

蔡淑君、許慧玉、鄭英豪、陳建誠（2020）。

拖曳對國小生理解四邊形包含關係之研究。

臺灣數學教育期刊，7（1），27-54。

doi: 10.6278/tjme.202004\_7(1).003

## 拖曳對國小生理解四邊形包含關係之研究

蔡淑君<sup>1</sup> 許慧玉<sup>2</sup> 鄭英豪<sup>3</sup> 陳建誠<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 國立科學園區實驗高級中學國小部

<sup>2</sup> 國立清華大學數理教育研究所

<sup>3</sup> 臺北市立大學數學系

<sup>4</sup> 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

本研究旨在探討動態幾何環境之拖曳行為如何影響學生理解不同四邊形間的包含關係。從三位五年級學生個案資料分析得知：第一，即使學生能在紙筆測驗正確回答四邊形定義，動態幾何環境圖形的呈現方式仍會改變他們對於定義的想法。第二，從分析學生在動態幾何環境拖曳，區別出六種不同認知行為和思維類別：（1）認為拖曳無法窮盡各種圖形；（2）關注圖形外觀；（3）微幅調度；（4）以特定性質為目標；（5）結合表格分析策略；（6）從一般例到特例。不同拖曳行會影響學生後續是否成功建構四邊形的包含關係。第三，研究提出學生不同判定四邊形關係的思維模式，包括分類思維、交集思維和包含思維。依據研究結果，本文進一步提出動態幾何環境拖曳和包含關係的研究和教學相關建議。

**關鍵字：**四邊形、包含關係、幾何性質、動態幾何環境

---

通訊作者：許慧玉，e-mail：[huiyus@mail.nd.nthu.edu.tw](mailto:huiyus@mail.nd.nthu.edu.tw)

收稿：2020年3月13日；

接受刊登：2020年4月9日。

Tsai, S. C., Hsu, H. Y., Cheng, Y. H. & Chen, J. C. (2020).

A study of dragging in dynamic geometry environment in developing elementary school students' understanding of inclusive relationships among quadrilaterals.

*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 7(1), 27-54.

doi: 10.6278/tjme.202004\_7(1).003

## **A study of Dragging in Dynamic Geometry Environment in Developing Elementary School Students' Understanding of Inclusive Relationships among Quadrilaterals**

Shu-Chun Tsai<sup>1</sup>   Hui-Yu Hsu<sup>2</sup>   Ying-Hao Cheng<sup>3</sup>   Jian-Cheng Chen<sup>4</sup>

<sup>1</sup> National Experimental High School at Hsinchu Science Park

<sup>2</sup> Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

<sup>3</sup> Department of Mathematics, University of Taipei

<sup>4</sup> Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

This study investigated how dragging in a Dynamic geometry environment (DGE) influences fifth graders in understanding inclusive relationships among quadrilaterals. We selected students who correctly recalled quadrilateral definitions but did not understand inclusive relationships. An analysis revealed that the diagrams in the DGE influenced students' responses to quadrilateral definitions, indicating that their concept definitions of the quadrilaterals are not stable. Six types of student cognitive behaviors associated with dragging in the DGE were identified. First, students could not understand that dragging can help them find all diagram examples constructed based on certain geometric properties. Second, students may only focus on diagram outlooks when dragging. Third, students may slightly drag vertices or segments to avoid big diagram changes. Fourth, students may focus on what diagrams they intended to drag without noticing the dragging process. Fifth, students may only use data shown in table to evaluate inclusive relationships. Sixth, students can notice generalization and specification in various dynamic examples. Additionally, the types of student evaluations on relationships between quadrilaterals were recognized. They were evaluations based on classification, intersection, and inclusive relationship. Implications and suggestions for research and practices about the use of dragging to learn inclusive relationships are proposed.

**Keywords:** quadrilateral, inclusive relationship, geometric properties, Dynamic Geometry Environment (DGE)

---

Corresponding author : Hui-Yu Hsu , e-mail : [huiyus@mail.nd.nthu.edu.tw](mailto:huiyus@mail.nd.nthu.edu.tw)

Received : 13 March 2020;

Accepted : 9 April 2020.

## 壹、緒論

包含關係是理解數學系統結構的重要推理能力之一。包含關係為一系列定理及性質層次結構化後所形成的集合關係。de Villiers (1986) 提出兩種數學建立公理化 (axiomatization) 方式。一是建設性公理化系統 (constructive axiomatization)，其意指將一系列定理藉由刪除、一般化、置換或是外加來調整公理系統。公理系統建構是依據邏輯演繹，其也可創建新數學定理和性質 (如：非歐幾何系統的建立)。二是描述式公理化 (descriptive axiomatization)。其從一系列已存在的公理中選出某些公理為集合元素，建構之間的邏輯關係。選擇的公理為邏輯推導起點，可重構剩餘公理之間關係，完成公理系統建構。依據公理化系統建構思維，性質和定理間在不同前提下，會形成不同數學關係 (如：等價、相互排斥，部分交集等)。包含關係則為集合和子集合之間的關係。de Villiers (1994) 之後進一步區分不同包含關係的分類模式：建構式分類 (constructive classifications) 和描述式分類 (descriptive classification)。建構式分類為一般化和特殊化的數學歷程來產生新的數學概念。一般化指一個概念的某些性質被刪除，形成更一般化的歷程。特殊化則是增加新性質或是取代某些原有性質而形成一個新概念的歷程。描述性分類為檢測既有概念後，才進行概念分類推理。因此，描述性分類為從已知一系列性質中，選擇某些性質以建構包含關係或區別關係。

上述可知，四邊形包含關係理解含括兩個面向：四邊形定義與性質理解及邏輯關係的推導能力。教育部 (2018) 的 12 年國民基本教育數學領域，國小階段強調四邊形定義和性質的認識。以操作型方式認識四邊形的定義與性質。國中階段放在探討四邊形定義與相關性質的推論關係。高中階段則是認識命題、邏輯和集合。換言之，台灣 12 年國教數學課程是在高中階段才以集合為基礎，介紹包含關係。雖數學課程如此安排，國外許多研究者仍試圖以科技媒介輔助來鷹架年紀較小學生學習幾何包含關係。其中，最常被使用的科技媒介為動態幾何環境 (dynamic geometry environment, DGE)。動態幾何環境因其提供另外學習路徑的可能性 (如：以探究和臆測來檢驗幾何性質之間的關連性)，被視為可改變學校幾何教與學派典的重要催化劑 (Leung, 2008)。研究也紛紛指出科技媒體介入能有效幫助國小生理解幾何包含關係 (Bartolini Bussi & Baccaglini-Frank, 2015; Kaur, 2015; Leung, 2008)。但學生如何與科技媒介互動，並藉由其幫助理解包含關係仍須進一步探討。

基於此，本研究選擇國小五年級，以個案方式探討學生如何與動態幾何軟體互動，並理解四邊形間的包含關係。五年級學生已在四年級時學習過正方形、長方形、菱形、平行四邊形的定義。我們選取能正確回答定義，但包含關係錯誤的學生，以深入瞭解動態幾何軟體如何影響理解包含關係的學習歷程。研究問題為：

- (一) 動態幾何環境是否影響學生四邊形的定義說明？
- (二) 學生與動態幾何環境互動的認知特徵為何？
- (三) 動態幾何互動經驗如何影響學生包含關係的認知？

## 貳、理論架構與文獻探討

### 一、幾何定義與包含關係的理論與研究

幾何包含關係理解包括幾何定義與性質的理解，及邏輯推導能力。許多研究指出學習幾何定義的認知困難（如：Lin & Yang, 2002）。其原因之一在於幾何圖形心象的建構式是否完整。Tall 與 Vinner（1981）提出的概念定義（concept definition）和概念心像（concept image）來描述概念的建構不同面向的整合。概念定義意旨描述概念所使用的文字內涵；而概念心象則是與這個概念所有有關的認知結構。因此，發展學生幾何定義的概念，多元的概念心象建構是關鍵。Fischbein（1993）則是從圖形來論述其認知意義。Fischbein 提出圖形概念（figural concept），認為幾何圖形本身具備兩種不同意義：一為概念性質；另一為知覺性質。概念性質是由幾何性質來理解圖形意義；而知覺性質則由圖形外觀來形成幾何判別標準。因此，知覺性質偏向圖形直觀判別，概念性質則是能將幾何圖形抽象化的能力。Fischbein 與 Nachlieli（1998）指出數學能力好學生較能克服圖形和直觀與幾何性質產生的認知衝突。基於上述兩個理論，Fujita 與 Jones（2007）則是提出個人圖形概念（personal figural concepts）來統包個人對於定義與包含關係不同的圖形概念心象，而當學生能夠從性質出發來理解概念時，學生就形成了正式圖形概念（formal figural concept）。Walcott、Mohr 與 Kastberg（2009）則是提出動態圖形概念（dynamic figural concept），其意旨學生能藉由動態化的操作心像而理解幾何圖形概念的能力。研究指出學生四邊形定義理解是有問題的。Fujita 與 Jones（2007）以開放性問卷研究蘇格蘭大一師培生發現四邊形定義的答對率均偏低（正方形 38%；長方形 21.5%；平行四邊形 58.9%；梯形 12%）。范力分（2017）以開放性問卷研究台灣五年級學生也得到類似的研究結果（正方形 51%；長方形 46%；菱形 38%；平行四邊形 34%）。范力分也發現有相當高比例學生只能定義的部分性質（如：38% 學生認為正方形定義為四邊等長）。學生並不理解幾何性質對於四邊形定義的關係為何。若學生無法理解定義，他們就無法進階學習四邊形之間包含關係。

幾何包含關係理解方面，Fujita 與 Jones（2007）以 van Hiele 幾何認知模式為基礎，根據學生問卷表現，將包含關係的理解區分為五個層次。一為視覺層次，意旨學生根據具體例子來辨識幾何形體。層次二為描述/分析層次，意旨學生根據性質來辨識幾何形體。層次三為抽象/關連/非形式化演繹層次，意旨學生辨識不同幾何形體之間的關係，並建構簡單邏輯關係。層次四為形式化演繹層次，意旨學生能理解邏輯演繹。層次五則是嚴密/後設數學化，意旨學生能夠理解

幾何定理所建立的系統。Fujita 與 Jones 建構包含關係理解層次含括幾何性質與定義理解、圖形概念定義理解，及包含關係推理能力的建立。實徵研究方面，Fujita 與 Jones 指出蘇格蘭師培生四邊形包含關係的理解表現也偏差（12.8%能知道正方形是長方形；8.9%知道正方形是梯形；18.4%知道平行四邊形是梯形）。蔡淑君（2017）則是分析四邊形定義回答正確的五年級學生包含關係的表現，發現知道四邊形之間包含關係及理由的學生比例非常低（正方形和長方形 6%；正方形與菱形 9%；長方形與平行四邊形 4%；菱形與平行四邊形 8%）。

## 二、科技媒介幫助幾何性質與包含關係學習相關研究

科技媒介可提供學生觀察及歸納幾何圖形變與不變的性質特徵（Laborde, 2005）。利用科技媒介幫助學生瞭解幾何定義及包含關係的教學策略大致可分為兩類。一是讓學生經驗幾何性質形成歷程，並藉由操作歷程與圖形的對應來察覺幾何定義之間的包含關係。Bartolini Bussi 與 Baccaglioni-Frank（2015）設計 4 個月教學活動，以一年級為對象，利用機器人程式語言讓學生瞭解正方形和長方形定義，並使用自己語言來描述兩個四邊形的包含關係。研究結果指出這樣的教學介入是有效的，且可避開知覺經驗與幾何定義學習常出現的認知衝突（Kaur, 2015）。

第二種教學介入是藉由動態幾何環境的拖曳來幫助學生觀察幾何性質的變與不變性，進而理解性質之間的包含關係。Arzarello、Olivero、Paola 與 Robutti（2002）提出拖曳行為具備認知功能，可幫助學生整合圖形與定義性質意義。Arzarello 等人（2002）也提出有意圖性拖曳的重要性，其才可以理解圖形拖曳所對應的幾何意義。他們依據學生操作動態幾何環境的行為分析，根據不同的目標將區分出七種不同拖曳類別。包含無目標、隨機性的徘徊拖曳（wondering dragging）；已經與某個物件做連結的邊界拖曳（bound dragging）；為了形成特殊圖形的引導拖曳（guided dragging）；為了保持某個性質而在事先知覺的路徑拖曳的擬軌跡拖曳（dummy locus dragging）；為維持圖形規律的線段拖曳（line dragging）；拖曳某個點到圖形上的連結拖曳（linked dragging）；以及檢測圖形是否可保有原性質的拖曳檢驗（dragging test）。Baccaglioni-Frank 與 Mariotti（2010）針對擬軌跡拖曳，進一步提出維持拖曳基模（maintaining dragging）的概念。他們認為維持拖曳不同於擬軌跡拖曳之處在於維持拖曳的拖曳軌跡不一定是沿著預先知道的路徑進行拖曳。

鄭英豪、陳建誠與許慧玉（2017）則是認知到拖曳不一定能順利幫助學生臆測及理解幾何性質，而提出將動態幾何環境當成「例子產生器」概念。目的是輔以表格數據觀察，幫助學生理解拖曳對應到的幾何性質。多位學者已證實拖曳能有效幫助學生理解幾何包含關係。如：Kaur（2015）利用 Sketchpad 拖曳功能，幫助低年級學生理解一般三角形、等腰三角形和正三角形之間包含關係。Leung（2008）以 SmartBoard 鷹架四年級學生理解四邊形之間包含關係。

雖文獻指出拖曳可鷹架學生觀察圖形變化，瞭解幾何定義與包含關係，但從拖曳來理解定義與包含關係是一個相當複雜的認知歷程。表 1 為選取南一（李源順，2019）和康軒（楊瑞智，2019）四年級教科書四邊形的定義整理。由表 1 可看出版本之間四邊形定義差異性不大，且定義含括的性質均可藉由操作而辨識出。如：正方形定義為四邊等長且四角都是直角的四邊形。課本會提供學生測量正方形四條邊、辨識正方形四角為直角的教學活動。但四邊形之間包含關係的理解不但需要學生理解四邊形的定義，且必須知道決定四邊形集合的幾何性質為何，並知道什麼性質的一般化與特殊化決定四邊形的包含關係。

表 1

教科書四邊形定義整理

	南一	康軒
正方形	四邊等長且四個角都是直角的四邊形	四個邊都等長且四個角都是直角的四邊形
長方形	兩雙對邊等長且四個角都是直角的四邊形	兩雙對邊等長且四個角都是直角的四邊形
菱形	四個邊都等長的四邊形	四個邊都等長的四邊形
平行四邊形	兩雙對邊互相平行的四邊形	兩雙對邊互相平行的四邊形

表 2 為從四邊形定義轉換到包含關係判定的分析整理表。以長方形和正方形的包含關係為例，建構兩個四邊形集合的性質為四角都是直角性質。在此條件下，學生必須進而瞭解兩組對邊等長與四邊等長的包含關係。拖曳則是讓學生觀察到長方形兩組對邊等長（一般例）與正方形四邊等長（特例）之間的關係。不同四邊形的包含關係，所需理解的集合性質與決定包含關係的性質就會不同。換言之，動態幾何環境拖曳活動中，學生必須知覺拖曳對於四邊形定義的影響，也必須瞭解拖曳所形成一般例與特例的關係；才能夠在動態幾何環境中習得包含關係。

表 2

四邊形包含關係整理表

四邊形	集合建構的幾何性質	決定包含關係的幾何性質
長方形與正方形	四角為直角	長方形（一般例）：兩組對邊等長 正方形（特例）：四邊等長
菱形與正方形	四邊等長	菱形（一般例）：對角相等 正方形（特例）：四角為直角
平行四邊形與長方形	對邊平行	平行四邊形（一般例）：對角相等 長方形（特例）：四角為直角
平行四邊形與菱形	對邊平行	平行四邊形（一般例）：兩組對邊等長 菱形（特例）：四邊等長

## 參、研究方法

### 一、研究工具

本研究使用的研究工具包括篩選學生的前測卷、動態幾何環境（DGE）拖曳設計及後測問卷。

#### （一）前測與後測問卷

本研究前測與後測問卷完全相同。問卷第一部分是瞭解學生對正方形、長方形、菱形、平行四邊形的定義理解。題目範例如下：

- 請寫出正方形的定義？

第二部分是瞭解學生對正方形與長方形、正方形與菱形、長方形與平行四邊形、菱形與平行四邊形之間包含關係的理解。學生要判斷兩種四邊形的包含關係，並說明其包含關係的理由。題目範例如下：

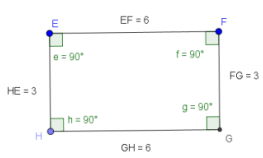
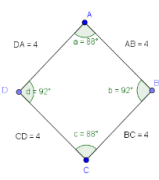
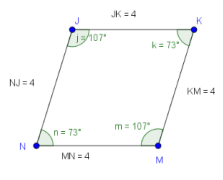
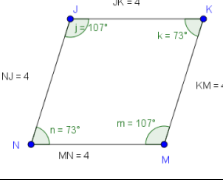
- 正方形是不是菱形的一種？理由為何？
- 菱形是不是正方形的一種？理由為何？

#### （二）動態幾何環境拖曳設計

在動態幾何環境中提供給學生的圖例是四邊形的一般例，其邊長和角度之測量值均會標示。四邊形均有其作圖條件限制，希望學生可藉由拖曳的圖形改變，觀察到一般例和特例，進而理解四邊形間的包含關係。以探究正方形和長方形的包含關係為例，動態幾何環境會提供學生一個典型心象的長方形。其圖形的作圖條件是四直角，無論如何拖曳，均不會改變四直角的性質。學生藉由拖曳可以改變長方形的邊長、方位等，並藉由拖曳找到四角直角且四邊等長之特例一

正方形（如表 3）。

**表 3**  
四個拖曳設計分析

動態幾何環境			
給定的圖形	作圖條件	拖曳操作	特例
長方形 	四個直角	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 可改邊長長短</li> <li>● 可旋轉方位</li> </ul>	四個直角 且具四邊等長之正方形
菱形 	四邊等長	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 可改內角角度</li> <li>● 可旋轉方位</li> <li>● 可改邊長長短</li> </ul>	四邊等長 且具四個直角之正方形
平行四邊形 	兩雙對邊平行	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 可旋轉方位</li> <li>● 可改邊長長短</li> <li>● 可改內角角度</li> </ul>	兩雙對邊平行 且具四個直角之長方形
平行四邊形 	兩雙對邊平行	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 可旋轉方位</li> <li>● 可改邊長長短</li> <li>● 可改內角角度</li> </ul>	兩雙對邊平行 且具四邊等長之菱形

從拖曳的認知行為來說，因為動態幾何環境圖形是依據四邊形定義所繪製，學生基本上只能進行邊界拖曳，也就是無論如何拖曳均符合這個四邊形的定義。但學生可以為了形成某一種特殊圖形而進行引導拖曳；為了保持某個性質而在事先知覺的路徑進行擬軌跡拖曳（dummy locus dragging）；或者是為了檢測圖形是否可保有原性質，而進行拖曳檢驗（dragging test）。

除了動態幾何環境拖曳外，為確保學生能有系統性的觀察例子間的關係，我們同時提供學生表格記錄（如圖 1），再藉由觀察表內各項測量數值，並填入圖形特徵以進行判別，協助學生覺察各個圖例的共通性與特殊性，讓學生不會只侷限於視覺上的判別。

圖形	AB 長度	BC 長度	CD 長度	DA 長度	角 a 度數	角 b 度數	角 c 度數	角 d 度數	四邊 是否 等長	四角 是否 直角	哪種 四邊 形
原圖											
拉動第一次											
拉動第二次											
拉動第三次											
拉動第四次											

圖 1 表格記錄

## 二、研究對象

以研究者所在地—新竹市某學校五年級全部七個班的學童，發下問卷調查，回收 149 份。並從中選定於前測卷能正確回答四邊形定義，但無法正確判別兩四邊形間包含關係的三位學生。所謂的定義回答正確為學生描述的性質答案能確保形成目標的四邊形即可，並不一定是符合數學上的最簡定義。舉例說明：國小階段定義長方形為對邊等長且具有四直角之四邊形；但其最簡定義為四角為直角的四邊形。另一方面，學生也可能在定義上額外增加正確的性質。例如：平行四邊形在國小階段定義為兩雙對邊平行、對邊相等、對角相等；但其最簡定義為兩雙對邊平行的四邊形。

此三位個案學生分別以小熙、小冠、小凡來代稱。小熙能充分表達自己想法，會思考並詢問不懂之處，學習態度較為消極被動，數學成績中等。小冠學習認真，但較不表達自己想法與也不提問，數學成績中上。小凡能充分表達自己想法，並詢問不懂之處，學習態度一般，數學成績中上。

## 三、實施流程及資料分析

研究流程方面，個案學生先單獨完成前測卷內容。之後經研究者說明動態幾何環境操作後，請學生說明動態幾何環境給定的圖形是哪一種四邊形，並敘明判斷理由。完成後，個案學生可在有作圖條件下的拖曳檔案中自由拖曳，如何拖曳及停止圖形拖曳由學生自行決定。停止拖曳後，學生需觀察拖曳後的圖形並將測量值記錄在表格上，再完成後測問卷上四邊形定義及包含關係問題。當學生觀察這些在作圖條件底下所建構不同圖例後，會經由這些圖形的共通性、差異性以及對包含關係的概念來當作判別四邊形間包含關係問卷上的依據。整個研究流程中，第一作者在旁觀察學生回答問卷以及在動態幾何環境中拖曳的歷程。研究者沒有提供任何的教學鷹架，只會請學生說明回答問卷和操作動態幾何環境的背後想法。當學生完成前後測及拖曳後，再接受訪談。訪談重點包括（1）不同四邊形圖形拖曳背後的想法；（2）學生在動態幾何環境觀

察四邊形圖形變化的重點為何；(3) 動態幾何拖曳如何影響學生決定四邊形定義及判定四邊形包含關係。

資料分析方面，研究者整理三位個案學生在前後測問卷回答四種四邊形的定義、圖形判別及判定理由以及四邊形包含關係的判定與判定理由。我們比較三位個案學生前測卷與動態幾何環境給定圖形性質說明的差異性，以及前測與後測問卷的差異性。這兩份資料比較可讓我們瞭解個案學生四邊形的定義是否會因為給定圖形的變化以及動態幾何環境的拖曳而有所改變。另外，動態幾何環境圖形拖曳歷程以及訪談皆有錄影、錄音以及螢幕錄影。螢幕錄影能呈現個案學生拖曳過程，搭配後測問卷和訪談錄音對話，以說明個案學生判別四邊形間包含關係的想法。所有研究者與個案學生的對話內容皆轉成逐字稿。我們藉由質性紮根理論 (Birks & Mills, 2011; Carspecken & Apple, 1992)，區辨出不同動態幾何環境拖曳操作與表格觀察的子類型，並整合訪談資料理解不同子類型對於學生理解四邊形包含關係的想法。

## 肆、結果與討論

### 一、四種四邊形定義回答分析

#### (一) 前測卷分析

表 4 為學生在前測對四邊形定義之描述，三人對菱形與正方形的定義描述一致且完整；在長方形定義描述上，小熙、小冠少了對邊等長的條件；平行四邊形定義描述是小熙最完整，還多了對邊、對角相等的性質，小凡以對邊等長取代對邊平行之描述；小熙、小冠對於長方形的定義雖未提及對邊等長，但在四邊形中，只要具四直角，必為長方形，故以正確論之。小熙對平行四邊形定義描述最完整，不僅有兩雙對邊平行，還包含操作型定義之描述。小冠雖只描述平行四邊形為對邊平行，但從言談與四邊形包含關係的文字描述中，能發現其指的是兩雙對邊平行，故將其判定為正確描述。小凡的情形與小冠同。由於在四邊形中只要有兩雙對邊等長之性質，則兩雙對邊必平行，故將此回答歸為正確定義描述。

表 4

前測卷上四種四邊形定義回答

四邊形	小熙	小冠	小凡
菱形	四邊等長	四邊等長	四邊等長
正方形	四邊等長、四個直角	四邊等長、四個直角	四邊等長、四個直角
長方形	四個直角	四個直角	四個直角、對邊等長
平行四邊形	兩雙對邊平行、相等， 對角相等	對邊平行	對邊等長

## (二) 拖曳前與前測卷比較分析

前測請學生寫出四邊形的定義，進行動態幾何環境拖曳前，學生需先判定給定的圖形及判別理由。由表 5 可知三位學生在拖曳前的圖形判別理由與前測卷答案皆有變動，顯示學生判別圖形時，可能受到視覺影響或關注的性質特徵而調整其定義，非從四邊形定義進行條件限制之篩選。由於學生對定義的理解是由各特殊四邊形的性質堆砌而成，並不了解性質間與定義之關聯，當學生關注眼前圖形與邊、角測量值時，即從中抽取相關性質進行判別。當關注的邊、角特徵非該四邊形之關鍵性質時，便會產生變動。三位學生對平行四邊形的定義理解變動最大，顯示對其定義最薄弱；其次為長方形，易與平行四邊形混淆，或是增加兩邊不能等長的條件限制；再者為菱形，在判別圖形時，是學生最少提取的四邊形；最後則為正方形，雖對正方形的觀念最穩固，但在判別時卻易疏忽需具四直角的性質。小熙對長方形與菱形的定義理解不夠穩固，只觀察圖形便改變對四邊形定義之理解。由表 5 可知他並未以前測卷的定義作為判別依據，只關注到圖(A)的對角相等；對菱形的定義為四邊等長，卻將圖(B)判別為長方形，判別理由是對角相等；對平行四邊形的定義為兩雙對邊平行、相等，對角相等，但判別圖(C)時變動為對邊等長。由此可知小熙可能不是以定義作為判別圖形依據，而是根據視覺化與所關注的邊、角為理由。

小冠判別圖(A)為長方形的理由除了四直角外，還增添對邊等長之性質；對菱形的定義為四邊等長，卻將圖(B)判別為正方形，顯示小冠在判別正方形時，遺漏了需具有四個直角的性質；對平行四邊形的定義為兩雙對邊平行，判別圖(C)為平行四邊形的理由是對邊平行、對角相等。顯示小冠在判別平行四邊形時，因關注圖形上的測量值而增添對角相等的性質。由此可知小冠在判別圖形時可能會因所關注的性質而有所調整。

小凡對長方形的定義為四直角。判別圖(A)為長方形的理由增添對邊等長及兩組對邊長度不同的條件限制；小凡發覺圖(B)有四邊等長的特徵時，將其判別為正方形而非菱形，遺漏了正方形需有四個直角的性質；對平行四邊形的定義為對邊等長，判別圖(C)為平行四邊形的理由是對邊不一定等長、角度不一樣。小凡將鳶形與平行四邊形混淆，即使圖形上的對邊、對角相等，仍相信自己的信念，認為此圖只是其中一個平行四邊形，還有其他對邊不同的平行四邊形。顯示小凡對於長方形與平行四邊形的定義理解不夠穩固。只觀察圖形，便改變四邊形定義之理解。

表 5

拖曳歷程相關彙整表

學生	長方形與正方形 拖曳歷程	菱形與正方形 拖曳歷程	平行四邊形與 長方形拖曳歷程	平行四邊形與 菱形拖曳歷程
	(A) 長方形	(B) 菱形	(C) 平行四邊形	(C) 平行四邊形
圖檔				
前測卷上 四邊形定義	長方形：四個直角	菱形：四邊等長 正方形：四邊等長、四個直角	平行四邊形：兩雙對邊平行、相等，對角相等	菱形：四邊等長
拖曳後 四邊形定義	長方形： 對邊相同、對角相同	正方形： 四邊等長、四個直角	平行四邊形： 對角相等、對邊相等	菱形： 對邊相等
判別圖形名稱	長方形	長方形	平行四邊形	平行四邊形
小 判別理由	對角相等、對邊相等	對角相同	對邊相等	對邊相等
拖曳關注之性質	對角相等、對邊相等	對角相同	對邊相等、直角	對邊相等
包含關係 之判別性質	對邊相同、對角相同	無描寫出性質，以正方形換個角度看就是菱形的視覺化描述判別	對角相等、對邊相等	菱形有多種變化
是否拖曳出特例	否	否	有	否

(續下頁)

表 5 (續)

學 生	長方形與正方形 拖曳歷程	菱形與正方形 拖曳歷程	平行四邊形與 長方形拖曳歷程	平行四邊形與 菱形拖曳歷程
前測卷上 四邊形定義	長方形：四個直 角	菱形：四邊等長 正方形：四邊等 長、四個直角	平行四邊形：對 邊平行	菱形：四邊等長
拖曳後 四邊形定義	長方形： 四個直角、 對邊等長	正方形： 四邊等長、 四個直角	平行四邊形： 對邊、對角相等、 角度不能為九十 度	菱形： 四邊等長
小 冠				
判別圖形名稱	長方形	正方形	平行四邊形	平行四邊形
判別理由	四個直角、 對邊相等	四邊等長	對邊、對角相等 平行	對邊、對角相等 平行
拖曳關注之性質	四個直角、對邊 相等	四邊等長，填表格 才開始關注直角	對邊、對角相等、 直角	對邊、對角相等、 直角
包含關係 之判別性質	四邊等長	四邊等長	對邊、直角	對邊相等
是否拖曳出特例	有	有	有	否
前測卷上 四邊形定義	長方形：四個直 角、對邊等長	菱形：四邊等長 正方形：四邊等 長、四個直角	平行四邊形：對 邊等長	菱形：四邊等長
拖曳後 四邊形定義	長方形： 四個直角、 對邊等長	正方形： 四邊等長、 四個直角	平行四邊形： 對邊不一定等 長、對角相等	菱形： 四邊等長、 對角相等
小 凡				
判別圖形名稱	長方形	正方形	平行四邊形	平行四邊形
判別理由	四個直角、對邊 等長、兩組對邊 長度不同	四邊等長	對邊不一定等 長、角度不一樣	對邊不一定等 長、角度不一樣
拖曳關注之性質	對邊、直角	四邊等長，填表格 才開始關注直角	對邊、對角、直角	對邊、對角
包含關係 之判別性質	沒有使用性質， 用拖曳描述判別	直角，用拖曳描 述	直角，用拖曳描 述	沒有使用性質用 拖曳描述判別，
是否拖曳出特例	有	否	有	否

## 二、動態幾何環境拖曳分析

從觀察三位學生在動態幾何環境中進行四組四邊形間包含關係的拖曳行為分析中，我們觀察學生如何知覺動態幾何環境中的圖形、不同拖曳的認知行為和思維策略，以及學生如何整合表格，來理解四邊形的包含關係。我們尤其關注哪些四邊形的幾何性質以形成兩四邊形的關係，且在哪些幾何性質下，這些關係能形成一般化和特殊化。

學生六種不同拖曳認知行為或思維策略包括：(1) 認為拖曳無法窮盡各種圖形；(2) 關注圖形外觀；(3) 微幅調度；(4) 以特定性質為目標；(5) 結合表格分析；(6) 從一般例到特例。以下就個案學生之拖曳行為進行具體範例解說。

(1) 認為拖曳無法窮盡各種圖形：學生能嘗試拖曳出多樣化的四邊形，但認為動態幾何軟體無法窮盡所有圖形。比如長方形的檔案設計為無論如何拖曳必有四直角，學生也承認在此檔案拖曳出的四邊形皆為長方形，但有些長方形不需具四直角，只要對角相等即可，只是拖曳不出此圖形。

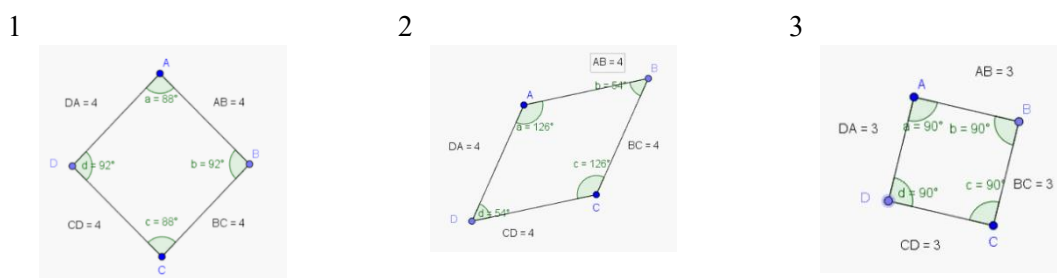


圖 2 小冠拖曳四邊等長之一般例至四個直角特例的動態歷程

在拖曳歷程中，小冠發現無論如何拖曳，圖形四邊皆等長，無法讓其中一邊與其他邊不等長，也在表格中填入四邊等長，但他仍認為有些菱形的四邊不等長，只是此檔案無法拖曳形成（如圖 2）。在訪談的過程中發現，小冠把菱形誤認為菱形定義，所以有些菱形四邊等長，但有些則否。由此發現，即使本研究限制了給定的圖形及作圖條件（四邊等長），還是無法幫助學生理解四邊形定義。若學生不相信動態幾何軟體，想藉此學會四邊形包含關係之機會不高。除非學生能關注圖形之性質並拖曳出與自己認知有所衝突的圖例，才有機會澄清錯誤的定義理解，也才能學會四邊形包含關係。

(2) 關注圖形外觀：學生在拖曳過程中只關注整個圖形的外觀，而非關注邊、角性質之改變。此策略通常出現在學生心中已有特定想拖曳出的圖形。比如說學生從長方形拖曳至正方形過程中，只觀察兩圖形外觀的變化，也就是長方形壓扁即為正方形，非關注對邊等長、四邊等長或四個直角等性質。

由圖 3 可知，小凡在拖曳過程中傾向拖曳出四邊等長的四邊形，且圖形方位與正方形典型心象一致，顯示小凡只是將心中圖形拖曳出來。且小凡認為長方形壓扁即為正方形，故長方形是正方形之一種；正方形拉長即為長方形，故正方形是長方形之一種。小凡的包含關係判別理由是以視覺化描述圖形外觀之改變，非整個拖曳歷程與邊、角性質之變化。對於此類學生可讓他們先關注圖形的邊、角性質，才有機會進入四邊形的包含關係學習。

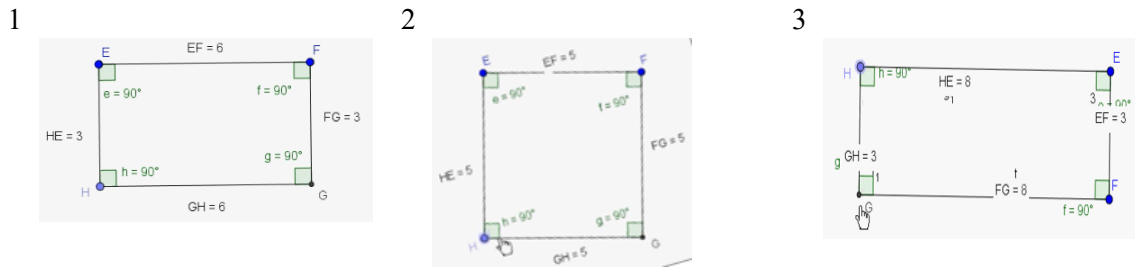


圖 3 小凡拖曳對邊等長之一般例至四邊等長特例的動態歷程

(3) 微幅調度：學生在拖曳過程中皆微幅拖曳，與原始圖檔的形狀雷同，少有多樣化的例子，且皆拖曳出同一種四邊形。比如一開始的圖檔為扁長之長方形，學生也都拖曳出扁長的長方形，長度只有些微改變，甚至只改變其中一邊。

由圖 4 拖曳過程發現小熙並無拖曳出多樣化的菱形，無論大小、角度、方位皆相似，顯示小熙在心中並無其他臆測想藉由拖曳證實。所以即使小熙將邊、角都填入拖曳記錄表中，也回答了是否四邊等長，還是沒有成功引發他調整有關於邊的性質條件，將圖 4 中每一個拖曳出的四邊形皆判定為長方形，因為這些圖形的對角相等。由此可知若學生無任何臆測想法，且拖曳行為只微幅調動，便無機會從一般例中拖曳出特例，當無法拖曳出與關注性質相異之圖形時，便不會改變其關注之性質。此類拖曳行為之學生可能因錯誤的定義理解導致錯誤的包含關係判別，若能以四邊形定義再搭配認知衝突之圖例，也許有機會能更瞭解四邊形定義，進而理解四邊形包含關係。

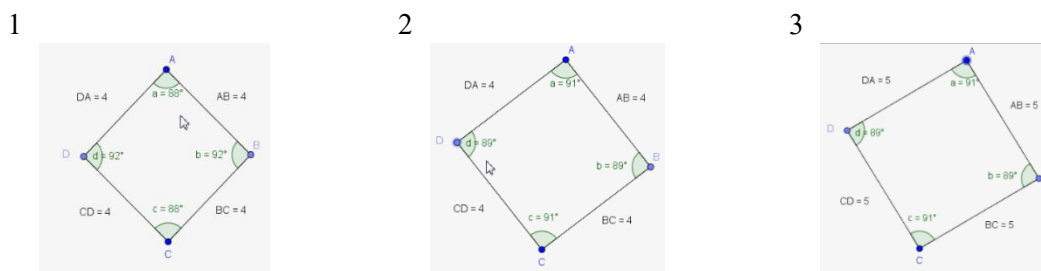


圖 4 小熙拖曳四邊等長之一般例至四個直角特例的動態歷程

(4) 以特定性質為目標：學生心中無臆測，只是將直角與等邊這些特定性質拖曳出，並非關注邊、角變化。如學生將平行四邊形拖曳為長方形時，只是想拖曳出直角，而非觀察多個圖形之邊、角性質後，發現圖形間變與不變之性質關係。與一般例拖曳至特例的拖曳想法和關注皆不同。

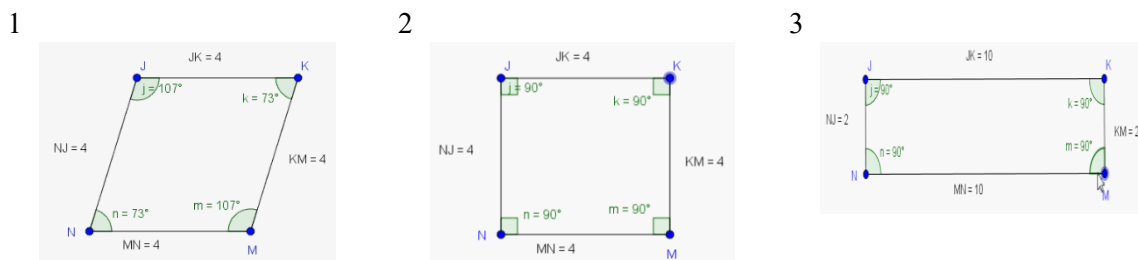


圖 5 小凡拖曳對邊平行之一般例至四個直角特例的動態歷程

在開放的拖曳設計中，小凡從平行四邊形拖曳出正方形，再拖曳出長方形，顯示小凡在拖曳時喜愛直角與等邊的特殊性質（如圖 5）。小凡在拖曳時心中並無臆測，只關注最後直角、等邊之結果，沒有觀察到整個拖曳歷程的變化，也無關注圖形間性質的變化與關聯，更未從中發現其性質之變與不變性。小凡只是將特定性質利用拖曳呈現，判別圖形時還是維持原有的性質認知，且這些性質認知還限制了小凡的拖曳行為，有時更在拖曳後的圖形觀察中，增添原本沒有的條件限制。顯示小凡對四邊形性質有一定認知，但無法憑藉拖曳行為觀察發現其中的關聯，也就無法從中發現四邊形包含關係。若學生能從觀察拖曳歷程產生臆測，並檢測其幾何性質間的關連性，以此進行包含關係之推論，也許能建構出四邊形包含關係之概念。

(5) 結合表格分析：學生藉由表格系統化彙整後，發現一開始未關注之邊、角性質。比如學生一開始拖曳時只關注邊長關係，藉由填表而關注到角度。

小凡將四邊等長但不具四直角的四邊形判別為正方形，將邊、角測量值等資料填入表格後，隨即發現正方形還需具有四直角，因此將答案改為菱形（如圖 6）。由此可知小凡一開始只關注邊長，直到回答表單中「四角是否為直角」時，才開始關注角。由上述分析顯示，經表格系統化的彙整，學生有機會發現未關注到的邊、角性質。但僅止於幫助學生發現未關注之邊、角性質，若學生對於四邊形定義理解錯誤時，亦無法靠表格釐清錯誤的定義理解。由圖 7 發現學生容易從表格中發現正方形為四邊等長，長方形為兩對邊相等（四邊不等長），卻無法從表格中發現四邊等長的性質也符合對邊等長的性質，因此將長方形與正方形分成不同的兩類。由此可知表格有助於分類，而非建構包含關係。由圖 6 小凡的回答中也可發現，因表格彙整讓小凡發現正方形與菱形的差異在於角度，因此將 90 度角從菱形中剔除。若學生無法接受四邊等長之四邊形無論角度為何皆為菱形，便無法正確理解菱形與正方形的包含關係。由上述發現，表格有助於分

類，但想以表格建立四邊形包含關係是非常困難的。

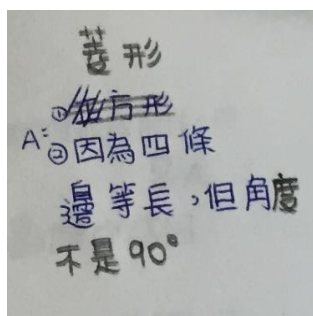


圖 6 小凡圖形判別與理由

五、將你移動 H、E 任一點時，所看到的圖形變化，填於下表中

圖形	EF 長度	FG 長度	GH 長度	HE 長度	角 e 度數	角 f 度數	角 g 度數	角 h 度數	四邊 是否 等長	四角 是否 直角	是何 種四 邊形
原圖	6	3	6	3	90°	90°	90°	90°	×	✓	長方形
拉動 第一 次	5	5	5	5	90°	90°	90°	90°	✓	✓	正方形
拉動 第二 次	4	5	4	5	90°	90°	90°	90°	×	✓	長方形

圖 7 小凡拖曳圖形邊角資料彙整表格

(6) 從一般例到特例：學生能關注邊、角性質，並嘗試拖曳出多樣化的四邊形，其中除了一般例外還須有特例。比如學生在四邊等長之一般例的拖曳檔案中，拖曳出一般例的菱形外，還需拖曳出特例的正方形才屬於此類的拖曳行為。學生若能從一般例拖曳出特例，又能觀察邊、角等性質，便有機會從拖曳歷程中觀察出圖形的變與不變。

小熙從平行四邊形拖曳到長方形的歷程中，一直關注著對邊等長的性質，最後又增加了直角的性質，拖曳出長方形(如圖 8)。由於小熙經歷從對邊等長的一般例拖曳到具有直角的特例，便有機會發現平行四邊形與長方形皆具有對邊等長之性質，在此性質之下，又因拖曳歷程中觀察到平行四邊形的角度可以多種，而長方形只能是直角，故判定平行四邊形範圍能涵蓋長方形。由此可知，若學生能在拖曳歷程中觀察出圖形的變與不變，並瞭解其背後幾何性質的變與不變，便能從性質關係中推論出四邊形包含關係。此類的學生最有機會能藉由動態幾何環境的幫助習得四邊形包含關係。

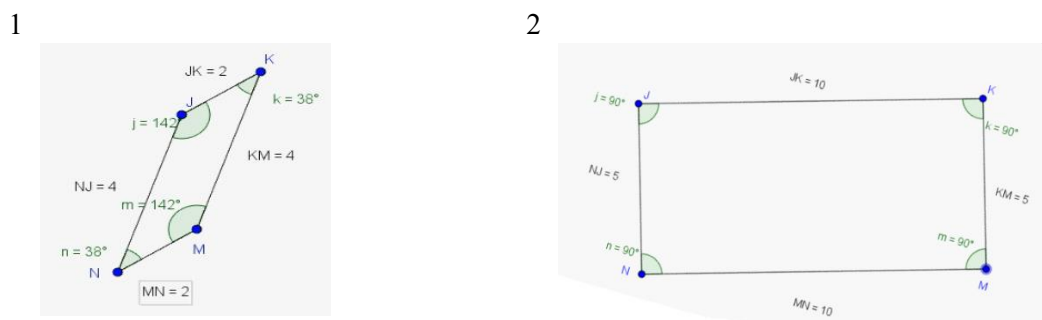


圖 8 小熙拖曳兩雙對邊平行之一般例至四個直角特例的動態歷程

由上述發現，此六大拖曳策略在動態幾何環境中所遇到的困難皆有不同。第一種拖曳策略的學生不相信拖曳檔案可窮盡，此類學生單靠動態幾何環境的幫助有限，還需搭配教學者的介入才能得到更多幫助。第二種拖曳策略的學生未關注邊、角性質，只是重現心中圖形，因此動態幾何環境所能提供的幫助是很少的。可先讓此類學生關注圖形之性質，才有機會推論其包含關係。第三種拖曳策略的學生已能關注邊、角性質，然受限於對四邊形性質之認知，且拖曳圖例不具多樣化，當四邊形定義理解錯誤或關注性質有所缺漏時，便不易拖曳出具認知衝突的圖例，也難發現缺漏之性質。若能讓學生拖曳出具認知衝突的圖例，再由拖曳驗證想法，便有機會釐清錯誤之定義理解，進而學習包含關係。第四種拖曳策略與第三種雷同，只是此類學生將最後結果放在直角、等邊的性質上，並非關注整個拖曳的歷程，容易將特例排除在一般例之外。第五種拖曳策略的學生搭配表格系統化彙整相關資料，能幫助其發現未關注的性質。若拖曳能力佳，便可利用拖曳確認心中臆測；若心中無想法，即使表格已彙整相關資料，還是無法讓學生關注到此性質。表格只能提供相關訊息，但想建立四邊形包含關係是非常困難的。第六種拖曳策略的學生最有機會從一般例至特例的拖曳歷程中觀察到圖形的變與不變，並瞭解拖曳背後幾何性質的變與不變，是最有機會學得四邊形包含關係。但對學生而言，想從觀察進而瞭解拖曳背後幾何性質的變與不變，是有認知挑戰的。

將上述三位學生的拖曳行為、想法與定義理解、包含關係的表現彙整成表 5。由此表可知學生在前測卷上的定義與判別圖形的理由不甚相同，顯示學生非以定義作為判別依據，而是依當下視覺所關注之性質為主，因此有時會增加條件限制，有時會有所遺漏，更有些會完全變動至與定義大相逕庭。

由表 5 也可發現：判別圖形的理由與判別包含關係使用的性質極為相似，說明學生所關注之性質大致沒有改變。也就是當學生一開始所關注圖形的特定邊、角性質與四邊形定義相符時，便能搭配有想法的拖曳，利用來回拖曳統整視覺化與測量值以確認心中臆測，這時動態幾何環境便能以操作性與具體視覺，鞏固並完整學生四邊形定義之理解。若學生在拖曳時所關注的性

質與四邊形定義不符時，反而會在拖曳多個例子後，產生錯誤或迷思。特別是學生若只以視覺化搭配典型心象，沒有歸納性質特徵作為判別依據。此時動態幾何環境對學生反而是阻礙，容易產生錯誤定義或迷思。若學生對拖曳沒有想法，或是無法拖曳出多樣化圖例並觀察，即使研究者要求學生拖曳出特例，學生也因沒有想法而無法掌握觀察重點，此時動態幾何環境也無法給予幫助。當學生喜愛拖曳出直角與等邊性質的圖時，發現其在拖曳過程中非觀察一連串的變化或各個圖形關係，也是動態幾何環境無法幫助學生理解四邊形定義與包含關係的原因之一。

我們分析動態幾何環境拖曳是否影響學生四種四邊形的定義。由表 5 可知在正方形定義理解表現上，皆不會因視覺或其他資訊產生變動，是四種四邊形中表現最穩固。在菱形定義理解表現上，拖曳後小凡增添了對角相等的性質；小熙改變定義為對邊相等。在長方形定義理解表現上，拖曳後小冠增添對邊等長的性質，小熙則將長方形與平行四邊形的定義混淆。由此可知，學生在定義理解時，會受視覺影響，可能經由視覺與多例的呈現，引出隱藏於心中的想法；也可能經由多例的彙整而歸納出錯誤的條件限制。平行四邊形定義理解表現上，在拖曳前後變動最大。小冠增添全部的角不能為九十度的條件限制，小凡完全改變其定義，顯示學生對於平行四邊形的定義理解表現最為不穩定。若學生在平行四邊形的定義理解上多了全部的角不能為九十度的條件限制，也就是將長方形與平行四邊形切割成不相關的兩個區塊，這樣的想法勢必影響學生對於四邊形包含關係之認知。

### 三、四種四邊形包含關係之分析

#### (一) 學生包含關係推理思維模式

我們嘗試從理論與學生實徵資料來架構學生包含關係推理的思維模式。依據(Piaget, 1971)所提出的同化(assimilation)與調適(accommodation)概念，也就是物件具備相同的特質而歸屬於同一類；不同特質時，則分屬於不同類。學生在理解四邊形包含關係的最初始想法應該是依據知覺到的性質來決定兩種四邊形的關係。Hershkowitz(1989)指出在分類不同幾何物件時，年紀小的學生傾向以典型心像或者是典型心像對應的圖形性質為分類依據。學生使用的性質通常都是從典型心像中獲得的，不一定是該圖形定義性質。模式一和模式二就是由上述的分類思維所得。模式三和模式四則是學生已經能夠知覺四邊形之間具備相同性質和不同性質。但思考性質與兩個四邊形關係的思維模式則是不同的。模式三是以交集的方式來思考兩種四邊形的關係。認為兩個四邊形都有的條件為兩集合的交集之處(如：正方形和長方形的交集為四角為直角)，集合沒有交集之處則是四邊形獨有的幾何性質(如：正方形四邊等長、長方形對邊等長)。模式四則是能進一步思考性質對應的一般例與特例之間的關連性，進而形成集合和子集合的包含關係。這些模式的建立主要是為了幫助研究者理解學生對於四邊形之間關係的推理思維為何，

同時也可以提供研究者比較學生在動態幾何環境拖曳圖形之前與之後，推理四邊形之間關係的思維模式是否有不同。

四種不同四邊形關係的推理思維模式如圖 9 所示。

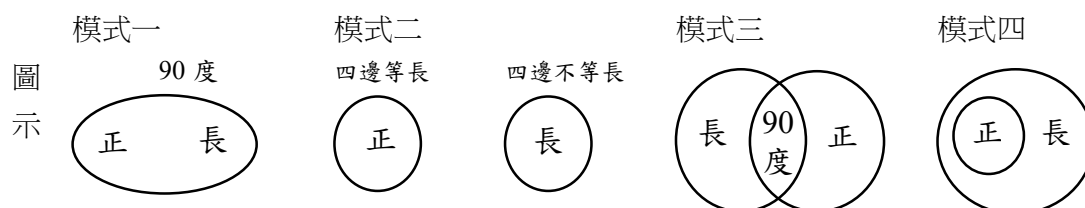


圖 9 包含概念之四個類別

模式一：學生以兩四邊形共有的幾何性質為理由，而認為兩四邊形是同一集合。如小冠認為長方形與平行四邊形皆符合對邊平行之性質，故長方形與平行四邊形是同一集合，判定長方形是平行四邊形的一種，平行四邊形是長方形的一種。

模式二：學生認為兩四邊形對應的幾何性質不同，而認為兩個四邊形是完全不同的類別。如小凡以是否具有直角作為區分兩集合之性質，在此性質下將長方形與平行四邊形分成兩個完全不同之集合，因此判定長方形不是平行四邊形的一種，平行四邊形不是長方形的一種。

模式三：學生同時知覺到兩種四邊形共有的幾何性質與不同的幾何性質，但他們以集合的觀點來思維共有與不同的幾何性質。因此，學生會將共有的幾何性質放置在交集部分，而不同的幾何性質則是放置在兩個集合未交集的區塊內。如小冠認為正方形與菱形皆符合四邊等長之性質，四邊等長是共同性質也是兩集合之交集，但菱形沒有直角，故正方形與菱形兩集合又各有不同之處。因此判定正方形不是菱形的一種，菱形不是正方形的一種，此兩集合是不相等的。

模式四：學生理解包含關係的集合意義。意思是兩集合中，其中一集合為另一集合之子集。學生能理解構成兩個集合包含關係的理由。因此，學生在包含關係中清楚指出特例是一般例，但一般例不是特例。如小熙判定長方形是平行四邊形的一種，因為長方形與平行四邊形皆符合對邊等長之性質，此性質便是建構兩集合關係的基礎元素，小熙也推論出在此條件下平行四邊形具有多種角度，而長方形的四直角便是此描述中的特例。

## (二) 四種特殊四邊形包含關係

### 1. 正方形與長方形包含關係之集合關係推理

由表 6 可知，小熙在拖曳前因長方形定義產生變動導致判別包含關係時，使用了不同類別進行推理。拖曳後使用模式四進行推理，以正方形符合長方形的條件，長方形不符合正方形的

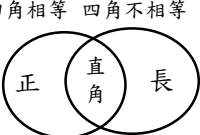
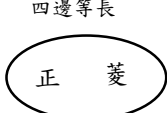


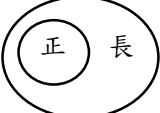

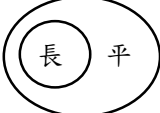
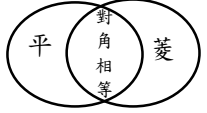
條件推論出正確的包含關係。由此可知，若小熙對於正方形與長方形定義理解皆能掌握，有機會能正確理解兩四邊形間的包含關係。

小冠在拖曳前與小凡同使用模式二進行推理，以四邊等長為原由，將正方形和長方形視為不同且完全沒有任何交集的集合。由此可知小冠在判別正方形與長方形的包含關係時，所使用的推理模式與分類概念相似。未考慮分類時的相容性與矛盾性，這可能是造成學習包含關係困難的原因之一。

小凡拖曳後使用「正方形拉長就是長方形，將長方形壓扁就是正方形」之拖曳描述當作依據，用模式一進行推理，視正方形和長方形為兩個完全相同的集合。由此可知，即使小凡對於正方形、長方形定義能正確描述，也無法正確理解正方形與長方形包含關係。

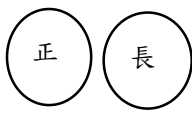
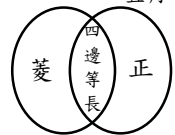
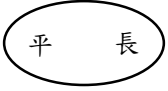
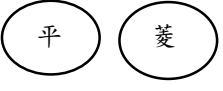
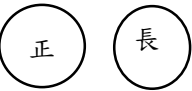
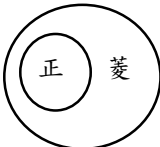
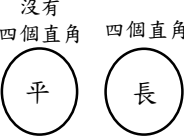
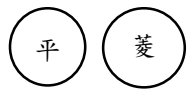
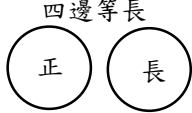
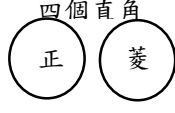
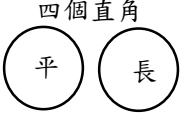
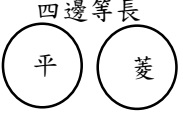




表 6

個案學生四種包含關係之分析

學生	包含關係	正方形與長方形	正方形與菱形	長方形與平行四邊形	菱形與平行四邊形
小熙	拖曳前	認為正方形是長方形的一種 不認為長方形是正方形的一種	認為正方形是菱形的一種 認為菱形是正方形的一種	認為長方形是平行四邊形的一種 不認為平行四邊形是長方形的一種	不認為菱形是平行四邊形的一種 不認為平行四邊形是菱形的一種
	推理概念	模式三 	模式一 	模式三 	模式二 
	拖曳後	認為正方形是長方形的一種 不認為長方形是正方形的一種	認為正方形是菱形的一種 認為菱形是正方形的一種	認為長方形是平行四邊形的一種 不認為平行四邊形是長方形的一種	沒有關係 沒有關係
	推理概念	模式四 	模式一 視覺形容 	模式四 	模式三 

(續下頁)

表 6 (續)

學生	包含關係	正方形與長方形	正方形與菱形	長方形與平行四邊形	菱形與平行四邊形
小 冠	拖曳前	不認為正方形是長方形的一種 不認為長方形是正方形的一種	不認為正方形是菱形的一種 不認為菱形是正方形的一種	認為長方形是平行四邊形的一種 認為平行四邊形是長方形的一種	不認為菱形是平行四邊形的一種 不認為平行四邊形是菱形的一種
	推理概念	模式二 四邊等長 四邊不等 	模式三 沒有直角 直角 	模式一 對邊平行 	模式二 四邊不等長 四邊等長 對邊平行 對邊不平行 
小 凡	拖曳後	不認為正方形是長方形的一種 不認為長方形是正方形的一種	認為正方形是菱形的一種 不認為菱形是正方形的一種	不認為長方形是平行四邊形的一種 不認為平行四邊形是長方形的一種	不認為菱形是平行四邊形的一種 不認為平行四邊形是菱形的一種
	推理概念	模式二 四邊等長 四邊不等長 	模式四 	模式二 沒有四個直角 四個直角 	模式二 對邊等長 沒有對邊等長 
小 凡	拖曳前	不認為正方形是長方形的一種 不認為長方形是正方形的一種	不認為正方形是菱形的一種 不認為菱形是正方形的一種	不認為長方形是平行四邊形的一種 不認為平行四邊形是長方形的一種	不認為菱形是平行四邊形的一種 不認為平行四邊形是菱形的一種
	推理概念	模式二 四邊等長 	模式二 四個直角 	模式二 四個直角 	模式二 四邊等長 
小 凡	拖曳後	認為正方形是長方形的一種 認為長方形是正方形的一種	認為正方形是菱形的一種 認為菱形是正方形的一種	認為長方形是平行四邊形的一種 認為平行四邊形是長方形的一種	認為菱形是平行四邊形的一種 認為平行四邊形是菱形的一種
	推理概念	模式一 視覺形容 	模式一 視覺形容 	模式一 視覺形容 	模式一 視覺形容 

## 2. 正方形與菱形包含關係之集合關係推理

小熙在拖曳使用模式一進行推理，以四邊等長為理由，將正方形和菱形視為兩個完全相同的集合；拖曳後則使用「轉個方向看」的視覺描述作為判別原由。由此可知在拖曳前，小熙可能將分類概念應用在包含關係的推理判別上，把符合特定性質的兩四邊形看作是同一類的集合。在拖曳後可能受到視覺的干擾，未以性質或定義作為判別依據，顯示動態幾何環境甚至有可能對其產生干擾，尤其對於四邊形定義理解不穩固的小熙更為明顯。

小冠在拖曳前使用模式三進行推理，因正方形與菱形皆有四邊等長的性質，故此兩四邊形的交集不是空集合。但只有正方形有四個直角，故此兩四邊形還是不相等，因此認為正方形不是菱形的一種，菱形不是正方形的一種；拖曳後使用模式四進行推理，認為正方形四邊等長，所以正方形是菱形的一種，但菱形有一些是不等長的，故菱形集合不僅包含正方形的集合，還多了不等長的部份。雖然小冠將鳶形誤認為菱形，但研究者只考慮學生的推理思維，故還是將此回答歸於模式四。拖曳後則對菱形定義產生變動，因而使用不同的集合關係進行推理，顯示學生的推理模式會隨著不同四邊形、不同的定義理解而有所變動。

小凡在拖曳前使用模式二進行推理，以是否具有四個直角為原由，將正方形和菱形視為兩個完全沒有任何交集的集合；拖曳後則認為正方形是菱形的一種，因為把角度改為四直角就是正方形。由此可知小凡將分類概念應用在包含關係推理判別上，把不符合特定特質的兩四邊形看作是不同類。拖曳後則以視覺作為判別理由，將拖曳過程以文字描述當作判別依據，顯示在動態環境下有時可能無法幫助學生理解兩四邊形間包含關係，甚至還對學生產生干擾。

## 3. 長方形與平行四邊形包含關係之集合關係推理

小熙拖曳前使用模式一、二進行推理，以對角相等的性質為條件把長方形與平行四邊形歸為同一集合，推理出長方形是平行四邊形的一種。以是否具有四個直角性質為條件把平行四邊形與長方形歸為不同集合，推理出平行四邊形不是長方形的一種。拖曳後使用模式四推理，以對邊等長為平行四邊形與長方形建立集合關係的主要集合建構的基礎元素，平行四邊形的角度可以多種，而「長方形只能為直角」是這個敘述的特例。小熙對於集合關係的推理是具有包含概念的，只是誤解「長方形是平行四邊形的一種」之意思，以範圍大小作為判別依據，認為平行四邊形能具有直角故能包含長方形，因此平行四邊形為長方形之一種，而長方形必為直角與平行四邊形不同，因此推論長方形不是平行四邊形的一種。

小冠在拖曳前使用模式一進行推理，以對邊平行的性質為條件，將長方形與平行四邊形視為完全相同的集合；拖曳後用模式二進行推理，以是否具有四個直角為原由，將兩四邊形視為兩個完全沒有任何交集的集合。由此可知小冠在判別包含關係時皆以分類概念進行。拖曳前找

出共同符合之特質，將長方形與平行四邊形分成同類；拖曳後將相異之性質當成分類依據，把長方形與平行四邊形當作為不同類。

小凡在拖曳前使用模式二進行推理，以是否具有四直角為原由，將長方形和平行四邊形視為兩個完全沒有任何交集的集合；拖曳後則認為長方形是平行四邊形的一種，因為將平行四邊形的角度拖曳為九十度就是長方形。由此可知小凡在拖曳前是利用分類概念，找出其相異之性質將長方形與平行四邊形分成不同類。在拖曳後則受到視覺影響，改以拖曳過程之經歷作為判別之依據。

#### 4. 菱形與平行四邊形包含關係之集合關係推理

拖曳前，小熙、小冠、小凡皆使用模式二進行推理，唯小熙以對角相等為由，小冠以是否具有對邊等長性質為條件，小凡則再加上對邊平行的條件，將菱形和平行四邊形視為兩個完全沒有任何交集的集合。

拖曳後，小熙對於菱形定義產生變動，認為菱形與平行四邊形皆對邊等長，又認為菱形對角不一定皆相等，與平行四邊形有相異之處，故判別為模式三推理；小冠則以是否具有對邊等長性質為條件把菱形與平行四邊形歸為不同集合。由於改變了對菱形定義的理解，誤把鳶形當作菱形，才使得其對於菱形與平行四邊形包含關係的判別理由產生變化；小凡以「把菱形轉過來再拉長就是平行四邊形」的拖曳描述為由，將兩四邊形視為同一集合。由此可知小凡在拖曳前以分類概念進行推理，在拖曳後受到視覺與動態幾何軟體經歷之影響，改以視覺化的描述當做判別菱形與平行四邊形包含關係之依據。

由上述可知，學生包含關係的概念發展不是全面性的，會因不同四邊形要建立的包含關係而受到影響。舉例說明：小熙雖然可以清楚的指出其中兩組四邊形的包含關係，但是另外兩組四邊形的包含關係則是未能藉由動態幾何環境而發展出來。雖然每位學生在四組四邊形包含關係的回答並不一致，但可從他們的答題中看出學生包含關係推理的特質。小熙在定義理解上容易受視覺影響，但對於包含關係的推理方式卻是三位學生中較具有包含概念的，也就是說小熙若能正確掌握四邊形定義，是極有可能學會包含關係。小冠在定義理解上較為穩固，對於包含關係的推理方式分為模式一與模式二，此兩類與分類概念相似。也許在國小進行的分類活動是不利於包含關係之學習。小凡在定義理解上也是較為穩固，在拖曳前使用類似分類概念的模式二推理。但在拖曳後卻受到視覺上的影響，在四種四邊形包含關係上皆以視覺描述作為判別理由。

此四種四邊形包含關係中，正方形與菱形的關鍵性質判別在於四邊等長與四個直角；正方形與長方形關鍵性質判別在於四邊等長與四個直角；長方形與平行四邊形的關鍵性質判別在於

兩雙對邊平行與四個直角；菱形與平行四邊形的關鍵性質判別在於四邊等長與兩雙對邊平行；發現並掌握這些關鍵性質是理解兩四邊形間包含關係的重要因素，但如何運用這些關鍵性質做包含關係的推論也是正確理解兩四邊形間包含關係的另一項重要因素。由上述分析發現，若學生能掌握各四邊形定義，皆能找到其關鍵性質，而此時無法正確理解兩四邊形間包含關係的重要因素為學生對於兩集合的概念。學生的舊經驗為分類，故學生利用找到某種特定性質做歸類，只分同一類與不同類，並無兩集合間關係的想法，更遑論此兩集合關係是否為包含、交集、不交集。因此若要能完全掌握兩四邊形間的包含關係，除了要理解四邊形定義外，還須掌握兩四邊形的關鍵性質，更需具有集合概念，才能理解此四種四邊形之包含關係。

## 伍、結論與討論

包含關係是數學系統結構理解的關鍵能力之一。從三位五年級學生個案分析發現；第一，學生四邊形定義易受圖形與所關注之邊、角性質影響，而產生定義理解的鬆動。在判別四邊形時，與動態幾何環境中拖曳以及包含關係判別所關注之性質皆相似，說明學生一開始關注之邊、角性質對四邊形包含關係學習影響甚鉅。另，動態幾何環境的拖曳也會改變學生對於四邊形的定義說明。第二、在動態幾何環境拖曳分析中，則是找到學生六種不同拖曳的認知行為和思維：(1) 認為拖曳無法窮盡各種圖形類型；(2) 關注圖形外觀的拖曳策略；(3) 微幅調度的拖曳策略；(4) 以特定性質為目標的拖曳策略；(5) 結合表格分析的拖曳策略；(6) 從一般例到特例的拖曳策略。不同的拖曳行為與思維代表學生對於動態幾何環境中圖形的關注重點以及對於拖曳帶來圖形改變的認知想法。就三個個案學生來說，除第六種的拖曳思維之外，其餘的五種拖曳策略無法成功讓他們建構出四邊形的包含關係。第三、從理論與實徵資料分析，我們區分出不同的四邊形關係思維模式。這些模式最大區別在於學生是用「分類」的思維來思考四邊形的關係，還是真正能夠理解兩個四邊形對應的集合和子集合關係。統整三位學生在四組四邊形關係判斷發現，學生在不同四邊形的包含關係思維並不一致，使用分類思維還是包含關係思維的想法也不甚一致。

許多研究者指出幾何定義學習的困難性，尤其是下定義與定義性質理解的差異性( de Villiers, 1986; Fujita, 2012; Fujita & Jones, 2007; Lin & Yang, 2002; Okazaki & Fujita, 2007)。當學生不瞭解幾何性質如何影響四邊形定義時，學生只是在知覺圖形上有哪些性質，並從性質的知覺來決定四邊形的定義為何。因此，雖然台灣數學課程綱要在國小階段安排四種四邊形的操作型定義教學，此先備學習經驗不足以支撐四邊形包含關係判定時的定義理解需求。尤其學生會以典型心像或者是典型心像對應的圖形性質來進行幾何關係判定時 (Hershkowitz, 1989)，其典型心像為主的概念心像無法幫助學生順利理解四邊形的包含關係。

雖然幾何圖形定義理解有其認知困難度，國外還是有許多研究嘗試以科技輔助來教導幼童理解幾何圖形的定義及圖形間的包含關係（Bartolini Bussi & Baccaglini-Frank, 2015; Kaur, 2015; Leung, 2008）。其中最常使用的科技媒介就是動態幾何環境。本研究分析學生在動態幾何環境各種不同認知行為，以及如何結合表格來理解四邊形的包含關係。研究結果顯示即使學生是有目的性的進行拖曳（如將平行四邊形拖曳成長方形），學生對於動態幾何環境中的圖形仍有不同關注的焦點，而不同關注點都有可能影響學生理解不同四邊形在形成包含關係的基本幾何性質，及一般例與特例的幾何性質間的關係。許多心理學研究指出幼童已具備包含關係的推理能力（Winer, 1980）。利用層次化的分類思維，可瞭解集合與集合之間的包含關係。本研究則是呈現不同四邊形之間的包含關係概念發展是屬於高認知需求活動。主要的原因有二：學生必須知道任何一個幾何性質均為各種不同變動條件之下所形成的不變性。比如說直角三角形，其兩股的邊長比可以為任意數值，但學生通常在記憶幾何性質時，傾向以典型心象來記憶性質。典型心象記憶性質會讓學生無法理解符合特定幾何性質集合的多樣性與變化性。因此，學生的性質學習無法支撐他們理解一般化與特殊化；學生在動態幾何環境中必須知道哪個性質是決定四邊形包含關係的一般性與特殊性。若無此幾何關注能力，動態幾何的拖曳行為只是讓學生無意識的進行圖形的改變；或者拖曳出自己心中想要完成的圖形心象。這樣的認知思維無助於幫助學生關注一般性與特殊性，進而無法發展出包含關係的推理能力。

Arzarello 等人（2002）的研究中點出拖曳的認知功能，且強調不同的拖曳行為會引發學生不同的認知學習。Arzarello 等人也強調在動態幾何環境中要訓練學生視覺圖形訊息與理論性質的整合。而本研究進一步論述在設定的前提條件之下，學生雖然有目的的觀察拖曳改變的圖形或性質。但不一定能夠順利的理解圖形本身一般例與特例之間的關係。學生必須注意拖曳造成的不變性的面向有好幾個。包括何者為兩個四邊形建構集合的基底（如：正方形和長方形的基底是四角為直角），長方形均為對邊等長；正方形均為四邊等長。之後再進一步從一般例到特例的觀點來建構兩個四邊形的包含關係。這整個拖曳歷程，涉及幾何性質的觀察與圖形改變對應幾何性質的意義，以及最後一般例與特例的對應關係。這個歷程在之前研究中並未被清楚的闡述。但其對於以動態幾何軟體進行包含關係的教學為重要關鍵。

包含關係思維與簡單分類思維是不一樣的。學生如何從同化和調適的區別性觀點，逐漸發現不同四邊形之間有共同和不同的幾何性質，且能思考這些性質之間的關係，仍須進一步幾何教學的設計。國小階段教科書經常使用的分類教學法（如將不同立體圖形分為柱體和錐體），必須思考除了幫助學生理解幾何概念與其概念多樣化的圖形表徵，如何建構更上一層包含關係的思維還需要進一步的研究討論。尤其從交集的思考觀點來評估四邊形之間的關係如何轉換到包含關係，這中間的推理思維轉換需要後續的研究探討。

## 參考文獻

- 李源順（主編）（2019）。國民小學數學（三版，第八冊，四下）。臺南：南一。【Li, Yuan-Shun (Ed.) (2019). *Elementary school mathematics textbook* (3rd ed., Vol. 8, 4th year 2nd semester). Tainan, Taiwan: Nani. (in Chinese)】
- 范力分（2017）。國小五年級學生四邊形概念與作圖之研究（未出版之碩士論文），國立清華大學，新竹市。【Fan, Li-Fen (2017). *A study of fifth-grade students' concepts and drawings of quadrilaterals* (Unpublished master's thesis). National Tsing Hua University, Hsinchu. (in Chinese)】
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校：數學領域。臺北：作者。【Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education curriculum national primary and secondary schools and ordinary senior secondary schools: Mathematics*. Taipei: Author. (in Chinese)】
- 楊瑞智（主編）（2019）。國民小學數學（二版，第八冊，四下）。新北：康軒。【Yang, Jui-Chih (Ed.) (2019). *Elementary school mathematics textbook* (2nd ed., Vol. 8, 4th year 2nd semester). New Taipei, Taiwan: Kang Hsuan. (in Chinese)】
- 蔡淑君（2017）。探討五年級學童在動態幾何環境下對四邊形包含關係之認知（未出版之碩士論文），國立清華大學，新竹市。【Tsai, Shu-Ghun (2017). *A study of fifth grade students' conceptions of inclusive relations of quadrilaterals in dynamic geometric environment* (Unpublished master's thesis). National Tsing Hua University, Hsinchu. (in Chinese)】
- 鄭英豪、陳建誠、許慧玉（2017）。國中生在動態幾何軟體輔助下臆測幾何性質之研究。臺灣數學教育期刊，4（1），1-34。doi: 10.6278/tjme.20170317.001【Cheng, Y. H., & Chen, J. C., & Hsu, H. Y. (2017). Junior high school students conjecture geometric properties in a dynamic geometry software environment. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 4(1), 1-34. doi: 10.6278/tjme.20170317.001 (in Chinese)】
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM Mathematics Education*, 34(3), 66-72. doi: 10.1007/BF02655708
- Baccaglioni-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253. doi:10.1007/s10758-010-9169-3
- Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglioni-Frank, A. (2015). Geometry in early years: Sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 391-405. doi:10.1007/s11858-014-0636-5
- Birks, M., & Mills, J. (2011). *Grounded theory: A practical guide*. Los Angeles, CA: Sage.
- Carspecken, P. F., & Apple, M. W. (1992). Critical qualitative research: Theory, methodology, and practice. In M. D. LeCompte, W. L. Millroy, & J. Preissle (Eds.), *The handbook of qualitative research in education* (pp. 508-553). New York, NY: Academic Press.
- de Villiers, M. (1986). *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*. Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

- de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18. doi: 10.1080/02560049485310091
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. doi: 10.1007/BF01273689
- Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211. doi: 10.1080/0950069980201003
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.08.003
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20. doi:10.1080/14794800008520167
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on learning problems in mathematics*, 11(1-2), 61-76.
- Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: Prototypicality and inclusion. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 407-420. doi: 10.1007/s11858-014-0658-z
- Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 157-179). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/0-387-24040-3\_11
- Leung, I. K. C. (2008). Teaching and learning of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of SmartBoard. *ZDM Mathematics Education*, 40(6), 1007-1021. doi: 10.1007/s11858-008-0159-z
- Lin, F.-L., & Yang, K.-L. (2002). Defining a rectangle under a social and practical setting by two seventh graders. *ZDM Mathematics Education*, 34(1), 17-28. doi:10.1007/bf02655689
- Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 4, pp. 41-48). Seoul, Korea: PME.
- Piaget, J. (1971). *Science of education and the psychology of the child*. New York, NY: Viking Press.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. doi:10.1007/BF00305619
- Walcott, C., Mohr, D., & Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 30-40. doi: 10.1016/j.jmathb.2009.04.001
- Winer, G. A. (1980). Class-inclusion reasoning in children: *A review of the empirical literature*. *Child Development*, 51(2), 309-328. doi:10.2307/1129264