國立臺灣師範大學理學院數學系

碩士論文

Department of Mathematics

College of Science

National Taiwan Normal University

Master’s Thesis

探討素養導向之教科書所培養的數學素養

—以對數單元為例

溫雅婷

Wen, Ya-Ting

指導教授：謝豐瑞博士

Advisor: Hsieh, Feng-Jui, Ph.D.

中華民國 109 年 8 月

August 2020

致謝

轉眼間在師大的日子已過六年，謝謝師大溫柔的承接我的所有。

感謝我的指導謝豐瑞教授，從大學修習教程時的指導；在大五實習感受到除了教學以外的細膩、真心以及溫暖；到了研究所也依舊帶給我溫暖堅定的支持。在老師身上看到對教學的熱誠，帶給我們獨到的見解。學術上總是能一針見血地給出建議，帶領我們感受寫論文的過程。跟著老師學習的日子，不僅能在數學專業與教學上成長，也透過老師的一言一行具象化身為教師的模範。

感謝在百忙之中抽空口試的王婷瑩教授與鄭英豪教授，很感謝老師們給予我諸多寶貴的提醒與建議，讓我看見自己的不足與盲點，使這篇論文能夠更豐富完整、更有架構。

感謝游森棚教官，引領我接觸組合學領域，也學習了資優教育的經驗。在教官身上獲得很多動力和當老師的能量。感謝女排的舉卿老師，以及一起征戰過的學姊學妹。感謝佳宜陪伴著我度過無數撞牆期跟焦慮低潮。慶幸我的碩士生涯中有師大數女排。謝謝排球讓我成為更堅毅、更勇敢的女孩。

感謝同居的怡穎、聖懷、禮安、智昇一起撐過這兩年，從懵懵懂懂的小碩一在書海中碰碰撞撞，一路互相扶持到論文的產出，能夠和優秀的你們一起畢業很開心。特別謝謝一同編碼、陪我討論論文的雲閔、怡穎、潔昀，沒有你們不會有這篇論文！感謝潔昀、怡萱、辰亦、中竣口試當天的協助，讓我們能夠專心口試。感謝石晴跟家甄，一起分享日常並創造兩年的晨食午餐時光，一起厭世也一起為了生活努力。謝謝大學與碩班階段的所有同窗，一起笑鬧、吃飯聊天、討論讀書、分享生活與未來，謝謝你們豐富我的求學生涯，讓我在師大充滿青春又值得懷念的重要回憶。

感謝幫我繳研究所報名費的伯鴻，雖然不同校仍時不時分享生活點滴、互相勉勵彼此。感謝海山高中的政業老師和進科老師，在實習後鼓勵支持我去讀研究所。沒有你們臨門一腳，今年我不會有拿到碩士學位的機會。

感謝高中好友們，有著中山人的那份溫暖堅定耀眼，給我肯定與鼓勵。感謝當微乙助教時的學生們。感謝板橋高中一年五班的學生們。感謝一起討論備課、分享上班日常的惠雯。

感謝爸爸、媽媽、弟弟總是無條件的包容、愛護、支持、陪伴我，成為我最強而有力的後盾。謝謝你們成為我的家人，教會我保有善良溫柔的心，謝謝我們一直深愛著彼此。

感謝在我的生命中幸運遇見的人們。謝謝時不時被我的焦慮打擾，又帶給我安定力量，待我溫暖又溫柔的人們。我會惦著歲月和夢想的重量，在心裡真誠的祝福彼此前進。

溫雅婷 謹識于
國立臺灣師範大學數學系
中華民國一百零九年七月

摘要

本研究旨在探討素養導向之高中教科書，在對數單元中意圖培養學生何種數學素養。故延伸出的研究問題為：探討教科書在此單元中，有多少比例的範疇在培養學生的數學素養；以及以質性說明來分析教科書如何安排培養學生數學素養之教材。

本研究使用內容分析法，研究對象為素養導向的教科書。研究者選擇一本和以往教科書編排方式差異較大的教科書。例如：使用科技工具解決問題，以及讓學生能經歷較多的發展活動、探索活動等。並在符合課本的教學脈絡下，界定出教科書分析時的基本單位。為了探討課本中的數學素養，本研究利用 PISA 2021 的 3 個解題歷程作為分析架構，分別是「形成(Formulating)」、「應用(Employing)」、「詮釋(Interpreting)」。在質性說明部分加入 PISA 2021 架構的數學推理能力和數學領綱的精神輔以說明。

主要的研究結果為：

1. 不論高一或是高二的教科書，在「應用」的比例皆遠高於「形成」、「詮釋」。高一的「形成」為 21.4%、「應用」為 78.6%、「詮釋」為 42.9%。高二 B 版的「形成」為 14.3%、「應用」為 92.9%、「詮釋」為 21.4%。

2. 若將教科書「有脈絡的分析單位」區隔出來，可以發現無論「形成」、「應用」、「詮釋」的比例都比「對數完整單元」高。

3. 深入分析教科書時，可以看到教科書在培養學生素養的方式。研究者選擇一些特別的例題或概念發展活動，分出以下四類：情境脈絡、活動脈絡、其他不同於傳統之輔助學習方式、課文內容。

4. 研究發現素養導向教科書和以往教科書較不同的地方在於呈現素養的方式，更加強學生參與，讓數學思考放在學生的身上。也有許多與生活、職業、事件相關的真實數據；並使用科技工具發展數學概念或是將數學結果呈現出在真實世界的意義，更反映出數學價值。

關鍵字：數學素養、教科書、解題歷程、素養導向。

目錄

表目錄

圖目錄

第壹章、緒論

第一節、研究背景與研究動機

經濟合作暨發展組織（簡稱 OECD）所籌畫的「國際學生能力評量計畫」（Programme for International Student Assessment，簡稱 PISA）是對全世界 15 歲學生學習成果的測試計畫。其計畫宗旨是發展教育方法與成果，為目前世界上具有極大影響力的國際學生學習評量項目之一。而此評量中有三個項目，分別是「閱讀」、「數學」以及「科學」。

當我們只看世界排名時，可以發現台灣學生的數學表現非常優異，始終維持在前 5 名，甚至在 2006 年時是第一名。在 2018 年的成果報告中顯示，台灣學生在數學表現上算是非常高的，但是「害怕失敗」卻也是世界第一。評比中呈現的「高成就、低興趣、低信心」現象，是台灣教育圈需要面對的問題。

學生害怕數學，抗拒數學，但是未來生活變化的速度越來越快。而數學素養被 PISA 認為是學生在面對未來生活挑戰時一項很重要的項目。那麼台灣的學生在面對未來的挑戰時，會不會想利用數學解決生活上的問題呢？

我想近年來教育部推動 108 課綱中所重視的「核心素養」理應是解決此問題的一個方向。然而除了 PISA 有提出「素養」這個詞外，各國學者們都有自己對該詞彙的見解。由於定義眾說紛紜，讓現場老師及學生家長對這次的教改產生疑惑、不確定、擔憂等等。現場老師們透過各個研習或是不同的管道認識「素養」，希望能將模糊的概念明朗化，並在課堂中培養學生「數學素養」。

而教科書的角色是在「課綱的精神」、「教師」、「學生」之間的重要媒介。課綱重視素養導向，因此課本也會朝素養的方向來編寫，教師透過課本傳達素養給學生，期望最終能培養學生數學素養。而教師在教學時利用教科書將課綱的精神教給學生們。因此我想了解教科書中擁有哪些素養？有什麼是編寫課本的編輯者在「素養導向」中在意的？而課本能帶給學生什麼素養？

研究者在翻閱教科書時發現有許多不同於傳統的編輯方式。例如：加入了工具的使用。教科書會利用計算機幫助學生看出真實的數據，並讓學生將數字詮釋回真實情境，使學生能更了解所求出解的意義。另外也會利用情境鋪陳數

學概念，讓學生能感受到數學在生活上的的實用性。在此之下，有時課文內容需要跨頁說明，或是將各個小段落一起合併討論才能看出完整的思考脈絡。在108 課綱之下的教科書加入了學習活動，因此不能只有看例題與習題，還要看教科書是如何鋪陳學習內容，如何安排學生的活動內容。

在高中課程中，我選擇課綱轉換中變動屬於較大的單元—「高中對數」。因為在過去的課綱中都是在高一把對數單元一次教完，但在 108 課綱中是先在高一介紹常用對數的概念及定義，高二才更深入了解其他底數的對數、對數律、對數函數、對數在生活上的應用等。

第二節、研究目的與研究問題

本研究之主要目的是探究素養導向之教科書，在對數單元中意圖培養學生何種數學素養。根據此目的列出本研究問題：

一、探討在素養導向之教科書的「對數單元」中，有多少比例的範疇在培養學生的數學素養？

二、在「對數單元」中，素養導向之教科書如何安排培養學生數學素養之教材？

第三節、名詞界定

一、數學素養：

OECD 定義的數學素養是：個體在各種真實世界的情境脈絡中，進行數學推理，並透過形成、應用、詮釋數學以解決問題的能力，包含運用數學概念、程序、事實與工具，來描述、解釋和預測現象。透過數學素養，個體能瞭解數學在世界中所扮演的角色，以及作為具建設性、投入性與反思力的 21 世紀公民，所應有的周延判斷和決策 (OECD, 2018a)。而謝豐瑞教授（2018）對數學素養的定義則是：有意圖與能力在恰當的時機用數學看待與探究情境脈絡中的問題。本研究融合兩者想法，定義數學素養是能在恰當的時機進行數學推理，並透過形成、應用、詮釋數學以解決問題的能力，來描述、解釋和預測現象。

二、情境脈絡：

採用 PISA 的定義，是指一個人所面對的問題從「真實世界」而來的，並將真實世界問題轉換成「數學世界」問題。

三、活動脈絡：

教科書安排有系統的教學活動，有意圖讓學生在解決問題時經歷設計好的脈絡，使其在發展「數學概念」的同時也能夠培養其他能力。教科書所鋪陳的邏輯活動，並不一定是來自真實世界的問題。

第貳章、文獻探討

第一節、數學素養的變遷

一、素養概念

近期「素養」一詞成為社會大眾經常接觸到的詞彙，他不僅可以和不同的專業領域結合使用，甚至在日常生活中人們也會很自然、在不知不覺之中使用。例如：文學素養、音樂素養、媒體素養、文化素養、數學素養、電腦素養、文化素養等等，都有可能會在報章雜誌、新聞、教育議題或我們平時對朋友的描述中提到。那麼素養的意涵是什麼呢？華人社會中能在《辭海》看到它對素養的解釋是指「平時的修養」；而西方社會最常使用的單字是「literacy」，在 Merriam-Webster 的字典中定義 literacy 是指「讀寫能力」。普遍認為要學習好一個語言，即是要學會「聽、說、讀、寫」的能力，而擁有這些語言能力的人，會被認為是擁有語言素養。那麼數學素養呢？是否也是擁有某些能力就可以被認定為有數學素養的人呢？

二、各國數學素養的使用名詞及定義

自 20 世紀下半葉，各國陸陸續續提出數學素養的概念。國內外不同的學者或是組織會使用不同的詞來形容或描述數學素養。最早出現用來描述數學素養的詞彙是 1959 年英國的「克勞瑟報告書」(Crowther Report)，Crowther 將 Numerate 和 Literacy 結合成 Numeracy，來表達數學的讀寫能力。並將科學專家擅長的數學能力(Numeracy)和藝術專家擅長的讀寫能力(Literacy)比喻成硬幣的正反兩面，說明兩者重要程度相等，應在課程中設計出相輔相成的元素以確保均衡教育。因此他所提出的讀寫能力不僅是將母語作為溝通的媒介，還有指道德、審美和社會判斷能力的發展。而 Numeracy 不僅是定量推理(reason quantitativel)的能力，還有對科學方法的理解和對科學成就的瞭解。該報告指出 Numeracy 可分為兩個面向：(1) 對研究現象的科學方法的理解——觀察、假設、實驗、驗證；(2) 在現代社會進行定量思考，認識到我們的問題在多大程度上是問題。

不同於英國，美國在描述數學素養時的詞彙有下列幾種，如：Mathematical literacy、Mathematical proficiency、quantitative literacy 等。1986 年 Mathematical literacy 一詞首度由美國數學教師協會(NCTM) 提出。該次任務的重要目標是以培養學生數學素養的課程改革（NCTM, 1989, 1991）。

隸屬於美國國家研究委員會(NRC)的數學學習研究委員會(MLSC)則是以 Mathematical proficiency 表示數學素養。該報告書為「累加向上：幫助兒童學習數學」(Adding it up： Helping children learn mathematics)，在報告書中說明若是一個人能成功學習數學，那麼他就擁有數學素養。他將編織繩索的五條線比喻成數學素養所需的主要五種能力，包含：(1)概念的理解、(2)程序的流暢、(3)策略的運用、(4)適當的推理、(5)具有積極的傾向。他們之間的關係越緊密就越能幫助學生成功學習數學。(Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001)

Steen 等人於 2001 年列出 quantitative literacy 的十項元素：(1)對數學的信心、(2)文化欣賞、(3)資料解讀、(4)邏輯思考、(5)決策、(6)情境數學、(7)數感、(8)實用技能、(9)先備知識、(10)符號感知。不同於 Steen 等人的論述偏向靜態的知識內容，另一位美國學者 David Pugalee 提出一個數學素養雙迴圈動態模型（Pugalee，1999），其中內迴圈代表數學素養的內動趨力，包含溝通、科技與價值；外迴圈表示數學素養的外顯程序，包含表徵、操作、推理和解題等；而且內外迴圈會交叉作用，互相輔助。

而數學素養影響最大最深遠的莫過於丹麥學者 Mogens Niss 以及荷蘭學者 Jan de Lange 了。Jan de Lange 是負責 PISA 評量的主席；而 Niss 則是和他的團隊發展出 KOM project，其目的是為了改變丹麥的數學教育現況。此計畫發展出的數學素養模型也是國際學生評量計畫(PISA)的奠石。Niss 使用 mathematical competence 表示數學素養，其定義為：「數學素養是在各式各樣數學脈絡的內外部，和數學能發揮功能的情境中，去理解、判斷、從事、和使用數學的能力」。而「組成數學素養的能力」稱作 mathematical competency，分別有八個項目(Niss,2003)。第二節會詳細說明。

綜合上述，我們可以知道不同的學者和機構對數學素養的內涵有不同的看法及解讀，所在意的部分也不甚相同。以下我們將會關心目前最受推崇的 Niss 的觀點以及國際經合組織(OECD)推動的 PISA 下所定義的數學素養。

第二節、Niss 的 KOM 計畫

Mogens Niss(2003)提到，丹麥的社會現況有些問題導致難以追求、辨識、特徵化和測量學生對數學的精熟發展，因此制定 KOM 計畫以解決問題，而他制訂了該計畫的問題如下：

一、現在的數學教育需要多大程度的創新？

二、各個階段的學生需要培養哪些數學素養(mathematical competencies)？

三、我們如何確保在整個教育體系中數學教學的發展和連貫性？

四、我們如何測量數學能力(mathematical competence)？

五、現代數學課程的內容應該是什麼？

六、我們如何確保數學及其教學的持續發展？

七、社會對數學教與學的要求和期望是什麼？

八、未來的數學教材會是什麼樣子？

九、在丹麥，我們如何利用國際數學教學經驗？

十、未來的數學教學應該如何組織？

其中在這個計畫中發展出 KOM 花辦，說明數學素養(mathematical competency)是數學能力(mathematical competence)的重要組成部分。如圖貳-1。

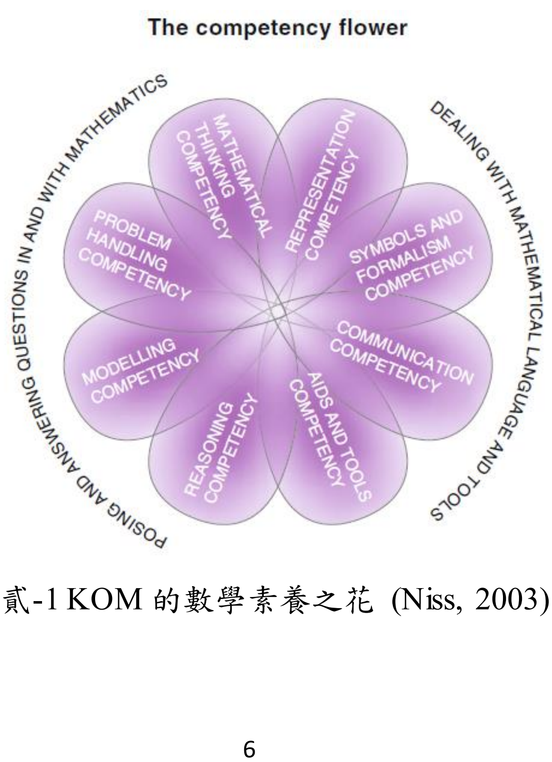


圖 貳-1 KOM 的數學素養之花 (Niss, 2003)

其八項數學能力的詳細內容分為兩部分。第一部分是指用數學問問題和回答問題的能力，包含：數學思維、擬題與解題、分析與發展數學模式、數學推理。第二部分是指處理和駕馭數學語言和工具的能力，包含：數學表徵、符號化與形式化、數學溝通、工具的使用。(Niss, 2003)

在花瓣中的深色部分代表每種能力都有一個「重心」，將其與其他能力區分開來。值得注意的是，這八項能力並不是互斥的。花瓣的中心代表這八項能力有一個非空的交集，也就是說，素養(competencies)並不是數學能力(mathematical competence)概念的劃分。且圖示的交集大小不代表實際關聯的強弱，因此在能力重疊的部分可以解釋為，每個能力的啟動都涉及到其他能力的二次啟動，其具體細節取決於上下文。另外擁有一個數學素養不是全有或全無的概念。

以建模素養為例：考慮在情境中可能會提出什麼樣的數學問題，以及這些問題可能會得到什麼樣的答案，此時展現出「數學思維素養」。而在數學情境(extra-mathematical situation)的各個方面和特徵進行數學化，導致提出必須解決的數學問題，此時就展現了「問題處理素養」。又在解決問題的過程中需要使用「數學表徵」形式，以及操縱「符號與形式化」，以及「工具的使用」。最後為了驗證並最終證明上述建模步驟所獲得的解決方案和答案，因此展現出「推理素養」。另外為了和其他人溝通（建模過程、構建模型、模型結果及其理由）因此可以展現出「溝通素養」，而且在此時說的人和聽的人都會活化此素養。

Niss 將數學素養的畫面清楚又詳細的勾勒出來，也讓 PISA 評測在最一開始選擇使用他的觀點修正一些後，用來解讀數學素養，幫助國際上能夠數學素養。

第三節、PISA2021 評量架構

一、PISA 2021 在數學的背景

從2000年開始的PISA測驗，除了在2003年和2012年將數學領域定成主要評量的領域，到了2021年數學又重新輪回主要的評量領域。

而國民的數學和教育有什麼關係呢？因為各個國家會利用教育來培養國民的數學能力。不只是基本的加減乘除運算，更希望他們能將數學應用在未來的生活中。例如他們可能會遇到健康、投資、氣候變遷議題、政府債務、人口成長、流行疾病的傳播以及全球化經濟等議題，若要解決這些問題都需要數學能力。各國期望透過教育培養出能在21世紀深思熟慮、積極參與、善於思考的公民。而前述所提到的問題都具有數量的因素(quantitative component)。若是要理解他、或是在一定程度上解決這個問題，是需要具備數學素養(mathematically literate)和數學思維(thinking mathematically)。而數學思維(mathematical thinking)是由推理驅動的而非基本的計算過程。除了解決問題之外，PISA架構還認為21世紀的數學素養包括數學推理(mathematical reasoning)和某方面的計算思維(computational thinking)。(OECD, 2018, p3)

現代人的生活越來越科技化，許多人都會依靠機器人、智慧手機、聯網機器等電腦設備，而且這些科技遍布各處的速度越來越快。許多簡單的活動已經自動化了,「數學在實際生活的有用性」的論點越來越站不住腳。比方說餐廳的服務員以前要利用紙筆加減乘除，計算出客人要付的金額；但現在的服務生結帳只需要按下機器的按鈕就可以馬上知道最後的金額。如果只是把數學看成一個有用的工具，這個觀點就忽視了數學在現今社會中越來越重要的關鍵特徵。我們再回頭想一下之前提出的問題：(1)學生需要學習什麼？(2)哪些學生需要學習這些？對PISA 2021來說，這些問題的答案是：每個學生應該學習（以及給予學習的機會）用數學的方式思考(think mathematically)，用數學推理（包括演繹和歸納）結合少量的基本數學概念支持推理(OECD, 2018, p4)。這為學生提供了一個概念架構，並可利用他來處理21世紀生活的定量維度(quantitative dimensions) (OECD, 2018, p4)。

隨著電腦和計算工具不斷的增加和發展，在日常生活和數學素養問題解決環境中，學生應具備並能夠演示計算思維能力(computational thinking skills)。因為應用此能力也是解決問題的一部分。計算思維技能包括模式識別(pattern recognition)、設計和使用抽象(designing and using abstraction)、模式分解(pattern decomposition)、如果可以用計算工具時，決定哪些可以用於分析或解決問題，以及將演算法定義為詳細解決方案的一部分。通過強調計算思維(computational thinking)在數學中的重要性，這個架構預期了參與國對計算思維在數學課程和教學中的作用的反思(OECD, 2018, p5)。

二、PISA 對數學素養的定義

在日常生活中人們將會碰到越來越多的問題與情況，這些是需要一定程度的數學能力才能正確的理解並處理之。對年輕人來說，能在學校充分的準備與學習，並在畢業後能使用數學來思考生活、規劃未來、解決生活中的問題是很重要的。而未來生活將會遇到各式各樣的情況既涉及數學，又依賴於數學推理（演繹和歸納）和問題解決(problem solving) (OECD, 2018, p6)。

在PISA 2021架構中，除了保留已經發展的數學素養基本概念外，也因為現今社會的日新月異，隨之帶來一些訊息告訴我們如何評估數學素養。目前的趨勢是人們不再需要進行基本的運算，而是利用新科技和新趨勢來跟上快速變化的世界。所以人們需要擁有創造力、積極參與以及為自己及未來做出好的判斷(OECD, 2018, p7)。就PISA而言，數學素養的定義如下：

> 個體在各種真實世界的情境脈絡中，進行數學推理，並透過形成、應用、詮釋數學以解決問題的能力，包含運用數學概念、程序、事實與工具，來描述、解釋和預測現象。透過數學素養，個體能瞭解數學在世界中所扮演的角色，以及作為具建設性、投入性與反思力的 21 世紀公民，所應有的周延判斷和決策 (OECD, 2018a)。

在PISA 2021架構中，數學素養的定義不只是關注於「使用數學來解決現實世界的問題」，還將「數學推理」視為數學素養的其中一個核心，強調了數學推理在問題解決週期(problem solving cycle)與數學素養(mathematical literacy)兩者的中心地位。圖 貳-2顯示出數學推理與問題解決之間的關係。

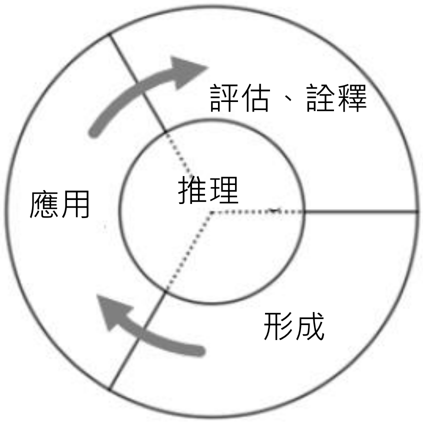


圖 貳-2 數學素養：數學推理和問題解決的關係

和以往的架構一樣，數學內容知識(content knowledge)包含數量、不確定性和資料、變化和關係、空間和形狀。真實世界的定義包含個人、職業、社會、科學。當學生能夠成功解決他所遇到的真實世界問題時會運用到數學推理，首先他們會利用數學內容知識來認識數學問題，特別是使用數學術語來表達真實情境的問題。而能將一個模糊、混亂、在真實情境中的問題轉換成數學問題時需要數學推理。一旦他能夠成功轉換，學生會需要使用數學概念、演算法、或是學校教的程序來解決，甚至他可能會需要制定策略來選擇他可以使用的工具以及決定使用工具的順序，這同樣需要數學推理。最後學生需要評估自己求出的數學答案，將並將結果詮釋到真實情境中。這是學生在解決問題時會經歷的過程，稱作解題過程(problem solving process)或建模週期(modelling cycle)。

PISA將解題過程視為學生展現數學素養的核心，包含「形成」(formulate)、「應用」(employ)、「詮釋」(interpret and evaluate)。「形成數學情境」(Formulating situations mathematically)是指學生能用數學來描述情境，在他看到數學可以用來理解或解決一個特定的問題或提出的挑戰時，並判斷出他能夠運用數學推理（演繹推理和歸納推理）來確定應用和使用數學的機會。它包括能夠將所呈現的情況轉換成一種適合數學處理的形式，提供數學結構和表徵，識別變數並簡化假設來說明解決問題或迎接挑戰。「應用數學」(Employing mathematics)包括應用數學推理，同時應用數學概念、程式、事實和工具推導出一個數學解決方案。它包括進行計算，處理代數運算式和方程或其他數學模型，以數學方式從數學圖表和圖形中分析資訊，發展數學描述和解釋，並使用數學工具解決問題。「詮釋數學」(Interpreting mathematics)包括對數學解決方案

或結果的思考，並在問題或挑戰的背景下解釋它們。它包括運用數學推理來評估與問題背景相關的數學解決方案，並確定結果在這種情況下是否合理和有意義，還要決定在解釋所求答案時突出顯示什麼(OECD, 2018, p11)。

PISA 指出了學生作為一個積極的問題解決者時所參與的三個過程。然而並不是每個階段都要參與，尤其是評估。因為測驗的現實面，通常在一般情況下，數學建模週期的重要部份都是由他人所建構好的，最終學生只需要經歷一些步驟即可。而在現實面上，當一個人在解決問題的過程中可能會搖擺不定，會回顧以前的決策與假設，甚至繞著整個周期進行多次的循環。如圖 貳-3。

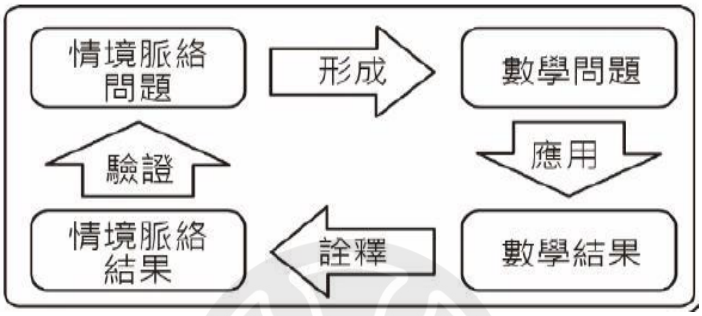


圖 貳-3 解題過程(problem solving process) (PISA, 2018)

此外，學生在解決問題時應該要有計算思維的能力，計算思維包含抽象化、演算法思維、自動化、分解、一般化。此能力在三個問題解決的階段都可以用來分析、解決問題。PISA 2021的架構是第一次融合了數學思維和計算思維(mathematical and computational thinking)的觀點，計算思維也是數學推理和問題解決過程的核心。

而在PISA 2021架構中比以往多加入了21世紀能力(21st century skills)。值得注意的是，他們並不是為了PISA而特別開發出21世紀的能力，而是在已經確定的21世紀能力中找出同時符合架構的精神以及數學素養的定義的那些能力。

因此數學素養包含兩個方面：數學推理和問題解決。在使用數學解決真實世界的問題中數學素養扮演一個重要的角色。此外，數學推理超越了解決真實世界問題的範圍。數學推理是一種評估和提出論點的方法，能夠評估和詮釋相關的解釋和推論。一個人可以根據不斷冒出的資訊做出符合邏輯的判斷，這些資訊中包含量(quantitative)、邏輯、隱含等意義。這也是為什麼數學推理對發展21世紀的能力是有貢獻的。

數學素養的定義明確的包含數學工具的使用。這些工具包含不同的物理設備、數位設備、軟體、計算設備。以電腦為基礎的數學工具在21世紀的工作場所中越來越普遍使用。隨著社會越來越進步，人們在解決日常問題或是生活問題時，要求在數學推理的過程中使用計算工具(computational tools)，這提高了人們對數學素養的期望(OECD, 2018, p19)。圖 貳-4顯示出數學推理、問題解決、數學內容、21世紀能力之間的關係。

圖 貳-4 PISA 2021：數學推理、問題解決、數學內容、21 世紀能力之間的關係

三、數學素養的組織架構

PISA 評量是測驗 15 歲學生在面對問題時，能夠在多大程度上進行數學推理和熟練的處理數學問題，而這些問題大部分都在真實世界中發生的。圖 貳-5 說明數學素養的模型，包含數學推理、三個數學問題解決的過程、15 歲學生所學的數學內容知識、真實世界中會遇到的挑戰以及 21 世紀能力。由於在 PISA 2021 架構中強調數學推理和三個數學問題解決的過程，故以下將詳細說明這兩者的內容。

圖 貳-5 PISA 2021 數學素養模型

(一)、數學推理

數學推理包含評估一個情境、選擇策略、得出有邏輯的結論、發展和描述解答、辨識出如何應用答案。邏輯推理的能力以及用能讓人信服的方式提出論點的能力，是當今世界越來越重要的技能。透過數學，學生們可以知道使用適當的推理能得出正確的結果和結論；而這些結論是合乎邏輯且客觀的，不需要任何外部權威的證明。這種推理遠遠超出了數學的範疇，並且可以在數學中最有效的學習和實踐。而在學校中所能習得的關鍵理解包含以下六點(OECD, 2018, p15)：

1. 了解量、數系和它們的代數性質

   (Understanding quantity, number systems and their algebraic properties)

2. 欣賞抽象符號表徵的力量

   (Appreciating the power of abstraction and symbolic representation)

3. 看見數學結構和規律

   (Seeing mathematical structures and their regularities)

4. 辨識出函數和量之間的關係

   (Recognising functional relationships between quantities)

5. 使用數學建模到真實世界中

   (Using mathematical modelling as a lens onto the real world (e.g. those arising in the physical, biological, social, economic, and behavioural sciences))

6. 了解變異是統計的核心

   (Understanding variation as the heart of statistics)

這些描述所要表達的是，學校數學中是如何呈現出推理的，以及應該在教學中加強他們的出現，並幫助學生認識到如何在新環境和不同環境中應用他們。

(二)、三個數學問題解決的過程

描述個人如何將問題的背景與數學聯繫起來從而解決問題的數學過程。

1. 將情境問題轉化成數學問題

   (Formulating situations mathematically)

   指個人能夠識別和識別使用數學的機會，然後以某種上下文形式呈現的問題提供數學結構。包括下列活動(OECD, 2018, p20)：

   (1) 從列表中選擇適當的模型。
   (2) 辨識出在現實世界中數學面向的問題，並確定重要的變數。
   (3) 識別出問題或情境中的數學結構(包括規律、關係和模式)。
   (4) 簡化一個情境或問題，使之能經得起數學分析的考驗。
   (5) 能從上下文確定出數學建模和簡化背後的限制和假設。
   (6) 用數學方法表示一個情境，如使用適當的變數、符號、圖表和標準模型。
   (7) 以不同的方式表達問題，包括根據數學概念組織問題，並作出適當的假設。
   (8) 理解和解釋特定於情境問題中的語言與用數學表示問題所需的符號和形式語言之間的關係。
   (9) 把一個問題翻譯成數學語言或表徵。
   (10) 確認問題的各面向與已知問題或數學概念、事實或程序相符合。

(11) 從各種計算工具中選擇並使用最有效的計算工具來描述一個被情境化的問題之內的數學關係。
(12) 創造一系列有序的(逐步的)指令來解決問題。

2. 使用數學概念、事實、過程、和推理
(Employing mathematical concepts, facts, procedures and reasoning)

指能夠應用數學概念、事實、程序和推理來解決數學問題並得出數學結論，包括以下活動(OECD, 2018, p21)：

(1) 進行簡單計算。**[1]
(2) 得出一個簡單的結論。**
(3) 從列表中選擇適當的策略。**
(4) 設計和實施策略以找到數學解答。
(5) 使用數學工具，包括科技，來幫助找到精確或近似的解。
(6) 在尋找解決方案時應用數學事實、規則、演算法和結構。
(7) 操作數字、圖形和統計資料和資訊、代數運算式和方程式以及幾何表徵。
(8) 製作數學圖表、圖形、模擬和結構，並從中提取數學資訊。
(9) 在求解過程中使用和轉換不同的表徵。
(10) 將應用數學程序尋找答案的結果作為基礎，進行歸納和推測。
(11) 對數學論證的反思，對數學結果的解釋和論證。
(12) 評估從資料中觀察到的（或提出的）模式和規律的重要性。

3. 詮釋、應用及評估數學結果
(Interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes)

解釋和評估側重於個人反思數學解答、結果或結論的能力，並在引發這一過程的現實問題的背景下解釋它們。參與這一過程的個人可能被要求在問題的背景下構建和交流解釋和論點，反映建模過程及其結果。包括以下活動(OECD, 2018, p22)：

[1] 「**」表示有達到此階段的學生，最低可以做到的內容。

(1) 以圖形或圖表的形式解釋資訊。**

(2) 根據上下文來評估數學結果。**

(3) 將數學結果解釋回現實世界。

(4) 評估一個數學解答在現實世界問題中的合理性。

(5) 了解真實世界如何影響數學過程或數學模型的結果(outcomes)和計算，以便針對結果(results)怎麼調整或應用做出符合情境的判斷。

(6) 解釋為什麼一個數學結果或結論在一個問題的背景下有意義或者沒有意義。

(7) 理解數學概念和數學答案的範圍和限制。

(8) 評論和辨識已被用來解決問題的模型之限制。

(9) 運用數學思維和計算思維進行預測，為論證提供證據，測試和比較提出的答案。

第四節、國內對數學素養的定義

隨著國際趨勢的變動，科技的發展日新月異，世界變化的速度太快，以至於在學生時代學習的東西等到學生工作時可能就用不到了。因此在學校要學習的是能「終身學習」的能力，使學生在未來能自己解決未來的問題。

除了國外的學者與機構有對數學素養的詮釋以外，臺灣的學者們紛紛給出自己對數學素養的見解，並將數學素養的概念傳遞給國人，例如：108 數學課綱總召，張鎮華教授提出數學素養應有四項內涵：(一)數學科學知識的素養、(二)能應用到學習、生活與職業生涯的素養、(三)能正確使用工具的素養、(四)能有效與他人溝通的素養。李國偉等人（2013）提出數學素養的意涵是：

> 個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並節由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，作出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人溝通觀點。

林福來教授（2014）等人在數學領域綱要前導研究中提出「知、行、識」。其中「知」代表數學內容的應用與實用；「行」代表學生所能展現出來的數學能力，包含程序執行、解題、溝通、論證。「識」代表對數學內在認知的情意涵養，包含概念理解、推理、連結、後設認知、欣賞數學的美。左台益教授等人（2015）改良「知、行、識」為「知、用、觀、學」，亦即數學「知」識、應「用」數學的相關技能、以數學「觀」 感表達看法，以及培養「學」習能力四個面向，其中「觀」、「學」是為學習數學的態度。定義數學素養為「培養數學素養的能力必須以數學知識為基礎，運用知識來進行推理、邏輯思考及擬定策略以解決數學內或外的問題，說明個人觀感及批判思考事情，並擁有積極正向的態度及價值觀，從而培養終身學習的認知和技能，以面對現今急速變遷的社會問題和挑戰。」

謝豐瑞教授（2018）對數學素養的定義則是：有意圖與能力在恰當的時機用數學看待與探究情境脈絡中的問題。這裡的「情境脈絡」包含真實情境與模擬情境，真實情境有數學的與非數學但有脈絡的，而模擬情境則需是合理的情境才能培養學生素養。「看待」是指能理解、分析情境脈絡中的問題。「探究」是指處理、解決情境脈絡中的問題。「能力」中包含知識型能力與思維型能力，後者較能展現素養的特質。

第五節、台灣的對數課程與教材分析

一、高中數學課程之整體目標

教育部於 103 年 11 月公告《十二年國民基本教育課程綱要》（以下稱《總綱》），基於《總綱》的全人教育精神，以「自發」、「互動」、「共好」為理念，以「成就每一個孩子—適性揚才、終身學習」為願景。《總綱》定義「核心素養」是指一個人為適應現在生活及未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。且《核心素養發展手冊》也提到「核心素養」承續過去的課程綱要的「基本能力」、「核心能力」、「學科知識」，但涵蓋更寬廣和豐富的教育內涵。不再將學科專業知識作為學習的唯一領域，而是期望學生能夠整合並運用於「生活情境」，強調可以將所學實際應用在生活中的特質。

為呼應《總綱》的理念與願景，於 107 年 6 月公告《數學領域課程綱要》（以下稱《數學領綱》）其理念如下。

（一）數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習

（二）數學是一種實用的規律科學，教學宜重視跨領域的統整

（三）數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感

（四）數學應提供每位學生有感的學習機會

（五）數學教學應培養學生正確使用工具的素養

由於進入21世紀，世界對數理人才的需求越來越高，希望學生經過十二年基礎教育的課程後，能為未來做充分的準備。因此數學教育應該啟發學生的學習動機，培養好奇心、思考力等等，並以積極的態度、持續的動力進行探索與學習，從而體驗學習的喜悅。達到健康且均衡的全人發展。因此有以下課程目標：

（一）提供學生適性學習的機會，培育學生探索數學的信心與正向態度。

（二）培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。

（三）培養使用工具，運用於數學程序及解決問題的正確態度。

（四）培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。

（五）培養日常生活應用與學習其他領域/科目所需的數學知能。

（六）培養學生欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質。

在《數學領域課程手冊》(民108)（以下稱《課程手冊》）就明確指出：

「……一方面，要回應世界各國朝向培養數學素養的趨勢，著重學生能將生活中所遇到的問題轉化成數學問題並且解決它，並能欣賞數學的美並對數學有正向的態度。另一方面，要盡力改善我國中小學生的數學評量成績有高成就與高落差、對數學的態度與學習信心不佳的現象，達成十二年國教把每一位學生帶上來、適性揚才的重要理念，實踐數學教育公平受教的原則。……」

不難看出目前的國際上數學教育的趨勢，更重視學生能利用數學解決生活上問題的能力；且台灣學生面對數學有高成就、低信心的狀態，期望十二年國教將素養加入教育中，可以改善此情況。

二、對數學單元課程目標

在高中所學的函數中，讓學生們都有機會認識到基本函數，例如：多項式函數、指數與對數函數、三角函數。期望學生能夠辨別函數的圖形特徵，並能用它們當作模型而解決典型問題。（《數學領綱》,107年）

學習重點展現課程綱要的具體內涵，能呼應核心素養。學習重點由「學習表現」與「學習內容」兩個向度所組成。以下節錄自《數學領綱》（107年）：

(一)學習表現：

強調以學生為中心，重視認知（求知、應用、推理)、情意態度（賞識）與生活應用的學習展現，代表「非內容」向度，具體展現或呼應核心素養。

(二)學習內容：

涵蓋數學基礎重要的事實、概念、原理原則、技能與後設認知等知識，學校、地方政府或出版社得依其專業需求與特性，將學習內容做適當的轉化，以發展適當的教材。

《數學領綱》詳細列出各年級的學習表現與學習內容。其在對數中詳細的學習表現共有三項，由此可知道學生應學會的數學概念，如表 貳-1：

表 貳-1 含有對數的學習表現

學習表現	內容
n-V-1	理解實數與數線的關係，理解其十進位表示法的意義，理解整數、有理數、無理數的特質，並熟練其四則與次方運算，具備指數與對數的數感，能用區間描述數線上的範圍，能用實數描述現象並解決問題。
a-V-1	理解多項式、分式與根式對應實數之運算規則，理解指數、對數的運算規則，並能用於數學推論。
f-V-4	認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。

n-V-1中可以知道在高中學生應該認識指數與對數皆是實數，只是是用另外一種表達方式表示該數字。也該具備指數與對數的數感，能夠知道指數變化的速度很快，例如指數的底數大於1時，次方每增加1，數值會攀升很劇烈。也可以知道指數與對數的關係，就是將相成的數字可以看成相加。a-V-1可知道高中生應該學會指數與對數的運算規則，並利用此規則做數學推論。f-V-4中強調了解指數函數與對數函數兩者的圖形特徵意義，並能利用指數函數的數學模型解決問題。此一項目呼應PISA 2021架構中，數學內容分類中的「變化與關係」(change and relationship)所強調的指數增長(exponential growth)。

另外，108課綱還有另一個理念，就是在學習較困難單元時會將它們分散不同年級。第一次先建立基本觀念，例如以符號表達數量；第二次的教學時才進入形式運思，也就是抽象概念與公式使用的部分（數學領域課綱Q&A，2019）。

因此「指對數」的學習安排在高一（10年級）與高二（11年級）的課程中。而學習內容的編碼方式依年級編寫。

在學習內容中，清楚寫出10年級所應學會的指數範疇：了解指數的意義、複習指數律、理解實數指數的意義、並且能使用計算機的x^y鍵。對數則是指要求學生學會常用對數，不涉及其他底數的對數（N-10-3）。能夠知道log 的意義，並將常用對數與科學記號連結，會使用計算機的10^x 鍵和log鍵，不涉及任意底數的對數值（N-10-4）。

11年級開始分成A、B兩版本，他們應該學會認識一般底的對數，但都不該過度練習。在A版還須學習利用指數律、對數律解決方程式的問題（A-11A-4）。學會指數函數及其圖形，將此應用在按比例成長或衰退的數學模型；而常用對數函數的圖形，則可以應用在科學和金融（F-11A-4）。另外也要讓學生知道「任何指數a^x 皆可改寫成10^{kx}，其中 $0<a\neq1$」，研究者認為將這個明列出來是為了確保學生能夠真正了解一個數字可以用很多方式表示，在進入對數時可以更順利。B版中清楚定義生活上的可以如何應用按比例成長模型：例如地震規模，金融與理財，平均成長率，連續複利與e的認識，自然對數函數（F-11B-2）。在這之中課綱也提供參考教具是計算機以及方格紙。

上述即是《數學領綱》期待學生在經歷過高中的數學教學後能學會的學習內容。

第六節、教科書分析

透過教育能讓學生學習知識或培養未來所需的能力，而此目標通常由各國制定課程綱要，並以教科書的形式呈現。教科書是「一本旨在提供知識領域權威教育的書」(Stray, 1944)。教科書不僅是呈現學習內容的主要工具，也是提供學習機會的重要途徑。由於在教學現場使用教科書的比例也很高，因此透過分析教科書，可以知道大部分學生能學會什麼樣的能力。

Fan & Zhu (2013)將「數學」、「教科書」為關鍵字的相關研究文獻中整理出分類架構，並將其分為四類：教科書的角色、教科書的分析與比較、教科書的使用、以及其他。在分析結果中，以教科書分析的比例最高（63 %）。而在教材分析中的又可細分為五個面向：(1)數學內容和主題、(2)認知與教育學、(3)性別、民族、公平、文化和價值、(4)教材比較（例如關於數學內容或不同教科書的主題）、(5)概念化和方法問題。研究發現，在這些文獻中較少用數學素養的角度來看待教科書。然而隨著時代的演變，世界更重視學生能將數學應用至生活中的素養。

數學素養很重要的一部分是問題解決的能力，而教科書是使用不同的問題以幫助學生建構數學概念，因此教科書可以提供學生一個增進他們解決問題能力的平台(Fan & Zhu, 2000)。Gatabi , Stacey & Gooya等人(2012)以PISA的解題歷程作為架構分析其中所涵蓋的數學素養，比較伊朗與澳洲的數學教科書中題目在「形成」、「應用」、「詮釋」中所佔的百分比。其研究結果顯示澳洲的教科書有較多題目符合上述分析標準，有較多與生活情境相關的問題，這些可能是影響學生數學素養表現的原因。也有研究分析華人地區在國中數學教科書數學素養比較分析（林方馨, 2018），研究針對馬來西亞、新加坡、中國、香港、台灣的教科書在畢氏定理和相似形單元，探討所具備的數學素養內涵。其中一個結果顯示在畢氏定理單元中，馬來西亞在形成與應用皆是百分比最低的國家，也較少真實世界的問題；其他四國皆有涵蓋一定比例的解題過程。由以上原因，研究者在分析教科書時選擇較感興趣的數學素養為架構，期望透過研究教科書的編排方式，分析教科書是如何反映出數學素養。

第參章、研究方法

本章節分為六個小節，第一節為研究架構；第二節為研究方法與研究設計；第三節為資料處理；第四節為研究流程；第五節為研究限制。

第一節、研究架構

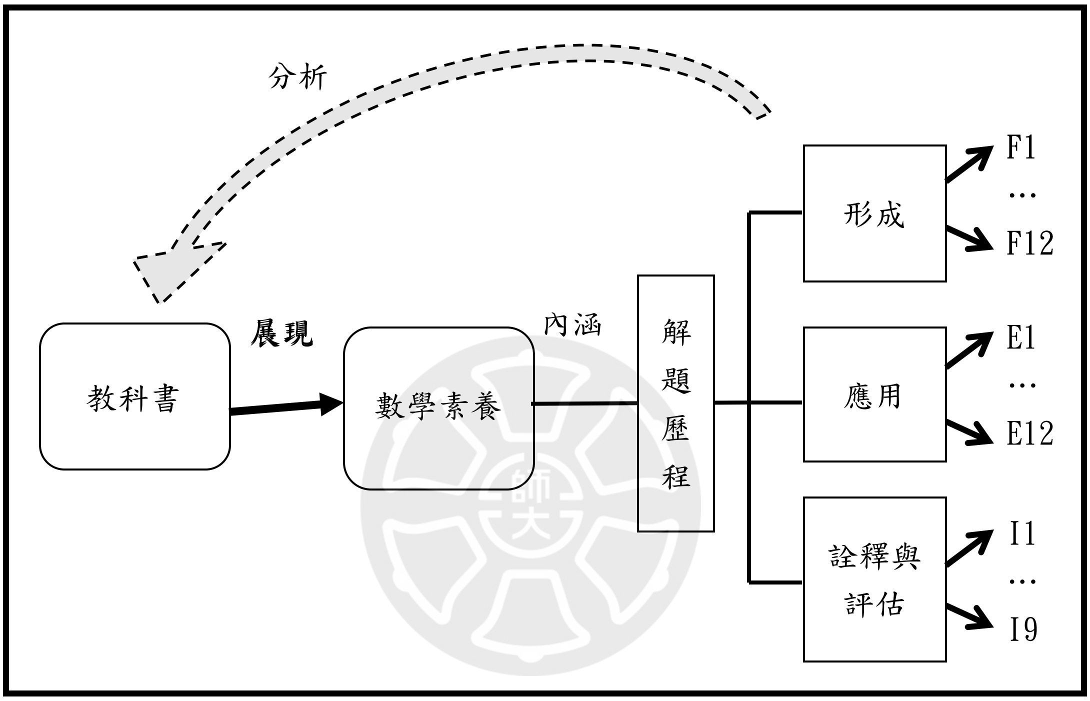


圖 參-1 研究架構圖

本研究目的為「探究素養導向之教科書，在對數單元中意圖培養學生何種數學素養」，依照此目的發展研究架構圖，如圖 參-1。

根據研究目的利用 PISA 2021 中的解題歷程作為架構，透過「形成」、「應用」、「詮釋與評估」（後文皆簡稱「詮釋」）三階段，以及架構中的子項目建立分析類目表，分析教科書的編寫方式是如何培養學生數學素養。最後利用數據統計及內容分析，探究「對數」單元中所涵蓋的數學素養。

第二節、研究方法與研究設計

由於素養導向是國際教科書的新趨勢，因此想關注偏向素養導向的台灣教科書是否能培養學生數學素養。本研究利用國際公認能評測素養的 PISA 2021 為架構，透過分析課綱委員會審定通過的高中教科書，了解台灣的教科書是否有朝此方向前進。

本研究選擇利用 PISA 2021 架構的三個解題歷程來分析，因為三者考慮的東西都是學生在面對未來的挑戰時所需要展現出的能力，因此想知道教科書帶給學生多少經驗讓他們能體會過解決問題的過程。

為了了解台灣的教科書是否符合素養導向，研究者從各家版本中挑選出一個版本 T 為分析對象，並以其中的對數單元為分析主題（分別分散在 10 年級上學期和 11 年級上學期）。挑選版本 T 的原因是研究者在初步翻閱眾多版本中，感受到此版本使用許多非傳統的解題方式，例如在科技使用的部分篇幅較大、利用科技軟體幫助學生建構數學概念；也較多讓學生自己探索的活動、或是課堂的討論活動等，因此選擇分析版本 T。選擇對數單元的原因則是在 108 課綱和前一次的課綱間，由先前只有在高一就介紹完全部的指數與對數，改成將指數與對數分散在第一冊與第三冊。故研究者挑選版本 T 的第一冊以及第三冊 B 版作為分析對象。

本研究採用內容分析法(context analysis)，利用 PISA 2021 架構中的三個解題歷程發展分析類目表，其中「形成」有 12 個子項、「應用」有 12 個子項目、「詮釋」有 9 個子項目，共 33 個子項目。分析方法為利用分析類目表編碼，並以量的方式，呈現出課本有多少比例的意圖欲帶給學生數學素養。分析的資料來源以課本為樣本（不含習作、講義），將課本內容區分成 43 個分析單位，每個分析單位都依照分析類目表編碼。若是認為該題有達到某個子項度的要求則將該子項度編碼為 1，沒有達到則編碼 0。另外，為了能更深入說明，在研究結果會輔以質性分析說明素養的培養方式。

為了確定保有編碼者間信度(intercoder reliability)，除了研究者外，另有一位研究生共同編碼。其中若是遇到編碼不同的部分則會詢問焦點團體（由數學教育學者專家及碩博士班學生組成）中的第三人，修改成相同編碼。

第三節、資料處理

（一） 界定分析單位

當選取好研究對象後，首先需要先將課本中的內容界定清楚分析單位。內容分析常見分析單位有字、主題、人物、項目、時間與空間單位、段、詞、句等。然而，以字、句、項目等為分析單位，容易斷章取義而脫離整體脈絡，忽視現象本身完整結構（歐用生，2000）。

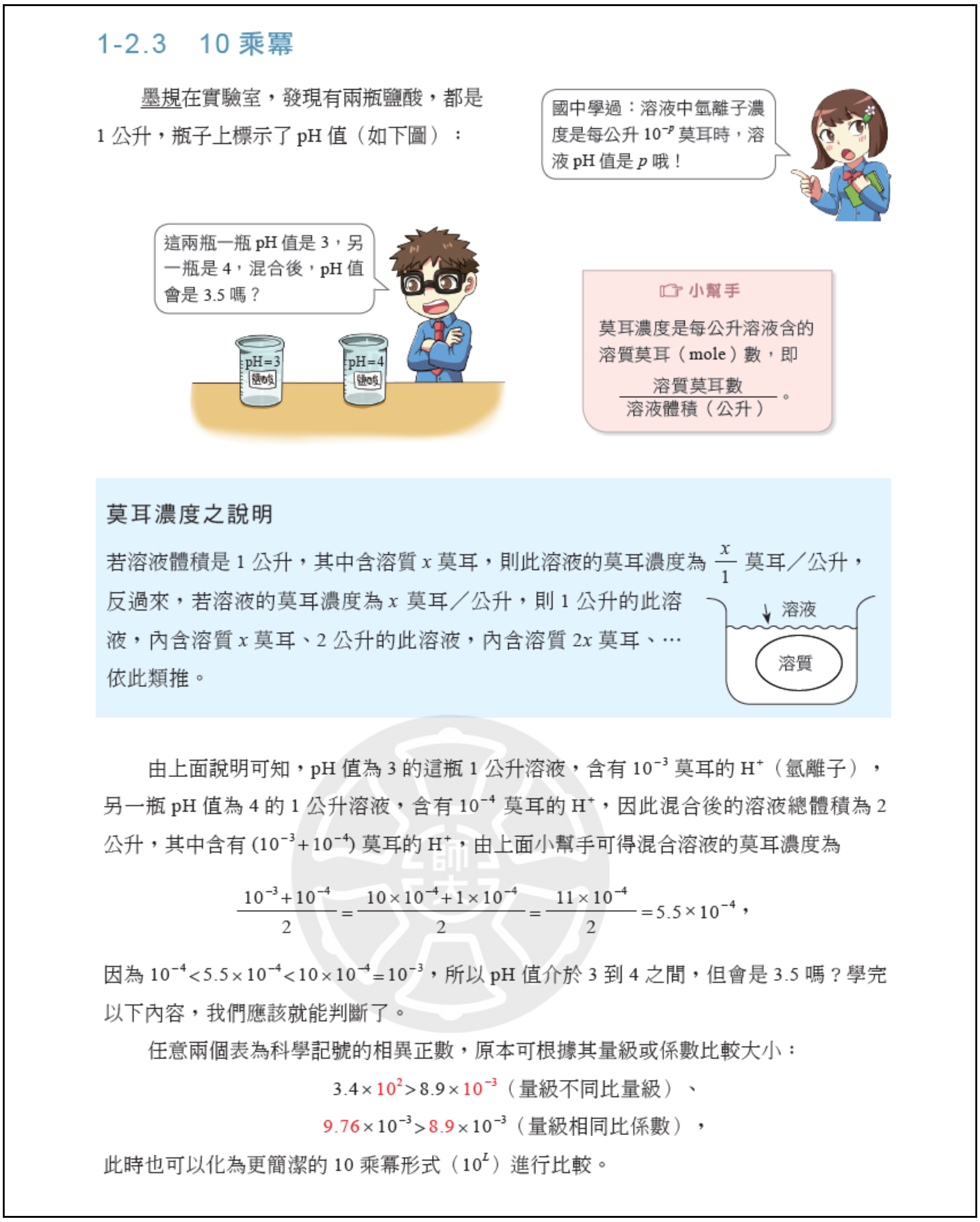
就分析對象整體結構，數學教科書常見基本的區分原則是將一段敘述、一個例題、一個練習題、一項活動當作一個分析單位。

然而若是有一個為了引導出新的數學概念而鋪陳的情境脈絡，他的題目引導和他最終的解答並沒有出現在同一個頁面(範例一)，抑或是在課文中穿插讓學生操作的活動(範例二)。為了呈現出完整的解題歷程、脈絡，本研究將其合併為一個分析單位，使其更能完整傳達教科書編輯者原意。如下所示：

範例一：

以高一課本第 37 頁為例，如圖 參-2。為了引導出對數的需求，以真實生活量測濃度的 PH 值出發。從介紹 10 乘冪的開始，到有需求解決計算出的5.5×10^{-4}換算成 PH 值該如何做。接著透過後面幾頁的鋪陳，教學生學習常用對數 log 的數學概念。並在本小節的最後一題（第 40 頁）時，如圖 參-3，回頭補述一開始設定的濃度情境脈絡在學會對數時，可以怎麼回答問題。

為了完整整個情境脈絡，使編碼時更能完整呈現出教科書編輯的想法。因此將分散兩處的問題合併。



1-2.3　10 乘冪

墨規在實驗室，發現有兩瓶鹽酸，都是 1 公升，瓶子上標示了 pH 值（如下圖）：

國中學過：溶液中氫離子濃度是每公升 10^{-p} 莫耳時，溶液 pH 值是 p 哦！

這兩瓶一瓶 pH 值是 3，另一瓶是 4，混合後，pH 值會是 3.5 嗎？

pH=3 鹽酸　pH=4 鹽酸

小幫手

莫耳濃度是每公升溶液含的溶質莫耳（mole）數，即 $\dfrac{\text{溶質莫耳數}}{\text{溶液體積（公升）}}$。

莫耳濃度之說明

若溶液體積是 1 公升，其中含溶質 x 莫耳，則此溶液的莫耳濃度為 $\frac{x}{1}$ 莫耳／公升，反過來，若溶液的莫耳濃度為 x 莫耳／公升，則 1 公升的此溶液，內含溶質 x 莫耳、2 公升的此溶液，內含溶質 $2x$ 莫耳、⋯依此類推。

溶液　溶質

由上面說明可知，pH 值為 3 的這瓶 1 公升溶液，含有 10^{-3} 莫耳的 H^+（氫離子），另一瓶 pH 值為 4 的 1 公升溶液，含有 10^{-4} 莫耳的 H^+，因此混合後的溶液總體積為 2 公升，其中含有 $(10^{-3}+10^{-4})$ 莫耳的 H^+，由上面小幫手可得混合溶液的莫耳濃度為

$$\frac{10^{-3}+10^{-4}}{2}=\frac{10\times10^{-4}+1\times10^{-4}}{2}=\frac{11\times10^{-4}}{2}=5.5\times10^{-4}，$$

因為 $10^{-4}<5.5\times10^{-4}<10\times10^{-4}=10^{-3}$，所以 pH 值介於 3 到 4 之間，但會是 3.5 嗎？學完以下內容，我們應該就能判斷了。

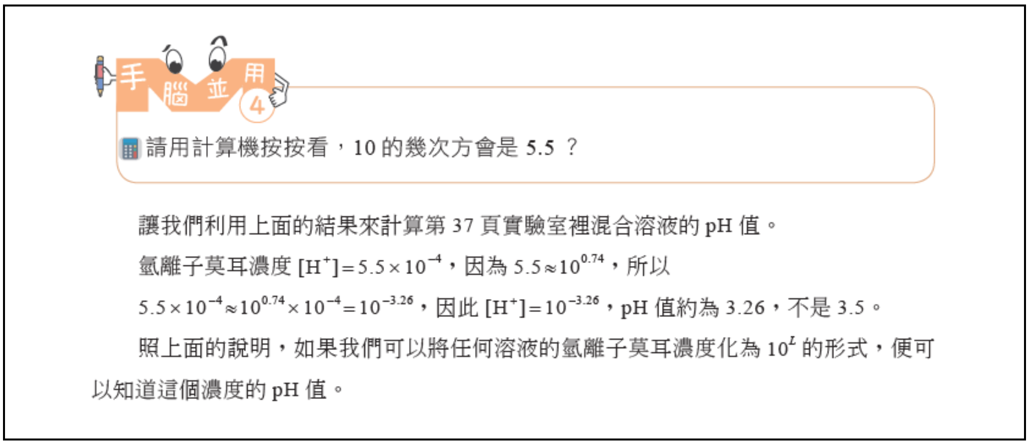
任意兩個表為科學記號的相異正數，原本可根據其量級或係數比較大小：

$3.4\times10^{2}>8.9\times10^{-3}$（量級不同比量級）、

$9.76\times10^{-3}>8.9\times10^{-3}$（量級相同比係數），

此時也可以化為更簡潔的 10 乘冪形式（10^{t}）進行比較。

圖　參-2 教科書段組舉例 1-1



手腦並用 4

請用計算機按按看，10 的幾次方會是 5.5 ？

讓我們利用上面的結果來計算第 37 頁實驗室裡混合溶液的 pH 值。

氫離子莫耳濃度 $[H^+]=5.5\times10^{-4}$，因為 $5.5\approx10^{0.74}$，所以

$5.5\times10^{-4}\approx10^{0.74}\times10^{-4}=10^{-3.26}$，因此 $[H^+]=10^{-3.26}$，pH 值約為 3.26，不是 3.5。

照上面的說明，如果我們可以將任何溶液的氫離子莫耳濃度化為 10^{t} 的形式，便可以知道這個濃度的 pH 值。

圖　參-3 教科書段組舉例 1-2

$\boxed{\text{範例二}}$：

以高二 B 版第 81 頁為例。介紹對數律前先引動學生好奇公式的存在，如圖 參-4。接著馬上在下一題出現對數與指數的表格，讓學生自己填寫，猜測出對數、指數運算的規則，如圖 參-5。隨後在課文內文敘述中，驗證出前面預期的結果，如圖 參-6。

雖然課文與題目都能分開編碼，但若是把他們都分開編碼時會看不出承先啟後的編排方式。為了使編碼時更能完整呈現出教科書編輯的想法，因此將小段落合併成一段組為編碼單位。

圖 參-4 教科書段組舉例 2-1

動動筆 4

請完成下表。

相減　　　　相加

指數	L	-1	0	1	2	3	$\log x$	對數
指數式	10^L						x	真數

相　　　　相

相　　　　相

指數	L						$\log_2 x$	對數
指數式	2^L	0.5	2	4	8	32	x	真數

相除　　　　相乘

圖　參-5 教科書段組舉例 2-2

你發現了一些對數運算的規則了嗎？

我們舉例說明如下：

$$10\times100=1000，$$

將 10、100、1000 表示為 10 的乘冪，可得 $10=10^{\log10}$、$100=10^{\log100}$ 及 $1000=10^{\log1000}$，意即 $10^{\log10}\times10^{\log100}=10^{\log(10\times100)}$，由指數律可得 $\log10+\log100=\log(10\times100)$。

圖　參-6 教科書段組舉例 2-3

（二） 建立分析類目表

參考 PISA 2021 在解題三步驟的子項目，為了作業上的方便起見，「形成」的第一項簡記「F1」、「應用」的第一項簡記「E1」、「詮釋」的第一項簡記「I1」，其他子項目以此類推。確立分析架構後形成以下編碼：

F. 形成(Formulating)

指個人能夠識別和識別使用數學的機會，然後以某種上下文形式呈現的問題提供數學結構。包括下列活動：

F1. 從列表中選擇適當的模型。
F2. 辨識出在現實世界中數學面向的問題，並確定重要的變數。
F3. 識別出問題或情境中的數學結構(包括規律、關係和模式)。
F4. 簡化一個情境或問題，使之能經得起數學分析的考驗。
F5. 能從上下文確定出數學建模和簡化背後的限制和假設。
F6. 用數學方法表示一個情境，如使用適當的變數、符號、圖表和標準模。
F7. 以不同的方式表達問題，包括根據數學概念組織問題，並作出適當的假設。
F8. 理解和解釋特定於情境問題中的語言與用數學表示問題所需的符號和形式語言之間的關係。
F9. 把一個問題翻譯成數學語言或表徵。
F10. 確認問題的各面向與已知問題或數學概念、事實或程序相符合。
F11. 從各種計算工具中選擇並使用最有效的計算工具來描述一個被情境化的問題之內的數學關係。
F12. 創造一系列有序的(逐步的)指令來解決問題。

E. 應用 (Employing)

指能夠應用數學概念、事實、程序和推理來解決數學問題並得出數學結論，包括以下活動：

E1. 進行簡單計算**

E2. 得出一個簡單的結論**

E3. 從列表中選擇適當的策略**

E4. 設計和實施策略以找到數學解答。

E5. 使用數學工具，包括科技，來幫助找到精確或近似的解。

E6. 在尋找解決方案時應用數學事實、規則、演算法和結構。

E7. 操作數字、圖形和統計資料和資訊、代數運算式和方程式以及幾何表徵。

E8. 製作數學圖表、圖形、模擬和結構，並從中提取數學資訊。

E9. 在求解過程中使用和轉換不同的表徵。

E10. 將應用數學程序尋找答案的結果作為基礎，進行歸納和推測。

E11. 對數學論證的反思，對數學結果的解釋和論證。

E12. 評估從資料中觀察到的(或提出的)模式和規律的重要性。

I. 詮釋(Interpreting, Applying and Evaluating)

解釋和評估側重於個人反思數學解答、結果或結論的能力，並在引發這一過程的現實問題的背景下解釋它們。參與這一過程的個人可能被要求在問題的背景下構建和交流解釋和論點，反映建模過程及其結果。包括以下活動：

I1. 以圖形或圖表的形式解釋資訊。**

I2. 根據上下文來評估數學結果。**

I3. 將數學結果解釋回現實世界。

I4. 評估一個數學解答在現實世界問題中的合理性。

I5. 了解真實世界如何影響數學過程或數學模型的結果(outcomes)和計算，以便針對結果(results)怎麼調整或應用做出符合情境的判斷。

I6. 解釋為什麼一個數學結果或結論在一個問題的背景下有意義或者沒有意義。

I7. 理解數學概念和數學答案的範圍和限制。

I8. 評論和辨識已被用來解決問題的模型之限制。

I9. 運用數學思維和計算思維進行預測，為論證提供證據，測試和比較提出的答案。

（三） 資料分析

將每一個分析單位依照子項度編碼，例如該題有達到 F1 的要求則編碼 1，沒有達到則編碼 0，並歸類至分析表並統計次數與百分比。在一個分析單位中，若是有達到任一個子項度，則他就有達到培養學生該過程的意圖。也就是說，任一分析單位中，不論在「形成」過程中編碼多少個，假設有 F3 編碼為 1，該題就有達到「形成」，在「形成」階段的題數會加一；即便有一題同時有辨識出 F3、F4、F5，在「形成」階段的判讀仍增加 1。可以藉由此方法，統計出 42 個分析單位，在三個解題歷程中，各階段（形成、應用、詮釋）所佔的分配百分比。

此外，亦可分析在「有脈絡的分析單位」之下，所含有的三個解題歷程中所佔的分配百分比。也可以比較「有脈絡的分析單位」與「無脈絡的分析單位」在三個解題歷程的分配百分比。

值得一提的是，教科書中會有部分的文字敘述是在傳達或啟發數學思維，或是透過漫畫輔助學習。這些雖然不是給予一個情境，讓學生親自經歷一次解題歷程，但是在文字敘述的過程中，學生能夠藉由閱讀課本所鋪陳出的文字脈絡，感受到課本意圖傳達的數學素養。故研究者仍舊以 PISA 2021 架構的三個解題歷程的精神為主體，用「形成」、「應用」、「詮釋」的精神將課文內容編碼，其子項目亦同。

（四） 分析單位例子

以下利用高二 B 版例題 7 的第(2)小題，如圖 參-7，說明如何區辨這三個解題歷程。該題目中呈現日常生活中的地震問題，討論芮氏規模與地震釋放能量之間的關係。由於此題目已經將現實世界的問題轉換成數學問題，得出數學關係式：$logE = 5.24 + 1.44r$，故無法看到他如何培養學生「形成」的素養。而學生需要利用對數的意義、指數律的運算、計算工具的幫助，在數學世界中得出數學結果，故在「應用」階段可以看到學生被培養的過程。接著，學生需要將數學結果 24.79「詮釋」回原本題目，了解求出的 24.79 的真實意義，亦即知道九二一大地震所釋放出的能量為美濃大地震的能量的 24.79 倍。

例題 7　EXAMPLE

國際上常用地震規模來衡量地震釋放出的能量，而國內又常以芮氏規模做為報導的主要參考。根據中央氣象局資料，如果設芮氏規模為 r 的地震釋放能量為 E（爾格），則 r 與 E 的數學關係為：$\log E=5.24+1.44r$。

(1) 由此可知，如果地震規模增加 1，則釋放的能量增加約為原能量的幾倍？（四捨五入取至小數點後第 2 位）

(2) 1999 年發生的九二一大地震規模為 7.3，2016 年造成臺南維冠大樓倒塌的美濃大地震規模為 6.6，問前者所釋放的地震能量為後者所釋放的能量的多少倍？（四捨五入取至小數點後第 2 位）

解 (1) 令 $r=x$ 代入 $\log E_1=5.24+1.44(x)$，得 $10^{5.24+1.44x}=E_1$

$r=x+1$ 代入 $\log E_2=5.24+1.44(x+1)$，得 $10^{5.24+1.44(x+1)}=E_2$

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{10^{5.24+1.44(x+1)}}{10^{5.24+1.44(x)}}=10^{1.44}\approx 27.54$$

(2) 令 $r=7.3$ 代入 $\log E_1=5.24+1.44\times 7.3$，得 $10^{5.24+1.44\times 7.3}=E_1$

$r=6.6$ 代入 $\log E_2=5.24+1.44\times 6.6$，得 $10^{5.24+1.44\times 6.6}=E_2$

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{10^{5.24+1.44\times 7.3}}{10^{5.24+1.44\times 6.6}}=10^{1.44\times 0.7}\approx 24.79$$

圖　參-7 高二 B 版例題 7

一個分析單位中可能會包含不只一種過程的素養，例如上述的例題 7 的第(2)小題，此題就會包含「形成」與「應用」兩種過程的素養。此外，在一個分析單位中，同一個解題過程也可能包含不只一種的子項目。以上述的例題 7 的第(2)小題為例，在「應用」階段中，他同時包含 E1、E2、E5、E6、E7 等 6 個子項目。因為學生在解讀完題目後，需要簡單的運算(E1)以及利用對數的定義與規則解決問題(E6)，接著需要進行指數相除的運算(E7)，最後透過計算機得到近似值(E5)得到結論(E2)。

第四節、研究流程

本研究流程分為以下兩部分。如圖　參-8。

一、準備階段

（一）　瀏覽各家版本之高一高二教科書，選擇適合分析之版本及單元。

（二） 深入了解國內外數學素養的相關文獻，選擇 PISA 2021 架構作為研究架構。

二、資料分析階段

（一） 以呈現完整編輯者原意為前提，界定清楚教科書中的分析單位，共 42 個。

（二） 確立分析架構，依照 3 個解題歷程中共 33 個子項目編碼，設立代碼如下：

(1)「形成」有 12 個子項，分別為 F1 至 F12；

(2)「應用」有 12 個子項，分別為 E1 至 E12；

(3)「詮釋」有 9 個子項，分別為 I1 至 I9。

（三） 進行正式分析。將分析單位以「三個解題歷程及子向度」加以編碼，紀錄於分析表中，得出量的結果。期間不時與焦點團體成員討論。

（四） 資料分析過程中，將量化的統計資料搭配質性的分析，作出更有畫面的報導。

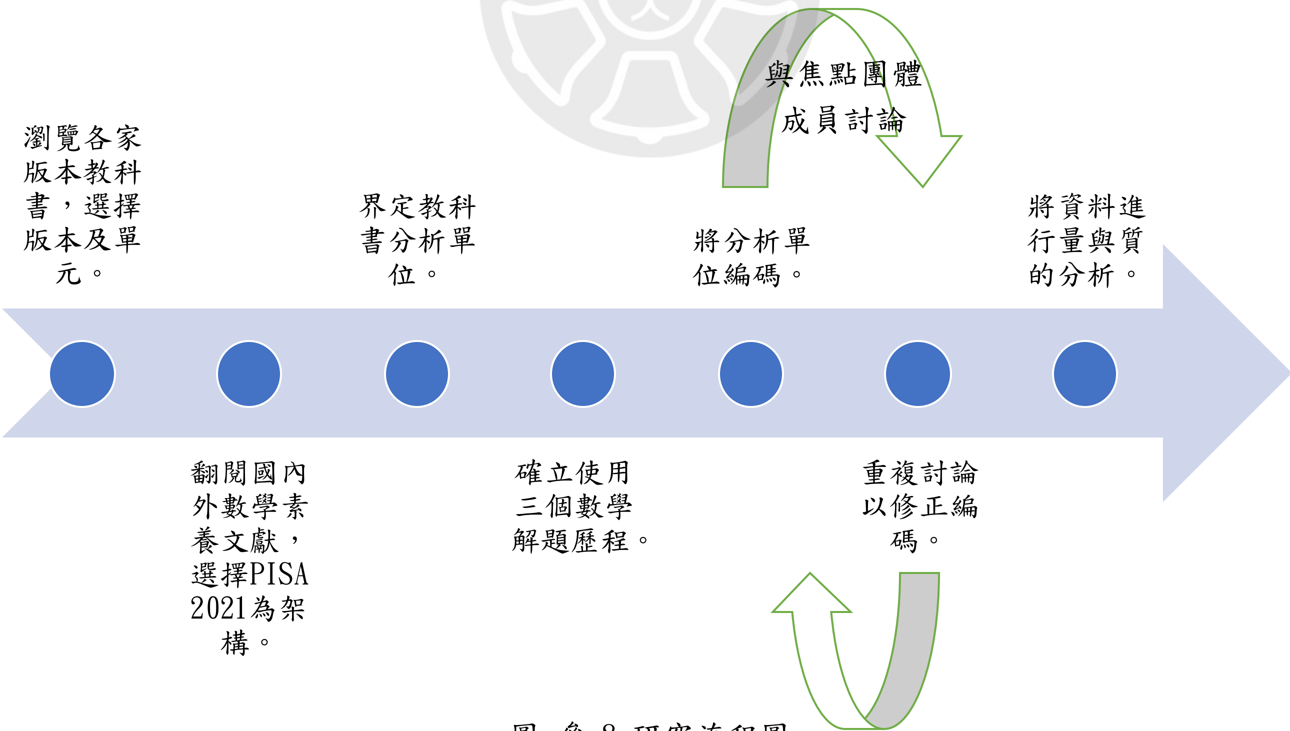


圖 參-8 研究流程圖

第五節、研究限制

1. 本研究僅分析一本素養導向教科書的對數單元，結果可能無法推廣到不同單元或是不同版本的教科書。

2. 本研究為分析教科書意圖培養的數學素養，然而實際教學情況會包含教師對課本的詮釋，以及學生是否能成功從教師端得到應學習的內容。故無法推廣至學生是否真的能成功學習數學並展現出數學素養。

3. 本研究在編碼時，只能意圖「揣測」課本編寫者想傳達的理念，分析結果或許和編寫者的原意稍有異同。

第肆章、研究結果

本研究結果分成兩部分來報導：第一部分為探討在素養導向的教科書中，意圖培養學生的素養比例；第二部分是以質性的方式，分析素養導向之教科書，是如何安排培養學生數學素養之教材的解析。

第一節、教科書中的素養比例

本節利用 PISA 2021 架構的 3 個解題過程（formulating、employing、interpreting）作為架構，探討教科書中所含有此三個解題歷程的比例有多少。

（一）、教科書中整體含有三個解題歷程的比例

在對數單元中，研究者將高一分成 14 個分析單位，高二分成 28 個分析單位，共 42 個分析單位。高一共有 5 個是有脈絡的單位，在這之中的真實情境共有 3 個單位；高二共有 8 題是有脈絡的單位，在這之中的真實情境共有 5 個單位。編碼後可得到以下數據。（表 肆-1、表 肆-2）

表 肆-1 有脈絡的分析單位個數及比例

	高一	高二	對數 完整單元
分析單位總個數	14	28	42
有脈絡的分析單位	5	8	13
有脈絡分析單位 占總分析單位的百分比	35.7%	28.6%	31.0%

表 肆-2 真實情境的分析單位個數及比例

	高一	高二	對數 完整單元
分析單位總個數	14	28	42
真實情境的分析單位	3	5	8
真實情境的分析單位 占總分析單位的百分比	21.4%	17.9%	19.0%

研究者將題目中擁有的「形成」、「應用」、「詮釋」識別出來。

在高一的課本中有意圖培養學生「形成」共有 3 題，因此在教科書中有培養學生「形成」的百分比為 21.4%；有意圖培養學生「應用」共有 11 題，因此在教科書中有培養學生「應用」的百分比為 78.6%；有意圖培養學生「詮釋」共有 6 題，因此在教科書中有培養學生「詮釋」的百分比為 42.9%。

在高二的課本中有意圖培養學生「形成」共有 4 題，因此在教科書中有培養學生「形成」的百分比為 14.3%；有意圖培養學生「應用」共有 26 題，因此在教科書中有培養學生「應用」的百分比為 92.9%；有意圖培養學生「詮釋」共有 6 題，因此在教科書中有培養學生「詮釋」的百分比為 21.4%。

可以發現不論是在高一或是高二，課本帶給學生的「應用」皆遠大於「形成」與「詮釋」。總的來說，在整體高中數學課程的對數完整單元中，讓學生經歷的「應用」達到 88.1%，高於「形成」的 16.7% 及「詮釋」的 28.6%。

研究者認為，由於課本的編排方式在「應用」的比例較高，因此可以增加學生「應用」方面的能力。依照表 肆-3 可以得知，教科書中意圖培養學生素養的比例。

表 肆-3 課本整體在解題歷程的題數與比例

單元 / 歷程	高一(14 題)		高二(28 題)		對數完整單元 (42 題)	
	題數	百分比	題數	百分比	題數	百分比
形成	3	21.4%	4	14.3%	7	16.7%
應用	11	78.6%	26	92.9%	37	88.1%
詮釋	6	42.9%	6	21.4%	12	28.6%

（二）、教科書中$\boxed{\text{有脈絡的分析單位}}$含有三個解題歷程的比例

由於研究者認為T版課本的問題與以往教科書較不同的地方在於呈現素養的方式。也就是說，T版不僅是在每個章節的最後一題加入應用問題，而是在不同地方都有意圖培養學生數學素養。例如多了一些「有脈絡」的問題，包含真實情境脈絡、活動脈絡等等。

真實情境脈絡可以讓學生感受到數學在真實世界的用途，盡可能讓他們感覺到未來的生活是真的會使用到數學。課本藉由提出真實情境問題，讓學生發展出利用數學解決生活問題的能力，也培養學生解讀數學結果呈現在真實世界的意義的能力。

活動脈絡則是教科書設計好問題，引導學生透過操作活動發展數學概念，並期望學生能夠在此脈絡中自己發展出這些能力。而操作活動泛指由操作中察覺、形成概念，甚至簡單連結各概念的各種活動（數學領綱,103年,P8）。在此部分允許使用科技工具發展數學概念。

這些題目都加強學生在課堂的參與，並將數學思考放在學生身上。不論是與生活、職業、事件相關的真實數據；使用科技工具的能力與反思；或是解讀數學結果呈現在真實世界的意義，都更反映出數學價值。基於上述原因，將$\boxed{\text{有脈絡的分析單位}}$挑選出來，可以發現像這樣的問題占了整個單元的三成左右。

若將這些$\boxed{\text{有脈絡的分析單位}}$識別出其擁有的「形成」、「應用」、「詮釋」，發現對數單元中共13個分析單位，其中高一有5題，高二有8題。

在這之中，高一的範圍有意圖培養學生「形成」共有3題，因此在教科書中有培養學生「形成」的百分比為60%；有意圖培養學生「應用」共有5題，因此在教科書中有培養學生「應用」的百分比為100%；有意圖培養學生「詮釋」共有4題，因此在教科書中有培養學生「詮釋」的百分比為80%。

在高二的內容中有意圖培養學生「形成」共有3題，因此在教科書中有培養學生「形成」的百分比為37.5%；有意圖培養學生「應用」共有8題，因此在教科書中有培養學生「應用」的百分比為100%；有意圖培養學生「詮釋」共有6題，因此在教科書中有培養學生「詮釋」的百分比為75%。

可以發現不論是在高一或是高二，課本帶給學生的「應用」仍然皆大於「形成」與「詮釋」。整體而言，高中課程的對數單元中有脈絡的分析單位皆能讓學生經歷的「應用」(100%)，「形成」的提升至 46.2%，「詮釋」提升的幅度更高，增加至 76.9%。

研究者認為，在一本教科書中有三成有脈絡的分析單位比例不算太低。因為課本不僅是要教一個新的概念，還要花篇幅讓學生鞏固概念，讓學生練習習得的概念等等，較無法每一題都是有脈絡的問題。當只看這些有脈絡的分析單位時，可以看出「形成」與「詮釋」的比例提升許多。也就代表課本有意圖在這樣類型的段落中，讓學生能親自參與整個真實世界的問題。能夠自己經歷「形成」、「應用」、「詮釋」。

在「形成」階段，高一為 60%，高二為 37.5%。研究者認為由於高一都還在鞏固「常用對數」的概念，重點不在真實情境脈絡中的問題，也預期高中在對數單元的課程安排，能夠在高二讓學生熟悉「任意底數的對數」概念，也就是說在高二的題目會出現較多能夠使用對數解決真實情境的問題。因此，感覺上在高二課程中，能讓學生經歷「形成」的可能性會比較高一來得高。然而在真實世界中若需要利用「對數」以解決問題，則通常此情境的問題都較為困難。因此教科書在真實情境中在「形成」步驟中會幫學生建立出來，例如直接寫出關係式，不用讓學生自己「形成」。

在「應用」階段，高一及高二都是 100%。顯示出有情境脈絡的問題，皆需要學生經歷過「應用」。課本透過這些問題試圖培養學生問題解決時應用數學的能力。

在「詮釋」階段，高一有 80%，高二有 75%。兩個年段的百分比是差不多的，讓學生能在應用數學得到數學解答後，回應真實世界，詮釋自己求得的解答意義。

依照下方表 肆-4 可以得知，教科書在有脈絡的分析單位中，意圖培養學生素養的比例。

表 肆-4 $\boxed{\text{有脈絡的分析單位}}$在解題歷程的題數與比例

單元 / 歷程	高一(5 題)		高二(8 題)		對數完整單元 (13 題)	
	題數	百分比	題數	百分比	題數	百分比
形成	3	60.0%	3	37.5%	6	46.2%
應用	5	100.0%	8	100.0%	13	100.0%
詮釋	4	80.0%	6	75.0%	10	76.9%

（三）、教科書中$\boxed{\text{真實情境的分析單位}}$含有三個解題歷程的比例

若將這些$\boxed{\text{真實情境的分析單位}}$識別出其擁有的「形成」、「應用」、「詮釋」，發現對數單元中共 8 個分析單位，其中高一有 3 題，高二有 5 題。

在這之中，高一的範圍有意圖培養學生「形成」共有 1 題，因此在教科書中有培養學生「形成」的百分比為 33.3%；有意圖培養學生「應用」共有 3 題，因此在教科書中有培養學生「應用」的百分比為 100%；有意圖培養學生「詮釋」共有 3 題，因此在教科書中有培養學生「詮釋」的百分比為 100%。

在高二的內容中有意圖培養學生「形成」共有 0 題，因此在教科書中有培養學生「形成」的百分比為 0%；有意圖培養學生「應用」共有 5 題，因此在教科書中有培養學生「應用」的百分比為 100%；有意圖培養學生「詮釋」共有 4 題，因此在教科書中有培養學生「詮釋」的百分比為 80%。

可以發現不論是在高一或是高二，課本帶給學生的「應用」與「詮釋」遠大於「形成」。整體而言，高中課程的對數單元中$\boxed{\text{真實情境的分析單位}}$皆能讓學生經歷的「應用」(100%)，「詮釋」提升的幅度更高，增加至 87.5%。可以發現在$\boxed{\text{真實情境}}$中較能夠讓學生看到數學結果在真實世界的意義。而在「形成」部分較低(12.5%)，研究者認為是真實情境中的形成太困難，在課本中不容易由學生自己建立出來，因此教科書會選擇直接提供給學生。

表 肆-5 $\boxed{\text{真實情境的分析單位}}$在解題歷程的題數與比例

單元／歷程	高一(3 題)		高二(5 題)		對數完整單元(8 題)	
	題數	百分比	題數	百分比	題數	百分比
形成	1	33.3%	0	0.0%	1	12.5%
應用	3	100.0%	5	100.0%	8	100.0%
詮釋	3	100.0%	4	80.0%	7	87.5%

（四）、教科書中$\boxed{\text{有脈絡的分析單位}}$與$\boxed{\text{無脈絡的分析單位}}$之比較

除了作出教科書中$\boxed{\text{有脈絡的分析單位}}$的數據統計外（如表 肆-4），研究者另外做出$\boxed{\text{無脈絡的分析單位}}$的數據統計（如**錯誤！找不到參照來源。**）。為了方便閱讀，將表 肆-4 重新放一次。

表 肆-4 $\boxed{\text{有脈絡的分析單位}}$在解題歷程的題數與比例

單元 / 歷程	高一(5 題)		高二(8 題)		對數完整單元 (13 題)	
	題數	百分比	題數	百分比	題數	百分比
形成	3	60.0%	3	37.5%	6	46.2%
應用	5	100.0%	8	100.0%	13	100.0%
詮釋	4	80.0%	6	75.0%	10	76.9%

表 肆-6 $\boxed{\text{無脈絡的分析單位}}$在解題歷程的題數與比例

單元 / 歷程	高一(9 題)		高二(20 題)		對數完整單元 (29 題)	
	題數	百分比	題數	百分比	題數	百分比
形成	0	0%	1	5.0%	1	3.4%
應用	6	66.7%	18	90.0%	24	82.8%
詮釋	1	11.1%	0	0%	1	3.4%

先來看表 肆-6，在$\boxed{\text{無脈絡的分析單位}}$中，高一內容沒有任何一題意圖培養學生「形成」百分比為 0%；而有意圖培養學生「應用」共有 6 題，因此在教科書中有培養學生「應用」的百分比為 66.7%；有意圖培養學生「詮釋」僅有 1 題，因此在教科書中有培養學生「詮釋」的百分比為 11.1%。

在高二的內容中有意圖培養學生「形成」共有 1 題，因此在教科書中有培養學生「形成」的百分比為 5.0%；有意圖培養學生「應用」共有 18 題，因此在教科書中有培養學生「應用」的百分比為 90%；而「詮釋」則沒有編碼到任何一題，因此在教科書中有培養學生「詮釋」的百分比為 0%。

從上面兩個表可以發現$\boxed{\text{有脈絡的分析單位}}$在數學素養的培養上是很重要

的。由數據可發現在無脈絡的分析單位大部分都集中在培養學生「應用」，有82.8%的比例；而「形成」與「詮釋」的比例低很多，都只有 3.4%。有脈絡的分析單位「應用」達到 100.0%的比例；而「形成」也有 46.2%，「詮釋」高的更多，有到 76.9%。可以發現教科書幾乎只能透過這些有脈絡的分析單位做「形成」與「詮釋」。因此教科書才需要安排有脈絡的題目，才能讓素養的學習活動跳出來。

第二節、教科書中的素養內容解析

本節說明教科書中能夠如何培養出學生的數學素養，以下說明的題目選取是由和過去課本不曾出現過的、特別傳統於以往的編排方式，且能夠培養出學生素養的內容來分析。在質性說明利用 PISA 2021 架構中三個解題歷程的子項目為主，以及數學推理和數學領綱的精神輔以說明。

以下分為四部分：第一部分是情境脈絡、第二部分是活動脈絡、第三部分是其他不同於傳統之輔助學習方式、第四部份則是課文內容。

（一）、情境脈絡

PISA 2021 架構中明確定義該測驗是評估 15 歲學生在面對情境或是問題時，有多大的程度能進行數學推理和熟練地處理數學問題，而這些情境和問題大部分都是在現實生活中出現的。

由於 PISA 在測量學生的素養程度時所提供的問題都強調真實問題，要求學生能在這之中展現出數學推理和他們的思維。因此在素養導向的教材中，也會有許多真實情境的問題，盡量讓學生感受到數學與生活是息息相關的。

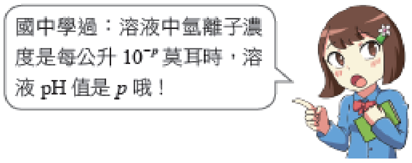
PISA 認為有數學素養的學生在解決問題時，會經歷建模週期(modelling cycle)（包含形成、應用、詮釋與評估）是重要的。然而，通常沒有必要參與建模週期的每個階段，特別是評估。一般而言，數學建模週期的重要部分由其他人承擔，最終學生只需執行建模週期的一些步驟，但不是全部。

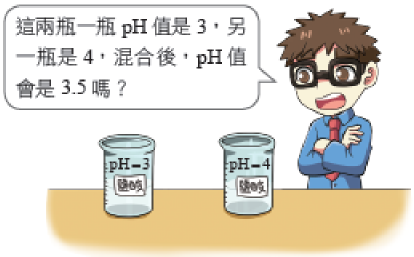
1. 高一課本

介紹 10 乘冪的課文內容。

1-2.3　10 乘冪

墨規在實驗室，發現有兩瓶鹽酸，都是 1 公升，瓶子上標示了 pH 值（如下圖）：



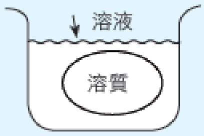


小幫手

莫耳濃度是每公升溶液含的溶質莫耳（mole）數，即 $\dfrac{\text{溶質莫耳數}}{\text{溶液體積（公升）}}$。

莫耳濃度之說明

若溶液體積是 1 公升，其中含溶質 x 莫耳，則此溶液的莫耳濃度為 $\dfrac{x}{1}$ 莫耳／公升，反過來，若溶液的莫耳濃度為 x 莫耳／公升，則 1 公升的此溶液，內含溶質 x 莫耳、2 公升的此溶液，內含溶質 $2x$ 莫耳、… 依此類推。



由上面說明可知，pH 值為 3 的這瓶 1 公升溶液，含有 10^{-3} 莫耳的 H^+（氫離子），另一瓶 pH 值為 4 的 1 公升溶液，含有 10^{-4} 莫耳的 H^+，因此混合後的溶液總體積為 2 公升，其中含有 $(10^{-3}+10^{-4})$ 莫耳的 H^+，由上面小幫手可得混合溶液的莫耳濃度為

$$\frac{10^{-3}+10^{-4}}{2}=\frac{10\times10^{-4}+1\times10^{-4}}{2}=\frac{11\times10^{-4}}{2}=5.5\times10^{-4},$$

因為 $10^{-4}<5.5\times10^{-4}<10\times10^{-4}=10^{-3}$，所以 pH 值介於 3 到 4 之間，但會是 3.5 嗎？學完以下內容，我們應該就能判斷了。

任意兩個表為科學記號的相異正數，原本可根據其量級或係數比較大小：

$3.4\times10^{2}>8.9\times10^{-3}$（量級不同比量級）、

$9.76\times10^{-3}>8.9\times10^{-3}$（量級相同比係數），

此時也可以化為更簡潔的 10 乘冪形式（10^{L}）進行比較。

手腦並用 4

請用計算機按按看，10 的幾次方會是 5.5 ？

讓我們利用上面的結果來計算第 37 頁實驗室裡混合溶液的 pH 值。

氫離子莫耳濃度 $[H^+]=5.5\times10^{-4}$，因為 $5.5\approx10^{0.74}$，所以

$5.5\times10^{-4}\approx10^{0.74}\times10^{-4}=10^{-3.26}$，因此 $[H^+]=10^{-3.26}$，pH 值約為 3.26，不是 3.5。

照上面的說明，如果我們可以將任何溶液的氫離子莫耳濃度化為 10^{L} 的形式，便可以知道這個濃度的 pH 值。

圖 肆-1 情境脈絡範例 1

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」有 F1.F2.F3.F5.F6.F8.F9，在「應用」中有 E1.E2.E3.E4.E5.E6.E7.，在「詮釋」中有 I3.I5.I6。

1. 課本利用真實的濃度問題，帶學生體會、觀察如何計算「兩個相同體積」混合後的濃度問題，提出是否能將 pH 值相加除以 2 得到新的溶液 pH 值。課本帶給學生有結構的解題歷程，提出「濃度的模型」，將濃度表示成 $\frac{\text{溶質莫耳數}}{\text{溶液體積}}$ (F1)， 並辨識出真實世界中數學面向的問題找出重要的變數是溶質莫耳數跟溶液體積(F2)。因此可以發現新的 pH 值不能直接用原先的 pH 值相加除以 2，所以 $\frac{3+4}{2}=3.5$ 並不是真正的新的 pH 值(F5)。在計算出新濃度後，可以透過濃度與 pH 值的關係看出 pH 值是濃度的次方再加一個負號，這種關係也是一種結構(F3)，正是後面希望學生學習的對數結構性。當他們能將一個混合濃度的問題翻譯成數學語言，理解真實世界中大家對「pH 值」這個詞彙的意義與對數學世界中如何計算濃度的方式(F8.F9)。基於以上原因，認為此段落有意圖培養學生「形成」的素養。

2. 在「應用」的部分，教科書帶領學生參與一次「應用」的過程。首先把濃度進行簡單的相加除以 2 的運算(E1)，選擇莫耳濃度的模型並透過此模型得出濃度為5.5×10^{-4} (E3.E4.E6.E7)，得知 pH 值應該是介於 3 到 4 之間的結論(E2)。最後能夠利用計算機得知$5.5\approx10^{0.74}$，因此混合濃度的 pH 值約為 3.26 (E5)。

3. 在「詮釋」的部分，透過教科書的指引，期望學生能再一開始了解 pH 值不是 $\frac{3+4}{2}=3.5$ ，並能解釋出因為濃度和 pH 值不同的意義，混合溶液如果利用 pH 值相加除以 2 是沒有意義的(I6)，因此依照上下文選擇濃度的模型調整。此後透過濃度得出真正的 pH 值約為 3.26，並將此結果解釋回真實世界回答原始的問題(I3)。

本題作為第一個認識 10 的乘冪的範例，利用生活中會遇到的溶液混合問題探討混合後的 pH 值，和國中理化結合，屬於跨學科的問題。利用數學是一門善於處理規律的科學的特性，在看似複雜的應用領域中，經過數學的協助分析，處理濃度與 pH 值之間的規律問題。符合《數學領綱》第二點，「數學是一種實用的規律科學，教學宜重視跨領域的統整」。

這一題可以幫助學生理解 10 的乘冪的需求，在學生認知到數學解答並不是 $\frac{3+4}{2}=3.5$ 時，可能會對學生產生強大的認知衝突，大大增加了學生在學習本單元的需求。因此當教科書帶領學生經歷這樣有真實情境脈絡的問題時，不僅僅是學習一個新的數學概念，而是真正學習數學是如何應用在生活當中，這對學生的學習是有幫助的。

✧　以下利用另一種方式幫助讀者讀取這一題中含有的「形成」：

1-2.3　10 乘冪

墨規在實驗室，發現有兩瓶鹽酸，都是 1 公升，瓶子上標示了 pH 值（如下圖）：

國中學過：溶液中氫離子濃度是每公升 10^{-p} 莫耳時，溶液 pH 值是 p 哦！

這兩瓶一瓶 pH 值是 3，另一瓶是 4，混合後，pH 值會是 3.5 嗎？

pH＝3

pH＝4

小幫手

莫耳濃度是每公升溶液含的溶質莫耳（mole）數，即 $\dfrac{\text{溶質莫耳數}}{\text{溶液體積（公升）}}$。

莫耳濃度之說明

若溶液體積是 1 公升，其中含溶質 x 莫耳，則此溶液的莫耳濃度為 $\dfrac{x}{1}$ 莫耳／公升，反過來，若溶液的莫耳濃度為 x 莫耳／公升，則 1 公升的此溶液，內含溶質 x 莫耳、2 公升的此溶液，內含溶質 $2x$ 莫耳、…依此類推。

溶液

溶質

由上面說明可知，pH 值為 3 的這瓶 1 公升溶液，含有 10^{-3} 莫耳的 H^+（氫離子），另一瓶 pH 值為 4 的 1 公升溶液，含有 10^{-4} 莫耳的 H^+，因此混合後的溶液總體積為 2 公升，其中含有 $(10^{-3}+10^{-4})$ 莫耳的 H^+，由上面小幫手可得混合溶液的莫耳濃度為

$$\frac{10^{-3}+10^{-4}}{2}=\frac{10\times10^{-4}+1\times10^{-4}}{2}=\frac{11\times10^{-4}}{2}=5.5\times10^{-4},$$

因為 $10^{-4}<5.5\times10^{-4}<10\times10^{-4}=10^{-3}$，所以 pH 值介於 3 到 4 之間，但會是 3.5 嗎？學完以下內容，我們應該就能判斷了。

任意兩個表為科學記號的相異正數，原本可根據其量級或係數比較大小：

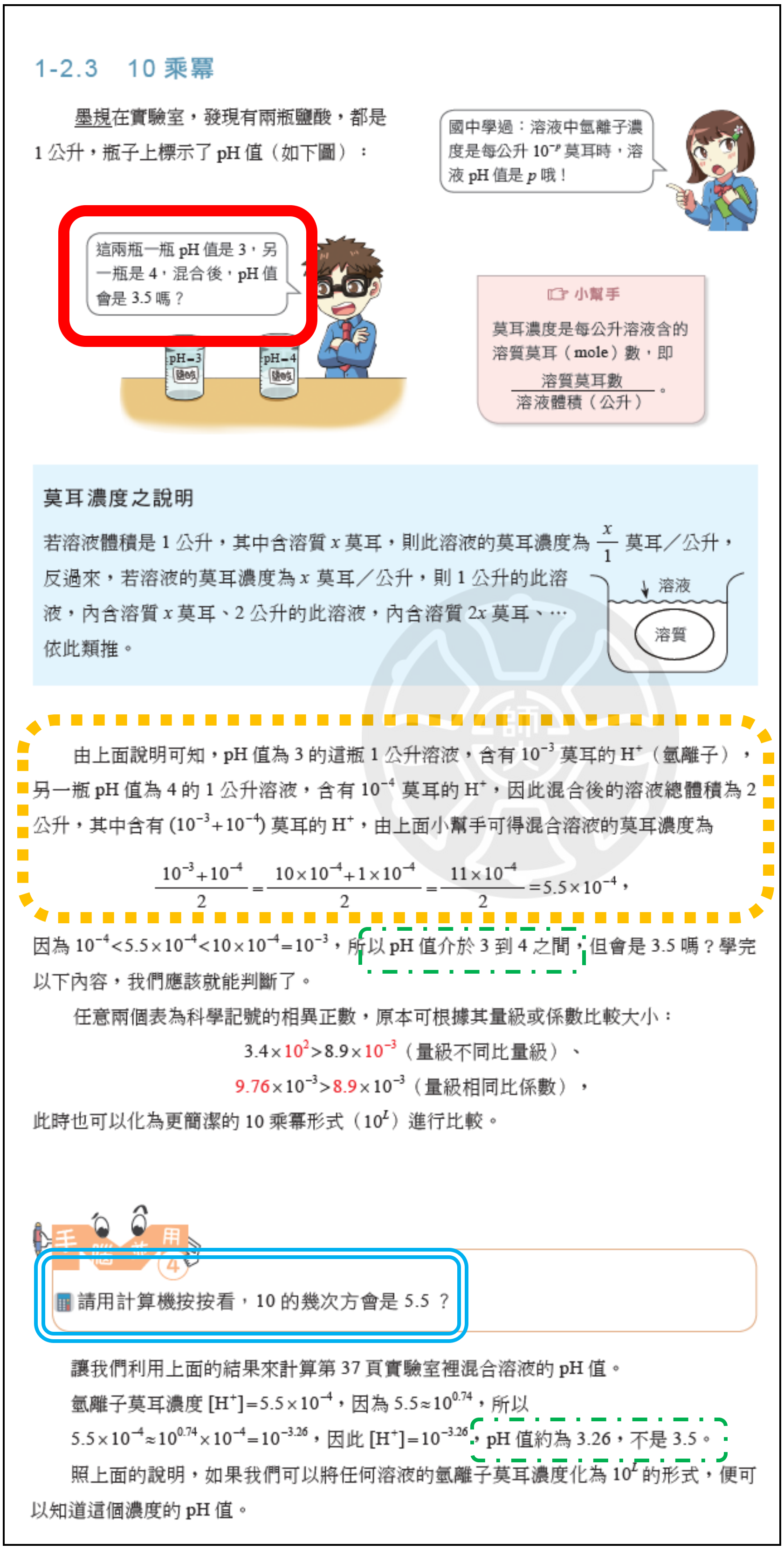
$3.4\times10^{2}>8.9\times10^{-3}$（量級不同比量級）、

$9.76\times10^{-3}>8.9\times10^{-3}$（量級相同比係數），

此時也可以化為更簡潔的 10 乘冪形式（10^{L}）進行比較。

圖　肆-2 情境脈絡範例 1—形成

✧ 以下利用另一種方式幫助讀者讀取這一題中含有的「應用」：



1-2.3 10 乘冪

墨規在實驗室，發現有兩瓶鹽酸，都是 1 公升，瓶子上標示了 pH 值（如下圖）：

國中學過：溶液中氫離子濃度是每公升 10^{-p} 莫耳時，溶液 pH 值是 p 哦！

這兩瓶一瓶 pH 值是 3，另一瓶是 4，混合後，pH 值會是 3.5 嗎？

pH=3 鹽酸　pH=4 鹽酸

☞ 小幫手

莫耳濃度是每公升溶液含的溶質莫耳（mole）數，即 $\dfrac{\text{溶質莫耳數}}{\text{溶液體積（公升）}}$。

莫耳濃度之說明

若溶液體積是 1 公升，其中含溶質 x 莫耳，則此溶液的莫耳濃度為 $\dfrac{x}{1}$ 莫耳／公升，反過來，若溶液的莫耳濃度為 x 莫耳／公升，則 1 公升的此溶液，內含溶質 x 莫耳、2 公升的此溶液，內含溶質 $2x$ 莫耳、⋯依此類推。

溶液　溶質

由上面說明可知，pH 值為 3 的這瓶 1 公升溶液，含有 10^{-3} 莫耳的 H^+（氫離子），另一瓶 pH 值為 4 的 1 公升溶液，含有 10^{-4} 莫耳的 H^+，因此混合後的溶液總體積為 2 公升，其中含有 $(10^{-3}+10^{-4})$ 莫耳的 H^+，由上面小幫手可得混合溶液的莫耳濃度為

$$\frac{10^{-3}+10^{-4}}{2}=\frac{10\times10^{-4}+1\times10^{-4}}{2}=\frac{11\times10^{-4}}{2}=5.5\times10^{-4},$$

因為 $10^{-4}<5.5\times10^{-4}<10\times10^{-4}=10^{-3}$，所以 pH 值介於 3 到 4 之間，但會是 3.5 嗎？學完以下內容，我們應該就能判斷了。

任意兩個表為科學記號的相異正數，原本可根據其量級或係數比較大小：

$3.4\times10^{2}>8.9\times10^{-3}$（量級不同比量級）、

$9.76\times10^{-3}>8.9\times10^{-3}$（量級相同比係數），

此時也可以化為更簡潔的 10 乘冪形式（10^{r}）進行比較。

手腦並用 4

請用計算機按按看，10 的幾次方會是 5.5？

讓我們利用上面的結果來計算第 37 頁實驗室裡混合溶液的 pH 值。

氫離子莫耳濃度 $[H^+]=5.5\times10^{-4}$，因為 $5.5\approx10^{0.74}$，所以

$5.5\times10^{-4}\approx10^{0.74}\times10^{-4}=10^{-3.26}$，因此 $[H^+]=10^{-3.26}$，pH 值約為 3.26，不是 3.5。

照上面的說明，如果我們可以將任何溶液的氫離子莫耳濃度化為 10^{r} 的形式，便可以知道這個濃度的 pH 值。

E1 簡單的計算(相加/2)

E3 選擇適當的策略
E4 實施策略已找到解答
E6 應用數學事實、規則
E7 操作數字

E2 得出結論

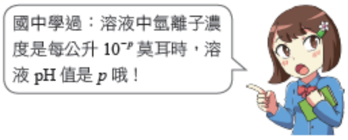
E5 使用工具

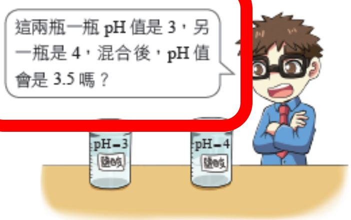
圖 肆-3 情境脈絡範例 1—應用

✧ 以下利用另一種方式幫助讀者讀取這一題中含有的「詮釋」：

1-2.3 10 乘冪

墨規在實驗室，發現有兩瓶鹽酸，都是 1 公升，瓶子上標示了 pH 值（如下圖）：





☞ 小幫手

莫耳濃度是每公升溶液含的溶質莫耳（mole）數，即 $\dfrac{\text{溶質莫耳數}}{\text{溶液體積（公升）}}$。

莫耳濃度之說明

若溶液體積是 1 公升，其中含溶質 x 莫耳，則此溶液的莫耳濃度為 $\frac{x}{1}$ 莫耳／公升，反過來，若溶液的莫耳濃度為 x 莫耳／公升，則 1 公升的此溶液，內含溶質 x 莫耳、2 公升的此溶液，內含溶質 $2x$ 莫耳、…依此類推。

由上面說明可知，pH 值為 3 的這瓶 1 公升溶液，含有 10^{-3} 莫耳的 H^+（氫離子），另一瓶 pH 值為 4 的 1 公升溶液，含有 10^{-4} 莫耳的 H^+，因此混合後的溶液總體積為 2 公升，其中含有 $(10^{-3}+10^{-4})$ 莫耳的 H^+，由上面小幫手可得混合溶液的莫耳濃度為

$$\frac{10^{-3}+10^{-4}}{2}=\frac{10\times10^{-4}+1\times10^{-4}}{2}=\frac{11\times10^{-4}}{2}=5.5\times10^{-4},$$

因為 $10^{-4}<5.5\times10^{-4}<10\times10^{-4}=10^{-3}$，所以 pH 值介於 3 到 4 之間，但會是 3.5 嗎？學完以下內容，我們應該就能判斷了。

任意兩個表為科學記號的相異正數，原本可根據其量級或係數比較大小：

$$3.4\times10^{2}>8.9\times10^{-3}$$（量級不同比量級）、

$$9.76\times10^{-3}>8.9\times10^{-3}$$（量級相同比係數），

此時也可以化為更簡潔的 10 乘冪形式（10^{L}）進行比較。

手腦並用 4

請用計算機按按看，10 的幾次方會是 5.5 ？

讓我們利用上面的結果來計算第 37 頁實驗室裡混合溶液的 pH 值。

氫離子莫耳濃度 $[H^+]=5.5\times10^{-4}$，因為 $5.5\approx10^{0.74}$，所以

$5.5\times10^{-4}\approx10^{0.74}\times10^{-4}=10^{-3.26}$，因此 $[H^+]=10^{-3.26}$，pH 值約為 3.26，不是 3.5。

照上面的說明，如果我們可以將任何溶液的氫離子莫耳濃度化為 10^{L} 的形式，便可以知道這個濃度的 pH 值。

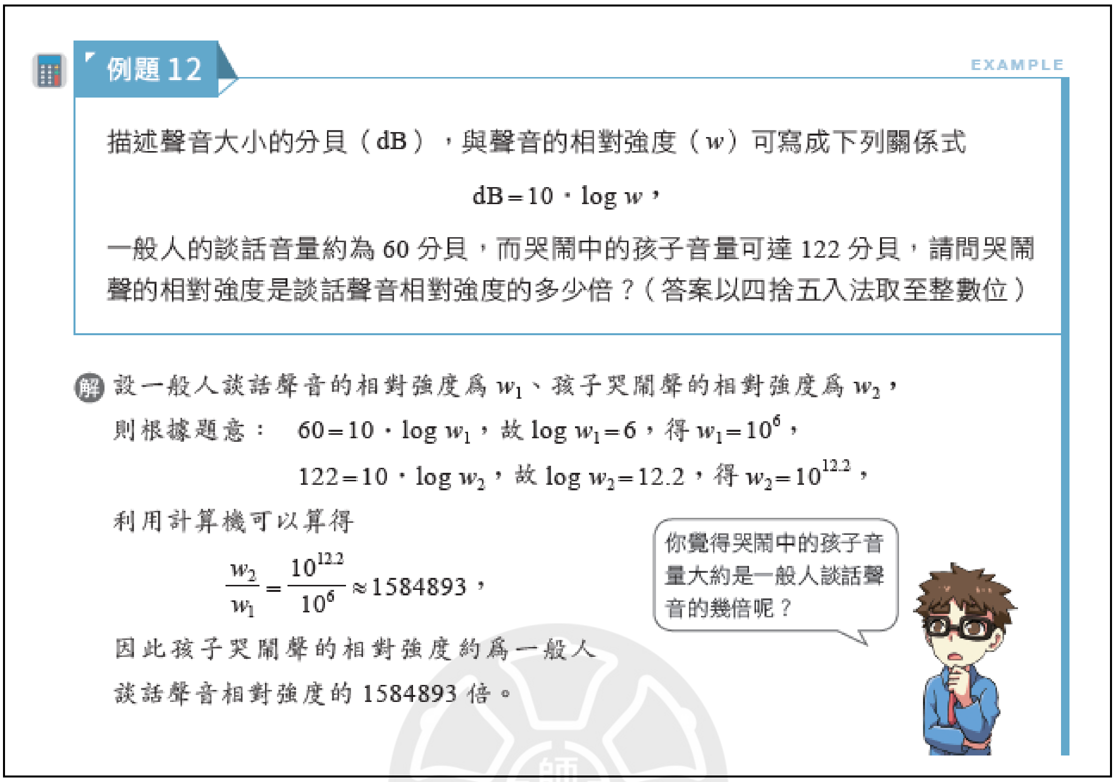
I6 解釋數學結果有沒有意義

I3 將數學結果解釋回現實世界

圖 肆-4 情境脈絡範例 1—詮釋

2. 高一課本 P43

需要使用對數的真實情境問題



例題 12 EXAMPLE

描述聲音大小的分貝（dB），與聲音的相對強度（w）可寫成下列關係式

$$dB=10\cdot\log w,$$

一般人的談話音量約為 60 分貝，而哭鬧中的孩子音量可達 122 分貝，請問哭鬧聲的相對強度是談話聲音相對強度的多少倍？（答案以四捨五入法取至整數位）

解 設一般人談話聲音的相對強度爲 w_1、孩子哭鬧聲的相對強度爲 w_2，

則根據題意：$60=10\cdot\log w_1$，故 $\log w_1=6$，得 $w_1=10^6$，

$122=10\cdot\log w_2$，故 $\log w_2=12.2$，得 $w_2=10^{12.2}$，

利用計算機可以算得

$$\frac{w_2}{w_1}=\frac{10^{12.2}}{10^6}\approx 1584893,$$

因此孩子哭鬧聲的相對強度約爲一般人談話聲音相對強度的 1584893 倍。

圖 肆-5 情境脈絡範例 2

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」中沒有對應編碼，在「應用」中有 E1.E2.E4.E5.E6.E7.E9，在「詮釋」中有 I3。

1. 在「形成」部分，題目中並沒有對應到任何一項。因為真實情境轉換成數學關係式已經由題目給定了。也就是說題目直接將$dB=10\cdot log\ w$這條關係式給學生，因此學生理解情境後，並不需要自己產生出數學關係式即可進入下一個「應用」階段。

2. 在「應用」部分，當學生看到題目給出的函數關係後，會假設人談話的相對強度為w_1，孩子哭鬧聲的相對強度為w_2，並依照題意列式，這是學生學習設計並實施策略的過程(E4)。接著他會利用對數與指數之間的數學關係、規則找出原始值(E6)，此時由於指數與對數有特有的結構關係，而且在高一並沒有對數律可以使用，故學生必須將實數的表達方式從對數表徵轉換成指數形式才能成功解題(E9)。得到人談話的相對強度$w_1=10^6$，孩子哭鬧聲的相對強度為$w_2=10^{12.2}$後，為了得出兩者的倍數關係，由兩數相除得到

$\frac{10^{12.2}}{10^{6}}=10^{12.2-6}=10^{6.6}$ 此時需要用到指數律(E7.E1)。對學生來說可能還對這個數字無感，如果最後透過計算機按出近似值為$10^{6.2} \approx 1584893$倍(E5)，可以讓學生對解出來的答案(E2)更有感覺。

3. 在「詮釋」部分，因為計算機可以按出近似值為$10^{6.6} \approx 1584893$(E5)，所以可以知道原來孩子的哭鬧聲約為一般人談話聲的1584893倍，此動作就是將結果解釋回真實世界(I3)。

雖然本題沒有帶領學生經歷完整的三個解題歷程階段，但是前面要學生自己找出此關係式太困難了，而且 PISA 2021 架構中也有提及，礙於現實面，學生不必經歷所有的解題歷程也沒關係，所以此關係式由課本提供。另外，本題使用的情境是真實世界中的情境，能夠培養學生在日常生活中應用所需的數學知能。

此題在高一對數單元的最後一個範例題，因此可以將前面所學到的東西都拿來使用。在解題過程中所經歷的「應用」，正是在此單元重視的概念、希望學生能學習到的部分。研究者認為，過去的教材因為對數都在同一次段考，而新課綱改革過後將對數單元拆開到高一及高二兩階段學習。過去學生會直接用對數律運算，不見得會一直注意到原始值的大小及代表出的值的意義，例如：$w_1 = 10^6$、$w_2 = 10^{12.2}$。現今因為需要換回真實值，也許會更知道自己求出來的東西的意義。

在本題中的「應用」佔很大一部分，在這個階段順利進行需要足夠的數學推理能力。從此一觀點來看，首先學生因為函數關係知道強度會影響分貝，看出兩變數之間的相互依賴和相互作用是如何影響情境的*（數學推理-4-認識數量之間的函數關係）*。

由於題目給的是分貝（對數值），最後是問音量的相對強度差多少倍。隱含要去找原始值，需要了解如何讓「原本數字的大小」呈現出來，因此需要利用到對數與指數的關係，以呈現出數字的原始大小*（數學推理-1-理解數量、數字系統及其代數性質）*。

當學生列出人聲與孩子哭鬧聲的數學關係式後，學生需要知道log可以如何找出原始強度，由於對數單元中有很特別的結構，學生需要學習使用「$loga = b \rightarrow 10^b = a$」的對數結構、規則以求得真正的原始值*（數學推理-3-了解結構與規律）*。

當學生得出$w_1 = 10^6$後，在求兩者相差多少倍時，所需用到的指數運算也屬於數學推理的一環*（數學推理-1-理解數量、數字系統及其代數性質）*。

3. 高二 B 版課本 P85

利用對數幫助生活的真實情境問題

動動筆 7

審計工作者會使用班佛法則來查帳。班佛法則是：「銀行存款的最高位數字是 a 者的比例約為 $\log(1+\frac{1}{a})$」，例如銀行存款的最高位數字是 1（如存款為 1500、123000 等等）的比例約有 $\log(1+\frac{1}{1})=\log 2\approx 0.3010=30.1\%$，如果以年度帳面來看，最高位數字是 1 的比例遠低於 30%，帳簿就有作假的嫌疑。（比例四捨五入取至小數點後第 2 位）

(1) 依據班佛法則，試以表格呈現不同最高位數字的比例。

最高位數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
比例	30.1%								

(2) 這些比例總和為多少？

圖 肆-6 情境脈絡範例 3

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」中沒有對應編碼，在「應用」中有 E1.E2.E5，在「詮釋」中沒有對應編碼。

1. 在「形成」部分，題目中並沒有對應到任何一項。因為真實情境轉換成數學關係式已經由題目給定了。也就是說題目直接「銀行存款的最高位數字是a者的比例約為$log(1+\frac{1}{a})$」這條關係式給學生，因此學生理解情境後，並不需要自己產生出數學關係式即可進入下一個「應用」階段。

2. 在「應用」部分，學生會依照課本的提問做簡單的運算，利用計算機按出最高位數字的比例(E5)，以及加總(E1)，看出比例總和是 100%。

3. 在「詮釋」部分，研究者認為課本沒有提出回應題意的提問，因此沒有勾選出對應編碼。

研究者認為雖然這題沒有編碼任何一項解題歷程的「形成」，但是這一題可以讓學生看到對數在真實世界中的用途，不一定是自然科學問題（例如地震、分貝大小）才需要對數，會計問題也同樣能使用對數幫助查帳。可以讓學生感受到數學應用是跨領域的，故在教科書的教學脈絡中也重視跨領域的統整。

研究者認為如果可以將題目延伸，比如分別給出有造假以及無造假的帳簿，讓學生應用班佛法則，驗證看看並試著解讀它的意義，或許比較不會有停在一半，更可以感受到它應用在生活中的樣貌，可以多給予一個機會讓學生感受到數學可以幫助解決生活上的問題，以及他是如何解決的。

4. 高二 B 版課本 P99

> 以聽覺為例，當聲音強度是正常聽力所能聽到最小的聲音強度的 w 倍時，測量聲音的儀器或人的耳朵所感受到的反應量是$10\log w$分貝，也就是聽覺的韋伯 - 費希納方程式為$dB=10\log w$，w 代表聲音的相對強度，也就是音量，dB（分貝）為儀器或耳朵接收到的感受量。下表為生活中常見聲音的分貝數，依序從小到大，你發現分貝欄與強度倍數欄分別為什麼數列呢？

圖 肆-7 情境脈絡範例 4-1

例題 6

EXAMPLE

假設書店、教室跟馬路的音量各是 50、60、70 分貝，求教室聲音的相對強度是書店的幾倍？馬路上聲音的相對強度是教室的幾倍？

解 由分貝數 $dB = 10 \log w$，w 為聲音的相對強度，dB（分貝）為儀器或耳朵接受到的感受量。

書店音量 50 分貝，由 $50 = 10 \log w_{書店}$，得 $5 = \log w_{書店}$，故 $w_{書店} = 10^5$。

教室音量 60 分貝，由 $60 = 10 \log w_{教室}$，得 $6 = \log w_{教室}$，故 $w_{教室} = 10^6$。

馬路音量 70 分貝，由 $70 = 10 \log w_{馬路}$，得 $7 = \log w_{馬路}$，故 $w_{馬路} = 10^7$。

所以教室聲音的相對強度是書店的 $\frac{w_{教室}}{w_{書店}} = \frac{10^6}{10^5} = 10$ 倍；

馬路聲音的相對強度是教室的 $\frac{w_{馬路}}{w_{教室}} = \frac{10^7}{10^6} = 10$ 倍。

動動筆 5

假設教室裡一個人講話平均是 60 分貝，若教室中有 10 個人，請問 10 個人一起講話平均是幾分貝？（提示：n 個人的聲音相對強度為 1 個人聲音相對強度的 n 倍。）

圖 肆-8 情境脈絡範例 4-2

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」中沒有對應編碼，在「應用」中有 E1.E2.E4.E6.E7.E9，在「詮釋」中有 I2。

1. 在「形成」部分，題目中並沒有對應到任何一項。因為真實情境轉換成數學關係式已經在前面的課文內容中寫出來了。也就是說題目直接將「$dB = 10 \cdot log\ w$」這條關係式給學生，因此學生理解情境後，並不需要自己產生出數學關係式即可進入下一個「應用」階段。

2. 在「應用」部分，學生透過閱讀內文，判斷出題目所需要的函數關係後，為了求出倍數問題，將每個地點的分貝數代入得到等號關係。此依照題意列式，屬於學生學習設計並實施策略的過程(E4)。接著他會利用對數與指數之間的數學事實、規則找出原始值(E6)，此時由於指數與對數有特有的結構關係，故學生必須將實數的表達方式從對數表徵轉換成指數形式才能成功解題

(E9)。得到三個地點的相對強度分別是$w_{書店}=10^5$、$w_{教室}=10^6$、$w_{馬路}=10^7$，接著為了得出兩者的倍數關係，可將兩數相除得到$\frac{10^7}{10^6}=10^{7-6}=10^1$此時需要用到指數律(E7.E1)。

3. 在「詮釋」部分，因為題目問的是差多少倍，所以當學生得到教室的聲音的相對強度是書店的 10 倍時，此動作就是將結果解釋回真實世界(I3)。

雖然本題沒有帶領學生經歷完整的三個解題歷程階段，但是礙於現實面，學生不必經歷所有的解題歷程也沒關係。研究者認為，現在的教學過程中雖然在高二教過對數律了，但是在解題過程中並不強調對數律。目的是希望用指數的樣子看到真實值，讓學生更了解計算出來的結果並知道他的意義。

研究者認為雖然例題 6 中的數字都是很好計算的數值，比如 50、60、70 分貝，而不是個位數不為 0 的分貝數。但是這個單元重要的事情是要讓學生學習將對數轉換成回真數，因此數值不是最重要的，只要讓學生好計算即可。

數學的發展既依賴直覺又需要推理。在隨堂練習中，正是要讓學生看出變成十個人的聲音時，相對強度也會變為原本的 10 倍，但是人接收到的聲音感受度並不是增加為 10 倍。也就是說原本感受到 60 分貝時，不會因為增加十個人，感受到變成 600 分貝。這也很符合學生的直覺。透過數學推理可以知道對數值（分貝）不是乘以 10，而是對數值增加 1。在此題中可以讓學生更了解前面的課本的文字敘述:「人類對任何刺激的反應與外界刺激強度的對數成正比」，我認為這個題目有提供學生有感的學習機會，符合領綱的其中一個理念。並且可以在日常生活中應用所需的數學知能。

研究者認為教科書沒有特別出現引導的問句詢問學生有什麼發現，可能學生不會特別將求出的答案（70 分貝）重新解讀一次。如果在這題能讓學生自己重新詮釋數字、並解讀結果，會更加深「真實值乘 10，對數值加 1」的觀念，學生對數學在生活上的應用會更有感覺。

✧ 以下利用另一種方式幫助讀者讀取這一題中含有的三個解題歷程：

- ■ 「形成」沒有對應編碼
- ■ 「應用」中 E1.E2.E4.E6.E7.E9
- ■ 「詮釋」有 I2

例題 6 EXAMPLE

假設書店、教室跟馬路的音量各是 50、60、70 分貝，求教室聲音的相對強度是書店的幾倍？馬路上聲音的相對強度是教室的幾倍？

解 由分貝數 $dB = 10\log w$，w 為聲音的相對強度，dB（分貝）為儀器或耳朵接受到的感受量。

書店音量 50 分貝　由 $50 = 10\log w_{書店}$，得 $5 = \log w_{書店}$，故 $w_{書店} = 10^5$。

教室音量 60 分貝　由 $60 = 10\log w_{教室}$，得 $6 = \log w_{教室}$，故 $w_{教室} = 10^6$。

馬路音量 70 分貝　由 $70 = 10\log w_{馬路}$，得 $7 = \log w_{馬路}$，故 $w_{馬路} = 10^7$。

所以教室聲音的相對強度是書店的 $\dfrac{w_{教室}}{w_{書店}} = \dfrac{10^6}{10^5} = 10$ 倍；

馬路聲音的相對強度是教室的 $\dfrac{w_{馬路}}{w_{教室}} = \dfrac{10^7}{10^6} = 10$ 倍。

動動筆 5

假設教室裡一個人講話平均是 60 分貝，若教室中有 10 個人，請問 10 個人一起講話平均是幾分貝？（提示：n 個人的聲音相對強度為 1 個人聲音相對強度的 n 倍。）

圖 肆-9 情境脈絡範例 4—解題歷程

E4 設計並實施策略的過程

E7 操作數字(兩數相除)
E1 進行簡單計算

E6 利用指對數的規則找出原始值
E9 轉換表徵(對數&指數)

I3 將結果詮釋回真實世界

5. 高二 B 版課本 P100

例題 7 EXAMPLE

國際上常用地震規模來衡量地震釋放出的能量，而國內又常以芮氏規模做為報導的主要參考。根據中央氣象局資料，如果設芮氏規模為 r 的地震釋放能量為 E（爾格），則 r 與 E 的數學關係為：$\log E = 5.24 + 1.44r$。

(1) 由此可知，如果地震規模增加 1，則釋放的能量增加約為原能量的幾倍？（四捨五入取至小數點後第 2 位）

(2) 1999 年發生的九二一大地震規模為 7.3，2016 年造成臺南維冠大樓倒塌的美濃大地震規模為 6.6，問前者所釋放的地震能量為後者所釋放的能量的多少倍？（四捨五入取至小數點後第 2 位）

解 (1) 令 $r=x$ 代入 $\log E_1 = 5.24 + 1.44(x)$，得 $10^{5.24+1.44x} = E_1$

$r=x+1$ 代入 $\log E_2 = 5.24 + 1.44(x+1)$，得 $10^{5.24+1.44(x+1)} = E_2$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{5.24+1.44(x+1)}}{10^{5.24+1.44(x)}} = 10^{1.44} \approx 27.54$$

(2) 令 $r=7.3$ 代入 $\log E_1 = 5.24 + 1.44 \times 7.3$，得 $10^{5.24+1.44\times7.3} = E_1$

$r=6.6$ 代入 $\log E_2 = 5.24 + 1.44 \times 6.6$，得 $10^{5.24+1.44\times6.6} = E_2$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{5.24+1.44\times7.3}}{10^{5.24+1.44\times6.6}} = 10^{1.44\times0.7} \approx 24.79$$

動動筆 6

1960 年智利大地震，又稱為瓦爾迪維亞大地震，發生在 1960 年 5 月 22 日，是人類地震觀測史上記錄到規模最大的地震，其芮氏地震規模為 8.9，1999 年發生的九二一大地震規模為 7.3，問前者所釋放的地震能量為後者所釋放的能量的多少倍？（四捨五入取至小數點後第 2 位）

圖 肆-10 情境脈絡範例 5

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」中沒有對應編碼，在「應用」中有 E1.E2.E4.E5.E6.E7，在「詮釋」中有 I2。

1. 在「形成」部分，題目中並沒有對應到任何一項。因為真實情境轉換成數學關係式已經在前面的課文內容中寫出來了。也就是說題目直接將「$log\ E = 5.24 + 1.44r$」這條關係式給學生，因此學生理解情境後，並不需要自己產生出數學關係式即可進入下一個「應用」階段。

2. 在「應用」部分，學生會依照題意要找出地震規模增加 1，找出兩者差多少倍。當他在解題時可以代固定的數字，例如代地震規模$=3$或是地震規模$=4$，再看出他們原始值的倍數差多少倍。但是教科書教學生的是一般化，假設地震規模是x，因此地震規模增加 1 時即是$x+1$，這屬於學生學習設計並實施策略的過程(E4)。接著他會利用對數與指數之間的數學事實、規則找出原始值(E6)，此時由於指數與對數有特有的結構關係，故學生必須將實數的表達方式從對數表徵轉換成指數形式才能成功解題(E9)。得出地震釋放能量後，為了得出兩者的倍數關係，可將兩數相除得到 $\frac{10^{5.24+1.44(x+1)}}{10^{5.24+1.44x}}=10^{1.44}\approx 27.54$ 此時需要用到指數律(E7.E1)，以及利用計算機按出近似值(E5)。

3. 在「詮釋」部分，不論是第 1 小題還是第 2 小題，學生都可以將求得的兩地震相差的倍數找出來，回頭將結果解釋至真實世界(I3)。

同樣與上一題沒有帶領學生經歷完整的三個解題歷程階段，但是教科書將最難的「形成」做好給學生，讓學生做完後面的「應用」、「詮釋」解題歷程也沒關係。另外，本題使用的情境是真實世界中的情境，能夠培養學生在日常生活中應用所需的數學知能。

研究者認為，現在的教學過程中雖然在高二教過對數律了，但是在解題過程中並不強調對數律。目的是希望用指數的樣子看到真實值，讓學生更了解計算出來的結果並知道他的意義。我認為這麼做可以提供學生有感的學習機會，符合領綱的其中一個理念。

另外研究者認為本題的選材上使用地震，是本土非常常見的自然現象。我們生活在這塊土地，理應該多關心這裡所發生的事情。因此教科書利用地震的真實情境，培養學生出關心身邊的事物的意識，並在這樣的情境中了解數學在生活中的功用。

（二）、活動脈絡

PISA 2021 架構中首次加入「數學」和「計算思維」之間的交集，這種交集產生了一組類似的視角、思維過程和心智模型，學習者需要這些才能在一個日益科技化的世界中取得成功。位於計算思維底下的練習題（包含抽象、演算法思維、自動化、分解和一般化），是數學推理與問題解決過程的核心。

數學中計算思維的本質被概念化為定義和闡述數學知識，這些知識可以通過程式設計來表達，允許學生動態地建構數學概念和關係。

數學和計算思維的結合不僅對於「能有效支持學生在數學的概念發展」變得重要；且在發展學生的計算思維概念、能力，讓學生對於數學如何在專業的領域及真實世界中使用，可以擁有更現實的觀點，使學生能夠為未來相關產業做更好的準備。

1. 高一課本 P42

有利用數學工具且建立指數與對數之間的概念心像

手腦並用 5

1. 設中性水的 pH 值為 7，請用計算機按出 -7，然後重複按 10^x、log、10^x、log、10^x、log、…，請問你發現什麼？
2. 新鮮牛奶的氫離子莫耳濃度大約是 $10^{-6.8}$ 莫耳／公升，以 $10^{-6.8}$ 重複循環按 log、10^x，請問你發現什麼？
3. 請按按看：$100 \to$ log、$1000 \to$ log、$10 \to$ log、$1 \to$ log、$-100 \to$ log、$-10 \to$ log，請問你發現什麼？
4. 請和老師與同學討論看看，如果知道某溶液氫離子莫耳濃度是多少，要如何求出其 pH 值？

圖 肆-11 活動脈絡範例 1

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」有 F3.F5.F6.F8.F9，在「應用」中有 E1.E2.E4.E5.E6.E9.E10，在「詮釋」中有 I2.I3。

這題屬於一個建立概念心像的操作活動，課本安排的問題是讓學生經歷過一次概念形成時需要的東西，意圖讓學生自己體會並觀察到數學概念。先不告訴學生log的定義，而是讓他們在活動的過程中自己發展出指對數中很重要且特有的結構、以及符號的意義就是指數的次方，讓學生在課本設計好的脈絡之下學習到10^x、log之間的關係，透過此方式認識log符號。

1. 在「形成」部分，依照以下原因勾選出子項目：

   (1) 學生能在經歷重複按下計算機的10^x、log之中識別出題目中隱含的數學結構(F3)，尤其在第 1 小題及第 2 小題中可以更強烈的感受到真實值與對數之間的結構與關係。透過前 2 小題，學生在腦海中形成的概念後，他會想知道自己對「log」的猜測是不是都是對的，並透過第 3 小題的鋪陳驗證他的推理。

   (2) 學生可能會預期某數字的改寫成 10 的乘冪時，按下log就是次方，但不會特別想到某數字的範圍條件。因此第 3 題除了應證他先前辨識出數學結構，看到$log100 = 2$、$log1000 = 3$等等外(F3)，和他原先預期的事情相同。而在當他看到$log(-100) =$錯誤時，會給他較強烈感受，發現原來某數字是有條件限制的，當他遇到負數時是錯誤的(F5)。學生透過此操作活動可以歸納出結果，也能更加強化他對對數的自然條件。

   (3) 在第 4 小題中，由於此問題是真實世界的濃度問題，學生需要將量化濃度常使用的 PH 值翻譯成數學語言(F8.F9)。

2. 在「應用」部分，因為此題屬於概念形成，他需要很多「應用」部分的能力，如果能成功使用將會幫助學生學習。學生可以依照題目的脈絡學習在找到數學答案前，可以設計並執行策略求得答案(E4.E2)。另外，除了最顯而易見的「使用工具」以得到答案外(E5)，在第四小題中學生仍需要進行簡單的計算(E1)，並在活動脈絡中看到指數與對數之間的關係，應用此數學事實(E6)，並藉由前三小題進行歸納和推測(E10)得到一些結論(E2)。此外，指數與對數更是一個特有的單元，除了它的結構性很強以外，他的表徵也非常重

要。因此學生在此活動脈絡下，為了求出答案會不斷在兩個表徵之間使用並轉換(E9)。

3. 在「詮釋」部分，例如：第 4 小題可以看到課本要求學生在給已知氫離子莫耳濃度時，判斷 pH 值為多少。將濃度轉換成 pH 值的問題就是讓學生將結果回應到真實世界中的項目(E2.E3)。

因此本題在「形成」、「應用」、「詮釋」三個解題歷程中，都有相對應的子項目能培養學生的數學素養。

值得一提的是，幫助學生建立指數與對數之間的概念心像，在過去的教科書中同樣有這個內容。然而本題和以往教學最不同的地方在於利用科技工具——「計算機」以幫助學生建立出指數與對數的關係。透過教科書鋪陳出的操作活動脈絡，讓學生透過按計算機在第 1 小題及第 2 小題中感受到原始值和取log之間的關係，看到log符號就是指數的次方，並且透過計算機輸入和輸出之間的關係，可以看到10^x、log的函數關係 *（數學推理-4-認識數量之間的函數關係）*。

因此使用科技產品應該可以幫助學生強化他們看到指對數的結構與規律，當學生能夠「看到結構」時，他就能夠更深刻的了解log這個抽象符號的意義並記得指數次方與log之間的連結 *（數學推理-3-看見數學結構和規律）*。

當學生自己使用工具時，機器在按按鍵下去而輸出對應答案時，可以透過這樣有互動、動態的過程讓他們自己感受到指對數的關係。應該能讓原本突兀又抽象的新符號log和已經會的指數的連結更深入，幫助學生建立心像與表徵的意義 *（數學推理-2-欣賞抽象符號表徵的力量）*。

計算思維工具提供一個環境，在其中可以讓學生具體化抽象的結構，通過動態的方式探索和參與數學概念。透過新的表徵工具（計算機）和數學概念互動。

研究者認為，本題最主要的目的是讓學生建立起原始值跟對數的關係，並透過計算機發現這樣的操作能將很小（或很大）的數字換成另外一個形式表

達。但是學生也可能會發展出另一個數學概念：感受到真實值的差距與對數值的差距的大小關係。在使用10^x、log這兩個按鈕時，學生可以習得指對數的規律（*數學推理-3-了解數學結構及其規律性*），看出$\log 10^{-7}=-7$。接著用計算機按出$10^{-6.8}$時，可以對該數更有感覺，也可以感覺到$10^{-6.8}$跟10^{-7}差距很小。但用對數表示時，是-6.8跟-7的差距，顯然和真實數值的差距不相同。對於數字的理解上會有不同的感受。課本透過讓學生活動，動手操作工具，利用學生自己連結出的對應關係，知道$100=10^2$取log後等於 2。學習「將很大或是很小的數字，轉換成另一種辨識的形式」的操作，感受數值上的變化，加強他們對數學內容知識的感受度以學習好此概念。並透過題目認識生活中（例如：濃度 pH 值）需要加入數學才能更好溝通閱讀的特性。

以下利用另一種方式幫助讀者讀取這一題中含有的三個解題歷程：

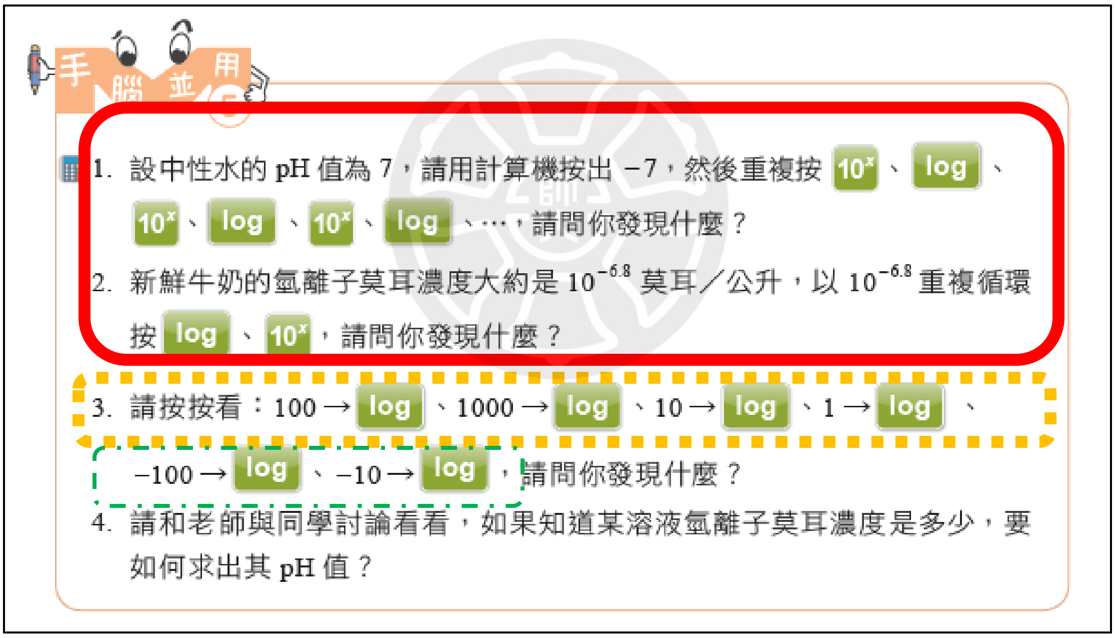


圖 肆-12 活動脈絡範例 1—解題歷程

F3 識別出隱含的數學結

F3 確認預期的結構

F5 看出建模背後的限制

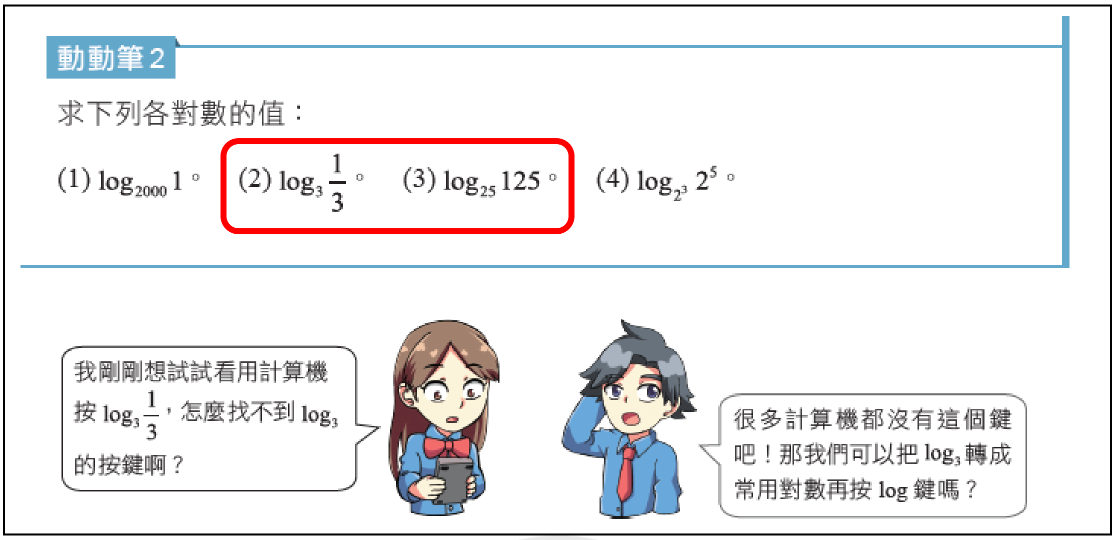
應用：利用計算工具、實施策略、在表徵之間轉換...

詮釋：將結果回應到真實世界

透過動態方式探索數學

2. 高二 B 版課本 P79

有使用數學工具並認識換底公式



動動筆 2

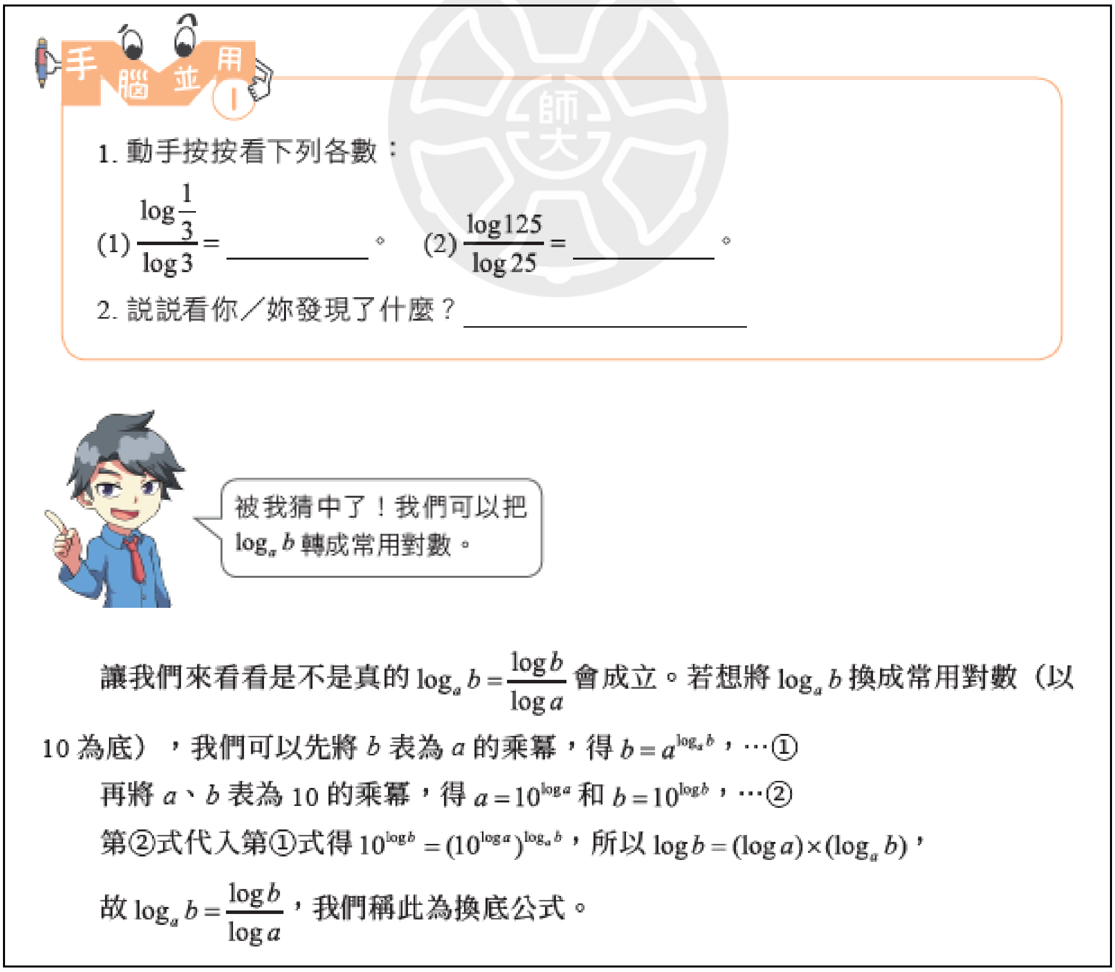
求下列各對數的值：

(1) $\log_{2000} 1$。 (2) $\log_3 \frac{1}{3}$。 (3) $\log_{25} 125$。 (4) $\log_{2^3} 2^5$。

我剛剛想試試看用計算機按 $\log_3 \frac{1}{3}$，怎麼找不到 $\log_3$ 的按鍵啊？

很多計算機都沒有這個鍵吧！那我們可以把 $\log_3$ 轉成常用對數再按 log 鍵嗎？

圖 肆-13 活動脈絡範例 2-1



手腦並用 1

1. 動手按按看下列各數：

(1) $\dfrac{\log \frac{1}{3}}{\log 3} =$ ________。 (2) $\dfrac{\log 125}{\log 25} =$ ________。

2. 說說看你／妳發現了什麼？________

被我猜中了！我們可以把 $\log_a b$ 轉成常用對數。

讓我們來看看是不是真的 $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$ 會成立。若想將 $\log_a b$ 換成常用對數（以 10 為底），我們可以先將 b 表為 a 的乘冪，得 $b = a^{\log_a b}$，…①

再將 a、b 表為 10 的乘冪，得 $a = 10^{\log a}$ 和 $b = 10^{\log b}$，…②

第②式代入第①式得 $10^{\log b} = (10^{\log a})^{\log_a b}$，所以 $\log b = (\log a) \times (\log_a b)$，

故 $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$，我們稱此為換底公式。

圖 肆-14 活動脈絡範例 2-2

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」有 F3，在「運用」中有 E1.E2. E5.E6.E10.E11，在「詮釋」中沒有對應編碼。

這題透過使用科技產品讓學生親自參與一次數學歷程，兩者互相影響，符合 PISA 2021 架構在計算思維(Computational thinking)想法。在使用科技後會改變學生使用數學、了解數學、進行數學運算的方式，發展不同的課堂教學模式，同時激發學生使用數學的動機。讓學生在活動過程中，學習到任意底的對數都可以換成常用對數的表示方式，透過此方式可以幫助學生認識換底公式。

1. 在「形成」部分，依照以下原因勾選出子項目：

(1)因為按照課本脈絡裡，在本題的前一題已經先利用對數的定義，讓學生求出$log_3\frac{1}{3}=-1$的答案。接著提出一個真實生活中的問題：「如果要用計算機怎麼按？」因為計算機中沒有底數的按鍵，學生會發現原本的問題 $log_3\frac{1}{3}$ 沒辦法按出來。由於學生在高一時學過如何利用計算機案常用對數的運算，因此課本幫學生鋪陳好題目，先讓學生動手按按看$\frac{log\frac{1}{3}}{log3}$，用他以前會的計算工具的技能得出答案。觀察他先前求出的數值發現$log_3\frac{1}{3}=\frac{log\frac{1}{3}}{log3}$。引導學生識別出一般底數與常用對數之間的結構關係(F3)。

(2)透過動手按出兩個數值，學生將會猜測任意底數的$log_a b$能不能轉換成常用對數，透過前面的數值，他們應該會預期把$log_a b$轉換成常用對數是可成立的。

2. 在「應用」部分，學生會利用計算機按出 $\frac{log\frac{1}{3}}{log3}$ 找出解(E5)和上一小題中 $log_3\frac{1}{3}$ 對照，並猜測出$log_a b$ 可以轉換成常用對數(E10)。因此需要用數學語言嚴謹的特性，告訴他人猜測出的結果是對的(E11)。接著課本會教導學生換底公式的證明過程，讓學生學習此數學論證脈絡，中間需要應用到指數與對數的數學結構、指數律等數學事實(E6)，經過計算後(E1)得到合理的推

論結果(E2)。

3. 在「詮釋」部分，因為不需要回應真實世界的問題，故沒有將此項目編碼。

此題和以往課程編排最不同的地方在於，透過「計算機」當作課程的引導。因為計算機沒有任意底數的按鈕，因此給予學生學習換底公式的需求。透過教科書鋪陳出的操作活動，讓學生會自然地去嘗試，並透過觀察前一題與本題的數字，猜測出他發現的事情。培養學生的好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。並且培養出學生在猜測後能夠運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。

3. 高二 B 版課本 P81

無數學工具並認識指數與對數的規律

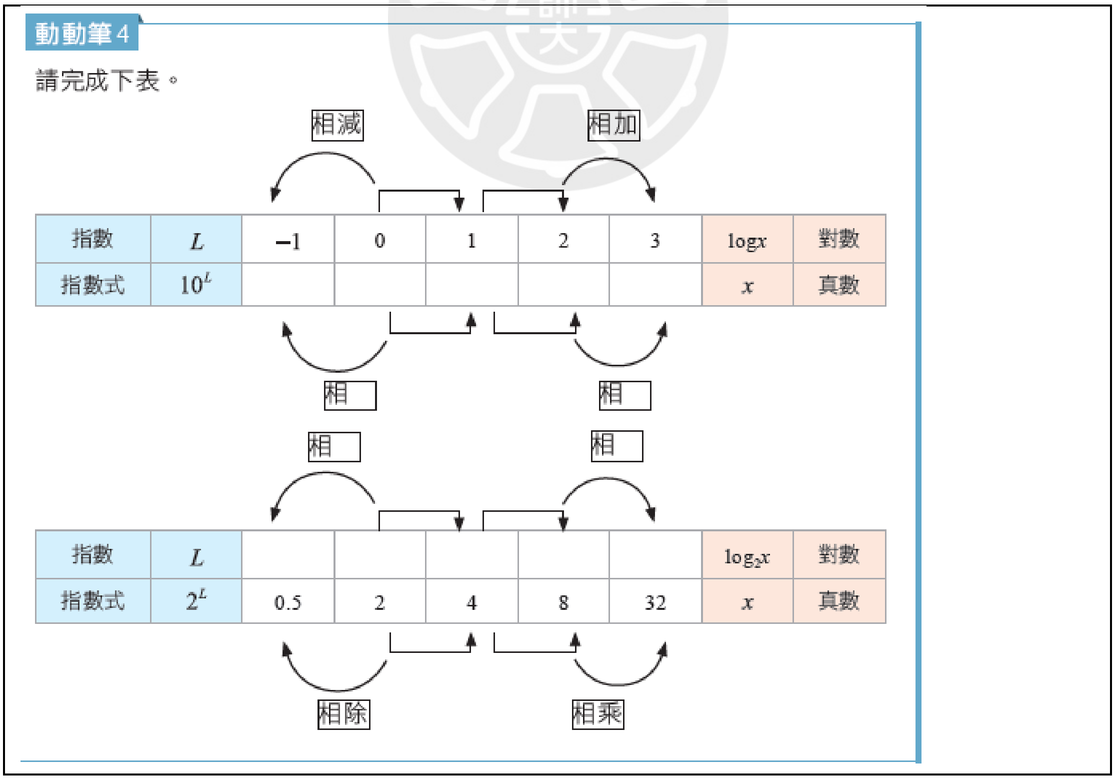
2-2.2 常用對數的運算

接下來我們利用指數式與對數間的關係，來找尋對數運算的規律。

當 $x=10^L$ 時，$L=\log x$，意即 $x=10^{\log x}$。

當 $x=a^L$ 時，$L=\log_a x$，意即 $x=a^{\log_a x}$。

圖 肆-15 活動脈絡範例 3-1



動動筆 4

請完成下表。

相減　　　　相加

指數	L	-1	0	1	2	3	$\log x$	對數
指數式	10^L						x	真數

相□　　　　相□

相□　　　　相□

指數	L						$\log_2 x$	對數
指數式	2^L	0.5	2	4	8	32	x	真數

相除　　　　相乘

圖 肆-16 活動脈絡範例 3-2

你發現了一些對數運算的規則了嗎？

我們舉例說明如下：

$$10 \times 100 = 1000，$$

將 10、100、1000 表示為 10 的乘冪，可得 $10 = 10^{\log 10}$、$100 = 10^{\log 100}$ 及 $1000 = 10^{\log 1000}$，意即 $10^{\log 10} \times 10^{\log 100} = 10^{\log(10 \times 100)}$，由指數律可得 $\log 10 + \log 100 = \log(10 \times 100)$。

圖 肆-17 活動脈絡範例 3-3

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」有 F3.F10，在「應用」中有 E1.E2.E6.E7.E8.E9.E10.E11.E12，在「詮釋」中有 I3.I4。

本題屬於建構學生概念的活動，透過此活動可以幫助學生了解指數數值的變化如何影響對數數值的變化，進而發展出對數律。

1. 在「形成」部分，依照以下原因勾選出子項目：

(1) 按照課本脈絡裡，在還沒有進入活動前先引導學生思考「$log(2+3) = log2 + log3$嗎？」，喚起學生回憶「$sin(\alpha+\beta)$也不等於$sin\alpha + sin\beta$」，進而提示學生思考看看是否對數會有運算公式呢？透過課本的安排的順序，學生經歷過下方表格的運算後，學生可以在第 1 個表格中自己建立出指數的「相加」、「相減」可以對應到指數式的「相乘」、「相除」(F3)。

(2) 在第 2 個表格中，可以由前一小題的引導，在給出真數後，找出對應的對數值，確認問題中的數學概念與學生預測的事實相符合(F10)。

2. 在「應用」部分，如果將表格看成上與下兩部分：

(1) 第 1 個表格中，給出指數L，要求學生應用到簡單的運算數字得出指數式

10^L (E1.E7)。沿著上方箭頭的提示，學生能觀察數字看到「常用對數加1、真數乘 10」的結論(E2)，發現指數的「相加」、「相減」能夠對應到指數式的「相乘」、「相除」。由前面所得出的結論後，對照右側的名詞可以重複加強「常用對數$logx$」的加減與「真數x」的乘除之間的關係(E6)。透過課本的脈絡，學習利用表格解決數學問題並找出數學結構，從中提取數學資訊(E8)。此外，由於指數與對數有特有的結構關係，若學生能成功閱讀表格，那麼他將會了解一個實數有不同的表達方式，並能理解對數表徵$logx$和指數L之間的關係(E9)。

(2) 第 2 個表格中，給出指數式2^L，讓學生思考 2 的多少次方等於 4、2 的多少次方等於 8 的問題，學生雖然在進行指數的運算找出指數L，但是經歷找答案的過程正是對數的定義 (E1.E7)。研究者認為，課本重複讓學生利用對數定義來運算，可以幫助學生加強對數的概念。同樣的，也因為指數與對數有特有的結構關係，若學生能成功閱讀表格，那麼他將會了解一個實數有不同的表達方式，並能理解對數表徵log_2x和指數L之間的關係(E9)。學生會將第 1 個表格中得到的指數「相加」、「相減」對應到指數式「相乘」、「相除」的結果作為基礎，先猜測的 2 個表格在指數L上方的空格處預期答案是「相加」、「相減」(E10)。他可以並且對照右側的「對數log_2x」與「真數x」能夠重複加強印象，可以驗證自己得到「對數加 2、真數乘 2」的結論(E11)。

(3) 在這兩個表格中，可以觀察並歸納出指數的「相加」、「相減」和指數式「相乘」、「相除」；另一方面可以觀察並歸納出對數log_ax的「相加」、「相減」與真數x「相乘」、「相除」的關係，這是在指對數單元中需要學會的重要規律(E12)。

3. 在「詮釋」部分，由前面的鋪陳可以讓學生猜測「對數相加，就是真數相乘；對數相減，就是真數相除」是對的，接著要將猜測的東西評估看看是否是正確合理的(I4)，因此課本利用$10 \times 100 = 1000$的舉例說明對數律。並將猜測的結論詮釋回一般性的狀況(I3)。

研究者認為此題中不斷在「形成」與「應用」之間轉換。由於課本最終目的是希望學生發展出「對數相加，就是真數相乘；對數相減，就是真數相除」

的概念。但是要「形成」此概念，需要「應用」階段的許多事情，藉由數學推理可以自己猜測出結果。比如說學生透過第 1 個表格，進行數學運算後，可以發現指數「相加」、「相減」和指數式「相乘」、「相除」的對應關係；當得到一些猜測後，會先檢視表格右方的名詞「$logx$」和「真數x」。等到看到第 2 個表格時，除了心裡有預期真數相乘會對應到對數相加，自己也可以真正透過數學運算發現這個結果。

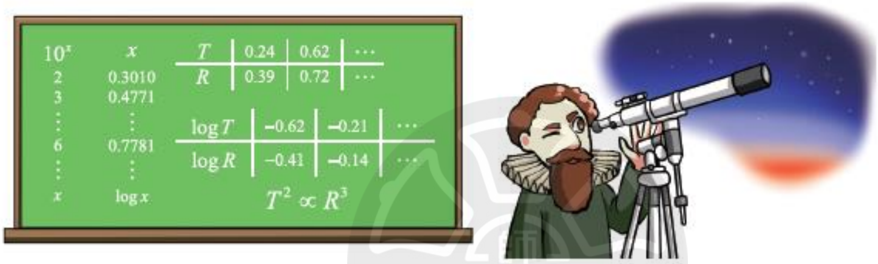
學生可以透過活動在心中形成「對數相加，就是真數相乘；對數相減，就是真數相除」的概念，然而並沒有用數學嚴謹的證明過，對數字不敏感的學生也可能不知道為什麼。因此課本在最後的部分，還是有用數字例$10 \times 100 = 1000$說明，教導學生如何從指數律延伸至對數律。

（三）、課文文字內容

教科書的課文內容部分屬於單向傳遞知識，讓學生看到課本是如何形成、應用、詮釋。不同於前面兩個段落，分析單位都是學生被要求做的；而在教科書的課文內容屬於較被動、這些經歷不是主動建立，更需要學生用心體會、感受到之中含有的數學素養。

1. 高二 B 版課本 P75

SECTION 2-2 對數函數模型



對數、坐標幾何、微積分被人們視為 17 世紀數學領域最偉大的三大成就。

蘇格蘭的納皮爾（John Napier，1550 ～ 1617）於 1614 年發表了第一本專門討論對數的書。

瑞士的布爾基（Jobst Burgius，1552 ～ 1632），於 1610 年左右發展出某種對數表。

對數思想的發展則可以追溯自 16 世紀的德國數學家史帝佛（Michael Stifel，1487 ～ 1567），他是第一個使用「指數」名稱的數學家，在 1544 年發表的書中，他以等差及等比數列的方式發展了一個對應表，他的想法是從等比與等差數列而來，簡單來說就是：

2, 4, 8,16,32,64，…①　（可寫成 $2^1,2^2,2^3,2^4,\cdots$）

與 1, 2, 3, 4, 5, 6，…②

數列①中任兩數的乘除關係可以轉化為數列②中對應到的兩數的加減關係，例如，數列①中的 4×16 可直接對應到數列②中的 $2+4$ 得出 6，再對應回數列①得到 64。當數字很大時，就可以節省許多計算時間。

這裡數列②就是數列①表示為 2 乘冪時的次方，如何求出這些次方是我們這章要學的主要內容哦！

圖 肆-18 課文內容(一)

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」中沒有對應編碼，在「應用」中有 E1.E2.E4，在「詮釋」中沒有對應編碼。

1. 在「形成」部分，並沒有對應到任何一項。因為課文中的敘述沒有留機會讓學生了解真實情境是如何轉換到數學世界的。文字敘述直接告訴學生指對數之間的轉換，將2、4、8、16、32轉換成2^1、2^2、2^3、2^4後，可看成1、2、3、4。得知兩數字的乘除關係可以轉化為加減關係。

2. 在「應用」部分，透過閱讀內文，可以感受到課文有意圖『教導學生』應用數學概念、事實、程序和推理來解決數學問題並得出數學結論。例如文字中呈現出$2 = 2^1$、$4 = 2^2$、$8 = 2^3$、$16 = 2^4$，即是進行簡單的運算(E1)。接著教導學生可以用另一個角度看這些數字，利用原數字的指數次方，看成種新的閱讀方式。也就是將2看作1、4看作2、8看作3……。課文中明確指出用此方式閱讀數字的好處，可以將兩數字的乘除關係可以轉化為加減關係(E2)。在數字很大時，可以節省很多計算時間，屬於教導學生學習設計並實施策略以求得解答(E4)。

3. 在「詮釋」部分，因為他們並沒有做出在真實世界問題的背景下解釋習得的事情。

本段落是利用文字敘述鋪陳數學思維，在建構學生數學概念之前，先介紹數學背景並帶給學生數學思維。由於「將兩數字的乘除關係轉化為加減關係」是本單元很重要的學習重點，這個關係不容易由學生自己發現，因此課本會先在文字中介紹並帶給學生這個數學思維。

本段落呈現出《數學領綱》的第三點：數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感。在文字中傳達數學文化層面的價值，因為數學經過人類數千年來一連串探究、歸納、臆測與論證的成果，方成為一種與自然界對話的語言。透過數學史可以了解數學在文明中的發展，了解數學如何回應社會的需求，更釐清數學學習的主軸。在《數學領綱》明確提到：

> 適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。認識數學的文化面向，不僅有助於讓數學學習從工具性層次延伸到智識性層次，也更彰顯數學知識的人文價值，達到「適性揚才」與「終身學習」的教育目標。

2. 高二 B 版課本 P98

生活中許多例子和對數函數相關，例如人類的視覺、聽覺、觸覺都和對數有關，19 世紀德國生理學家韋伯（E. H. Weber，1795 ～ 1878）發現同一刺激差別量必須達到一定比例，才能引起差別感覺，後來德國科學家費希納（G. T. Fechner，1801 ～ 1887）做了一個假定，「人類對任何刺激的反應與外界刺激強度的對數成正比」，並稱之為韋伯－費希納定律。以數學式表示即為$s=a\log w+b$，w 指的是刺激量的大小，s 代表人體器官對刺激的感受強度，常數 a、b 跟環境與刺激物的種類有關，也就是外在刺激以等比遞增時，人體感官對刺激的感受強度成等差遞增，適用於中等強度的刺激。

以聽覺為例，當聲音強度是正常聽力所能聽到最小的聲音強度的 w 倍時，測量聲音的儀器或人的耳朵所感受到的反應量是$10\log w$分貝，也就是聽覺的韋伯－費希納方程式為$dB=10\log w$，w 代表聲音的相對強度，也就是音量，dB（分貝）為儀器或耳朵接收到的感受量。下表為生活中常見聲音的分貝數，依序從小到大，你發現分貝欄與強度倍數欄分別為什麼數列呢？

音源	分貝	強度倍數	感覺
最微弱的聲音	0	1	聽覺起點
輕輕耳語聲	20	10^2	極為安靜
醫院病房與圖書館的規定	40	10^4	安靜
一般交談聲	60	10^6	尚稱安靜
車輛來往頻繁的街道	70	10^7	尚稱安靜
大型交響樂團之演奏聲	80	10^8	較吵
傳統菜市場之吵雜聲	90	10^9	很吵
機場跑道附近噴射飛機起飛聲	150	10^{15}	無法忍受

圖 肆-19 課文內容(二)

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」中有 F3.F6，在「應用」中沒有對應編碼，在「詮釋」中沒有對應編碼。

1. 在「形成」部分，從文字敘述的脈絡中讓學生體會對數是如何在生活中應用

的。先知道「刺激需到達一定的比例，才會引起差別感覺」，接著做出一個假定是「人類對刺激的反應與外界刺激強度的對數成正比」。隨後以聽覺為例，告訴學生聽覺的方程式為$dB = 10log\ w$。研究者認為課文內容中明確指引學生注意到生活情境中所蘊含的數學成分，即是教導學生如何以數學方法來表示情境(F6)。也因為在感知與刺激的關係下，能教導學生兩者之間有對數關係，尤其下方表格可以更明確看出指對數之間的關聯，幫助學生識別出情境中的數學結構(F3)。

2. 在「應用」部分，因為學生在閱讀內文的過程並不需要應用數學事實、計算數字、得到簡單的答案等等，所以沒有對應到任何一項。。

3. 在「詮釋」部分，因為課文敘述中並沒有將數學結果重新詮釋、解讀一次。並沒有做出在真實世界問題的背景下解釋習得的事情。

研究者認為除了認識對數的運算性質外，課文中還需要將給予學生機會了解對數在社會是如何使用的，讓學生感受到數學的價值。從課文鋪陳的順序中可以感受到科學方法的前幾個步驟（觀察→發現問題→提出假說→實驗驗證），經過數學的協助分析，看出背後不變的規律。

本段落呈現出《數學領綱》的第二點：數學是一種實用的規律科學，教學宜重視跨領域的統整。在文字敘述中試圖讓學生感受到數學應用既是跨領域的，因此在教學中也重視跨領域的統整。

✧ 以下利用另一種方式幫助讀者讀取這一課文內容中含有的三個解題歷程：

生活中許多例子和對數函數相關，例如人類的視覺、聽覺、觸覺都和對數有關，19 世紀德國生理學家韋伯（E. H. Weber，1795 ～ 1878）發現同一刺激差別量必須達到一定比例，才能引起差別感覺，後來德國科學家費希納（G. T. Fechner，1801 ～ 1887）做了一個假定，「人類對任何刺激的反應與外界刺激強度的對數成正比」，並稱之為韋伯 - 費希納定律，以數學式表示即為 $s=a\log w+b$，w 指的是刺激量的大小，s 代表人體器官對刺激的感受強度，常數 a、b 跟環境與刺激物的種類有關，也就是外在刺激以等比遞增時，人體感官對刺激的感受強度成等差遞增，適用於中等強度的刺激。

以聽覺為例，當聲音強度是正常聽力所能聽到最小的聲音強度的 w 倍時，測量聲音的儀器或人的耳朵所感受到的反應量是 $10\log w$ 分貝，也就是聽覺的韋伯 - 費希納方程式為 $\text{dB}=10\log w$，w 代表聲音的相對強度，也就是音量，dB（分貝）為儀器或耳朵接收到的感受量。下表為生活中常見聲音的分貝數，依序從小到大，你發現分貝欄與強度倍數欄分別為什麼數列呢？

圖 肆-20 課文內容(二)—解題歷程

F6 用數學方法表達一個情境

觀察→發現→假說→驗證

F3 識別出情境中的數學結構

《數學領綱》：數學是一種實用的規律科學

（四）、其他不同於傳統之輔助學習方式

1. 高二 B 版課本 P80

對計算工具的反思

例題 4 EXAMPLE

請按計算機求出 $\log_2 5$ 的近似值。（四捨五入取至小數點後第 4 位）

解 可依下方順序使用計算機按鍵，

5 → log → ÷ → 2 → log → =

可得 $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx 2.3219$。

註：但是如果先分別使用計算機求出 $\log 5 \approx 0.6990$ 及 $\log 2 \approx 0.3010$，

這兩個四捨五入取至小數點後第 4 位的近似值計算

$\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx \dfrac{0.6990}{0.3010} \approx 2.3222$，誤差較大。

使用計算機估計 $\log 2$ 及 $\log 5$ 近似值時，

若依據計算機顯示取 $\log 5 \approx 0.69897004$ 及 $\log 2 \approx 0.301029995$，

再將兩數相除可得 $\log_2 5 \approx 2.321928099 \approx 2.3219$，

此時取至小數點後第 4 位才不會有誤差。

圖 肆-21 使用計算機－範例 1

在此文本的勾選結果中，辨識出本題在「形成」中沒有對應編碼，在「運用」中有 E2.E4.E5.E6，在「詮釋」中沒有對應編碼。

1. 在「形成」部分，題目中並沒有對應到任何一項。因為題目所求問的問題很直接地告訴學生，利用計算機按出近似值。對學生來說指令非常明確，也不需要轉換題目要表達的意思。因此學生會直接進入下一個「應用」階段。

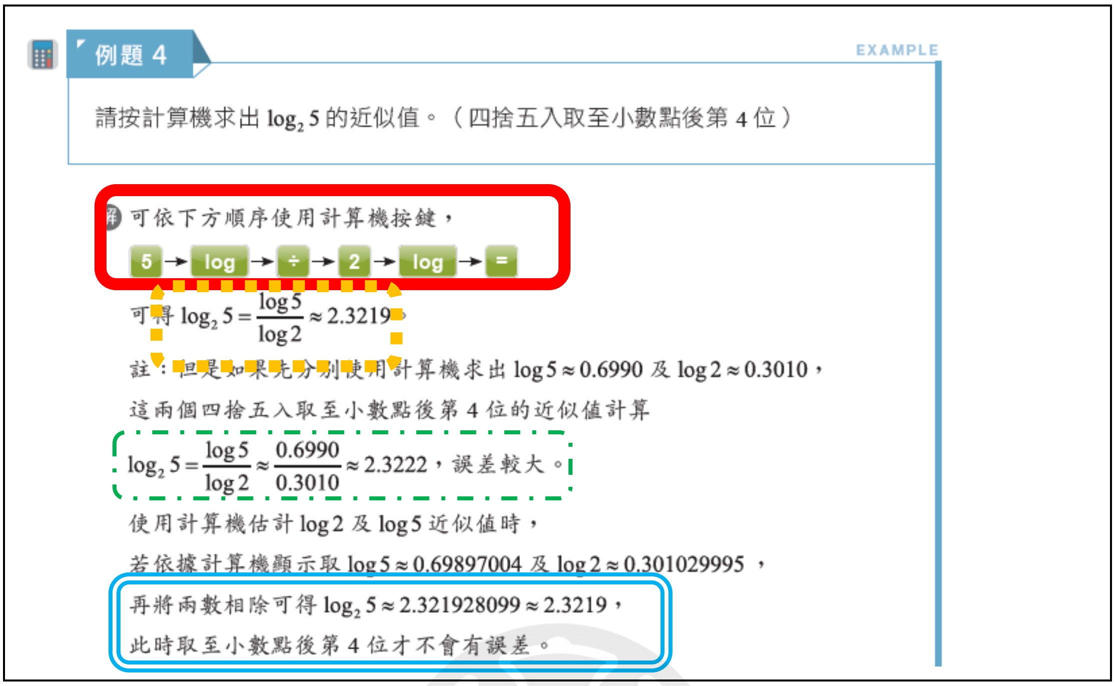
2. 在「應用」部分，由於題目的指令，很顯然學生會拿出計算機(E5)，按照可以求出解的方式得到$log_2 5$的近似值(E2)。而在這之中比較不同的地方是，雖然已經得到一個近似解了，課本仍然花一個段落介紹若是分別求出$log5 \approx 0.6990$、$log2 \approx 0.3010$，利用對數律知道 $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2}$ (E6)，因此將兩近似值相除，發現所得到的誤差較大。給出另一個計算近似值的算法，可以發現後者的誤差較大。因此當學生閱讀完兩個找近似值的看法後，能夠學習到以

後找近似值選擇哪一種誤差會比較小，在未來遇到同樣模式的問題時可以選擇最適合的策略實施(E4)。

3. 在「詮釋」部分，由於此題都在數學世界中，計算機按出的結果也仍在數學世界中，都與不須將結果解釋至真實世界。因此在此部分沒有對應編碼。

研究者認為，本題雖然沒有帶給學生「形成」、「詮釋」兩階段的訓練，但是他提供學生在使用數學工具「反思」的機會。因為使用數學工具在 PISA 中也很重要，教導學生在使用數學工具時，而不同的計算方式會有什麼樣的影響，而學生應該選擇哪一種才會更有精準。在做選擇的過程中，首先學生要很清楚兩種計算方式的限制，理解背後數學的運算，透過比較兩者的差異，進而選擇一個最適合的解題方法。

✧　以下利用另一種方式幫助讀者讀取這一題中含有的三個解題歷程：



例題 4　EXAMPLE

請按計算機求出 $\log_2 5$ 的近似值。（四捨五入取至小數點後第 4 位）

解 可依下方順序使用計算機按鍵，

5 → log → ÷ → 2 → log → =

可得 $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx 2.3219$。

註：但是如果先分別使用計算機求出 $\log 5 \approx 0.6990$ 及 $\log 2 \approx 0.3010$，

這兩個四捨五入取至小數點後第 4 位的近似值計算

$\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx \dfrac{0.6990}{0.3010} \approx 2.3222$，誤差較大。

使用計算機估計 $\log 2$ 及 $\log 5$ 近似值時，

若依據計算機顯示取 $\log 5 \approx 0.69897004$ 及 $\log 2 \approx 0.301029995$，

再將兩數相除可得 $\log_2 5 \approx 2.321928099 \approx 2.3219$，

此時取至小數點後第 4 位才不會有誤差。

圖　肆-22 使用計算機－範例 1—解題歷程

E5　使用數學工具

E6　使用對數的換底

E2　得出結論

E4 選擇適合的策略實施

提供學生在使用數學工具「反思」的機會

2. 漫畫

(1)高一課本__漫畫 P42

圖 肆-23 漫畫（一）

(2)高二 B 版課本__漫畫 P84

圖 肆-24 漫畫（二）

(3)高二 B 版課本__漫畫 P85

事實上，由手腦並用 3 你可以看出來，當底數 a 不是 10 時，我們可以利用換底公式把 $\log a$ 換到分母，所有分子的運算就可以用常用對數的對數律來做，所以前面的對數律若不是以 10 為底也會對哦！

圖 肆-25 漫畫（三）

在圖 肆-23 漫畫（一）中，前一個段落正好是一個活動脈絡的問題（圖 肆-11 活動脈絡範例 1)，學生使用完計算機、建構出數學概念後，可以透過漫畫幫助學生歸納結論，並理解到「一個數」可以表示成「10^L」，也可以知道計算機中「log」、「10^x」按下去所代表的意思。學生能夠透過漫畫的圖像表徵更深刻體會到指數與對數之間的關係。另外，還有漫畫人物的對話方框，可以更容易讓學生將自己融入情境中，用更口語的方式讓學生習得此重點。

在圖 肆-24 漫畫（二）中，是課本正要開始介紹「任意底數的對數律」的前言。透過漫畫較親切的對話方式，左邊的人物提出一般學生可能會提出的疑問，另一位人物馬上給出新的想法。透過較活潑的漫畫形式串聯起課文的前後脈絡，幫助學生進入數學的情境中。

圖 肆-25 漫畫（三)，是課本讓學生操作過「任意底數的對數律」的活動後出現的漫畫。透過口語的方式，讓學生加強記憶。並在每一個人物的對話框中呈現出課本希望學生學會的重點。尤其右下角的句子非常生活化：「我最討厭背公式了，反正都換成常用對數就好啦！」

《數學領綱》也提及「數學教育應能啟迪學習動機」，研究者認為漫畫也是一個增加學生學習動機的方式。漫畫的情境可以讓學生更身歷其境，推測學生能更容易將自己放到數學的世界中。

第伍章、結論與建議

第一節、結論

研究結論分成兩部分來報導：第一部分為教科書意圖培養學生的素養比例；第二部分是解析教科書如何安排培養學生數學素養之教材。

（一)、教科書中的素養比例

1. 若以年級區分，無論哪一個年段，在培養學生「應用」數學的素養上的意圖都很強烈。可以猜測學生在高一或高二時在「應用」得到的學習機會因為較多，在表現「應用」數學以解決問題的素養會較好。

2. 若以年級區分，無論哪一個年段，在培養學生「形成」數學的素養上的意圖都沒有「應用」階段強烈。在高二（14.3%）甚至低於高一（21.4%），其原因可能是高二的真實情境脈絡較困難，學生不容易自己將情境轉換到數學問題，因此課本會替學生建立出關係式，不用讓學生自己找出關係式。

3. 另外，有脈絡的分析單位約佔「整體」題目的三成。研究者認為此比例不算太低。而且若是只看有脈絡的分析單位時，可以發現「形成」與「詮釋」的比例相較於「整體」都提升不少。

4. 若以三個解題歷程來看待教科書所欲培養學生的素養時，「整體」及「有脈絡的題目」在「應用」階段都擁有很高的比例。顯示出無論哪一種分類方式，在培養學生「應用」數學的素養上的意圖都很強烈。

5. 若關注在「形成」階段與「詮釋」階段呈現出的百分比時，可以發現「整體」的百分比都比有脈絡的分析單位低。整本課本中的「形成」佔16.7%，而只看有有脈絡的分析單位則是 46.2%；整本課本中的「詮釋」佔 28.6%，而只看有有脈絡的分析單位則是 76.9%。顯示出課本在有脈絡的分析單位中，培養學生數學素養的意圖相比課本「整體」題目強。

6. 若關注於有脈絡的分析單位與**無**脈絡的分析單位時，可以發現有脈絡的單位在數學素養的培養上是很重要的。**無**脈絡的分析單位大部分都集中在培養學生「應用」。教科書幾乎只能透過這些有脈絡的分析單位做「形成」與「詮釋」。

（二）、教科書中的素養內容解析

1. 本研究依照課文脈絡區分出分析單位，並將特別不同於以往的編排方式且能夠培養學生素養的單位選取出來並分析之。共分為四類：情境脈絡、活動脈絡、其他不同於以往之輔助學習方式、課文內容等。

2. 依照 PISA 2021 架構的想法，情境脈絡通常是一個現實生活中的真實情境。學生可以不用經歷過完整的建模週期（形成、應用、詮釋），而在較困難的部分，尤其是「形成」，通常會由課本提供。當學生面對這些真實世界的問題時，大部分都需要靠自己的數學推理經歷「應用」階段，並將所求得的數學結果「詮釋」回真實世界。

3. 活動脈絡通常是透過活動幫助學生進入數學環境，而這些活動也可以透過「工具」的加入幫助學習。PISA 2021 架構結合了數學與計算思維，認為學生能夠透過工具動態地建構數學概念和關係，並有效幫助學生在數學上的概念發展。

4. 在課文文字內容部分，挑選出來分析的都屬於一大段說明。在這些有意圖培養數學素養的段落中，有利用文字敘述鋪陳數學思維，先介紹數學背景再建構學生數學概念。課本透過中文說明傳達課綱的理念，包含傳遞「數學是一種人文素養」與「數學是一種實用的規律科學」等。

5. 最後在其他不同於傳統之輔助學習方式中，最有特色的地方是漫畫。透過漫畫幫助學生更容易進入數學世界。並藉由漫畫引起學生學習動機，達到總結數學觀念、重複加深學生印象的功用。另外在使用工具的例題上，也會安排能夠釐清數學工具的使用限制的說明。

第二節、建議

研究者根據本次分析教科書的經驗，給予未來相關研究上的建議與期許。

（一)、不同的單元探討

本研究只探討對數單元所培養的素養，無法觸及所有高中所學習到的數學內容。因此若能針對不同單元探討，分析其他高中數學單元，也許能夠更了解在素養導向之下的教材是如何培養學生素養的。

（二)、不同版本之間進行探討

本研究樣本只選擇一個版本討論其中所欲培養的數學素養，無法得知所有版本是否都有同樣的結果。因此未來的研究者可以研究不同版本之間的素養比較，探討在這些版本之下學習的學生，能夠有機會習得什麼樣的數學素養。

（三)、不同的架構分析教科書

本研究主要是利用 PISA 2021 架構的三個解題歷程來分析題目，但素養有各式各樣的解讀方式。故未來的研究者可以尋找新的分析架構、抑或是融合不同的架構以分析教科書。

參考文獻

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *Zdm, 45*(5), 633-646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x

Gatabi, A. R., Stacey, K., & Gooya, Z. (2012). Investigating grade nine textbook problems for characteristics related to mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal, 24*(4), 403-421.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., & council, N. r. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Vol. 2101): Citeseer.

Mathematics, N. C. o. T. o. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. *Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics*.

Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project.* Paper presented at the 3rd Mediterranean conference on mathematical education.

Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In *Assessing Mathematical Literacy* (pp. 35-55).

OECD. (2012). PISA 2018 assessment and analytical framework.

OECD. (2018a). PISA2021 Mathematics Strategic Direction Paper. .

OECD. (2018b). PISA 2021 Mathematics Framework Draft.

OECD. (2019). *PISA 2018 assessment and analytical framework*: OECD publishing.

Stray, C. (1994). Paradigms regained: towards a historical sociology of the textbook. *Journal of Curriculum Studies, 26*(1), 1-29.

Turner, R., Blum, W., & Niss, M. (2015). Using competencies to explain mathematical item demand: A work in progress. In *Assessing mathematical literacy* (pp. 85-115): Springer.

左台益, 李健恆, 潘亞衛, & 呂鳳琳. (2018). 臺灣, 新加坡及巴西數學教科書中數學素養內涵之比較── 以畢氏定理為例. *Journal of Textbook Research, 11*(3).

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏. (2013). 教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告.

林芳馨. (2018). 華人地區國中數學教科書數學素養內涵之比較分析(碩士論文). *取自臺師大博碩士論文系統.*

林福來等人. (2013). 十二年國民基本教育數學領域_綱要內容之前導研究_研究報告.

張珈華. (2018). 數學素養相關指標之研究(碩士論文). *取自臺師大博碩士論文系統.*

教育部. (2014). 十二年國民基本教育課程綱要. *台北：國家教育研究院*.

教育部. (2018). 十二年國民基本教育課程綱要–國民中小學暨普通型高級中等學校–數學領域. *台北：國家教育研究院*.

教育部. (2019a). 十二年國教國民中小學暨普通型高中–數學課程手冊.

教育部. (2019b). 數學領域課綱 Q＆A.

游自達. (2016). 數學素養之意涵與其變遷. *教育脈動*(5), b1-18.

劉柏宏. (2016). 從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵━ 理論與案例分析. *臺灣數學教育期刊*.

歐用生. (2000). 內容分析法. *台北：師大書苑*.

鄭章華. (2018). 評介素養導向的數學教科書──脈絡數學. *教科書研究*.

謝豐瑞. (2018). 數學素養評量工作坊–2018 中華民國數學年會特色展區工作坊暨論壇簡報內容. *台北：國立台灣師範大學*.

謝豐瑞(主編). (2019a). 高中數學課本(第一冊). *台北：泰宇出版社*, 37-60.

謝豐瑞(主編). (2019b). 高中數學課本(第三冊 B 版). *台北：泰宇出版社*, 75-115.