

第五章 結論與建議

第一節 總結研究成果與研究意涵

現代教育的思潮就是不再把學習者當成一個被動學習的角色，認為學習是主動建構知識的一環，培養終身學習的性向與能力也是提昇人民素養不容忽視的目標。相同地，以閱讀的觀點來探討數學論證的學習即基於主動與終身學習的理念。大部分數學論證學習或教學的研究都在分析學生如何受限於數學知識、推理、信念等因素，而無法順利的「建構(做或寫)數學證明」，針對數學證明閱讀理解的認知特徵尚未出現完整全觀的探究。解讀數學證明不同於解讀數學史、數學解題過程或數學故事等說明或記述的文體，需要的不只是知識的憶取與問題或文本的歸納、統整與連結；更需要澄清證明中假設、前提和結論的遞迴性論證結構，才能欣賞命題的簡潔與精密；也需要再結構文本的證明，分析出證明的關鍵想法。因此本研究的目的為：(1)探討中學生在幾何證明閱讀理解認知面向上的特徵，(2)探討知識和邏輯推理對中學生幾何證明閱讀理解的影響。希望基於實徵研究的結果，除了在理論上擴充數學理解的認知發展，也在實務上提出可統整獲取知識、建立邏輯與理解數學證明的假設性學習路徑。研究的主要結果可區分為：(1)幾何證明閱讀理解的面向；(2)幾何證明閱讀理解的實際表現與自我評估；(3)知識和邏輯對幾何證明閱讀理解的影響；(4)幾何證明閱讀理解模式。

一、幾何證明閱讀理解的面向

本研究首先較完整且具體地定義幾何證明閱讀理解的面向，包含表層理解、邏輯定位理解、摘要統整理解、一般性理解、應用推廣理解和賞析理解。在考量哪些面向適合評量中學生幾何證明閱讀理解程

度之後，而定出表層理解、邏輯定位理解、摘要理解、一般性理解和應用理解。表層理解是評量「對字詞或符號意義的理解」，邏輯定位理解是評量「辨識證明過程中前提或結論的地位」和「辨識證明過程所引用的事實或性質」，摘要理解是評量「對命題的已知條件或求證是什麼的理解」或「對證明的重要想法是什麼的理解」，一般性理解是評量「判斷命題或證明過程是否正確」和「辨識證明過程可有效證明什麼命題」，應用理解是評量「應用已證的命題判斷其他類似前提之推論是否正確」。接下來，本研究繼續探討中學生在這五個理解面向的實際表現和自我評估。

二、幾何證明閱讀理解的實際表現與自我評估

在實際表現上，國中生和高中生在一階段和二階段幾何證明題閱讀理解表現的共通點是：表層理解都顯著優於其他閱讀理解面向。無論是國三或高中學生在摘要、一般性和應用等理解面向的表現均受到證明內容或結構(一階段或二階段)的影響，而且無論是國三或高中學生在邏輯定位理解面向的表現不受到證明內容或結構(一階段或二階段)的影響。雖然，國三和高中學生在整個邏輯定位理解面向的認知運作是比較穩定的，但是他們在邏輯定位理解面向內的表現還是受到論點前提多寡和地位的影響。例如：(1)當兩個子結論都有「所以」出現時，學生對這兩個子結論間的邏輯次序比較容易產生錯誤的判斷；(2)當命題中的前提在證明過程中分成兩部分使用時，學生對這兩部分前提間的邏輯次序比較容易產生錯誤的判斷；(3)學生在辨認證明所引用的性質容易犯錯的地方是，混淆了證明過程究竟是引用 $p \rightarrow q$ 、引用 $q \rightarrow p$ 或是兩者都有。

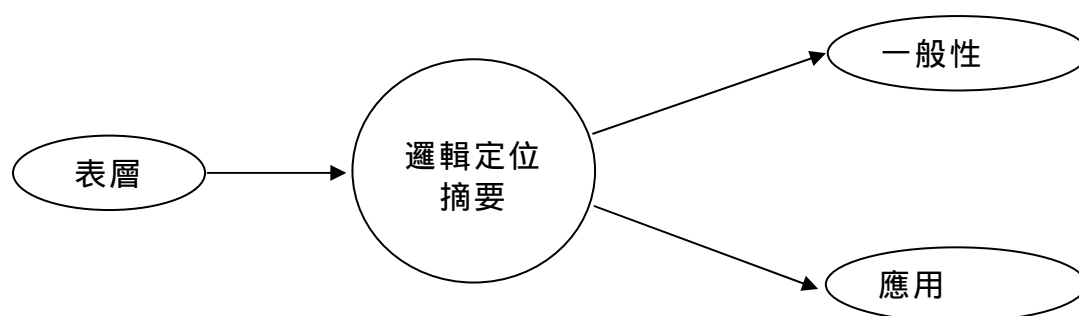


圖 5-1-1：幾何證明閱讀理解實際表現的關係結構一

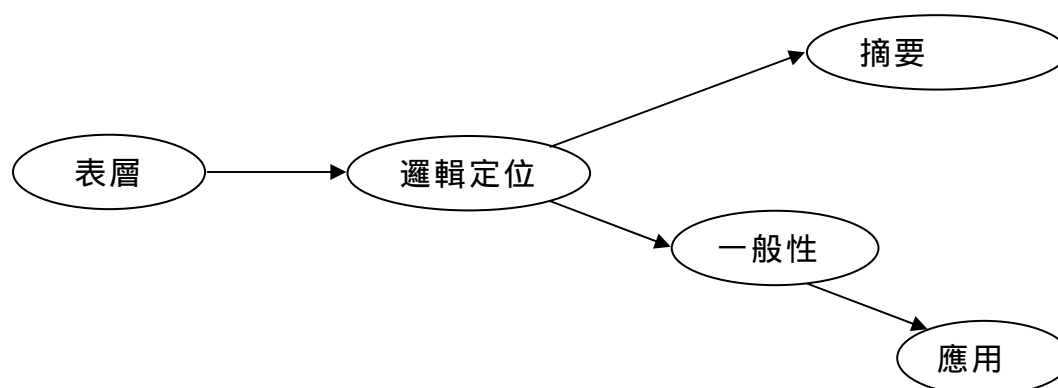


圖 5-1-2：幾何證明閱讀理解實際表現的關係結構二

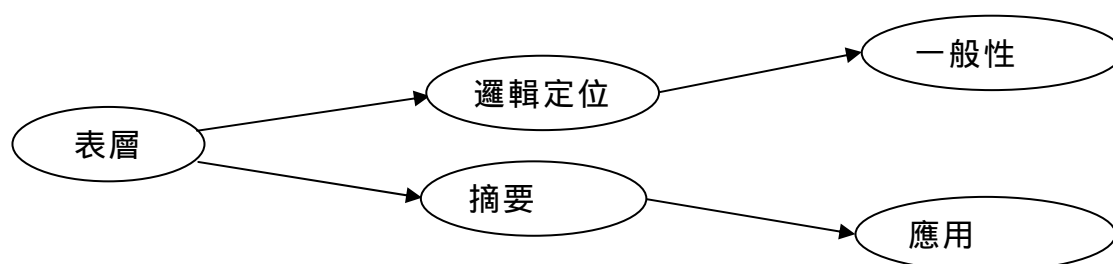


圖 5-1-3：幾何證明閱讀理解實際表現的關係結構三

如果以表層理解作為各面向幾何證明閱讀理解的學習起點，可以依據學生的表現將幾何證明閱讀理解的局部發展大致分成三種類型：(1)以邏輯定位和摘要理解作為從表層發展至應用和一般性理解間的樞紐位置(如圖 5-1-1)；(2)以邏輯定位理解作為從表層發展至一般性、應用和摘要理解間的樞紐位置(如圖 5-1-2)；(3)以摘要理解作為發展至應用理解以及以邏輯定位理解作為發展至一般性理解的樞紐位置(如圖 5-1-3)。研究者依據國三和高中學生幾何證明閱讀理解表現及其關係結構臆測：(1)當邏輯定位理解和摘要理解的困難度沒有顯著

差異時，則這兩個理解面向同時扮演從表層理解發展至一般性理解和應用理解的樞紐位置；(2)當摘要理解的困難度高於邏輯定位理解時，則邏輯定位理解扮演從表層理解發展至一般性理解、應用理解和摘要理解的樞紐位置；(3)當邏輯定位理解的困難度高於摘要理解時，則可透過邏輯定位理解從表層理解發展至一般性理解，以及透過摘要理解從表層理解發展至應用理解。

在自我評估上，從各面向分別舉出代表性的題目為例，學生評估理解程度的平均由高至低是「我瞭解第 k 列的意思(評估表層理解)」 > 「我瞭解第 k 列為什麼是正確的(評估邏輯定位理解)」 > 「我瞭解這個證明過程的重點(評估摘要理解)」 > 「我知道如何應用這個結論或證明解決其他問題(評估應用理解)」 > 「我瞭解這個證明過程為什麼可以或不可以證明這個敘述(評估一般性理解)」。無論是國三學生或高中學生在二階段幾何證明題應用理解和一般性理解的評估結果無顯著差異，在一階段各面向間和二階段其餘面向間的評估結果皆有顯著差異。

無論是一階段或二階段幾何證明題，高中生在評估各面向理解程度的結果都顯著高於國三學生評估的結果，除了評估一階段幾何證明題的一般性和應用理解程度時，高中生和國三學生的評估結果沒有顯著差異。但是高中生在各理解面向的實際表現卻都顯著優於國三學生的實際表現，依此研究者推得高中學生評估一階段幾何證明題之一般性理解和應用理解的相對標準比國三學生評估的相對標準更為嚴格。另外，國三學生評估二階段幾何證明題比一階段幾何證明題難以理解的面向是摘要理解；而高中學生評估一階段幾何證明題和二階段幾何證明題的理解難度是沒有顯著差異的。

中學生在一階段和二階段幾何證明題各理解面向的評估之關係

結構大致上可分為兩種：(1)表層理解之評估和摘要理解之評估分別都與邏輯定位理解之評估的關係相當；(2)邏輯定位理解之評估和表層理解之評估的相關性明顯大於邏輯定位理解之評估和摘要理解之評估的相關性。

對照學生實際表現和自我評估的結果，發現在實際表現和自我評估出現相同的情形包含：(1)國三生的摘要理解都是一階段幾何證明題顯著高於二階段幾何證明題；(2)國三生的邏輯定位理解在一階段幾何證明題和二階段幾何證明題都沒有顯著差異；(3)高中生的邏輯定位理解在一階段幾何證明題和二階段幾何證明題都沒有顯著差異。(4)在二階段幾何證明題上，高中學生的實際表現和自我評估結果都是顯著高於國三學生。

出現不同的情形包含：(1)國三生在一般性理解和應用理解的實際表現，都是一階段幾何證明題優於二階段幾何證明題，可是在一般性理解和應用理解的自我評估，一階段和二階段幾何證明題沒有顯著差異；(2)高中生在摘要理解、一般性理解和應用理解的實際表現，都是一階段幾何證明題優於二階段幾何證明題，可是在摘要理解、一般性理解和應用理解的自我評估，一階段和二階段幾何證明題沒有顯著差異；(3)在一階段幾何證明題的一般性理解和應用理解，高中學生的實際表現都是顯著優於國三學生，可是高中學生的自我評估和國三學生的自我評估沒有顯著差異。

綜言之，邏輯定位理解在學生實際表現出來的和自我評估上佔有不同的地位。學生主要以偏向評估表層理解的標準來評估「為什麼」某些步驟是正確的，但當以區分邏輯和認識上的真以及辨識所引用的性質或事實來測量學生是否真正理解「為什麼」時，其表現結果和表層理解表現的相對關係就低於學生在這兩個面向上自我評估的相對

關係。會不會是由於學生輕忽了邏輯定位的問題，認為自己的邏輯定位理解是正確的，而削弱學生對於進一步理解邏輯定位問題的需求？所以在教學上，也需要特別注意學生在邏輯定位上的表現與自我評估間的落差。另一方面，邏輯定位理解也是唯一一個面向，無論是國三學生或高中學生在幾何證明閱讀理解的實際表現或自我評估上，都不受一階段或二階段幾何證明題的影響。這是否表示如果沒有外在介入下，中學生短時間內較難自主提昇對幾何證明的邏輯定位理解？

三、知識和邏輯對幾何證明閱讀理解的影響

影響幾何證明閱讀理解表現的因素可大致分為認知(含後設認知)、情緒和意念行動等三個面向，但本研究一方面以量的資料探討屬於認知的知識和邏輯兩個元素和幾何證明閱讀理解的關聯性，一方面也以質的資料分析其他影響學生閱讀理解的因素。

從本研究分析知識對幾何證明閱讀理解的影響中，發現在表層理解的表現上，能從 $ABC \cong DEF$ 推得 $BAC = EDF$ (知識)的學生群中，還有三分之一不理解 AMC 與圖形中的對應關係(表層理解)。在邏輯定位理解的表現上，能辨識證明中引用的事實之必要條件有概念心像和概念說明；能辨識證明中敘述的邏輯次序之必要條件有概念心像和概念說明。在一般性理解的表現上，能辨識證明過程可有效化的命題之必要條件有概念心像和概念說明。

從本研究分析邏輯對幾何證明閱讀理解的影響中，發現在邏輯定位理解的表現上，能辨識證明引用的性質之必要條件有概念情境直接確認邏輯和記號情境直接確認邏輯。在一般性理解的表現上，能辨識證明過程可有效化的命題之必要條件有概念情境直接確認邏輯和記號情境直接確認邏輯。

在語文的閱讀理解研究中，以閱讀動機、目標設定、行動控制和閱讀策略等十三個自我調整學習變項聯合預測國中生閱讀理解表現，結果可以解釋閱讀理解總變異的45% (林清山和程炳林，1995)。但本研究只以知識和概念情境中直接確認邏輯2個變項預測國三學生在一階段幾何證明閱讀理解表現，結果可以解釋總變異的54%；也以這2個變項預測國三學生在二階段幾何證明閱讀理解表現，結果可以解釋總變異的32%。這也說明，基本的數學知能對於幾何論證的學習還是具有一定的影響力；相對地，如果缺乏基本的數學知能，也很難透過有效的自我調整學習技能而促進幾何論證的學習。

四、幾何證明閱讀理解模式

(一) 中學生評析幾何論證之有效性的思維特徵

為了在學生和數學論證間建立起良性的互動關係，我們必須著手探討學生面對數學論證時的認知特徵。本研究先針對兩個問題來探討此現象：(1)學生如何評估不一致或不同方式的幾何論證？(2)是什麼樣的因素阻檔了他們的理解？結果發現中學生(以 JS 表示國三學生，以 S 表示高職學生，以 HS 表示高中學生)誤解幾何論證的思考特徵有「不當特殊化論證過程」以及「過度一般化論證過程」。可能造成不當特殊化論證過程的認知方式有：(1)以數字檢驗形式證明；(2)受限於未畫出來的圖形；(3)把例子中的某種規律視為前提。可能造成過度一般化論證過程的認知方式有：(1)擴充演算法或動態圖形的有效性；(2)強化圖形或數字的效用；(3)開放前提或結論的位置；(4)增加前提或結論的強度。

除了在預測模式的量化研究中，本研究找到以知識和概念情境的邏輯作為預測變數外，希望透過訪談研究的部分找到其他因素，來彌

補知識和邏輯不足以解釋的部分。為什麼學生解讀幾何論證的結果就是如此呢？從訪談資料中，本研究找出三種妨礙學生進一步理解幾何論證的因素：(1)未意識到自己誤解的可能性；(2)未區辨證明與解說的不同；(3)排斥或不喜歡不瞭解的資訊。

(二) 幾何證明閱讀理解的層次

把個體閱讀文本資訊所形成的心理表徵當成起始資訊，則此起始資訊是一種可以不斷遞迴更新的資訊，可將起始資訊所認知的新資訊區分為四個層次：(1)表層理解；(2)辨識元件；(3)鏈結元件和(4)膠囊化理解。表層理解層次是尚未涉及論點分析；辨識元件層次是已區分論點內的元素，即前提或結論；鏈結元件層次進一步理解論點間的關係；膠囊化理解層次是把命題和證明內化為整體的大論點。

四種理解層次間的實際表現都通過的國三學生，在一階段幾何證明題有 23.8%，在二階段幾何證明題只有 4.1%；四種理解層次間的實際表現都通過的高中學生，在一階段幾何證明題有 36.5%，在二階段幾何證明題只有 15.7%。四種理解層次間自我評估都通過的國三學生，在一階段幾何證明題有 47.1%，在二階段幾何證明題也有 40.5%；四種理解層次間自我評估都通過的高中學生，在一階段幾何證明題有 60.3%，在二階段幾何證明題也有 56.7%。

分析各理解層次間的實際表現，發現幾何證明閱讀理解層次的發展可能有兩類(請見圖 5-1-4)，一是從表層理解、辨識元件、鏈結元件至膠囊化理解層次循序漸進地發展，本研究稱為「關係性理解型態」；二是從表層理解跳至膠囊化理解層次，再回到辨識元件和鏈結元件間的發展，本研究稱為「工具性理解型態」。超越辨識元件者一定是屬於前者，未過辨識-鏈結元件者一定是屬於後者。配合之前各理解面

向間的關係結構，結構中和表層理解關係較近都是邏輯定位理解和摘要理解，所以推論大部分的學生應該都屬於「關係性理解型態」。

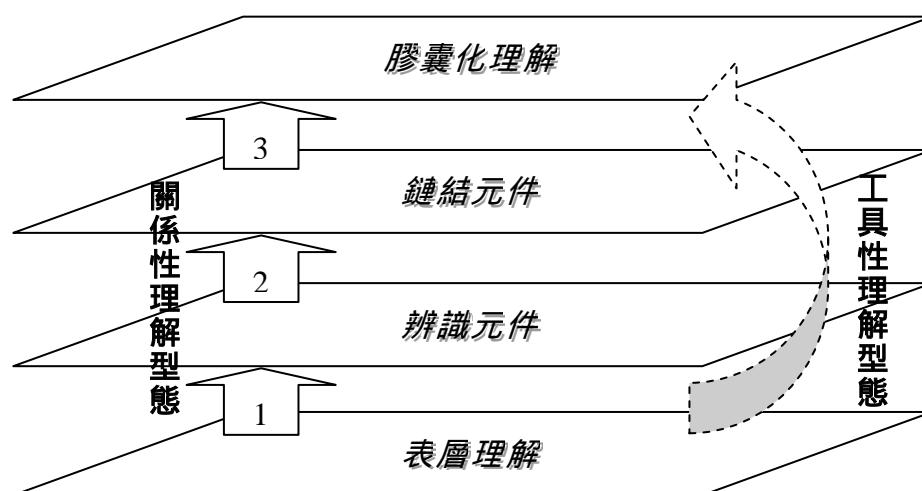


圖 5-1-4：幾何證明閱讀理解層次與理解型態

(三) 發展幾何證明閱讀理解層次可能面臨的障礙

表 5-1-1 呈現各理解層次的認知類型、認知行為和可能面臨的障礙，但是從表層理解層次所衍生的障礙其實是有關於學生的證明概念，所以此障礙也可能出現在其他的理解層次。因此，分別以學生的幾何證明概念與理解層次類型將受訪的學生分類時，其分類結果也出現：具有另類架構的學生之理解層次散佈在表層、超越表層、超越辨識元件三種階段。至於具有可接受的證明概念(區辨形式證明、經驗論證和解說性論證的不同)之學生，其理解層次主要都處於超越鏈結元件理解邁入膠囊化理解的階段。

基於幾何論證理解層次和層次間的認知行為與可能面臨的障礙，研究者進一步分析理解幾何論證所需的認知協調，希望藉此作為教學活動設計的參考依據。在另類架構的證明概念中，具「圖形認知」證明概念的學生依據圖形推論，而推論的方式又可區分為視覺上的或

操弄圖形的，所以主要的認知運作有**視覺關聯**或**操弄轉換**。具「可演算性」證明概念的學生還是以數字或符號的運算為主，所以主要的認知運作是**演算轉換**。具「可解說性」證明概念的學生以意義化或合理性作為論證理解，所以主要的認知運作有**意義關聯**或**類比轉換**。

表 5-1-1：幾何論證理解層次的認知特徵與可能面臨的障礙

理解層次：表層理解			
類別	圖形認知	可演算性	可解說性
認知特徵	(1)操弄動態圖形； (2)圖形為主的啟 論式理解	(1)以數字計算； (2)以數字代入符 號計算	(1)敘述中不分前 提和結論；
可能面臨 的障礙*	相信圖形的一般 性和存在性	相信具有(主觀) 任意性的證據是 證明	相信對命題合理 性的解說已經是 證明
理解層次：辨識元件			
類別	析取重要性質	析取前提或結論	
認知行為	(1)能辨識引用的性質 (2)能察覺潛在性質	(1)能辨識前提或結論 (2)能察覺潛在前提或結論	
可能面臨 的障礙	把原本鏈結在一起的前提、結論或性質拆開來看。		
理解層次：鏈結元件			
類別	理解論點的有效性	協調論點和圖形	
認知行為	能同時關照論點的前提和結 論	能把圖形視為論點的參 照物	
可能面臨 的障礙	(1)把例子中的規律視為前提 (2)增加前提或結論的強度	(1)相信命題可對可錯 (2)受限於未畫出的圖形	
理解層次：膠囊化理解			
類別	把命題和該命題的證明內化為整體物件		
認知行為	(1)能正確應用命題和證明過程解決問題 (2)能從類似情境中析取出和命題不同的條件		
可能面臨 的障礙	缺乏有彈性的推廣		

*此障礙是有關於學生的證明概念，所以此障礙也可能出現在其他的理解層次。

辨識元件理解層次的發展中，學生需要能夠辨識或摘取論點的前

提或結論為主，所以主要的認知運作是**微觀組織**或**局部組織**，可是辨識元件理解層次還是需要透過**定義**或**性質關聯**運作來鎖定證明中的重要意義。鏈結元件理解層次的發展中，學生需要能夠理解論點間的有效關係。除了必須釐清論點指涉內容的範圍，也要理解證明過程之不同論點間的蘊含關係，所以主要的認知運作包含**圖文參照**、**演繹轉換**及**兩種運作間的協調**。膠囊化理解層次是能將命題和證明過程視為整體再作適當的應用，所以**文圖參照**、**文內或圖內關聯**和**演繹轉換**是此層次主要的認知運作。

從上述各理解層次的認知特徵與認知運作分析中，歸結幾何證明閱讀理解的認知協調包含：可接受的證明概念與另類架構的證明概念之間，同一表徵之內(例如：文字的前提和結論)，不同表徵之間(例如：圖和文)，同一認知運作之內(例如：演算轉換和演繹轉換)，不同認知運作之間(例如：轉換和參照)，證明與反駁的論證方式之間。而且考慮妨礙學生進一步理解的因素後，認知協調的過程還必須配合好奇心的驅動、質疑的思維習慣、接受挑戰的態度、有效合理化的策略，才能讓學生在論證活動中持續地學習。

五、本研究與既有數學論證教育研究的差異

Healy & Hoyles(2000)在代數證明觀念的研究中，也曾分析學生如何評估不同形式的證明。但她們只指出學生如何評析各種證明的解釋力和有效性，並未進一步分析是哪些認知因素影響學生評估各種論證的解釋力和有效性，也未深入分析學生把什麼當成論證的解釋力和有效性。而本研究對於不同思維特徵導致學生誤解幾何論證已找出某些類型的個案說明，也析取了三個除了知識和邏輯之外阻礙學生進一步理解幾何論證的因素。希望透過本研究的分析、解釋與推論，能讓

數學教師和數學教育研究者對於理解數學論證的意涵有更深刻的體驗。

Selden & Selden (2003)研究大學生有效化代數證明的過程，其主要的發現有二：(1)從學生說他們讀證明的策略或技巧難以預測他們對證明的理解程度；(2)學生以「感覺瞭解(making sense or a feeling of understanding)」來評析證明的正確性，但學生的感覺通常偏離了正確的判斷。本研究就學生評析幾何論證時所產生的誤解，更有結構地組織學生理解論證時的思考特徵，如此可深入瞭解為什麼學生的感覺通常偏離了正確的判斷。

Harel & Sowder (1998) 從學生證明的方式來探討學生的證明架構有：外來的、經驗的和分析的三個面向。外來的包含把證明當儀式和來自權威的證明，經驗的包含訴諸於感覺的或歸納的方式證明，分析的包含有演繹過程的局部理論證明或公理化系統的證明。但由於此架構並不合適用來分析學生評析論證正確與否的來源，就本研究從學生從閱讀證明中所獲得的理解和表現來討論學生的評析證明的架構，發現學生評析論證正誤的標準包含：外來的、證明中論點的意義(例如：Selden & Selden 所提的 making sense，和本研究所提的可解說性。)、證明中論點的來源、可自行再模仿操作的。例如：外來的有「這很像課本上會寫的」、「這是老師常強調的」；證明中論點的意義有「都用到角度」、「直角三角形的三邊長關係」；證明中論點的來源有「這要在等腰直角三角形才可以」、「因為平行兩個內錯角相等」、「它是假設的」、「它說了 60 度是怎麼來的」；可自行再模仿操作的有「P 點可以移動同樣再算一次」、「給了兩個角得到裡面兩個角，可以算出第三個角」。

Chazan (1993) 主要以測量的經驗證明和演說式的證明來探討高

中生在幾何證明課所形成的證明觀，可是本研究不僅使用了測量的和動態圖形給度數的經驗證明，也包含演算式和演說式的證明以及非證明的解說性論證。而且透過學生對不同論證的比較，使得資料來源更多元以及觀察到的現象也更具多樣性。研究結果確實發現，學生以數字檢驗演說式證明、擴充演算法或動態圖形的有效性、強化圖形或數字的代表性等等，這也都是 Chazan 尚未探討的現象。另外，Chazan 提出從他的個案學中似乎反應出越質疑測量的有效性，也越會質疑形式證明的有效性。本研究也有類似的個案，不認同測量論證的學生卻因為「不知道平行線怎麼來的」、「這個式子到這個式子沒說清楚」等原因，而懷疑形式論證的正確性。

基於把數學視為是經由命題、證明和理論不斷演化發展的系統，Boero, Garuti & Mariotti (1996) 發展數學內的探究活動，讓形成臆測過程也當成是論證教學的一部分，並提出在臆測過程中所形成的認知單位(Cognitive Unity)有助於之後的證明過程。但是，如果學生在臆測過程以測量的方式形成待證的命題，在證明過程中如何提昇至形式化的證明？如何消除臆測和證明之間的鴻溝呢？從本研究的結果看來，約有 30% 未正式學過幾何證明的國三學生通過 70% 的摘要理解和邏輯定位理解問題，所以猜測或許可以透過幾何證明閱讀理解歷程來彌補臆測活動至證明過程中的落差。因為在經驗各階段理解歷程時，學生可以面對許多需要協調的內容，從理解數學知識到理解後設的數學觀點(metamathematical view)，也就是 Kitcher (1984) 分析數學知識論時在數學實作活動中所提的一個元素。即使學生未能具有基本的數學證明能力，但藉由幾何證明閱讀理解教學來澄清與賞析非形式論證和數學證明的差異應該是可行的。

認知型態是有關於個體組織和處理資訊時所一致採用的策略之

特徵，文獻中指出可以兩個最基本且獨立的向度來區分學習者的認知型態：描述個體處理資訊的組織和結構方式 Wholist-Analytic 和反應個體處理資訊的表徵方式 Verbaliser-Imager (Riding & Cheema, 1991; Rayner & Riding, 1997)。對照本研究的「關係性理解型態」和「工具性理解型態」，是否傾向 Analytic 和 Verbaliser 認知型態的學生，其理解型態屬於關係性？是否傾向 Wholist 和 Imager 認知型態的學生，其理解型態屬於工具性？為了設計適合不同類型學生的學習活動，這些也是值得進一步探討的問題。

文獻中已有不少探討學習遷移的議題，如果在遷移的起點和終點中建立很多相似的元素，則會增加遷移的合適性和可能性(Gray & Orasnu, 1987)。影響是否建立很多相似元素的因素有來自問題情境和來自個體，一方面問題情境會影響個體形成與組織內在表徵外，另一方面個體既有的知識結構也影響了遷移的效果，所以促進個體建立理解網絡是有助於學習遷移(Hiebert & Carpenter, 1992)。如果在幾何證明閱讀理解的學習歷程中，學生能透過表層、辨識元件和鏈結元件理解的過程，逐漸擴充對命題與其證明過程的理解網絡，則有助於應用該命題或其證明過程來解決其他問題，這種學習歷程就是「關係性理解型態」。相對於透過理解來幫助遷移，也應該存在著透過遷移來幫助理解，即「工具性理解型態」，而且這種先透過表層理解即著手思索命題或證明過程的應用，正符合應用數學家的實作經驗。如果進一步探討如何評估學生適合「關係性理解型態」或適合「工具性理解型態」，將可落實在適性學習的教學設計。

除了認知或情意的因素會影響學生的數學理解，學生的數學信念也會影響數學理解的成長(Schoenfeld, 1985)。另一方面，數學理解的歷程也會影響學生的數學信念(Hiebert & Carpenter, 1992)。同樣地，

研究中也發現如果學生能夠辨別形式論證、經驗論證和解說性論證的不同，則其幾何證明閱讀理解大都可以通過各理解層次到達膠囊化理解層次；而且尚未具有可接受的證明概念之學生，其幾何證明閱讀理解大都無法通過各理解層次到達膠囊化理解層次。可接受的證明概念還是必須透過數學論證的學習歷程來建立，但是會建立正確形式證明的學生並不見得具有形式的證明觀，所以透過閱讀理解來建立可接受的證明概念應該是一種有效的教學策略。

第二節 建議

一、未來研究的建議

Selden 和 Selden(2003)在未來研究的建議也提出探討學生有效化證明的能力和邏輯的知識有何關聯。本研究就這個問題也有初步的結果，知識和概念情境的邏輯能解釋國中生在一階段幾何證明閱讀理解表現總變異的 54%。相較之下，對高中生表現的解釋度則低了許多。這可能是因為雖然高中生已經具有足夠的相關幾何知識和邏輯知識，可是其閱讀理解的表現並未一致且相對地提昇。另外，本研究提供學生閱讀的證明是正確的直接證明，至於間接證明所需的邏輯可能就不只是概念情境直接確認的邏輯而已。當然，什麼變數可有效預測學生對不正確或間接證明的閱讀理解表現，這個問題還有待進一步的研究。

即使是在同年級學生中數學程度高的高中生，對於評估證明的有效性仍有許多盲點，例如：過度一般化一個證明過程所能證明的命題。即使這些學生不僅能使用與命題和證明相關的數學知識，也能正確判斷概念情境直接確認的邏輯問題和記號情境的邏輯問題。另外，

在推廣的訪談問題中，這幾位學生也未有符合期許的表現。在教學上如何幫助這群數學程度高的學生能夠更深入理解證明的有效性以及從已知中拓展新知，都是尚待努力的教育議題。

至於一般數學程度的學生，以本研究的高職學生為例，雖然他們已在國三的幾何課程中學習過幾何證明，可是在評估幾何論證時仍有許多另類的標準，例如：以數字的假設角色和圖形的動態有效化命題、把證明當成解說或解說當成證明。這些幾何證明學習經驗下的產物，值得研究社群反思：究竟哪些教學現場或課程規劃的缺失造成學生最後真正獲得的和所預期的落差？

課程強調寫證明的能力和本研究中提出閱讀理解證明的能力之間有何關聯？就研究者的觀察，整體而言會證明的學生也比較能夠正確評估證明，但仍有不少會證明的學生誤把動態圖形的經驗論證當成正確證明的情形。一般學生對於微觀或局部邏輯定位的表現還不錯，而且在一階段和二階段的表現也較其他面向的理解表現穩定。若以此為基礎，在教學上如何促進學生的膠囊化理解？是否藉由幾何證明閱讀理解的教學也能同時提昇學生寫證明的能力呢？

代數證明和幾何證明的差異為何？如果差異越大，則本研究的研究結果一般化到代數證明的有效性就越小。中學的代數以探討數的結構為主，中學幾何以平面圖形的結構為主，表徵數和圖形的符號和運作方式至少是中學代數和幾何證明的差異來源之一。所以，對於代數證明閱讀理解仍有進一步探討的必要性。透過學生在代數證明和幾何證明閱讀理解表現的比較，也能對於如何設計與編排國中數學證明課程給予具體的建議。

數學家在閱讀論文時，有些認為最難的部分表層理解，也就是理解他人的符號系統；有些人認為最難的部分是推廣和應用，也就是如

何應用或延伸到自己目前處理的問題。在中學的階段，學生學習證明的命題都從已學過的概念中探討相關性質，是否在中學階段不適合學生透過閱讀證明的活動來學習新的概念？還是由於既有課程的安排和教學模式才忽略設想此學習路徑的可行性？或許未來的研究也可朝這個方向探索，希望能製造更多學習機會給不同層面的學生。

在數學教師既有的學習與教學經驗裡，對於讀數學論證的教學策略和學生的學習模式也是較為陌生的，如何讓教師熟悉閱讀理解在論證學習中所扮演的角色自然是一個研究議題。此外，數學教師對於數學論證教學有其固有的認知和信念，此信念如何影響教師對於幾何證明閱讀理解的教學觀也是值得探討的問題，而且這也可以作為師資培育者設計數學論證教材教法的依據之一。

二、幾何論證教學的建議

如果只注重形式證明的模仿，或是只偏重學生能理解和喜歡的論證方式，則很難達到幾何證明課程中既定的學習目標。幾何論證活動可區分為讀、寫、做三個主軸，聽和說是各主軸的佈景。參考本研究提出的幾何證明閱讀理解層次，從表層理解層次出發，論證教材應該提供不同的論證方式，讓學生討論各種論證在說些什麼、怎麼說的、論證的目標是什麼，從比較各種論證方式的優缺點之下，逐漸增加學生區辨經驗證明、視覺證明、形式證明和解說論證的能力。

寫的活動可以搭配在膠囊化理解階段中，讓學生透過應用問題來學習如何寫證明；做的活動可以安排在鏈結元件理解階段至膠囊化理解階段間，讓學生經由作圖或偵錯活動有機會論證(包含證明與反駁)自己所依據或所推得的性質。在寫的過程中，引導學生反思各理解階段的差異以明白什麼是幾何證明的規約及其功能何在；在做的過程

中，促使學生將某些證明結果視為整體，也由偵錯的過程區辨證明與反駁命題時的差異。

邏輯推理能力在論證活動中所扮演的角色是什麼？以幾何證明閱讀理解的觀點而言，本研究已發現概念情境的直接確認邏輯對閱讀理解表現有顯著的影響，而且國中學生在這個直接確認邏輯上的表現也不錯，所以建議透過學習概念情境的邏輯推理作為學生摘要資訊和分析論點的基礎。由於高中生雖然知識和直接確認的邏輯推理都顯著優於國中學生，可是對於其閱讀理解的預測力卻不如對國中學生的預測力。除了高中生幾何證明閱讀理解表現優於國中學生的程度不如知識和邏輯推理，也可能是有些高中生未把自己的知識和邏輯推理能力遷移到幾何證明的閱讀理解。所以，建議課程仍需要設計邏輯推理和幾何論證的連結教材，讓學生經驗幾何論證的隱學習後也有機會嘗試幾何論證的顯學習。

接下來參考本研究提出的幾何證明閱讀理解層次之特徵與可能面臨的障礙，本研究對於幾何論證教學提出一個關於獲得知識、建立邏輯與解讀幾何論證間的假設性學習路徑，請見圖 5-2-1。針對屬於「關係性理解型態」之學生，可逐步引入從知識、表層理解、辨識元件理解、鏈結元件理解發展至膠囊化理解的教學活動。首先由既有的概念心像和概念說明出發，如果未能進入表層理解則建議透過閱讀策略的引導，幫助學生啟動既有的知識來進行理解。接著從表層理解出發，其和辨識元件理解最大的差異是，前者尚未出現論點分析而後者是進入論點分析的開端，所以必須讓學生有機會從可解說性、可演算性或圖形認知的理解轉換成文字敘述的方式。而且表層理解和辨識元件理解的關聯運作之對象不同，前者是意義關聯而後者是定義或性質關聯。所以，可以藉由概念情境直接確認邏輯的教學將所習得的知識

用來學習如何摘取重要的資訊，也藉由下定義的活動來澄清概念的定義和性質，並配合以文字明確敘述具體的性質，再分析此命題的前提和結論是什麼。

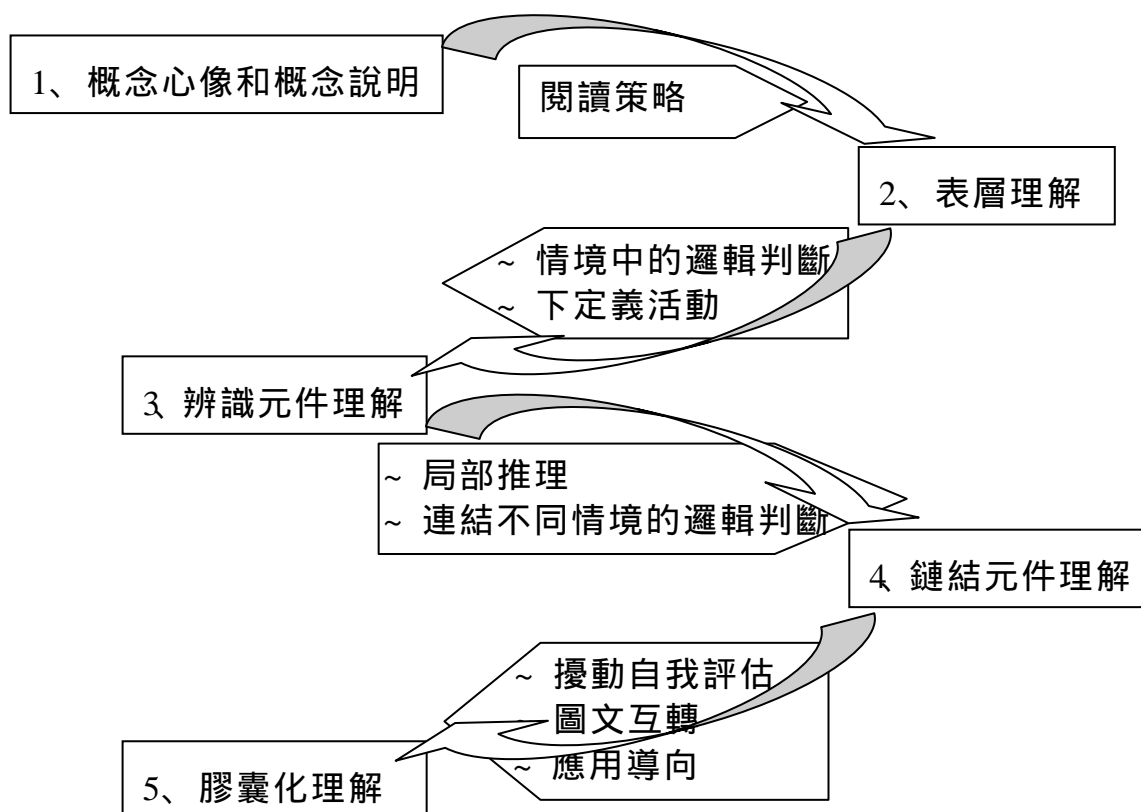


圖 5-2-1：獲得知識、建立邏輯與解讀證明的假設性學習路徑

由於辨識元件理解的學生可能會混淆前提和結論的地位，所以可以藉由局部推理活動來澄清前提和結論間的關係，也就是同時澄清論證中的某一前提是哪些結論的前提，以及論證中的某一結論是哪些前提的結論。而且到達鏈結元件理解還需要演繹轉換的認知運作，所以可以考量透過連結概念情境和記號情境的邏輯推理來培養演繹轉換運思。

從實際表現和自我評估的差異性，發現中學生在一般性理解和應用理解的自我評估都不受證明結構的影響，但是實際表現確是二階段顯著優於一階段，所以建議從鏈結元件理解至膠囊化理解的過程可以

先擾動學生的自我評估。此外，鏈結元件論證理解的學生可能會誤解什麼是前提或前提的強度，其誤解的原因可能和表徵轉變(圖形與文字間)或意圖(證明或反駁)有關。所以，一方面透過從文字轉譯成圖形或從圖形轉譯回文字的認知工作，讓學生釐清什麼是圖形的不變性；另一方面透過應用命題或證明過程的論證活動，讓學生意識到證明與反駁的差異。在證明中，論證過程需要注意的是符合命題已知條件的所有情形；在反駁時，論證過程需要注意的是符合命題已知條件的某個情形。這不只是協調表徵或協調不同認知運作的問題，而是還要協調證明與反駁的論證方式。

至於「工具性理解型態」之學生，可以先從表層理解直接引入圖文轉譯和應用命題或證明過程的論證活動，再引入下定義活動和概念情境中直接邏輯的組織活動，接著引入概念情境和記號情境邏輯的連結活動和局部推理的配對活動。