第貳章　文獻探討

本研究旨在探討國一學生在表面結構與深層結構的比例問題之解題表現及解題策略。本章綜合有關比例方面的相關概念與研究而分為三節，由於比和比例的概念關係密切，故第一節先介紹比和比例的概念結構；第二節為影響兒童解比例問題的因素；第三節為比和比例概念的相關研究。

第一節 比和比例的概念結構

一、比(ratio)的概念結構

(一)比的意涵

比是兩個數量之間的一種關係(Quintero, 1987)，更清楚地說，比是指兩個數量間比較的關係(Paige, Willcutt, & Wagenblast, 1968)，而比較數量的運算方法有兩種(Paige et al.)，第一種是相減的方法(the difference method)，第二種是相除的方法(the quotient method)，例如，哥哥的零用錢有 60 元，弟弟有 20 元，如果我們要比較這兩個數量之間的大小關係，可以利用兩數相減求出之間的差，也就是 60－20=40 元，由此結果可知，哥哥的零用錢比弟弟多，而且是多了 40 元；另一種比較方式是利用兩數相除求出它們之間的關係，也就是 60/20=3，代表哥哥的零用錢是弟弟的 3 倍，這時便隱含了比的概念，可得知他們之間的錢數比就等於 3：1，所以，比就是一種利用除法來比較兩數量關係的方法。

以數學的觀點而言，兩數相減所產生的差代表兩數之間絕對的改變量，若將兩數相除，則其意涵為兩數之間相對的改變關係。由於比是一種利用除法來比較兩數量關係的方法，所以，Lamon(1995)表示，比是傳達相對大小的抽象概念的一種比較性指標，也就是一個數量相對於另一個數量大小的數值表達方式(Ohlsson, 1988)。舉例來說，教室中有男生 24 人，女生 12 人，則其比的對應方式如下：

(1)將第一個元素對應到第一個數量，如：男生(第一個元素)有 24 人(第一個數量)

(2)將第二個元素對應到第二個數量，如：女生(第二個元素)有 12 人(第二個數量)

(3)比的值表達一個比較的數值，如：男生：女生=24：12=24/12=2

如上例，在離散量的情況下，比是在表達第二個數量中的“每一個”元素會有多少第一個數量的元素出現，也就是說每一個女生就會有 2 個男生出現；而在連續量的情況下，比則代表第二個數量中“每一個單位量(each unit)”就會有多少第一個數量出現，如長方形的長是 24cm，寬是 12cm，則它們的比是 24：12=24/12=2，代表長方形的寬每 1cm 時，長就應當為 2cm。所以，一個比傳達的意思是兩個集合的相對大小，而非真實的數量，例如，3：4 代表的意思是每 3 個圓圈就有 4 個方塊，或者是指圓圈的數量是方塊數量的 3/4，但 3：4 並沒有告訴我們圓圈或方塊真正的數量是多少，如下圖 2-1-1 所示：

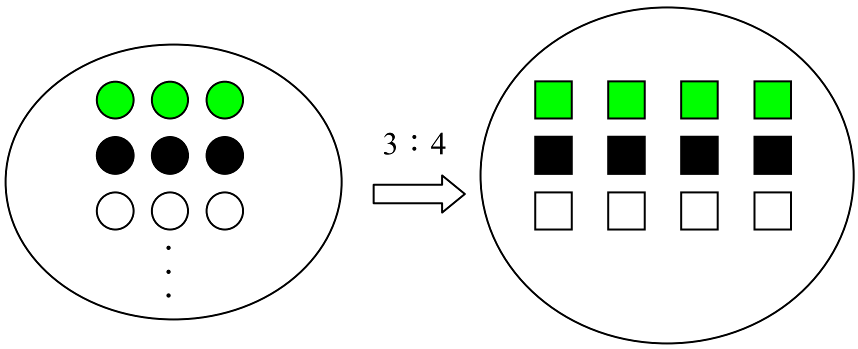

圖 2-1-1 比的“每一單位量”意涵

比是一個存在於日常生活現象中的數學概念，當我們用倍數、相當於、相對變化的語言描述兩個量之間的相對關係時，便是隱含了比的概念(鄭英豪，民 79)，例如，「哥哥的零用錢是弟弟的 3 倍，則哥哥和弟弟的零用錢比是 3：1」、「一顆蘋果的價錢相當於一顆西瓜的三分之一，則一顆蘋果和一顆西瓜的價錢比是 1：3」、「距離相對於時間的變化率稱為速率，若走完距離 4 公里共花了 1 小時，則距離相對於時間的比是 4：1」等。鄭英豪(民 79)及 Lamon(1995)皆認為「相對」是比的概念中最重要的成份，因此，「相對」概念的理解對學習比有密切的關係。

(二)比的符號及運算結構

「：」的符號在 1651 年被天文學家 Vincent Wing 第一次使用，在這之前，一個比是用一個”點”來表示，如 4‧5，意謂著 $\frac{4}{5}$ (Smith, 1991)，現今，我們都以「：」為比的符號，區隔並據以呈現兩量的大小關係，例如，兩人體重比為 56：43，披薩個數與價錢之比為 2：600。從 Paige、Willcutt 和 Wagenblast(1968)的觀點認為，如果學生知道比的不同表達方式，則當他們遇到不同的符號表示時就能夠輕易掌握比的概念，以下是他們提出最常見的五種比的符號表示方式：①3：4、② $\frac{3}{4}$ 、③3/4、④3 to 4 及⑤(3,4)，在國內的數學教材學習中，我們將以上的第二及第三種表示方式定義成「比值」－將比的前項除以後項所得的商(國立編譯館，民 83)，而國外則沒有再獨立出另一個名詞來區分兩者，都將之視為「比」。

在比的運算結構上，Ohlsson(1988)認為我們不能使用加法律(addition law)直接將比加起來計算，而是使用向量的加法律(law of vector addition)來呈現比較的兩個量，例如，甲、乙兩班男生人數相同，甲班中每 3 個男生中就有 2 個女生，乙班每 3 個男生就有 4 個女生，則兩班合起來我們不能使用有理數的加法律得到 2/3+4/3=6/3，而應該用向量的加法律得到(2,3)+(4,3)=(6,6)，然後再透過向量相等而得到(6,6)=(1,1)，代表兩班合起來後每 1 個男生中就有 1 個女生，如此的結果才是正確的。

(三)比的分類

Freudenthal(1983; 引自 Ohlsson, 1988)認為比有兩種，一種是內比(internal ratios)，表示比的兩量是在相同的層面下測量，例如，長方形中長和寬的比屬於內比，因為長和寬都是長度的測量；另一種是外比(external ratios)，表示比的兩量是在不同的層面下測量，例如：學校中學生人數和空間大小的比，因為學生人數和空間大小為兩種不同層面的量，所以屬於外比。一個比在描述單一個物件時可以是內比

也可以是外比，例如，長方形的長和寬的比是內比，而長和面積的比則屬於外比。不同物件(O_1、O_2)在不同的層面下(d_1、d_2)測量的量是無法做比較的，例如，一張桌子(O_1)的長度(d_1)和另一張桌子(O_2)的高度(d_2)做比較時是沒有意義的，只能同時比較兩張桌子的長度或高度，此乃屬於內比。

Singer 和 Resnick(1992)將比的問題分成兩類，第一類指的是在相同的測量空間下所測量出來的量，稱為「同類量」的比，其中又可以分成部份-全體(part-whole schema)或部份-部份(part-part schema)的關係，例如，全班人數有 30 人，男生人數是 16 人，女生人數是 14 人，則男生和全班人數的比是 16：30，因為比較的兩個量都是人數，所以，這樣的比稱為同類量，又屬於部份-全體的比；男生和女生人數的比是 16：14，因為男生和女生人數都是全班人數的一部份，所以稱為部份-部份的比。第二類則是指在不同的測量空間下所測量出來的量，稱為「不同類量」的比，又可稱為比率(rate)，例如，2 小時走了 10 公里，則距離相對於時間的比為 10 公里：2 小時，這裡的時間和距離屬於不同的測量空間，因此，這樣的比為不同類量的比，它們的比值是一種比率，而這裡的距離相對於時間所形成的量就是速率。

在兩個同類量中，若是兩者為不同單位，我們可先將其化為同單位，再用它們的度量來比，例如甲、乙兩繩的長各為 6 公尺、3 公分，因為測量的空間都為長度，所以為兩個同類量的比，因此，兩繩長的比為 6 公尺：3 公分，不過，這樣的比卻不像 6 公尺:3 公尺或 6 公分:3 公分來得有意義(Paige、Willcutt & Wagenblast, 1968)，因為 6 公尺和 3 公分的單位不同，所以在比較時，必須先化成相同的單位，所以甲繩長與乙繩長的比應為 600 公分：3 公分，即 600：3(=200：1)。

二、比例(proportion)的概念結構

(一)比例的意涵

雖然有很多人不清楚比例的數學定義，但卻仍具備比例計算的數學能力，比例的核心概念其實不困難，但若將其概念性質延伸，其困難度則會隨即提高。Chaim、Fey、Fitzgerald、Benedetto 及 Miller(1998)表示，比例是兩個比相等的一種陳述，一般而言，定義「兩個相等的比稱為比例，即 $a/b = c/d$ 」(Richardson, 1966 ; Mueller, 1969 ; Rees & Sparks, 1967 ; Heller et al., 1989 ; James & James, 1976 ; Narins, 2001 ;

Tourniaire & Pulos, 1985)，或其它類似的定義「兩個分數相等則稱為比例」(McConnell, Brown, Usiskin, Senk, Widerski, & Anderson, et al., 1998 ; Robison, 1966)，比例的定義內容主要是強調兩個比或兩個分數之間相等的關係，透過四個數或量的相等關係可以用來尋求其中一個未知數或未知量，即可形成一個比例的問題。

另外，Ohlsson(1988)指出，比例有兩種不同的表示方法，在數學上的比例是指「比與比之間的相等(equality between ratios)」，例如，三角形 ABC 和三角形 DEF 為兩個相似的三角形，則它們之間高的比 $\frac{h_1}{h_2}$ 會等於底邊的比 $\frac{b_1}{b_2}$ ，也就是 $\frac{h_1}{h_2}=\frac{b_1}{b_2}$ ，我們說這兩個三角形是成比例的；另一種比例的用法是用在日常生活當中，指的是「部份對全體的關係」，例如，教室中有 12 個學生，其中有 4 個女生，我們就說這個教室中女生的比例是 4/12，4 代表的是部份量的大小，12 指的是全部量，而 4/12 這個比例的值代表一個比較的數字表達方式。

Singer 和 Resnick(1992)將比例分成兩種不同的基模，一種是部份-全體基模(part-whole schema)，代表部份量對全體量的關係，另一種為部份-部份基模(part-part schema)，代表兩個部份量之間的關係，例如，有 10 顆彈珠，其中 6 顆是紅色的，4 顆是黑色的，因為紅色和黑色的顆數為部份量，所以 6/10 代表紅色彈珠對全體的關係，4/10 代表黑色彈珠對全體的關係，都屬於部份-全體的關係；而 6/4 表示紅色彈珠對黑色彈珠的關係，4/6 表示黑色彈珠對紅色彈珠的關係，則皆屬於部份-部份的關係。

比例和分數的概念常容易混淆，它們之間的差異在於分母的部份，分數的分母和分割的數量有關，但比例的分母則是和全部的數量有關，在真分數(proper fractions)的情況下這兩種意涵都是相同的，但在假分數(improper fractions)的情況下這兩者就有差別了，例如，我有兩塊披薩，每塊披薩平分成三小塊，結果我總共吃了四小塊，則可以表示成 4/3 或 4/6，前者表達的是分數，因為一塊披薩被分割成三小塊，所以

分母為 3，後者表達的是比例關係，因為二塊披薩總共被分割成六小塊，吃掉的部份佔全部的 4/6，其比例為 4/6。另外一個差別在於分數和比例的運算也不相同，例如，甲、乙兩班的全班人數皆為 y 人，甲班有男生 x_1 人，乙班有男生 x_2 人，則甲班男生的比例是 $\frac{x_1}{y}$，乙班男生的比例是 $\frac{x_2}{y}$，則這兩個合起來的男生比例應該是 $\frac{x_1+x_2}{y+y}$，而不是像分數的運算方式得到 $\frac{x_1+x_2}{y}$ (Ohlsson, 1988)。

(二)構成比例概念的數學要素

Lamon(1995)認為比例概念必須具備以下三個重要的數學要素,即相對和絕對改變、比感、共變性和不變性，茲將此三項要素說明如下：

(1)相對和絕對改變(relative and absolute change)

Lamon(1995)認為比例推理最重要的能力就是要能判斷相對和絕對改變的差異，以下的例子可說明之：

「有兩條蛇，甲蛇長 4 英呎，乙蛇長 5 英呎，經過二年後，甲蛇變成 7 英呎長，乙蛇變成 8 英呎長，請問，這兩條蛇在這兩年來的成長量相同嗎？」

從「絕對改變」的角度來看，這兩條蛇的成長量相同，因為 $7-4=8-5=3$，都是成長 3 英呎，但從「相對改變」的角度來看，每一條蛇的成長量應當相對於牠原來的長度，甲蛇的成長量是牠原來長度的 $\frac{3}{4}$，而乙蛇的成長量是它原來長度的 $\frac{3}{5}$，因為 $\frac{3}{4}>\frac{3}{5}$，所以甲蛇的成長量比乙蛇多，從相對比較的觀點，若乙蛇要和甲蛇的成長量相同，則牠應該成長原來長度的 $\frac{3}{4}$，也就是 $5\times\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$，因此，乙蛇要成長到 $8\frac{3}{4}$ 英呎($5+3\frac{3}{4}=8\frac{3}{4}$)才算與甲蛇的成長量相同。

從上述的例子可得知，學生在進行比例推理時，應該先學會要用絕對或是相對的立場來思考問題，對兒童而言，要移去他們使用熟悉的加法思考並開始產生相對性思考是相當困難的，因此，教師多呈現不同情境讓學生去做絕對或相對的選擇，或許能幫助學生採用相對性思考問題情境。

(2)比感(ratio sense)

所謂比感，就是對比的覺知，即學生能夠區辨在哪些情況下適合使用比的概念，哪些不適合使用。首先，他們必須瞭解到兩個數量間存在的關係為何，而且這樣的關係總是正確的，可以藉由同時探究比例關係的例子和非例子去發現構成一個比例情境下的必要條件為何，例如，假設學生知道有兩個量存在著第二個量是第一個量的倍數關係時，他們就應該瞭解到，只要知道第一個量是多少，就能透過這種倍數關係找出第二個量是多少了，藉由各種比例和非比例關係的例子，讓學生發展出對比例數學關係的直覺，幫助學生能很快察覺出比和比例情境的特徵。

(3)共變性和不變性：運算的等價(covariance and invariance：operational equivalence)

構成一個比的數量之間會有共變(一起改變)的關係，且也會有保持一種不變的關係，學生必須瞭解一件事實，當一個比是另一個比的倍數時，則這些比就是呈現相同的關係，例如，3 個人分 2 條巧克力相當於 6 個人分 4 條巧克力，雖然組成這兩個比的數量不相同，但第二個比卻等價於第一個比，在這同時，我們可以發現雖然某些關係是在改變，但某些關係卻依然不變。

三、比和比例的相關概念

(一)比和分數

比和分數似乎很類似，Paige、Willcutt 和 Wagenblast(1968)指出，比和分數看起來很像且常在相同的情況下被使用，但它們仍然有一些基本的差異。分數呈現的是單一個有理數，這只是對數的一個想法，這個數在數線上只是用一個單點來呈現，而比是較明確具體的概念，比的兩個數都是相關且真實的數，有具體物的呈現，例如，3 個男生比 2 個男生，7 輛車比 5 輛車，10 位醫生比 1 位醫生，比包含兩個不同真實的數，而不是只有兩個數而已，它呈現了真實物體的比較關係。

(二)比和函數

Ohlsson(1988)認為比和函數(function)的概念有密切的關係，例如，教室中每 4 個男生中就有 3 個女生，定義成一個線型函數 $y = f(x) = \frac{3}{4}x$，斜率為 $\frac{3}{4}$，截距為 0，當男生(x)有 20 人時，女生(y)就有 $20 \times \frac{3}{4} = 15$ 人，因此，不論教室中有多少學生，男生和女生人數都會保持相同的比。

(三)比和百分比、機率

Paige、Willcutt 和 Wagenblast(1968)認為百分比是一個特殊的比，它的比的第二項(後項)永遠為 100，它所形成相等的比的兩個項也具有一定的關係。Ohlsson(1988)認為比例概念可以利用不同的方式延伸出一些相關的想法，例如，假如我們限制全部的分割量為 100，則比例就形成了「百分比(percentages)」的概念；假如比例的分母指的是全部事件發生的總數，分子指的是某事件發生的情況數，則這個比例和出現的次數有關，也就形成了「機率(probability)」的概念。

Lamon(1995)認為比和比例的概念是代數課程裡的基礎，而變數、函數、線性方程式的圖形和向量也都是由比和比例概念延伸而來，這些都將比例表徵形式化，因此，不管在數學或科學上，包括幾何、計算、統計、化學和物理都需要具備比和比例的概念，才能進行比例推理。

四、比和比例的概念發展結構

比例概念的發展乃是兒童進入形式操作期(11 歲以上)的指標(Inhelder & Piaget, 1958)，依據皮亞傑的論點，認為兒童在進入形式操作期後才真正具有比例的概念，所以比例概念對認知發展階段具有其特殊的意義，是由具體操作期進入到抽象的形式操作期。

比和比例的概念發展是一起的(Lo & Watanabe, 1997)，它們牽扯到個人多重的概念領域，包括乘法、除法和有理數等相關概念，因此，在發展比和比例的基模時，有用的數學知識包括下列各項：

(1)數的結構，如：除數和倍數。

(2)多位數乘法和除法的概念基礎。

(3)熟悉乘法和除法的變化，包括商和部份的除法。

(4)有意義的乘法和除法運算。

(5)整合上面有理數概念的發展。

Lamon(1994, 1995)主張單位化(unitizing)概念的理解對學習比和比例有密切的關係，1958 年 Piaget(引自 Karplus, Pulos, & Stage, 1983)表示比例推理的結構也可以說是一個單位量(unitary)的結構，因此，Lamon(1995)提出一個比例推理的概念發展結構圖，如下圖 2-1-2 所示：

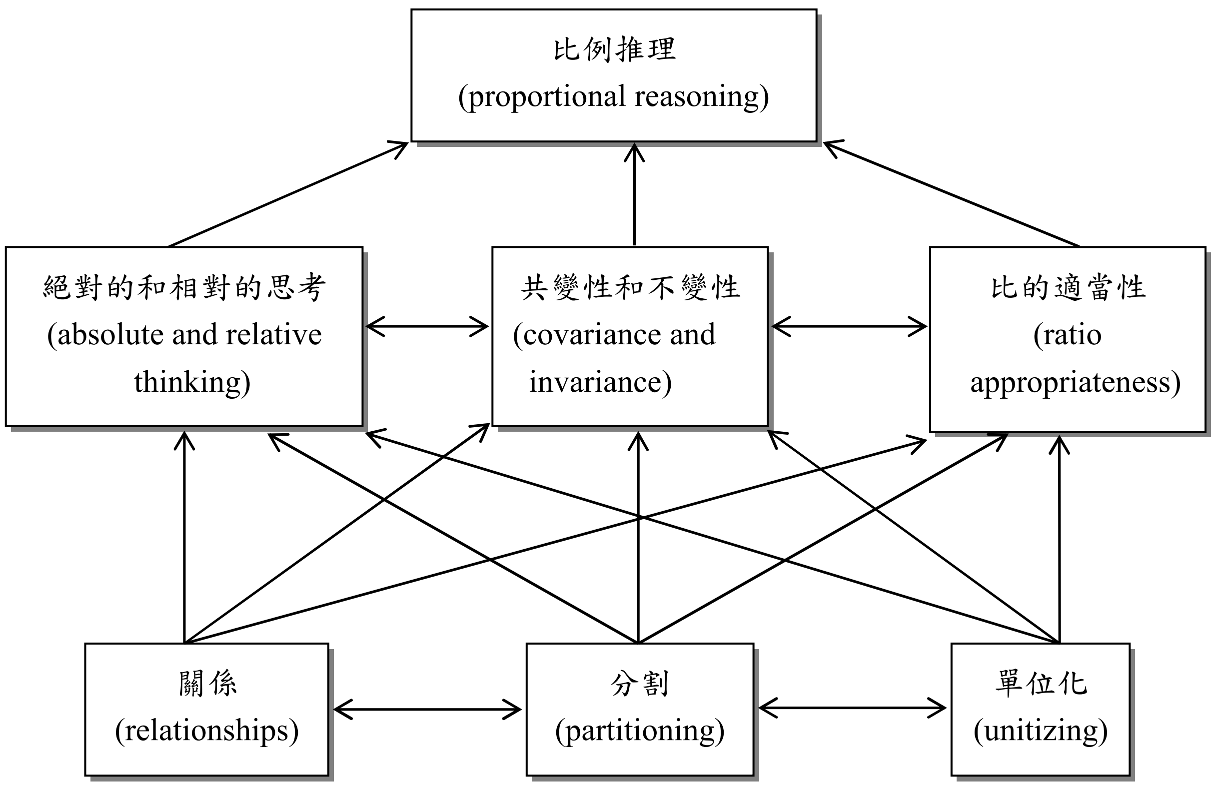

圖 2-1-2 比例推理的概念發展結構圖

Lamon(1995)認為藉由有技巧地在兒童早期三個相關算術思考領域上－關係(relationships)、分割(partitioning)、單位化(unitizing)建立教導情境，我們就可以幫助學生對比例推理的重要數學特點有所瞭解，以下介紹兒童在這三種情形的發展現象：

(一)關係的教導現象學

兒童早期對於比和比例的經驗之一就是產生於視覺上、直觀的層面，例如會透過看得見或想像的方式去評估一物的部份與其它不同物的大小關係，例如，大部份的學前兒童可以在一個誇張的漫畫或有其比例縮放大小的圖形中判斷其比例的正確性。而其它的共同經驗，如兒童可察覺到較多的錢可買較多的糖果，物體會因距離或扭曲而看起來不同，也知道一些日常生活中的物體一定會彼此保持相對的大小關係，這些經驗，在發展兒童的比感時都扮演一定程度的角色。

當孩童的年紀稍長後，他們不僅可以超越用對/錯、太大/太小、太多/太少來做判斷，還能進一步用口語闡述之間的關係，例如他們會說：「東西的距離愈遠，看起來就愈小」、「假如糖果的價錢提高，則用相同的錢就會買到較少的糖果」。當我們設想一些背景經驗要去教導我們的學生時，許多學生可能缺乏這些經驗，特別是在關係的口語表達上(Lamon, 1994)，所以需要花較多的時間去談論和寫下這些數學關係。這種心智分析關係的歷程所產生的困難，可能會依賴這些物體如何呈現而有所不同。一般而言，當物體是具體的呈現時，兒童較容易去判斷其比例關係，而當他是從記憶中去提取物體彼此之間正確的比例關係時是較困難的，也就是說，如果兒童只是純粹操弄心像(mental objects)而要去形成物體正確比例關係的過程則是較為困難的。

(二)分割的教導現象學

分割是另一個多數孩童在早期學前就已經開始接觸的活動歷程，這會在未來數學活動中形成一個牢固的、以行動為基礎的有效操作活動。當大多數的孩童還是嬰兒時，他們就被教導要和兄弟姊妹分享東西，在公平分東西的狀況下，有時他們必須決定如何去分割或切開包裝好的巧克力或糖果。

Pothier 和 Sawada(1983; 引自 Lamon, 1995)依據幼稚園至小學三年級的兒童所做的行為，提出他們對分割歷程的五個發展階段理論：

(1)年紀小的孩童在分東西的過程首先會使用折半(halving)的方法。

(2)藉由對算術的加倍過程去產生分母為 2 次方的分數。孩童在這前兩個階段只關心到數量而已，而沒有注意到是否每一塊都是等同大小。如$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{2^3}\ldots$。

(3)孩童能注意到其分割概念的公平性，是否他們分割的部份是相等或相同的，而且也有能力去呈現分母為偶數的分數部份。如$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}\ldots$。

(4)孩童能克服折半算術的限制，且採用一種新的切割和計數的程序去產生分母為奇數的分數部份。如$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{7}\ldots$。

(5)孩童能觀察到$\frac{1}{3}$的三等分等於$\frac{1}{9}$，且開始能夠使用乘法運算去分割合成數(composite number)。

當孩童對分數分割的部份及等值分數有所認識時,他們可以選擇更多種公平的方式去分割和切割東西，此時，有效及經濟的切割過程就會被建立，而且孩童也開始會選擇用較少的步驟去切割東西(Lamon, 1994)。

(三)單位化的教導現象學

採用理論的觀點來看，將比視為是一連串聚集所形成的單位，也就是說我們應該鼓勵學生盡可能將一個全體概念用多種不同的單位來重新塑造，並同時鼓勵他們在思考不同的問題情境下，使用不同的單位聚集方式是否也有差別。

建構一個參照單位(reference unit)或是一個單位全體(a unit whole)，然後能重新建構新的單位去解釋問題情境，這似乎是漸進發展複雜數學想法的一個關鍵能力，這個歷程在兒童早期就已經開始發展了，包括單位集聚(composition of units)漸進到增加複雜的數量結構，例如兒童早期數數策略的習得，兒童的分割策略和早期加法和減法策略的習得等。

早期孩童時期在形成集聚單位可能都是先從視覺數量化活動開始，例如有了精細的區分(subitizing)能力之後再擴展到數數活動，當一個兒童在數他的手指頭時，開始用 5 這個數字來代替一隻手的手指頭，就代表他已經具備較好的群組(grouping)能力；同樣地，當兒童在處理加法問題時從第一個數開始數進步到一次用「十」來數時，我們就可以解釋他的這種策略是一種較高層次的概念組織指標。
在 Callanan & Markman(1982)和 Markman(1979; 引自 Lamon, 1994)的研究中提到，語言階層的自然發展已經證實了當一個人可以用一個聚集單位來重新架構問題的情境時，那麼他就能做更複雜的思考，這樣的方式可以喚起他腦中部份與整體的基模(part-whole schema)，提供學生同時思考構成聚集和單一個別項時的情況。

Behr、Harel、Post 及 Lesh(1994; 引自 Lamon, 1994)等人認為，從加法和減法進入到乘法結構需要對多重的集聚方式有概念上的理解，一些最簡單的乘法結構需要有三個階段的單位集聚，例如，問「16 顆糖果的 3/4 是幾顆糖果？」時，有以下三個思考階段：

(1)考慮將 16 顆糖果視為 16 個單位，則有 16 個「1 單位」。

(2)將每 4 個「1 單位」集聚成一個「4 單位」，則會得到 4 個「4 單位」。

(3)將 4 個「4 單位」中的 3 個集聚就又形成了 3 個「4 單位」。

Schwartz(1988; 引自 Lamon, 1995)認為，除了數量的大小改變之外，大部份運用乘法的情形都是參照集聚的單位在做轉換，也就是說，乘法結構是結合兩個不同類別的數量，產生一個不同於被乘數和乘數類別的數量，例如，「每袋有 6 顆糖果，共有 5 袋，則總共有 30 顆糖果」，這樣的結果是一種「內涵量(intensive quantity)」，一種新的測量單位，也是介在兩個外延量(extensive quantity)之間的一種特別關係。例如，一輛車三小時行駛 207 公里，則它平均每小時行駛 69 公里，因此，乘法結構包含一些認知的複雜層級，雖然從數數和加法、減法的重覆歷程到更複雜的乘法情

境中內涵量測量單位的使用，這一連串連續的發展序列並不是很明確，但理論上，孩童數量結構的發展過程是不可能避開集聚單位的討論。

學生也需要選擇使用何種較好的單位來解決問題，所謂「好」，是指更易察覺的(sensible)、更經濟的、或更有效的(Lamon, 1993)，傳統以 1 為單位的方法(unit approach)不一定總是最好的解法，例如：「一盒 16 塊裝的巧克力賣 336 元，另一盒 12 塊裝的巧克力賣 264 元，請問哪一種較便宜？」很多教科書都會先分別求出 1 塊巧克力的價錢再去比較，但很多兒童及成人在解這種題目時，都會先求出 4 塊巧克力的價錢，原因是因為將總價去除以 4 和 3 比去除以 16 和 12 容易。

第二節 影響兒童解比例問題的因素

在研究學生解比例問題時，發現學生在比例問題上的表現受到很多因素的影響，Lamon (1993)指出兒童對策略的選擇部分是由兒童的特質決定，部分是由問題的特性所決定，因此，綜合整理文獻，大致上可將影響兒童解比例問題的因素分為兒童的特質及問題的特性兩大因素，其敘述如下：

一、兒童的特質

每個兒童都有其個體的獨特性與差異性，因此，兒童的不同特質會影響其解比例問題的表現，Tourniaire 和 Pulos(1985)將影響兒童解比例問題的特質分成七個因素，分別為：年齡、性別、智力、M－容量(M－capacity)、形式推理能力、場地依賴/獨立(Field dependence-independence, FDI)、態度和其它能力。由於本研究主要不是探討兒童的特質與解比例問題的關係，所以只就年齡、性別及智力提出討論如下：

研究指出比例問題解題成功的比率，隨著年齡增加而增加(何意中，民 77；郭素珍，民 72；Noelting, 1980a)，顯示年齡是影響比例推理表現的重要因素之一。另外有許多研究發現性別與比例推理能力的關係，發現兩者之間會隨著題目類型而產生差異；在何意中(民 77)的研究發現智力與比例推理能力有關，智力越高者其比例推理測驗分數也有較高的傾向。

二、問題的特性

不同的比例問題特性會影響到兒童的解題表現，而主要影響的因素分為以下二者，一為數字結構；二為試題內容，茲分別敘述如下：

(一) 數字結構

大部分研究比例問題時，其測驗題目通常會保持相同的題目內容而將其數字做變化。比例問題的數字結構會影響受試者的解題表現，而 Rupley(1981; 引自 Tourniaire & Pulous, 1985)認為影響比例問題難易度的數字結構有以下三個因素：

(1)整數比的呈現：

早期在比例推理的研究中指出：對於青少年在比例問題是相當困難的，特別是在比不是整數時(Lovell & Butterworth, 1966; Lunzer & Pumfrey, 1966; 引自 Kurtz & Karplus, 1992)，所以兒童較擅長解決整數比的問題，對非整數比問題認為較困難(Hart, 1981; Lo & Watanabe, 1997; Noelting, 1980b)，且 Hart(1981)也發現當簡單的整數比與可能的單價量沒有出現時，學生就很容易使用加法策略解題。

(2)數的次序：

意指比例中未知數出現的位置和其它三個數字的關係。由概念發展的觀點來看，未知數在後比例項的能力發展於未知數在前比例項之前，而且，兒童覺得未知數在第三比例項之問題比未知數在第四比例項之問題要來得困難(楊錦連，民 87)。

(3)數字的複雜性：

Lunzer 和 Pumfrey(1966; 引自 Hart, 1988)發現 6-14 歲的學生在判別比 1︰1、2︰1 和 3︰1 時比其它的比容易，代表數字的大小和比率的大小會影響學生的解題表現，數字較大或比率較大對兒童而言是較困難的。

(二) 試題內容

因為比例問題的題型不同會影響兒童解題的難易度，因此，探究比例問題的試題內容才能瞭解兒童解題的原因，以下分別說明之：

(1)題目型態：

比例問題的研究中，題目主要會以下列兩種類型來編製：一為缺項問題；二為比較問題(Lesh, Behr, & Post, 1989；Tourniaire & Pulos, 1985)。Karplus, Pulos 和 Stage(1980; 引自楊錦連，民 87)證實，比例問題中，比較兩個不同比值的比例問題，比求第四比例項的比例問題困難。

(2)問題情境的熟悉度：

Tourniaire(1987)指出，受試者在熟悉問題情境下解決比例問題，對受試者是比較有利的，兒童在熟悉的問題情境下因為較能想像或具備相關解題經驗，因此較容易解題成功。例如有些比例問題包含了物理概念，受試者需要同時瞭解比例及物理概念才能成功解題，這對受試者而言是較不熟悉的問題情境，因此就會影響其解題表現，也就不能正確評量出受試者真正的比例推理能力(Tourniaire & Pulos, 1985)。

(3)混合物問題：

在混合問題的推理題目中，因為受試者必須了解物品混合之後會產生什麼變化，才能進行有效的解題，因此，此類問題比其它比例問題困難(Tourniaire & Pulous, 1985)。

(4)連續量(continuous quantity)和離散量(discrete quantity)：

Horowitz(1981; 引自 Tourniaire & Pulos, 1985)指出，兒童在離散量的情境下比連續量更能想像具體的內容，因此，學生較易處理離散量的問題。

(5)外延量(extensive quantity)和內涵量(intensive quantity)：

外延量是可以直接計算或測量的量，如：長度、時間、體積等單一特性的量，外延量的計算是符合加法原則的，例如：甲線段是 12 公分長，乙線段是 21 公分長，則兩個線段接在一起的長度是 33 公分；而內涵量是由兩個量所衍生出來的比例關係，如速率、密度、利率，內涵量的計算是符合乘法原則的(劉秋木，民 85)。對兒童而言，內涵量的問題是較困難的題目。

(6)內在量與外在量：

外在量是指物體本身以外的數量，像蟒蛇問題中，所要求的是吃雞蛋的個數，對於蟒蛇而言是身長以外的外在量；其次，內在量是指物體本身的數量，像 K 字問題中，所要求的是 K 字中的某一部分的長度，對於 K 字而言是它內在的量(陳英傑，民 81)。外在量對兒童來說是比較習慣，常常處理的問題，因此外在量對兒童是比較容易的題目(林福來、郭汾派、林光賢，民 75)。

(7)內比和外比：

Karplus, Pulos 和 Stage(1983)認為在比例問題裡，兩個不同種類的比可以被拿出來做比較。如果比較的量是同一性質時，稱之為「內比(internal ratio)」；如果比較的量是不同性質的，稱之為「外比(external ratio)」。外比的說法是最近研究才提出來的，它是一個比較抽象的比的概念。而 Lawton(1993)認為強調比例式中其中一項的單位特徵可以增加對其兩項關係的辨識，進而增加解題者使用比例推理的機會。

(8)操作示範：

在個別面談或教學實驗中的一些操作題，教師所提供的實驗教具或操作示範，皆會影響學生比例推理的表現(陳英傑，民 81)。

總而言之，不同的試題內容會影響到兒童解比例問題的表現，代表比例問題的題目內容在兒童成就上有重要的影響力。

第三節 比和比例概念的相關研究

近幾十年來，國內外對比和比例概念的研究相當多，而比例概念發展的研究更是數學教育的重要議題。在國內外有關比例之研究中，其研究的方向主要約可分成下列三方面：一為比例概念瞭解層次與認知發展之研究；二為比例問題類型之研究；三為比例問題的解題策略之研究，茲分述如下：

一、比例概念瞭解層次與認知發展之研究

(一) 皮亞傑的研究

皮亞傑認為 11 歲以上的青少年認知發展已步入形式操作期，而所謂的形式操作期就是指兒童可以進行概念化和抽象化的心理活動，也就是說可以運用符號或語言來進行有系統的推理或作抽象性的思考。早期皮亞傑(Piaget & Inhelder, 1958)利用物理的平衡桿問題來探討比例推理能力，並將比例推理能力解釋為認知發展過程中「形式操作期」之代表性能力，結果依受試者的表現將比例推理分成下列五個層次(陳英傑，民 81；何意中，民 77)：

(1)第一層次：受試者根本就無法了解有關比例的題目。

(2)第二層次：受試者會使用定性的解法(qualitative solution)，很少去思考兩個因素之間量化的關係，較常使用加法策略來解決有關比例的問題。

(3)第三層次：就是皮亞傑所謂的前比例期(preproportional solutions)。受試者雖然也是使用加法策略，但是他們不使用常數差，而是直覺的認為若數量增加則差量也要跟著增加才能繼續維持平衡。

(4)第四層次：為邏輯比例期(logical proportions)，也就是說受試者已經有了INRC(Identity-Negation-Recirocal-Correlative)群的運作概念，他們能了解四項間的邏輯關係。

(5)第五層次：為測量比例期(metrical proportions)，也就是說受試者能把比例的原則自由應用到所有的情境中。

(二) Noelting 的研究

Noelting(1980b)將比例推理分成三個層次，茲分別敘述如下(陳英傑，民 81；何意中，民 77)：

(1)第一層次：操作前期，受試者只能夠比較兩個項。

(2)第二層次：具體操作期，受試者能夠用有序數對的共變來解決整數比的問題。

(3)第三層次：形式操作期，受試者能夠解決任意比值的比例問題。

(三) Karplus 的研究

Karplus 早期設計的比例題目「高先生和矮先生」的身高問題：
「高、矮先生以鈕釦來量，分別有 6 個與 4 個鈕釦高，若以迴紋針來量，矮先生有 6 根迴紋針高，那麼高先生有多少根迴紋針高？」

Karplus 將學生對「高先生和矮先生」的問題回答做層次上的分類，而「高先生和矮先生」問題已經被許多國家廣泛使用來研究學生的比例問題解題表現，以下是 1970 年對學生回答的分類(Hart, 1988)：

N：沒有解釋。

I：直覺或猜測。

IC：用不合邏輯的方式處理數據。

S：沒有使用正確的元素做乘法運算。

A：利用相減(即加法策略)做數據上的運算，而非使用比的方式。

AS：加法與乘法混用。

AP：如同 AS，但不是從題目中得到數據。。

PC：利用一個鈕釦是 1.5 個迴紋針的關係。

R：直接從數據中得到比例關係，使用正確的乘法運算。

國內黃湘武教授等也將學生的比例概念分成下列四個層次(引自林福來，民 73)：
I：猜測式的回答。

A：利用加法策略來求答案。

T：知道比值，但是沒有正確使用它。

R：正確利用比值。

(四) Quintero 的研究

Quintero(1987)讓九歲和十三歲兩組兒童判斷在不同數量的白糖和黑糖混合時的顏色深淺，以探究兒童在處理不同比的問題時其表現的情形，將其結果分成以下表 2-3-1 所示的四個層次：

表 2-3-1 Quintero 比的概念層次

層次	兒童概念	表現結果	錯誤原因	建議
層次一	兒童只注意到比中的一個單獨元素，沒有發現到兩個量之間的關係。	九歲組的兒童認為 6 匙白糖和 8 匙黑糖混合會比 4 匙白糖和 6 匙黑糖混合顏色淡，因為 6>4，沒有考慮到黑糖。	沒有注意到兩個變數之間的關係。	因為在學校很少正式教到一個變數是依賴另一個變數改變的想法。所以 Karplus、Pulos 和 Stage(1983)建議在呈現問題解答時，應提供兒童多考慮問題答案是否會受兩個或多個變數影響。
層次二	兒童知道一個比和兩個變數有關，但卻把它們視為加法的關係。	要求兒童比較兩個比 3/1 和 5/3 時，兒童說這個比是相等的，因為 3-1=5-3。	使用加法規則而未使用乘法規則。	用每一單位(per-unit)來呈現比，例如每袋有 15 顆糖果，每位老師有 20 個學生，幫助兒童瞭解每一單位比(per-unit ratio)的概念，避免因學生不瞭解這種表達比的語言而帶來錯誤。
層次三	兒童能夠處理整數倍的比例問題	每 3 匙黑糖中混合 9 匙白糖和每 2 匙黑糖中混合 8 匙白糖，兒童知道第一種混合是每匙黑糖中有 3 匙白糖，第二種是每匙黑糖中有 4 匙白糖，所以第二種顏色比較淡。	無法將整數比化成「每一單位比」。	在學習整數比時引導學生瞭解每一單位比的相等關係，教師可利用具體物或整數比的圖形讓兒童瞭解它是可轉換成「每一單位比」。
層次四	兒童能夠處理非整數倍的比例問題	每 2 匙黑糖中混合 5 匙白糖和每 3 匙黑糖中混合 8 匙白糖，兒童認為第二種顏色比較淡，原因是同樣在每一匙黑糖混合 2 匙白糖的情況下，第一種會有 1 匙白糖剩下，第二種只有 2 匙白糖剩下，所以第二種顏色比較淡。	兒童在比中出現分數及小數時的概念關係不瞭解，將其視為分離、不相關的數。	教師在幫助兒童瞭解非整數比的正確關係前，可先從讓兒童瞭解不同分數的解釋開始。

Quintero(1987)認為比的概念是很難學習和教導的，這應該成為教師和研究者發展有效教學方法的目標，因此，辨識學生不成熟或不正確想法中的概念及瞭解學生如何發展這些概念變成成熟的理解是很重要的事。

二、比例問題類型之研究

(一) Lesh 的分類

Lesh(1989; 引自楊錦連，民 87)將有關比例推理之問題類型分為七類：

(1) 求未知數問題(missing value problem)：即已知三個數 a、b、c，再利用比例概念求得另一未知數 x，如：a/b=c/x。

(2) 比較比值問題(comparison problem)：即問題中四項 a、b、c、d 均為已知，而來判斷比值之大小。Karplus, Pulos 和 Stage(1980)證實，比例問題中，比較兩個不等比值的比例問題，比求第四比例項的比例問題困難。

(3) 單位比的量數：例如每 2 秒跑 3 公尺，那每秒跑多遠？

(4) 遞移性問題(transformation problems)：即給一個關係式 a/b=c/d，然後四個值中，一個量數增加或減少一個定量時，判斷大於、小於或等於的關係；或是給一個關係式 a/b<c/d，而去發現一個數 x，使得(a+x)/b=c/d。

(5) 平均數問題(mean value problem)：兩個量數為已知，而去發現第三個，如：a/x=x/b、a/b=(a－x)/(x－b)。

(6) 將比轉換為分數：例如班級裡男孩和女孩的人數比為 18：16，男孩佔班級人數的多少？

(7) 轉換問題型式：例如給一個比例的描述，要以不同的陳述來描述相同的關係。

大部分的研究和教科書中，均以前面兩種類型居多，第三類為等分除問題，第四類到第七類為大部分的教學和研究所忽略。

(二) Tourniaire 和 Pulos 的分類

Tourniaire 和 Pulos(1985)將最近的比例研究綜合整理，將多位研究者所使用的比例測驗工具分成四類：

(1) 物理問題：受試者除了瞭解比例概念外，還需瞭解物理相關知識及儀器操作等，例如像平衡桿或影子投射的問題。

(2) 求第四項的缺項問題：比例式中已知三項，求 a：b=c：x 的第四項未知數問題。

(3) 比較比值問題：由題目四項已知數 a、b、c、d 判斷之間的比值大小。

(4) 機率問題：受試者必須具有統計的相關基礎概念才能解題。

(三) Lamon 的分類

在語意類型的研究裡，Lamon(1993)依不同的語意結構將問題分為熟知的量數問題(Well-chunked measures)、部分-部分-全體(Part-part-whole)、關係集合(Associated sets)及放大-縮小(Stretchers and shrinkers)四種類型，見表 2-3-2 之說明。

表 2-3-2 Lamon(1993)的四種語意類型分類表

	語意類型	內容說明	例子
1	熟知的量數問題 Well-chunked measures	包含兩個外延量的比較，而形成一個內涵量的量數(或比率)，此種關係構成我們所熟悉的實體。例如，速度是由距離及時間所構成，價格是由單價及數量所構成。	卡車走了 2、5、7 和 8 小時後的距離分別是 130 公里、325 公里、445 公里和 510 公里，請問卡車的速度是否一直保持相同？
2	部分-部分-全體問題 Part-part-whole	一個整體由兩個或以上的子集所組成，且子集之間具有比例關係。例如，教室中男生和女生人數的比，試卷中答對和答錯題數的比。	有兩盒蛋，其中一盒有一打的蛋，裡面有 8 顆白色和 4 顆棕色，另一盒有一打半的蛋，裡面有 10 顆白色和 8 顆棕色，請問哪一盒棕色的蛋佔的較多？
3	關係集合問題 Associated sets	有時候兩個數量之間的關係是未知或不明確的，經過問題情境清楚的陳述後才產生關係。例如，人數和披薩的比，車輛數和居住面積的比。	7 個女生分 3 塊披薩，3 個男生分 1 塊披薩，則男生和女生誰分得較多的披薩？
4	放大-縮小問題 Stretchers and shrinkers	當兩個量數呈現一個特殊的特徵，即一個量數增加時，另一個量數也會跟著增加；一個	有兩棵樹，五年前甲樹有 8 尺高，乙樹有 10 尺高，今年，甲樹有 14 尺高，

		量數縮小，另一個量數也會跟著縮小，兩個量數之間有固定比的關係。例如樹的生長情形，相似形的長度關係。	乙樹有 16 尺高，請問在這五年中，哪一棵樹的成長的比較多？

Lamon(1993)在研究中，透過訪談將 24 名兒童的解題策略分成六類，前三類歸為無結構性策略(nonconstructive strategies)，後三類歸為有結構性策略(constructive strategies)，如下表 2-3-3 所示：

表 2-3-3 Lamon(1993)的六種解題策略分類表

解題策略	特徵
無結構性策略(Nonconstructive strategies)	
無效(Avoiding)	對問題不感興趣
使用視覺或加法策略(Visual of additive)	嘗試錯誤； 沒有理由的回答； 純用視覺判斷(如：它看來來好像)； 不正確的加法策略
規則建立(Pattern building)	在不瞭解數值之間關係的情況下，使用口頭或書寫規則建立得到答案
有結構性策略(Constructive strategies)	
前比例推理(Preproportional reasoning)	直覺的，建構有意義的活動(如：圖畫、圖表、模擬、操作)； 使用一些相對性思考
質的比例推理 (Qualitative proportional reasoning)	將比視為單位來使用； 使用相對性思考； 瞭解一些數值間的關係
量的比例推理 (Quantitative proportional reasoning)	使用代數符號呈現比例，對數量和實際作用的關係有充分的瞭解

而從 Lamon 訪談 24 位兒童所使用的解題策略和語意類型題目發現，不同的語意問題會影響兒童的解題策略，而各語意類型問題依照兒童高層次的解題策略其人數由多到少的次序為：關係集合(23 人)→部分-部分-全體(20 人)→熟知的量數(13 人)→放大-縮小(4 人)，由此研究中亦可了解相對思考能力和單位化能力對解題的重要性。

Lamon 的研究發現語意類型問題若以具體的表徵呈現時，學生會使用較高層次的策略。例如，「部份-部份-全體」及「關係集合」問題是以離散量的方式呈現，因

為比較具體，所以學生會使用較高層次的策略來解題，而「熟知的量數」及「放大-縮小」問題類型，如速率、價格和放大/縮小等因為是連續量，所以學生偏向用較低層次的策略解題。

三、比例問題的解題策略之研究

在比例推理的研究中，經常編製比例問題測驗來分析學生的解題策略情形，透過正確與錯誤的解題策略來瞭解學生的比例推理能力，綜合國內外的研究將兒童經常使用的正確與錯誤的解題策略歸納如下所示:

(一)正確的解題策略

成功解答比例問題所採用的正確解題策略，依 Tourniaire 和 Pulos(1985)所述，大致可分成兩種基本的型式：一為乘法策略(multiplicative strategy)；二為疊加策略(building-up strategy)，一般而言，學生經常使用的正確解題策略為單價法、倍數法、公式法、疊加法和數量分解法，茲分述如下：

(1)乘法策略

a、單價法：先求出「一單位的量」，再依需要加以計算求解，稱為單價法(林福來、郭汾派、林光賢，民 75)。

例如：「買 3 枝原子筆花 24 元，則買 6 枝原子筆需要多少元？」

解法：24÷3=8，先求出 1 枝原子筆 8 元，

8×6=48，再求出 6 枝原子筆的價錢。

單價法是學生經常使用的策略，而且其正確的比率也最高。學生在還沒有接受公式法和十字交乘法的教學前，他們經常在買賣東西的時候有機會計算到單位價錢及其單位量，所以對學生而言，單價法似乎是一個解決比例問題很自然的方法(Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993)。

b、倍數法：所謂的倍數法就是先求出兩個等價的比中前項之間的倍數關係，然後再利用此倍數關係擴充到後項的方法求解(莊玉如，民 94)。

例如：「買 3 枝原子筆花 24 元，則買 6 枝原子筆需要多少元？」

解法：6÷3=2，先求出 6 枝原子筆是 3 枝原子筆的 2 倍，

24×2=48，再求出 24 元的 2 倍是 48 元。

c、公式法：利用比例關係式、比值相等方式或十字交乘法解題。

例如：「買 3 枝原子筆花 24 元，則買 6 枝原子筆需要多少元？」

解法：3：24=6：x，先列出比例關係式，

x=24×6÷3=48，使用內項乘積等於外項乘積求解。

或 $\frac{3}{24} = \frac{6}{x}$，$3x = 144$，$x = 48$，使用十字交乘法求解。

公式法是教師經常教與學生最有效率的方法(楊錦連，民 87)，但 Lamon(1995) 指出，只透過交叉相乘的方法去教學生如何解 $a/b = c/d$ 的比例問題並不能促進學生的比例推理能力，因為學生根本不瞭解其意涵，這只是形式上的操作而已，對於概念的理解並沒有幫助，大多數的人對比例的概念也似乎停留在這樣的印象。因此，學生即使學會了公式法，但往往他們都只是會背內項乘積等於外項乘積這樣的公式，雖然很會解題，但其實根本就不理解其原因。Freudenthal (1983; 引自 Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto, & Miller, 1998)指出學習比和比例的過程必須是探究式的引導，而非不斷的給予運算和自動化過程。

(2)疊加法

此方法是藉由加法來建立比率關係，然後擴充到第二個比率，即在「a：b=c：x」的比例問題裡，利用 a 和 b 的數字關係，直接以「a　b」、「2a　2b」、「3a　3b」…一倍一倍的累加之方法(楊錦連，民 87)。

例如：「買 3 枝原子筆花 24 元，則買 9 枝原子筆需要多少元？」

解法：先找出 3 枝原子筆 24 元，依序利用加法算出 6 枝 48 元，9 枝 72 元。

疊加法是兒童常使用的解題策略，但是當題目中出現非整數倍的情況時，就只有少數的兒童能成功地使用疊加法解非整數比問題(Hart, 1981)。而如果兒童堅持使用疊加法，則會產生的問題有：①逃避乘法、②不會求比值、③從不做分數的乘法(林福來，民 73)。

(3)數量分解策略

解題時將問題量數在計算過程中分解為兩個以上的量數，再予以組合的解題策略(Vergnaud, 1983)。

例如：「10 元可以買到 4 枝鉛筆，那麼 15 元可以買幾枝鉛筆？」

解法：10＋5=15，先把 15 拆成 10 和 5，而 5 元是 10 元的一半。

4÷2=2，再算 4 枝鉛筆的一半是 2 枝鉛筆。

4+2=6，最後再把 10 元和 5 元組合起來。

(二)錯誤的解題策略

Tourniaire 和 Pulos (1995; 引自 Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto, & Miller, 1998)指出：比例問題犯錯的原因包括忽略了重要的資訊、使用不變的差或加法策略。文獻中常見的錯誤解題策略包括忽略重要資訊、加法策略或常數差、誤解題意、比例項錯置、加減法和任意的運算，而一般最常出現錯誤的解題策略為「加法策略」，茲分述如下：

(1)忽略重要資訊：

兒童在解題時，將問題中重要的資訊或數據忽視不顧，以致於解題錯誤(何意中，民 77；林福來、郭汾派、林光賢，民 75)。

例如：「買 2 枝原子筆花 12 元，則買 3 枝原子筆需要多少元？」

解法：12×3=36，學生將 12 元當做 1 枝原子筆的價錢，所以直接乘以 3，顯然是忽略了”2 枝”這個訊息。

(2)加法策略或常數差：

林福來、郭汾派和林光賢(民 75)提出加法策略就是以加、減代替乘、除求解比與比例問題的一種解題方法，在 a：b=c：x 的比例問題中，如果以 x=c+(b－a)的方法求第四比例項，就稱此種解法為加法策略。這個策略比率的關係是由一個數減另一個數來計算，這個差數再應用到第二個比率(楊錦連，民 87)。

例如：「4 枝原子筆和 6 枝鉛筆的價錢一樣，那麼 6 枝原子筆和幾枝鉛筆的價錢一樣？」

解法：6–4=2，學生觀察到 6 和 4 差 2，

6+2=8，所以鉛筆都比原子筆多 2 枝。

Karplus、Pullos 和 Stage(1983)認為當一個孩子試著要建立一些數量間的關係時，他會比較傾向用加或減的方式，有時或許也會用乘的，但他會拒絕用除的，而加法策略或常數差策略則常用在非整數比的問題上(Hart, 1981; Tourniaire & Pulos, 1985)。由林福來、郭汾派和林光賢(民 75)的研究顯示我國約有 16%的國中生一再地使用加法策略來處理比例問題，而且學生使用加法策略的解題特性為①可處理一半、2 倍、3 倍等簡單倍數的比例問題、②不會求比值、③不會分數運算、④逃避乘法，而加法策略只是一種錯誤的解題策略，並不是認知過中必經的一站。Hart(1988)認為兒童在解決比例問題時所犯的錯不會因為成熟而自動消失，他們會使用不正確的加法策略，但如果老師教導學生解題策略可能會將學生的錯誤推理導正成功。

(3)誤解題意：

將題目中的文字、數字錯置為另一類的文字或數字(何意中，民 77；Tourniaire & Pulos, 1985)。

例如：「某國中一年三班，開學時決定自己粉刷教室，一開始他們的油漆是用 4 罐藍漆和 8 罐白漆調成的，後來發現不夠用，又買了 2 罐藍漆，請問他們還要買幾罐白漆才能調出和原來相同的顏色？」

解法：4+8=12，一開始總共用了 12 罐油漆，

12–2=10，用全部的扣掉藍漆等於白漆，顯然學生是將調成相同的顏色，誤解成相同的用量。

(4)比例項錯置

原來的比例式應為 a：b=c：x，卻將未知數的位置放錯，變成 a：b=x：c 或 a：c=x：b，因此得到錯誤的答案。

例如：「志祥有兩枝口徑相同的甲、乙塑膠管，甲管長 6 公分，剛好可以裝進 3 顆玻璃珠，請問乙管長 12 公分可以裝進幾顆玻璃珠？」

解法：6÷3=2，想法是每 1 顆玻璃珠 2 公分，

12×2=24，但卻用錯運算方式，得到 12 公分裝 24 顆玻璃珠，

正確應該為 12÷2=6，裝 6 顆玻璃珠才對。

(5)加減法：

不按比例增、減，而是隨意加一點或減一點來當做比例問題中的未知數(林福來、郭汾派、林光賢，民 75)。

例如：「光良將一塊重 4 公克膠泥放入裝滿水的玻璃杯中，會溢出 3 公撮的水，如果光良將另一塊重 7 公克膠泥放入相同裝滿水的玻璃杯中，則會溢出多少公撮的水？」

解法：3+2=5，想法是 7 公克比 4 公克重，所以溢出的水也會多一點，就隨意加一些，但卻不遵守比例的運算原則。

(6)任意的運算：

無視於給定的數據，將題目中的數字隨意的加減乘除運算，談不上有什麼解題策略(何意中，民 77；林福來，民 73)。

例如：「4 枝原子筆和 6 枝鉛筆的價錢一樣，那麼 8 枝原子筆和幾枝鉛筆的價錢一樣？」

解法：4×8–6=26，但不知為何如此做。

在何意中(民 77)的研究中發現，學生在忽略重要資訊、加法策略和任意的運算等錯誤的策略上是隨年級的增加而遞減，代表學生會隨著年齡的成熟而減少發生錯誤的機會。學生犯錯的原因有些是由於兒童粗心大意所影響，而有些則是缺乏比例概念基本知識所導致，可知兒童解題策略的應用，需要以比例的相關知識為基礎，如：對乘、除法結構的瞭解、分數與倍數的瞭解、單位化的概念與對比例結構的理解…等(楊錦連，民 87)。

綜上所述，比例問題主要研究方向包括：比例概念瞭解層次與認知發展之研究、比例題目類型之研究及比例問題的解題策略之研究，除此之外，還包括一些教學實驗的研究，以促進比和比例概念的學習，例如，在發展 NR 的計畫(The Numerical Relationships Program)中，有六個不同於傳統教科書教比例概念的特徵：(1)使用實驗教學活動；(2)使用學習環促使學生探究，從概念介紹到概念的應用；(3)指引學生去注意各個變數，並描述之間的關係；(4)給學生練習區別常數比、常數差和常數和的關係；(5)比例推理的發展是先讓學生去觀察發現到找到某種比的關係，然後再不斷的重複練習比的概念；(6)避免過度的使用計算能力和技巧(Kurtz & Karplus, 1992)。