偏振片二個

【注意：偏振片對波長比黃色濾光鏡截止波長短的光，其偏光效果不佳】

(7)濾光鏡紅、橙、黃各一片（其光譜特性如圖二、圖三與圖四所示）

(8)偏振片或濾光鏡之鏡座（注意：偏振片和濾光鏡可以一齊裝在同一鏡座上）

(9)光具座（光凳）

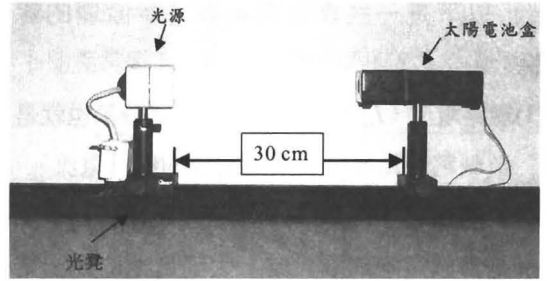
(10)接線裝置：小彈簧 6 個

(11)45 公分直尺一根

(12)方格紙（10 張）、半對數作圖紙（5 張）

(13)遮光板二片

【注意：避免因熱毀損，偏振片與濾光鏡應盡量遠離光源】



圖五

三、實驗步驟

(1)(問題(1)：3分)

在沒有光源的照射下，測量太陽電池順向偏壓時的 I-V 特性。

- 畫出量測所使用之電路圖。
- 利用測得的順向偏壓 I-V 數據，畫出 I-V 曲線並決定 β 與 I_0 之值。

(2)(問題(2)：7分)

在不加偏壓下，以白色光源照射，測量太陽電池之一些特性

【注意：必須將光源到太陽電池盒之距離保持在 30cm，如圖五所示】。

- 畫出量測所使用之電路圖。
- 量測短路電流 I_{SC} 。
- 量測開路電壓 V_{OC} 。
- 量測太陽電池在不同負載電阻下，I 對 V 之變化關係，並繪出 I-V 曲線。
- 決定太陽電池之最大輸出功率。
- 決定最大輸出功率時之負載電阻。
- 計算充填因子 $FF \equiv P_m / (I_{SC} V_{OC})$ 。

(3)(問題(3)：3分)

假設太陽電池的理論模型是由一理想電流源（光照產生光電流的電流源）、一個理想二極體、一個並聯電阻 R_{sh} 與一個串聯電阻 R_s 所組成。

- 畫出太陽電池受光照射下之等效電路。
- 推導該等效電路之 I-V 關係式，並以 R_{sh} ， R_s ， I_{ph} （光電流），與 I_d （流過二極體的電流）表示。
- 假設 $R_{sh} = \infty$ 與 $R_s = 0$ 所以兩電阻都能被忽略，求其 I-V 關係式並證明此關係式可以表示如下：

$$V_{OC} = \beta^{-1} \ln\left(\frac{I_{SC}}{I_0} + 1\right)$$

其中 V_{OC} 是開路電壓， I_{SC} 是短路電流，而 I_0 、 β 是常數。

(4)(問題(4)：4分)

光照效應

- a.量測並描繪出 I_{SC} 和相對光強度之間的關係曲線，並找出 I_{SC} 與相對光強度之間的近似關係函數。
- b.量測並描繪出 V_{OC} 和相對光強度之間的關係曲線，並找出 V_{OC} 與相對光強度之間的近似關係函數。

(5)(問題(5)：3分)

(附錄一)：

2001 年第二屆亞洲物理奧林匹亞競賽各國成績統計表

名次	國名	金牌	銀牌	銅牌	榮譽獎	理論平均	實驗平均	理論 + 實驗	參賽人數
1	中華民國	4	1	2	1	13.28	13.44	26.72	8
2	越南	1	2	2	2	9.88	12.26	22.14	8
3	澳大利亞	1	1	2	1	9.37	10.88	20.25	8
4	印尼	1	1	1	3	9.48	10.63	20.11	8
5	泰國			2	1	6.13	10.39	16.52	8
6	新加坡			1	4	5.56	10.34	15.90	8
7	以色列			1	3	6.87	8.44	15.31	7
8	哈薩克				1	2.50	7.42	9.92	5
9	馬來西亞					1.80	6.75	8.55	2
10	蒙古					1.50	2.72	4.22	6
11	印度					1.22	2.64	3.86	5
12	約旦					1.29	1.75	3.04	8
	獎牌總數	7	5	11	16				
	總人數								81
	平均分數					5.74	8.14	13.88	
	中數					5.85	9.39	15.61	
	標準差					4.12	3.95	7.87	
	最高					13.28	13.44	26.72	
	最低					1.22	1.75	3.04	
	滿分					30.00	20.00		

太陽電池隨入射光波波長的反應

- a.利用三個濾光鏡，量測並描繪 I_{SC} 和濾光鏡截止波長之間的關係曲線。
- b.估計太陽電池能適當工作的最大波長。
- c.推測製成太陽電池的半導體材料為何？
(提示：下列為常用半導體之能隙 InAs：0.36eV、Ge：0.67eV、Si：1.1eV、非晶態 Si(a-Si:H):1.7eV、GaN：3.5eV)

(附錄二)：

2001年第二屆亞洲物理奧林匹亞競賽得獎名單

名次	國家	姓名	性別	獎別
1	台灣	HSIN-YU TSAI (蔡欣妤)	女	金牌
2	台灣	CHIA-CHUN WANG (王嘉儔)	男	金牌
3	越南	BUI LE NA	女	金牌
4	台灣	WEI-YIN CHEN (陳威尹)	男	金牌
5	印尼	REZY PRADIPTA	男	金牌
6	澳大利亞	ALEKSEI BOIKO	男	金牌
7	台灣	TSUNG-YU KAO (高宗佑)	男	金牌
8	澳大利亞	GRAHAM DENNIS	男	銀牌
9	台灣	HSU-KUANG CHIU (邱旭光)	男	銀牌
10	越南	LE LU TUAN	男	銀牌
11	越南	NGUYEN BAO TRUNG	男	銀牌
12	印尼	FREDERICK PETRUS	男	銀牌
13	越南	DO CHINH	男	銅牌
14	澳大利亞	GREGORY LONDISH	男	銅牌
15	越南	QUOC CHINH NGUYEN	男	銅牌
16	泰國	TARA CHALERMSONGSAK	男	銅牌
17	台灣	SHENG-HSUAN LIN (林聖軒)	男	銅牌
18	澳大利亞	BAO-LOC VAN NGUYEN	男	銅牌
19	新加坡	WEN RONG LIM	男	銅牌
20	台灣	HONG-HIS LEE (李鴻禧)	男	銅牌
21	泰國	THITI TAYCHATANAPAT	男	銅牌
22	以色列	ODED TSUR	男	銅牌
23	印尼	ABRAR YUSRA	男	銅牌
24	泰國	UCHUPOL RUANGSRI	男	榮譽獎
25	印尼	AGUSTINUS PETER SAHANGGAMU	男	榮譽獎
26	越南	VUONG THI KIM THANH	女	榮譽獎
27	澳大利亞	MATTHEW VERDON	男	榮譽獎
28	台灣	HSIN-YU HUANG (黃新育)	男	榮譽獎
29	印尼	CHRISTOPHER SAMUEL ANDREAS HENDRIKS	男	榮譽獎
30	哈薩克	DANIL MURTAZIN	男	榮譽獎
31	越南	THANH NAM NGUYEN	男	榮譽獎
32	新加坡	FREDDY NG	男	榮譽獎
33	印尼	RIZKI MUHAMMAD RIDWAN	男	榮譽獎
34	新加坡	JIawei CHIU	男	榮譽獎
35	新加坡	WEI'AN WANG	男	榮譽獎
35	以色列	MICHAEL KHANEVSKY	男	榮譽獎
37	以色列	DORRI HALBERTAL	男	榮譽獎
38	以色列	NOAM RAPHAEL	男	榮譽獎
39	新加坡	JUN WEI TAN	男	榮譽獎