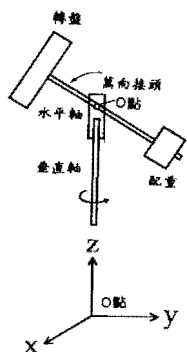


陀螺運動的簡單解釋和演示

周鑑恆

千變萬化的陀螺運動是說明角動量和力矩關係的絕佳範例。本文在簡化的條件下，透過較貼近物理直覺的解釋，得出陀螺章動和進動方程式，解出一般教科書中常見的解；並設計一簡易實用之陀螺，演示其運動的情形。



圖一

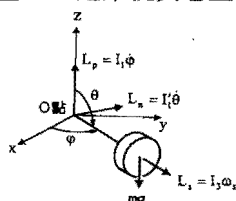
圖一所示乃是實驗教學常用的陀螺，萬向接頭的部分能使轉盤對稱軸繞著水平軸和垂直軸（z軸）改變方向。整個陀螺（包括轉盤、配重、軸桿等）可視為由許多質點組成的系統，運用牛頓運動定律不難導出

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

其中 $\vec{\tau}$ 是作用在系統上所有外力對O點（O點為實驗室座標中靜止的點）造成之力矩（以下逕稱力矩）， \vec{L}_{tot} 是整個系統對O點定義的角動量（以下逕稱角動量）。力矩和角動量均以實驗室座標描述。

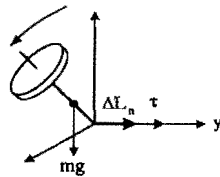
通常陀螺之萬向接頭以極佳的軸承構成。整個系統可繞著z軸自由轉動，因此外力對O點造成之力矩，幾無z方向之分量（z方向極小

之力矩乃由z軸軸承極小的摩擦力造成）。換言之，整個系統對O點定義的角動量在z方向之分量必須守恆。若整個系統之質心不在O點正上方， $\theta = \frac{\pi}{2}$ （即90°）時，（見圖二）重力對O點造成之力矩 $\vec{\tau} = mgr_{cm}$ 平行xy平面，m是系統總質量， r_{cm} 是系統質心至O點的距離。



圖二

陀螺之角動量可以寫成 $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_s + \vec{L}_p + \vec{L}_n$ ，當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時， $L_s = I_3\omega_s$ ， $L_p = I_1\dot{\theta}$ ， $L_n = I_1'\dot{\theta}$ （見圖二）。其中，轉盤以高角速度 ω_s 轉動造成 L_s ， L_s 是繞對稱軸的轉動慣量，陀螺 θ 角之角速度和 ϕ 角之角速度分別造成 L_n 和 L_p 。 I_1 和 I_1' （ $I_1' \approx I_1$ ），分別是繞z軸和繞水平軸之轉動慣量。若 $\omega_s \gg \dot{\theta}$ ， $\omega_s \gg \dot{\phi}$ ， ω_s 之大小不變，則 \vec{L}_{tot} 之變化主要由 \vec{L}_s 方向之改變和 \vec{L}_p 、 \vec{L}_n 大小之改變造成（ \vec{L}_n 和 \vec{L}_p 方向改變造成之角動量變化可以忽略）。



圖三

為了說明上述簡化情形之下陀螺的運動，首先，假設轉盤不轉動，如圖三所示，即 $\omega_s = 0$ ，則 $L_s = 0$ ，若質心不在O點正上方，即有

平行 y 軸之力矩 τ ，若陀螺初始時靜止，即逕自繞 y 軸倒下，由零開始產生在 y 軸方向角動量 L_n ，使得 $\frac{\Delta \bar{L}_n}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{L}_{tot}}{\Delta t} = \tau$ 。這符合日常經驗，也很容易以物理公式解釋。

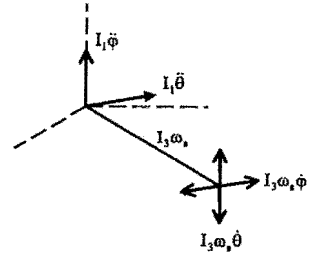
但若轉盤快速轉動，即 $\omega_s \neq 0$ ，則 $L_s \neq 0$ ，陀螺若直接倒下，固然和其轉盤不轉時一樣，會造成在水平方向平行 τ 的 $\Delta \bar{L}_n$ ，但 \bar{L}_s 之方向卻因此指向較下方，總角動量 \bar{L}_{tot} 之 z 方向分量變小，即不守恆，此違背 z 方向並無力矩分量，故 z 方向之角動量須守恆之條件。因此，若無其他補償，當 $\omega_s \neq 0$ 時，直接倒下的運動不容許單獨發生。 \bar{L}_s 只能進動改變方向，使得 $\Delta \bar{L}_s$ 平行 τ ，以滿足 $\frac{d\bar{L}_{tot}}{dt} = \tau$ 。然而一旦發生進動，此進動產生 $\frac{\Delta L_p}{\Delta t}$ ， L_{tot} 在 z 方向之分量由零增加為 L_p ，故 \bar{L}_s 必須章動向下加以抵銷，使 L_{tot} 在 z 方向之分量守恆，章動於是與進動一起發生。但章動會造成章動角動量 L_n 在 τ 方向的變化， $\frac{\Delta L_n}{\Delta t}$ 又會使 L_s 之進動受到影響。若進動變慢， L_p 變小， \bar{L}_s 又必須章動上翹加以平衡，使 L_{tot} 在 z 方向之分量守恆。

總而言之，進動會伴隨使 \bar{L}_s 改變俯仰角度 θ 的章動，使 z 方向之角動量守恆：

$$\left(\frac{\Delta L_p}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\Delta L_s}{\Delta t} \right) \text{ 因為章動造成} = 0;$$

而章動造成之角動量變化率和使 \bar{L}_s 改變 ϕ 角之進動所造成之角動量變化率相加之和，應等於外力力矩：即

$$\frac{\Delta L_n}{\Delta t} + \left(\frac{\Delta L_s}{\Delta t} \right) \text{ 因為進動造成} = \tau$$



圖四

因此，可得以下兩運動方程式，參見圖四（註 1）。

$$\frac{d}{dt} (I_1 \dot{\phi}) - I_3 \omega_s \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (I_1 \dot{\theta}) + I_3 \omega_s \frac{d\phi}{dt} = mgr_{cm} \quad (2)$$

亦即

$$I_1 \ddot{\phi} - I_3 \omega_s \dot{\theta} = 0 \quad (3)$$

$$I_1 \ddot{\theta} + I_3 \omega_s \dot{\phi} = mgr_{cm} \quad (4)$$

再將(4)式微分一次，得

$$I_1 \ddot{\theta} + I_3 \omega_s \dot{\phi} = 0 \quad (5)$$

由(3)式求得 $\ddot{\phi}$ ，代入(5)式，即得

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{I_3 \omega_s}{I_1} \right)^2 \dot{\theta} = 0 \quad (6)$$

其中 $\dot{\theta} \equiv \omega_n$ 為章動之角速度，(6)式可重寫成

$$\ddot{\omega}_n + \left(\frac{I_3 \omega_s}{I_1} \right)^2 \omega_n = 0 \quad (7)$$

則 $\omega_n(t) = W \cos(\Omega t + \alpha)$; $\Omega = \frac{I_3 \omega_s}{I_1}$ (8)

W 和 α 須由初始條件決定。根據(4)式，

$$\begin{aligned} mgr_{cm} &= I_1 \ddot{\theta} + I_3 \omega_s \dot{\phi} \\ &= I_1 \dot{\omega}_n + I_3 \omega_s \dot{\phi} \end{aligned} \quad (9)$$

亦即

$$\dot{\phi}(t) = \frac{1}{I_3 \omega_s} (mgr_{cm} + W I_3 \omega_s \sin(\Omega t + \alpha)) \quad (10)$$

令初始條件為

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = \omega_n(0) = 0 \\ \theta(0) = \pi/2 \\ \dot{\phi}(0) = 0 \\ \phi(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

因為 $\omega_n(0) = 0$ ，故由(8)式得 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，又根據(10)式

$$\dot{\phi}(0) = \frac{1}{I_3 \omega_s} \left(mgr_{cm} + W I_3 \omega_s \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 0 \quad (12)$$

$$\text{得 } W = -\frac{mgr_{cm}}{I_3 \omega_s}。$$

整理後可得章動的情形：

$$\dot{\theta}(t) = \omega_n(t) = \frac{mgr_{cm}}{I_3 \omega_s} \sin \Omega t \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta(0) + \int_0^t \omega_n(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{mgr_{cm} I_1}{(I_3 \omega_s)^2} (1 - \cos \Omega t) \end{aligned} \quad (14)$$

進動的情形：

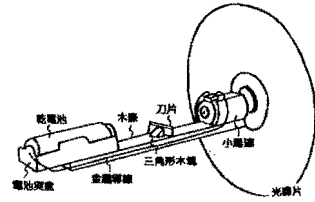
$$\dot{\phi}(t) = \frac{mgr_{cm}}{I_3 \omega_s} (1 - \cos \Omega t) \quad (15)$$

$$\phi(t) = \frac{mgr_{cm}}{I_3 \omega_s} \left(t - \frac{I_1}{I_3 \omega_s} \sin \Omega t \right) \quad (16)$$

值得注意的是，不同之初始條件下， $\phi(t)$ 和 $\theta(t)$ 之關係將有所不同。此外，仔細觀察(1)式和(2)式，若在任何時刻 $\frac{d\theta}{dt} = 0$ 都成立，則

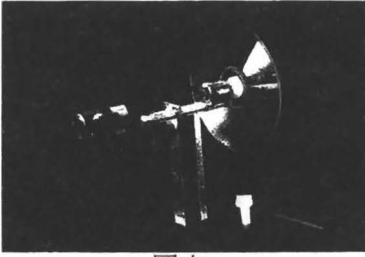
$I_1 \dot{\phi} = \text{const } t$ ， $I_3 \omega_s \frac{d\phi}{dt} = mgr_{cm}$ 也是解，正說明陀螺也有可能只進動而無章動。

備齊一張廢棄之光碟片、進口玩具馬達（轉動時較穩定，約一、兩百元）、刀片（由廉價刨鉛筆刀中拆下）、Size AA 電池、電池夾盒、長約 14 公分，厚 5 公釐，寬 1.2 公分之木條、縫衣針、一小塊玻璃、橡皮擦、以及 PE 塑膠棒（塑膠材料行均有售）。將 PE 棒用普通車床車成適當的小圓盤，並於中心鑽一小孔，再將其嵌入光碟中心圓孔，馬達轉軸插入

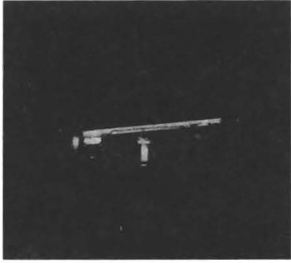


圖五

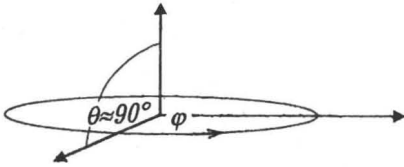
圓盤小孔中，即可驅動圓盤轉動，依圖五所示，將馬達、刀片、電池和電池夾盒以 AB 膠固定在木條上，刀片刀鋒向外，並以兩小塊三角形之木塊加強垂直立於木條上，整個組合之質心位置與刀鋒位置約有 1 公分的距離。電池接通玩具馬達後，即完成一具動力陀螺（註 2）。圖六為此陀螺之實物攝影，另外再用 PE 棒車製圖七側視插圖所示的軸承，軸承中心鑽一小孔，恰容縫衣針穿過，軸承上方牢牢黏上一小塊玻璃，玻璃上置一薄橡皮擦（從橡皮擦刮下一薄片）。縫衣針尖端向上垂直固定在支柱上，再將陀螺以刀鋒置於覆蓋橡皮之軸承上，如圖七所示。這具動力陀螺即從容不迫地重複演示本文所述的進動（見圖八）和章動（圖九）。



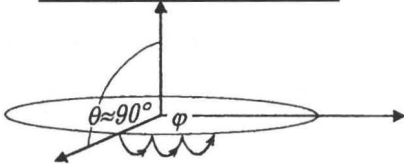
圖六



圖七



圖八



圖九

誌謝：感謝源流基金贊助。

註釋：

- (1)此方程式組之物理意義顯而易見，較一般教科書上繁複的數學計算簡單，切合實驗教學所需。
- (2)此動力陀螺針對改良台灣大學普通物理實驗室自製的陀螺而設計。

圖說：

- (一)一般實驗教學所用之陀螺。圖中箭頭表示萬向接頭轉動的情形。
- (二) $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ 時，陀螺之轉盤自轉、章動和進動造成之角動量分別為 L_s 、 L_n 和 L_p 。
- (三)轉盤不轉時，陀螺受重力造成之力矩即直接倒下。
- (四)進動和章動均會造成 L_s 之變化，其變化率分別為 $I_3 \omega_s \dot{\phi}$ 和 $I_3 \omega_s \dot{\theta}$ 。而章動本身之角動量為 $L_n = I_1 \dot{\theta}$ ，其變化率為 $I_1 \ddot{\theta}$ ；進動本身之角動量為 $L_p = I_1 \dot{\phi}$ ，其變化率為 $I_1 \ddot{\phi}$ （進動本身之角動量之方向，亦因章動而改變，惟其變化在此 $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ 之情形下可忽略）。
- (五)動力陀螺的立體圖，其中刀片乃用兩小塊三角形的木塊固定，垂直立於木條上。
- (六)動力陀螺之實物攝影和所需之組件。
- (七)實驗動力陀螺的情形，插圖為軸承之側視圖。
- (八)長時間曝光拍攝陀螺進動，插圖顯示陀螺對稱軸運動之軌跡。
- (九)長時間曝光攝得的進動和章動，插圖顯示陀螺對稱軸運動之軌跡，亦即(14)式和(16)式描述的情形。