

第二章 小波理論介紹

2-1 小波簡介

為解決傅氏轉換在非穩態信號的不足，在信號局部時間的頻域特徵上，進一步發展成加窗傅氏轉換（windowed Fourier transform）或稱短時傅氏轉換（short time Fourier transform），其原理是以固定微小視窗對原信號作滑移且轉換，此法在傅氏轉換的基礎上完成了空間域的局部（小範圍）分析，使傅氏轉換在空間域-波數域之間無法對應的問題可得到解決，以反應某一空間範圍中的波數。該轉換可定義如下：

$$F_x(b, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x-b) e^{-jkx} dx$$

式中， k 代表小範圍的波數， b 為有限範圍的視窗位置， $g(x-b)$ 為待相乘的窗函數。隨 b 值的變化，視窗沿著 x 軸滑動，所以 $F_x(k, b)$ 大致反映了 $f(x)$ 在位置 b 的波數相對量（吳湘淇, 1996）。

在加窗傅氏轉換的基礎上，Gabor 於 1964 年提出了著名的 Gabor 變換，其應用高斯函數作為空間局部化的視窗，即使得

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \alpha \text{ 為一大於零的常數。}$$

由於高斯函數具有經傅氏轉換後仍是高斯函數的特性，所以當 x 在 b 附近便能夠實現對空間域與時間域的局部化（吳湘淇, 1996）。此種具短時性特徵的信號其短時功率密度譜估計如下：

$$\begin{aligned}
 p_x(b, k) &= |F_x(b, k)|^2 \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x-b) \cdot e^{-jkx} dx \right|^2
 \end{aligned}$$

式中滑移視窗常用高斯視窗、Hamming 或是指數視窗（吳湘淇，1996）。

圖 2-1 為加窗傅氏轉換示意圖，由圖可見空間域以及波數域的分析視窗皆為固定，由該法可得知任意空間位置上原信號所屬該視窗寬度的波數特徵。但由於是建立在分析穩態信號的基礎上，不論是在空間域或波數域加窗，均要求分析之窗口要相當窄小，否則很難得到良好的分析結果。故當使用最小視窗時可以得到最好的空間分析解析度，不過此視窗反映到波數域中就是最差的解析度，此一現象可用 Heisenber's principle of uncertainly 加以比喻（Sarkar et al., 2002），即良好解析度只能在空間域或波數域選擇一個。並且一次的分析當中，由開始至結束時分析視窗寬度固定不變，雖然加窗傅氏轉換解決了轉換前後的定位問題，仍然缺乏對週期變化信號的掌握，為改善此一缺點，在信號分析的處理上因此出現小波轉換技術。

小波轉換的概念在 1980 年代早期已經由一系列發表的文章，如 Morlet (1982a; 1982b)、Goupillaud 與 Grossmann (1983) 等所完成，並且由 Meyer、Mallat、Daubechies、Chui 等進行賦予小波意義於不同領域中 (Foufoula-Georgiou et al., 1994)，其應用領域包括：數學、物理、工程、波動傳播、資料壓縮、影像處理、電腦圖像、偵測航空器與潛水器、改善 CAT (Computed Axial Tomography) 掃描技術 (Debnath, 2002)，以及震測剖面之傾斜事件、震測波線特徵、震測資料時頻分解 (Ridsdill-Smith et al., 1998) 等分析之方面。

與小波相關的第一篇文獻是 1910 年 Haar 所發表於 Math. Annal. 的論文中 (呂銘杰, 2001)。而 Jean Morlet (1982) 首先介紹小波的想法用於分析非穩態信號，使用平移 (translation) 與延伸 (dilation) 參數所組成的相似函數，該原始的單函數 (single function) 稱作母波 (mother wavelet) (Debnath, 2002)，wavelet 翻譯自法文 ondelettes 或 petites，為很小的波之意。小波母函數的表現有兩個特徵：波數域中圍繞在一中間值以及空間域中有限寬度 (Sarkar et al., 2002)。即正負交替的波動性與函數密集的特質，其可類比於傅氏分析中的正弦或餘弦函數。之後在 Mallat 與 Meyer (1986) 提出了多層解析度 (multiple-resolution) 分析的概念，使得小波進一步發展至有數

學方式的描述 (Hubbard, 1998)。

小波轉換發展了 Gabor 的加窗傅氏轉換局部分析的構想，在視窗函數中引進可將視窗伸縮範圍的延伸函數，將加窗傅氏轉換中的 $g(x-b)$ 擴展成有位移和延伸性質的視窗函數。以下為幾種小波母函數及其表示式 (Foufoula-Georgiou et al., 1994)，

Haar wavelet (小波母函數中最簡單者) :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

Mexican hat wavelet

(由高斯機率密度函數的二次導數衍生得到) :

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-x^2) e^{-x^2/2}$$

Morlet wavelet :

$$\psi(x) = \pi^{-1/4} (e^{-ik_0x - e^{-k_0^2/2}}) e^{-x^2/2}$$

該示近似式為 -

$$\psi(x) = \pi^{-1/4} e^{-ik_0x} e^{-x^2/2} \quad k_0 \geq 5$$

圖 2-2 為上述三個小波母函數圖形。

小波母函數 (母波) 可經由延伸參數 a 與平移參數 b 而決定一組小波函數 $\psi_{a,b}(x)$ ，在處理短波長信號時選用空間域解析度高、波數域解析力低的小波函數，反之，處理長波長信號則是選用空間域解析力低、波數域解析力高的小波函數，小波分析的空間-波數解

析度示意在圖 2-3 顯示。而各小波之間具有自我相似性 (self-similarity) (Foufoula-Georgiou et al., 1994)，從母波開始變化成相似的小波，可表示如下：

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$a > 0; b \in R$$

$$R: \text{實數}$$

a 的絕對值大於 1 代表的是母波伸長後的小波，為長波長的分析視窗，反之則為母波壓縮後的短波長分析視窗；平移參數 b 的作用是使該小波函數從空間原點經過滑移而在空間軸上佈滿小波。參數 a 與 b 對小波圖形變換的影響見於圖 2-4。

小波分析的基本概念是將一原始信號分解成近似信號 (approximation signal) 與細節信號 (detail signal)，前者可比喻為低頻信號、後者為高頻信號。母波是可以透過平移與尺度參數來改變分析視窗的大小，其於小尺度時滑移過原信號而產生細節信號，剩下的成分便成為近似信號，使用經過延伸變換之後加大的母波對該近似信號再作一次滑移分析。直至分解的層數滿足公式

$$L = \log_2 N \quad (L \text{ 為可分解次數；} N \text{ 為採樣數量})$$

(Leblanc et al., 1998) 為止。此種多層次的分解分析過程即是前述的多層解析度，圖 2-5 為小波方法多層解析分解信號的示意圖。小波分析的優點在於同一段距離中，所使用的視窗寬度會依據採樣密

度作調整而不再只是使用固定的寬度，故初次分析時視窗最窄，由於已取出細節信號，視窗寬度會逐漸加大，直到所分析的信號未達該次的視窗寬度為止。

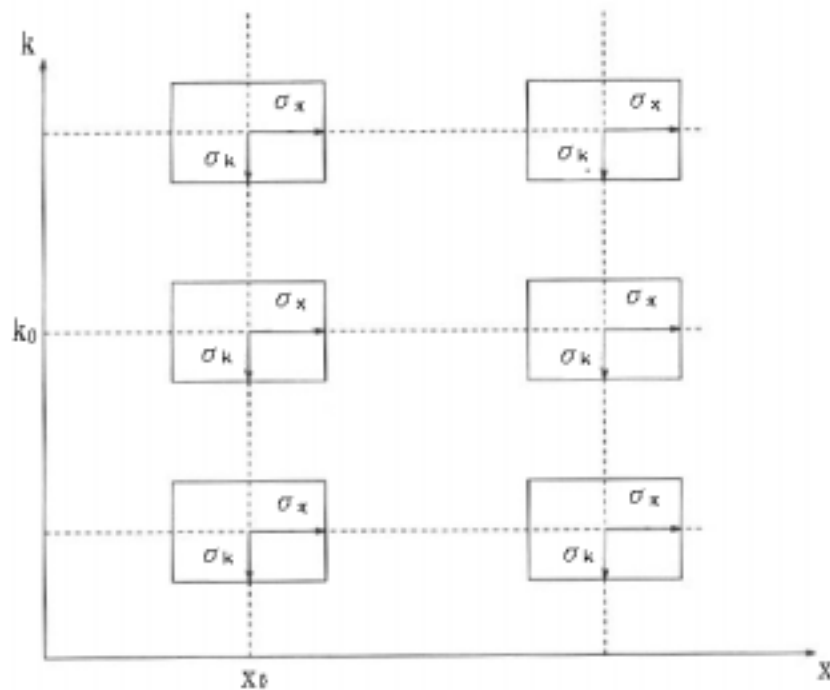


圖 2-1 加窗傅式轉換從空間域 (x) 至波數域 (k) 之解析度示意圖，改自 Fofoula-Georgiou et al. (1994)。 $2\sigma_x$ 為空間域上的分析視窗寬度，其對映到波數域的解析度為 $2\sigma_k$ 。不論在何處的空間位置，使用的分析視窗寬度皆固定；波數域亦相同。

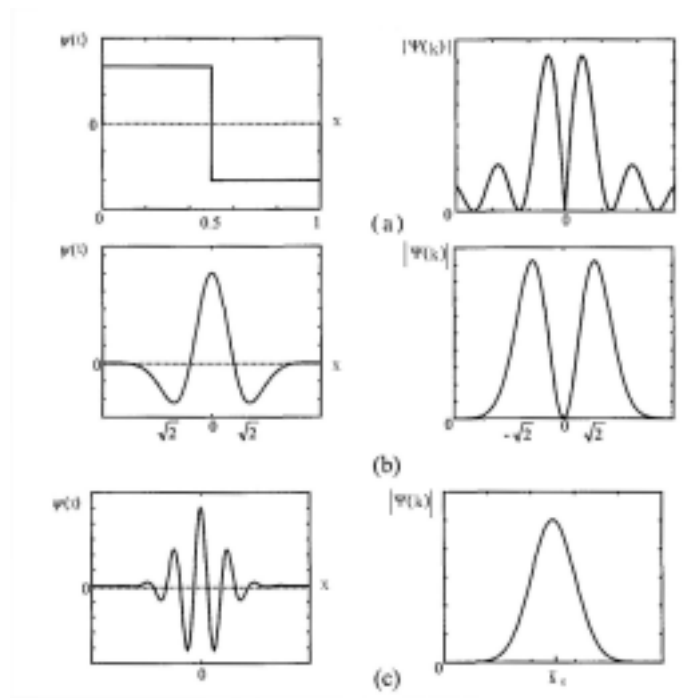


圖 2-2 文中所提之小波母函數圖形及其傅氏轉換圖形，摘自繆紹綱(1999)。(a) Haar 小波 (b) Mexican hat 小波 (c) Morlet 小波。三者的空間域中寬度有限、波數域中圍繞在一中間值，皆符合小波母波函數的要求。

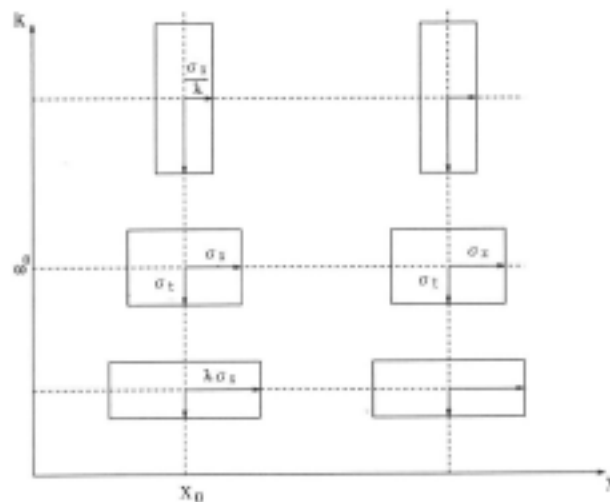


圖 2-3 小波分析之空間-波數解析度示意，改自 Foufoula-Georgiou et al. (1994)。當處理短波長信號時，使用較小寬度的空間視窗（最上方），反之，處理長波長信號時，使用較大寬度的空間視窗（最下方），因此小波分析有涵蓋不同程度解析需求的適應能力。

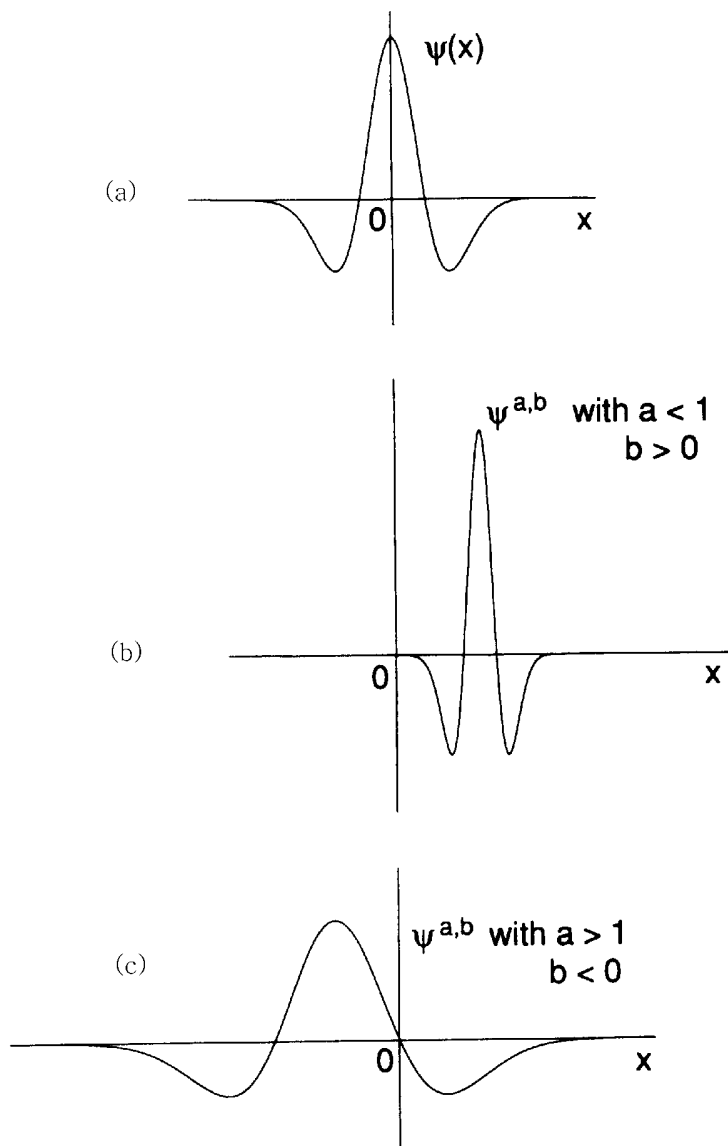


圖 2-4 平移參數 b 與延伸參數 a 在小波變化的作用，摘自 Daubechies (1992)。(a) 原始小波母波圖形。(b) a 小於 1、 b 大於 0 的母波。(c) a 大於 1、 b 小於 0 的母波。參數 a 決定小波的視窗寬度但不改變形狀比例，參數 b 決定小波的中心位置。

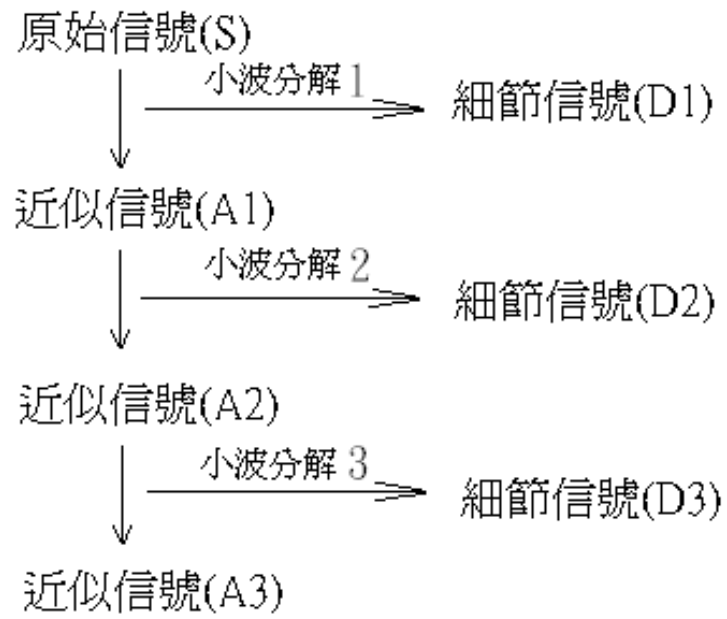


圖 2-5 小波多層解析信號分解的示意圖。取出細節信號(高通濾波)後,剩餘部份即為近似信號(低通濾波)。

2-2 一維信號小波轉換

在前述從母波經由尺度參數與平移參數可計算出一小波，假設信號 $f(x)$ 為平方可積分 (square integrable)，即

$$\int f^2(x)dx < \infty$$

則 $f(x)$ 的連續小波轉換 (continuous wavelet transform, CWT) 可表示為

$$CWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(x) \psi \left[\frac{x-b}{a} \right] dx$$

(Louis et al., 1997)，其中 $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right)$ 為小波基底函

數，與在傅氏轉換中的轉換核心： $\exp(-kx)$ 地位相當，並且若其滿

足條件 $\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$ ，則該小波轉換為可逆。

在實際運用上，離散形式的小波比較適合於電腦計算，小波轉換的離散形式為：

$$DWT(m, n) = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(a_0^{-m} x - nb_0) dx$$

(Debnath, 2002) 其中 $a = a_0^m, b = nb_0 a_0^m, m$ and $n \in Z$ 。

原始信號 S 通過兩個互補的濾波器後得到近似信號與細節信號，但如果完全按照濾波器進行運算，則得到的數據尺度將是原來數據的兩倍，為解決這個問題可以使用抽取的方法，即是濾波之後

每間隔一數據便捨棄掉一個 (Nguyen, 1997)，圖 2-6 為濾波與抽取後所得到的離散小波轉換係數。

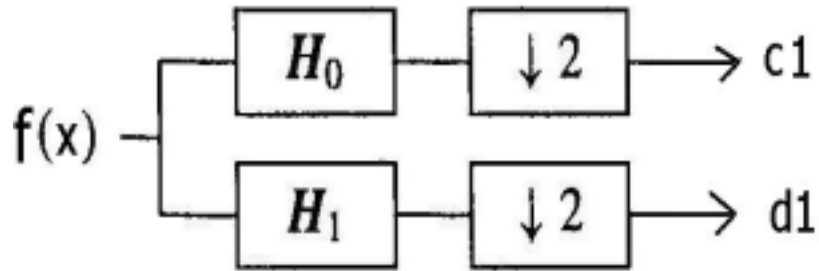


圖 2-6 一維單尺度小波分解信號濾波器示意圖，改自 Strang et al. (1997)。f(x)為原信號， H_0 與 H_1 為分頻濾波器組的係數， c_1 、 d_1 分別表示為小波近似與細節係數。圖中 $\boxed{\downarrow 2}$ 表示縮減取樣。

2-3 二維信號小波轉換

對於平面磁力資料的處理，必須擴展至二維的小波轉換，可由兩個一維模式的乘積來定義（紀凱屏, 2001），若 $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 分別表示一維尺度函數與小波函數，則二維尺度函數與 x 、 y 、 xy 三個方向上的小波函數定義如下：

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

$$\psi^1(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

$$\psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y)$$

$$\psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

此時可透過相對應的濾波器來實現二維離散小波轉換是比較簡單又有效率（繆紹鋼，2003），將原先對一維信號的濾波器分別用於二維信號的行與列，如圖 2-7 所示。

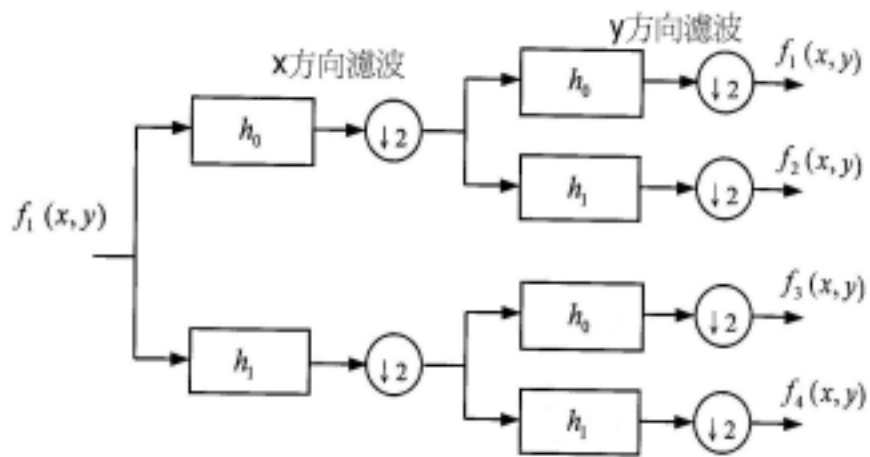


圖 2-7 二維單尺度小波分解信號濾波器示意圖，改自紀凱屏等

（2002）。 $f(x, y)$ 為原信號， h_0 與 h_1 為分頻濾波器組的係數， f_1, f_2, f_3, f_4 分別為分解後信號成分。圖中 $\downarrow 2$ 表示縮減取樣（downsampling）。